HAL
open science

Sur la répartition du noyau d'un entier

Olivier Robert, Gérald Tenenbaum

To cite this version:

Olivier Robert, Gérald Tenenbaum. Sur la répartition du noyau d'un entier. Indagationes Mathematicae, 2013, 24 (4), pp.802-914. 10.1016/j.indag.2013.07.007 . hal-01281342

HAL Id: hal-01281342

https://hal.science/hal-01281342v1

Submitted on 3 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Indagationes Math.
24 (2013), 802-914

Sur la répartition du noyau d'un entier

Olivier Robert & Gérald Tenenbaum

À la mémoire de Nicolaas Govert de Bruijn,
pour la lumière, l'élégance et le partage.

Abstract. We investigate the asymptotic behaviour of the number $N(x,y)$ of those integers $n \leqslant x$ with squarefree kernel $k(n) \leqslant y$. Using a double saddle-point method, we obtain an asymptotic formula with remainder that holds, for any given $\varepsilon > 0$, uniformly in the domain $y > \mathrm{e}^{(\log_2 x)^{3+\varepsilon}}$. This depends on the saddle-point parameters, defined as the solutions of a transcendental system and for which explicit estimates are provided. This result is in turn exploited to obtaining various explicit estimates for $N(x,y)$. For instance, writing

$$F(t) := \frac{6}{\pi^2} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\min(1, \mathrm{e}^t/m)}{\prod_{p|m}(p+1)} \qquad (t \geqslant 0),$$

and $\mathcal{Y}_x := \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\sqrt{2\log x}(\log_2 x)^{3/2}}$, $M_x := \sqrt{2\log x \log_2 x}\,\log_3 x$ where $\log_k$ stands for the k-th iterated logarithm, we show that

$$N(x,y) \sim yF(v) \Leftrightarrow y > \mathcal{Y}_x \mathrm{e}^{-3M_x/8} \mathrm{e}^{\psi_x \sqrt{\log x \log_2 x}} \qquad (v := \log(x/y))$$

for some function $\psi_x \to \infty$. We also define an explicit function $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x,y)$ such that, as $x \to \infty$,

$$N(x,y) \sim yF(v)\mathrm{e}^{-\{1+o(1)\}\mathcal{K}} \quad (x \geqslant y \geqslant 2).$$

More precise formulae describe quantitatively the transition phase between the two behaviours

$$N(x,y) \sim yF(v) \text{ and } N(x,y) \sim yF(v)^{o(1)} \qquad (x \to \infty),$$

the latter occurring if and only if $\log y = o\big(\sqrt{\log x \log_2 x}\big)$.

Other consequences of the main formulae are : (i) the exact determination of the size of the factor lost by application of a Rankin type bound ; (ii) the derivation of precise formulae for the local behaviour of $N(x,y)$ with respect to both variables, e.g.

$$(\forall b > 1) \qquad N(x,2y) \sim 2^b N(x,y) \Leftrightarrow \log y = (\log x)^{1/(b+1)+o(1)};$$

(iii) the complete solution of a problem of Erdős and de Bruijn related to the sum

$$K(x) := \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{k(n)};$$

and (iv) a new, refined, and heuristically optimal, form of the *abc* conjecture. This last application is detailed in a forthcoming work in collaboration with C.L. Stewart.

Classification AMS : principale 11N25, secondaires 11D99, 11N56.

Sommaire

1 Motivation et présentation qualitative des résultats ... 3
2 Méthodologie et notations ... 6
3 Résultats ... 8
3.1 ***Évaluation implicite de*** $N(x,y)$ ... 8
3.2 ***Évaluations explicites de*** $N(x,y)$ ... 10
3.3 ***Évaluation des paramètres du col*** ... 13
4 Applications ... 15
4.1 ***Comparaison avec la majoration de Rankin*** ... 15
4.2 ***Comportement local*** ... 15
4.3 ***Étude de*** $K(x)$ ***et d'autres quantités liées au noyau d'un entier*** ... 16
4.4 ***Nouvelle formulation de la conjecture*** abc ... 17
5 Estimations préliminaires ... 18
5.1 ***Les fonctions*** J_k ... 18
5.2 ***Autour de la fonction*** Γ ***d'Euler*** ... 21
5.3 ***Sommes sur les nombres premiers*** ... 23
5.4 ***Une famille d'intégrales*** ... 27
5.5 ***Une famille de séries*** ... 35
5.6 ***Étude asymptotique de*** $f(\sigma,\kappa)$ ... 38
5.7 ***Dérivées secondes*** ... 39
5.8 ***Prolongement holomorphe de*** $f(\sigma,\kappa)$ ... 43
6 Les paramètres du col ... 45
6.1 ***Existence et unicité*** ... 45
6.2 ***Ordres de grandeur*** ... 47
6.3 ***Étude asymptotique de*** σ_v ... 50
6.4 ***Formules asymptotiques pour les paramètres du col*** ... 54
6.5 ***Preuve du Théorème 3.5*** ... 68
7 Préparation à l'emploi de la méthode du col ... 68
8 Étude de $F(v)$ **par la méthode du col** ... 72
8.1 ***Série génératrice*** ... 72
8.2 ***Formule asymptotique*** ... 74
8.3 ***Développement asymptotique*** ... 75
8.4 ***Comportement local*** ... 76
9 Nouvelle estimation de la hessienne ... 78
10 Zone sur-critique : méthode élémentaire ... 81
11 Estimations de $N(x,y)$ **par la méthode du col** ... 83
11.1 ***Majorations de*** $|\mathscr{F}(\alpha+i\tau,\beta+it)|$ ... 83
11.2 ***Formule de Perron sur les intervalles courts*** ... 84
11.3 ***Intégrales gaussiennes*** ... 85
11.4 ***Zone sous-critique : méthode du col directe*** ... 86
11.5 ***Zone critique : méthode du col indirecte*** ... 88
12 Preuves des Théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3 ... 98
12.1 ***Preuve du Théorème 3.1*** ... 98
12.2 ***Preuve du Théorème 3.2*** ... 100
12.3 ***Preuve du Théorème 3.3*** ... 100
13 Comportement local de $N(x,y)$ ... 104
13.1 ***Zone sur-critique*** ... 104
13.2 ***Zone sous-critique*** ... 104
13.3 ***Zone critique*** ... 107
13.4 ***Preuve du Théorème 4.1*** ... 111
13.5 ***Preuve du Corollaire 4.2*** ... 111
14 Étude de $K(x)$ **et détermination du reste optimal dans la conjecture d'Erdős** ... 112
14.1 ***Développement asymptotique : preuve du Théorème 4.3*** ... 112
14.2 ***Formule asymptotique pour*** $K_2(x)/K_1(x)$ ... 115

1. Motivation et présentation qualitative des résultats

Désignons par $k(n) := \prod_{p|n} p$ le noyau sans facteur carré d'un entier naturel n.[1] La fonction $n \mapsto k(n)$ est l'une des plus naturelles parmi les fonctions multiplicatives non triviales. Elle intervient génériquement dans les problèmes de crible et dans des questions arithmétiques aussi diverses que :

- la conjecture d'Artin [33] ;
- le problème des diviseurs de Dirichlet [15] ;
- la représentation des nombres premiers par un système de formes quadratiques [20] ;
- la taille des coefficients de formes modulaires [21] ;
- la logique mathématique[2] [22] ;
- Le problème des nombres parfaits [17] ;
- Le problème du zéro de Siegel pour les fonctions L de Dirichlet [12] ;
- la conjecture *abc* de Masser et Oesterlé et celle de Szpiro [19].

D'abord seul [3], puis en collaboration avec van Lint [6], de Bruijn s'est également intéressé à cette fonction, mais par une voie totalement différente. Il s'agissait de répondre à une question d'Erdős relative à la fonction $\Psi_m(x)$, égale au nombre des entiers n n'excédant pas x et dont tous les facteurs premiers divisent m, soit encore

$$\Psi_m(x) := \sum_{n\leqslant x,\, k(n)|m} 1. \tag{1·1}$$

La nature asymptotique de $\Psi_m(x)$ constitue depuis longtemps une source de curiosité pour les arithméticiens. La conjecture de Syracuse,[3] par exemple, est clairement liée aux variations de $\Psi_6(x)$ — voir notamment [27]. Un remarquable résultat de Tijdeman [30], [31] stipule que, pour m fixé et y assez grand, l'inégalité $\Psi_m(y) > \Psi_m(x)$ implique $y > x\big\{1+1/(\log x)^{C_m}\big\}$ et est impliquée par $y > x\big\{1+1/(\log x)^{D_m}\big\}$, où C_m et D_m sont des constantes positives convenables.

Posée en 1960 dans une lettre à de Bruijn, la question d'Erdős consistait à évaluer

$$K_1(x) := \sum_{m\leqslant x} \Psi_m(x). \tag{1·2}$$

Or, une simple interversion de sommations montre que

$$K_1(x) = \sum_{n\leqslant x} \sum_{\substack{m\leqslant x\\ k(n)|m}} 1 = \sum_{n\leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{k(n)} \right\rfloor = xK(x) + O(x), \quad \text{avec} \quad K(x) := \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{k(n)}\cdot \tag{1·3}$$

Confirmant une conjecture d'Erdős, de Bruijn [3] a ainsi établi que

$$K(x) = \mathrm{e}^{\{1+o(1)\}\sqrt{8\log x/\log_2 x}} \quad (x\to\infty).^{(4)} \tag{1·4}$$

1. Ici et dans la suite nous réservons la lettre p pour désigner un nombre premier.
2. Le problème d'Erdős–Woods, consistant à décider s'il existe un entier N tel que $k(a+j) = k(b+j)$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$ implique $a = b$ pour tous entiers a, b, est en effet équivalent à une conjecture de J. Robinson sur la constructibilité de l'arithmétique par les fonctions de coprimarité et successeur.
3. Également appelée conjecture de Collatz, de Kakutani, ou encore d'Ulam.
4. Ici et dans la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

Cependant, la méthode employée, reposant sur un théorème taubérien de Hardy & Ramanujan [13] via l'étude de la série de Dirichlet $\sum_n 1/\{k(n)n^\sigma\}$ lorsque $\sigma \to 0+$, est loin de fournir une formule asymptotique. Dès l'introduction de son article, de Bruijn remarque qu'elle ne permet pas de distinguer $K_1(x)$ de

$$K_2(x) := \sum_{n\leqslant x} \frac{n}{k(n)} = \sum_{m\leqslant x} \Big\{\Psi_m(x) - \Psi_m(m-1)\Big\}. \tag{1·5}$$

Rebondissant sur cette observation, Erdős a immédiatement conjecturé que

$$K_2(x) = o\big(K_1(x)\big) \qquad (x \to \infty), \tag{1·6}$$

ce que de Bruijn et van Lint ont établi l'année suivante [6].

Alors que la répartition des entiers y-friables — autrement dit dont le plus grand facteur premier $P^+(n)$ n'excède pas y — fait l'objet d'une abondante littérature depuis les articles fondateurs dus à de Bruijn [2], [4], l'étude de la répartition des entiers à petit noyau — hasardons la dénomination d'entiers *nucléaires* — est confinée à de très rares travaux. Une explication de ce phénomène réside sans doute dans le fait que la fonction indicatrice des entiers n tels que $P^+(n) \leqslant y$ est multiplicative alors que ce n'est pas le cas pour la condition $k(n) \leqslant y$. Ainsi qu'il a été signalé par de Bruijn et van Lint [7], cela induit une complication significative des calculs, qui reflètent la nature des singularités des séries de Dirichlet en cause.

La fonction de deux variables

$$N(x,y) := \sum_{\substack{n\leqslant x\\ k(n)\leqslant y}} 1 \qquad (2 \leqslant y \leqslant x) \tag{1·7}$$

recèle toute l'information relative à la répartition des nombres $k(n)$ et permet en principe d'exprimer toute quantité liée à ce problème. Ainsi, nous avons, par exemple,

$$K(x) = \int_1^\infty \frac{N(x,y)}{y^2}\,\mathrm{d}y, \quad K_2(x) = xK(x) - \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^2}\int_1^x N(t,y)\,\mathrm{d}t \qquad (x \geqslant 1).$$

Dans ce travail, notre objectif principal consiste à fournir, dans un domaine aussi vaste que possible, des formules asymptotiques pour $N(x,y)$. Outre les applications directes à des problèmes arithmétiques variés, cela permet de donner une base solide aux conjectures liées à ce problème : il suffit de supposer que le noyau des entiers considérés est réparti statistiquement selon la loi décrite par $N(x,y)$ — voir notamment le paragraphe 4.4 pour le cas de la conjecture *abc*.

La seule étude antérieure dévolue à ce problème est due à Squalli [25], dans une thèse dirigée par le second auteur. Posons

$$\psi(n) := \prod_{p|n}(p+1) \qquad (n \geqslant 1). \tag{1·8}$$

Guidé par le théorème d'Erdős & Wintner [11], qui implique

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ k(n)/n\leqslant \mathrm{e}^{-t}}} 1 \sim \big\{1-a(t)\big\}x \qquad (t>0,\, x\to\infty),$$

avec $a(t)=(6/\pi^2)\sum_{m\leqslant \mathrm{e}^t} 1/\{m\psi(m)\}$ $(t\in\mathbb{R})$, et notant

$$F(t) := 1+\int_0^t \mathrm{e}^u\big\{1-a(u)\big\}\,\mathrm{d}u = \frac{6}{\pi^2}\sum_{m\geqslant 1}\frac{\min(1,\mathrm{e}^t/m)}{\psi(m)} \qquad (t\geqslant 0), \tag{1·9}$$

Squalli montre que $yF(v)$ est une bonne approximation de $N(x,y)$ pour les « grandes » valeurs de y, avec la notation

$$v := \log(x/y). \tag{1·10}$$

Pour la simplicité typographique de certains termes d'erreur, nous notons également

$$\mathrm{v} := v+2. \tag{1·11}$$

Plus précisément, Squalli établit élémentairement, pour tout $\varepsilon>0$, l'estimation

$$N(x,y) = yF(v)^{1+O(1/\log \mathrm{v})} \qquad \big(x\geqslant 16,\, \mathrm{e}^{(\log x)^{1/2+\varepsilon}}\leqslant y\leqslant x\big),$$

et, par voie analytique, la formule asymptotique

$$N(x,y) = yF(v)\bigg\{1+O\bigg(\sqrt{\frac{\log \mathrm{v}}{\log x}}\bigg)\bigg\} \qquad \big(x\geqslant 16,\, \mathrm{e}^{(\log x)^{3/4+\varepsilon}}\leqslant y\leqslant x\big). \tag{1·12}$$

Il fournit également un développement asymptotique pour $\log K(x)$, avec la notation (1·3).

Au Théorème 3.1 *infra*, nous obtenons une formule asymptotique pour $N(x,y)$, valable dans un vaste domaine, analogue au domaine H_ε apparaissant dans l'étude des entiers friables — cf. par exemple [29], chap. III.5. Le terme principal s'exprime en fonction des paramètres du col de la représentation intégrale de Perron en dimension deux. Grâce aux estimations de ces paramètres établies au Théorème 3.5, ce résultat, de nature implicite et caractéristique de la méthode du col, nous permet en particulier :

(i) d'évaluer, en (4·1), le rapport de $N(x,y)$ à sa majoration de Rankin ;

(ii) de fournir, au Théorème 3.2, des formules asymptotiques intrinsèques pour $N(x,y)$ dans un grand sous-domaine ;

(iii) de déterminer exactement, au Corollaire 3.4, le domaine de validité de la relation asymptotique $N(x,y) \sim yF(v)$;

(iv) de décrire précisément la transition de phase — voir notamment (3·24) *infra* — ;

(v) de donner, au Théorème 3.3, des évaluations asymptotiques uniformes dans l'ensemble du domaine $x \geqslant y \geqslant 2$ pour $\log\{N(x,y)/y\}$;

(vi) de décrire, toujours uniformément dans de très vastes domaines en (x,y), le comportement local de $N(x,y)$ relativement à chacune des variables — cf. le Théorème 4.1 et les Propositions 13.1, 13.2, 13.2 — ;

(vii) de donner des formules et des développements asymptotiques explicites pour des quantités liées à la répartition du noyau, notamment $K(x)$, $K_1(x)$ et $K_2(x)$ — cf. (4·10), (14·6), (14·14) et (14·15) *infra* —, ce qui fournit, au Théorème 4.4, une évaluation explicite très précise du rapport $K_2(x)/K_1(x)$ dans le problème d'Erdős (1·6) ;

(viii) de formuler une nouvelle version, plus précise et heuristiquement optimale, de la conjecture *abc* — voir le paragraphe 4.4 et, pour plus de détails, [23].

2. Méthodologie et notations

La série de Dirichlet de deux variables associée à la fonction de comptage $N(x,y)$ est

$$\mathscr{F}(s,z) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{k(n)^z n^s} = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{p^z(p^s-1)}\Big), \tag{2·1}$$

initialement définie pour $\Re e\, s > 0$, $\Re e\,(s+z) > 1$.

Notre approche consiste à évaluer l'intégrale de Perron bidimensionnelle représentant $N(x,y)$ par la méthode du col. Cela présuppose l'existence d'un unique col réel pour l'intégrande. Nous établissons en effet au paragraphe 6.1 que, dans la majoration de type Rankin

$$N(x,y) \leqslant \inf_{\substack{\sigma>0\\ \kappa+\sigma>1}} x^\sigma y^\kappa \mathscr{F}(\sigma,\kappa) \qquad (x \geqslant y \geqslant 1),$$

la borne inférieure est atteinte, dès que $2 \leqslant y < x$, en un point unique (σ^*,κ^*), qui est donc le col réel de la fonction $(s,z) \mapsto x^s y^z \mathscr{F}(s,z)$, solution du système

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_p \frac{\log p}{1+p^\kappa(p^\sigma-1)} = \log y \\ \displaystyle\sum_p \frac{\log p}{(p^\sigma-1)\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}} = v \end{cases} \tag{2·2}$$

sous les conditions $\sigma > 0$, $\kappa + \sigma > 1$.

Lorsque le rapport x/y est petit, les paramètres σ^* et κ^* sont peu exploitables. Cela nous amène à poser, ici et dans tout l'article,

$$(\alpha,\beta) := \begin{cases} (\sigma^*,\kappa^*) & \text{si } 2 \leqslant y \leqslant x/\mathrm{e}^6, \\ (\frac12, \frac12 + 1/\log y) & \text{si } \max(2,y) \leqslant x < y\mathrm{e}^6. \end{cases} \tag{2·3}$$

Le choix de la valeur $\frac12$ est purement pragmatique : il permet d'étendre le domaine de validité de certaines estimations, par exemple (4·1), qui mesure le rapport de $N(x,y)$ à sa majoration de Rankin.

L'approximation $yF(v)$ de $N(x,y)$ apparaissant en (1·12) relève d'une technique similaire mais en une seule variable. Une application immédiate de la formule d'inversion de Laplace (cf. Lemme 8.1 *infra*) implique en effet

$$F(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma+i\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{sv}\,\mathscr{G}(s)}{s(1-s)}\,\mathrm{d}s \qquad (0<\sigma<1), \tag{2·4}$$

où l'on a posé

$$\mathscr{G}(s) := \prod_p \Big(1+\frac{1-p^{s-1}}{p(p^s-1)}\Big) \qquad (\sigma := \Re e\,(s)>0). \tag{2·5}$$

Il est à noter que $\mathscr{G}(s) = \text{Rés}\,\big(\mathscr{F}(s,z); z=1-s\big)$ — cf. la remarque suivant (11·43) *infra*.

Notant

$$g(\sigma) := \log \mathscr{G}(\sigma) \qquad (\sigma>0), \tag{2·6}$$

il est facile de montrer que, pour tout $v>0$, l'équation $g'(\sigma)+v=0$ possède une solution unique $\sigma=\sigma_v$, de sorte que

$$\mathrm{e}^{v\sigma_v}\mathscr{G}(\sigma_v) = \min_{\sigma>0}\mathrm{e}^{\sigma v}\mathscr{G}(\sigma). \tag{2·7}$$

Pour des raisons de commodités techniques, nous redéfinissons

$$\sigma_v := \tfrac12 \qquad (0\leqslant v<6). \tag{2·8}$$

Le comportement asymptotique de σ_v fait l'objet du paragraphe 6.3 *infra*. Nous montrons notamment que, pour tout entier $K\geqslant 1$,

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{2}{v\log v}}\Big\{1+\sum_{1\leqslant k\leqslant K}\frac{P_k(\log_2 v)}{(\log v)^k}+O_K\Big(\frac{(\log_2 v)^{K+1}}{(\log v)^{K+1}}\Big)\Big\} \quad (v\geqslant 3), \tag{2·9}$$

où P_k est un polynôme de degré au plus k. Ainsi,

$$P_1(z)=\tfrac12(z-\log 2), \quad P_2(z)=\tfrac38 z^2-(\tfrac34\log 2+\tfrac12)z+\tfrac12\log 2+\tfrac38(\log 2)^2+\tfrac23\pi^2. \tag{2·10}$$

Une application standard de la méthode du col — cf. Théorème 8.6 et formule (8·4) *infra* — fournit alors, lorsque $v\to\infty$,

$$\begin{aligned} F(v) &= \Big\{1+O\Big(\sqrt{\frac{\log v}{v}}\Big)\Big\}\frac{\mathrm{e}^{v\sigma_v}\mathscr{G}(\sigma_v)}{\sigma_v\sqrt{2\pi g''(\sigma_v)}} \\ &= \Big\{1+O\Big(\frac{\log_2 v}{\log v}\Big)\Big\}\frac{\mathrm{e}^{v\sigma_v}\mathscr{G}(\sigma_v)}{2\sqrt{\pi}}\Big(\frac{\log v}{2v}\Big)^{1/4}, \end{aligned} \tag{2·11}$$

des estimations précédemment établies dans [25] selon une approche différente.

Il est aisé de déduire de (2·11) et (2·9) l'existence d'une suite de polynômes $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ vérifiant $\deg Q_j\leqslant j$, telle que l'on ait pour chaque entier $N\geqslant 1$,

$$F(v) = \exp\Big\{\sqrt{\frac{8v}{\log v}}\Big(1+\sum_{1\leqslant j\leqslant N}\frac{Q_j(\log_2 v)}{(\log v)^j}+O_N\Big(\Big\{\frac{\log_2 v}{\log v}\Big\}^{N+1}\Big)\Big)\Big\} \quad (v\geqslant 3). \tag{2·12}$$

En particulier, $Q_1(z)=P_1(z)+1$, $Q_2(z)=P_2(z)+3P_1(z)+2$. Nous donnons les détails au paragraphe 8.3.

3. Résultats

3·1. Évaluation implicite de $N(x,y)$

La fonction $(s,z)\mapsto \mathscr{F}(s,z)$ est holomorphe dans le domaine

$$\{(s,z)\in\mathbb{C}\colon \Re e\,(s)>0,\ \Re e\,(s+z)>1\}.$$

La formule de Perron permet donc d'écrire

$$N(x,y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha+i\mathbb{R}}\int_{\beta+i\mathbb{R}}\mathscr{F}(s,z)\frac{x^s y^z}{sz}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z\quad (x,y\in\mathbb{R}^+\smallsetminus\mathbb{N},\ 2\leqslant y<x). \tag{3·1}$$

La mise en œuvre de la méthode du col nécessite d'établir que l'intégrale précédente est dominée par un voisinage convenable du col (α,β) défini plus haut. Posons

$$f(\sigma,\kappa):=\log\mathscr{F}(\sigma,\kappa)\quad(\sigma>0,\ \kappa+\sigma>1). \tag{3·2}$$

Le résultat fait classiquement intervenir la hessienne

$$\delta(\sigma,\kappa):=f''_{20}(\sigma,\kappa)f''_{02}(\sigma,\kappa)-f''_{11}(\sigma,\kappa)^2\quad(\sigma>0,\ \kappa+\sigma>1), \tag{3·3}$$

où, ici et dans la suite, nous notons, pour la simplicité typographique,

$$f^{(\ell)}_{jk}(\sigma,\kappa):=\frac{\partial^\ell f(\sigma,\kappa)}{\partial\sigma^j\partial\kappa^k}\qquad(j+k=\ell).$$

Dans toute zone où la méthode de col est pertinente, l'estimation obtenue est de la forme

$$N(x,y)\sim r(x,y)\frac{x^\alpha y^\beta\mathscr{F}(\alpha,\beta)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta(\alpha,\beta)}}\qquad(x\to\infty), \tag{3·4}$$

où $r(x,y)\asymp 1$. Avec la terminologie introduite dans [28], nous pouvons préciser cette assertion. Lorsque la méthode du col s'applique de manière standard (méthode « directe ») nous avons

$$r(x,y)=1+o(1)$$

dès que les paramètres tendent vers l'infini. Cependant, nous exhiberons des sous-domaines (correspondant essentiellement aux « grandes » valeurs de y) pour lesquels, bien que le choix optimal des abscisses d'intégration conduise à une estimation asymptotique, l'intégrale (3·1) n'est pas dominée par un voisinage infinitésimal du col. Cela correspond au champ de la méthode « indirecte », et se traduit par l'existence d'une limite différente de l'unité pour $r(x,y)$: voir le Théorème 3.1 *infra*.

Nous sommes à présent en mesure de décrire nos estimations de type (3·4). Nous conservons dans toute la suite les notations (1·9), (1·10) et (2·7). Nous introduisons également la quantité

$$\lambda:=\alpha+\beta-1 \tag{3·5}$$

qui intervient naturellement dans les résultats qui suivent.

Notant classiquement Γ la fonction Gamma d'Euler, nous posons

$$D(u) := \Gamma'(u)/\Gamma(u) \qquad (u > 0), \tag{3·6}$$

$$\gamma(u) := \frac{2\pi}{\Gamma(u)} \mathrm{e}^{uD(u) - \exp D(u)} \qquad (u > 0), \tag{3·7}$$

$$\Phi(u) := \gamma(u)\sqrt{\frac{D'(u)}{2\pi}} = \frac{\gamma(u)\sqrt{\Gamma(u)\Gamma''(u) - \Gamma'(u)^2}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(u)}. \tag{3·8}$$

Nous montrons au paragraphe 5.2.1 que

$$\Phi(u) \asymp 1 \quad (u > 0), \quad \Phi(u) = \begin{cases} 1 + O(1/u) & (u \geqslant 1), \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}}\big\{1 + O(u)\big\} & (0 < u \leqslant 1). \end{cases} \tag{3·9}$$

Ici et dans la suite nous utilisons la notation $a \asymp b$ pour signifier que $a \ll b$ et $b \ll a$ ont simultanément lieu.

Nous obtenons le résultat suivant où l'on note

$$E^* := \frac{\log_2 x}{(\log y)^{1/2-\varepsilon}} + \frac{(\log_2 x)^{5/6}}{(\log x)^{1/6}} + \sqrt{\frac{\log \mathrm{v}}{\mathrm{v}}}. \tag{3·10}$$

Nous observons que, pour $\varepsilon > 0$ et dans le domaine

$$\mathscr{D}_\varepsilon := \big\{(x, y) : x \geqslant 16,\ \mathrm{e}^{(\log_2 x)^{3+\varepsilon}} \leqslant y \leqslant x\big\}, \tag{3·11}$$

nous avons $E^* \ll \sqrt{(\log \mathrm{v})/\mathrm{v}} + (\log_2 x)^{-1/2+3\varepsilon}$.

Théorème 3.1. *Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{24}$. Lorsque $(x, y) \in \mathscr{D}_\varepsilon$, nous avons*

$$N(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha, \beta)\Phi\big(\lambda/\alpha\big)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta(\alpha, \beta)}} \mathrm{e}^{O(E^*)}. \tag{3·12}$$

Remarque. Nous avons en toute circonstance $\mathrm{e}^{O(E^*)} = 1 + O(E^*)$. Cependant, la formulation choisie pour (3·12) permet d'inclure le renseignement que les deux membres sont du même ordre de grandeur dans l'ensemble du domaine $\mathscr{D}_\varepsilon$.

En reportant (3·12) dans (3·4), nous obtenons que le choix

$$r(x, y) = \Phi(\lambda/\alpha)$$

est admissible, de sorte que $r(x, y) \to 1$ si, et seulement si, $\lambda/\alpha \to \infty$, alors que $r(x, y) \to \sqrt{2\pi}/\mathrm{e}$ si, et seulement si, $\lambda/\alpha \to 0$.[5] Notons que, d'après l'évaluation (6·75) *infra*, λ/α et $v\sigma_v/y^{\sigma_v}$ tendent conjointement vers 0 ou vers l'infini.

5. La première éventualité correspond aux « petites » valeurs de y, la seconde aux « grandes » : cf. (3·29) *infra*.

Le phénomène de changement de phase ainsi mis en évidence nous a amenés à définir trois zones, décrites dans la suite et respectivement désignées comme *sous-critique, critique* et *sur-critique*, selon que $y^{\sigma_v}/v\sigma_v$ est petit, de taille modérée (incluant l'ordre de l'unité) ou grand. En pratique, ces zones auront toujours de larges plages de recouvrement et, même si elles correspondront toujours aux critères qualitatifs indiqués plus haut, leurs définitions précises pourront varier en fonction des spécificités des problèmes étudiés.

Les Propositions 11.3, 11.5 et 10.1 *infra* fournissent dans chacune des trois zones une formule asymptotique pour $N(x,y)$ plus précise que le résultat uniforme (3·12). En particulier, le terme principal secondaire de la formule (11·34), apparaissant dans l'énoncé de la Proposition 11.5, permet de disposer, dans la zone critique, d'une précision suffisante pour les applications développées dans la suite.

Avant de préciser les conséquences théoriques qui peuvent être déduites de la formule (3·12), mentionnons l'aspect numérique. En l'absence d'une hypothétique méthode globale plus performante, la complexité du calcul de $N(x,y)$ coïncide avec celle de la factorisation de l'ensemble des entiers n'excédant pas x. Le terme principal de (3·12), en revanche, ne nécessite essentiellement que l'évaluation d'un faible nombre de sommes et produits sur les nombres premiers. En effet, lorsque, par exemple, l'on approche les coordonnées du point-selle par une méthode itérative à convergence rapide comme celle de Newton, le nombre nécessaire des valeurs des paramètres est très réduit. L'une des applications possibles du Théorème 3.1 consiste donc, via une estimation effective des constantes impliquées, à approcher numériquement $N(x,y)$ pour de grandes valeurs du paramètre x.

3·2. Évaluations explicites de $N(x,y)$

Comme il est usuel dans l'emploi de la méthode du col en théorie analytique des nombres, nous pouvons exploiter la formule (3·12) de deux manières. D'une part, nous pouvons y insérer des estimations explicites du point-selle (α,β) ; d'autre part, nous pouvons l'utiliser, via une étude différentielle du terme principal, pour décrire le comportement local de $N(x,y)$, avec notamment l'obtention de formules semi-asymptotiques.[6]

Les résultats obtenus par la première voie correspondent aux deux théorèmes suivants, fournissant respectivement des formules asymptotiques pour $N(x,y)$ et pour $\log\{N(x,y)/y\}$.

Quelques notations supplémentaires sont nécessaires.

Posant

$$Z = Z(x,y) := \sigma_v \log y, \tag{3·13}$$

$$J_k(s) := \int_1^\infty \mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}t}{t^k} \qquad (s>0,\ k\in\mathbb{Z}), \tag{3·14}$$

nous montrons au Lemme 5.1 *infra* que l'équation

$$J_1(\varrho)^2 = Z^2 J_2(\varrho), \tag{3·15}$$

6. Voir [28] pour une définition de cette notion et la description d'un exemple fondamental.

possède dans $\mathbb{R}^+$ une solution unique $\varrho = \varrho(x,y)$. Nous déduisons notamment de cet énoncé les estimations suivantes :

$$\varrho = \begin{cases} \left\{2 + O\left(\dfrac{\log_2(1/Z)}{\log(1/Z)}\right)\right\}\log(1/Z) & (Z \to 0+), \\ \left\{1 + O\left(Z^2/\mathrm{e}^Z\right)\right\}\mathrm{e}^{-\gamma - Z} & (Z \geqslant 1), \end{cases} \tag{3·16}$$

$$\varrho \asymp \mathrm{e}^{-Z}\log(2 + 1/Z) \qquad (Z > 0). \tag{3·17}$$

Nous écrivons alors

$$\Theta := \sqrt{\mathrm{e}^{-\varrho} + \tfrac{1}{4}(\varrho Z)^2}, \qquad \mathcal{K} := 2(1-\Theta)v\sigma_v, \qquad \Delta := \frac{v\sigma_v}{\mathrm{e}^{\gamma} y^{\sigma_v}} = \frac{v\sigma_v}{\mathrm{e}^{\gamma + Z}}\cdot \tag{3·18}$$

Pour simplifier l'écriture, nous avons omis d'indiquer la dépendance en (x,y) de ces quantités — nous réservant, en cas de nécessité, d'écrire $\Theta(x,y)$, $\mathcal{K}(x,y)$, $\Delta(x,y)$. Nous notons par ailleurs qu'une application standard de l'inégalité de Cauchy–Schwarz implique $\Theta^2 \leqslant (1 + \varrho/4)\mathrm{e}^{-\varrho} < 1$.

Nous avons

$$\Theta \to 1 \quad (Z \to \infty), \qquad \Theta \sim \tfrac{1}{2} Z \log(1/Z) \qquad (Z \to 0), \tag{3·19}$$

alors que

$$\mathcal{K} \asymp \Delta \quad (x \geqslant y \geqslant 2), \qquad \mathcal{K} \sim \Delta \quad (Z \to \infty). \tag{3·20}$$

Enfin, nous désignons par $\{p_j\}_{j \geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers et, pour $x \geqslant 16$, nous définissons les quantités

$$\begin{aligned} &L_x := \tfrac{1}{4}\sqrt{2\log x}(\log_2 x)^{3/2}, \quad \mathcal{Y}_x := \mathrm{e}^{L_x}, \quad M_x := \sqrt{2\log x \log_2 x}\,\log_3 x, \\ &\varepsilon_x := \frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}, \qquad \eta_x := \frac{(\log_2 x)^{13}}{\sqrt{\log x}}\cdot \end{aligned} \tag{3·21}$$

Comme nous le verrons plus loin, la fonction $N(x,y)/y$ présente un changement de phase au voisinage de $y = \mathcal{Y}_x$. Pour fixer les idées, nous avons $\log\{N(x,y)/yF(v)\} \asymp -\Delta$ uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, où Δ est la quantité définie en (3·18). Or, l'estimation de σ_v en (6·26) *infra* implique

$$y = \mathcal{Y}_x \mathrm{e}^{-tM_x + O(M_x/\log_3 x)} \Leftrightarrow \Delta \asymp (\log_2 x)^{2t - 3/4} \qquad (t \ll 1). \tag{3·22}$$

On voit ainsi que Δ est susceptible de tendre vers 0 ou vers l'infini lorsque y prend ses valeurs de part et d'autre de $\mathcal{Y}_x \mathrm{e}^{-3M_x/8} = \mathcal{Y}_x^{1+o(1)}$. Le Corollaire 3.4 *infra* décrit plus précisément la transition de phase.

Théorème 3.2. *(i) Sous la condition* $x \geqslant \mathrm{e}^6$, $\sqrt{\mathcal{Y}_x}\,\mathrm{e}^{15M_x/8} \leqslant y \leqslant x/\mathrm{e}^6$, *nous avons*

$$N(x,y) = \{1 + O(R_x^+)\} yF(v)\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)}, \tag{3·23}$$

avec $R_x^+ := \mathrm{e}^{-Z}(\log_2 x)^{3/2} + (\log_2 x)^{5/2}/\sqrt{\log x} \ll (\log x)^{-1/4}(\log_2 x)^{-9/4}$.

(ii) Pour $x \geqslant 16$ *et* $\mathcal{Y}_x\mathrm{e}^{-3M_x/4} \leqslant y \leqslant x$, *nous avons*

$$N(x,y) = \{1 + O(R_x^-)\} yF(v)\mathrm{e}^{-\Delta}, \tag{3·24}$$

avec $R_x^- := (\log_2 x)^{5/2}/\sqrt{\log x} + \mathrm{e}^{-Z}\sqrt{\log x}/(\log_2 x)^{5/2} \ll 1/(\log_2 x)^{7/4}$.

Les termes d'erreur apparaissant dans cet énoncé ont été calibrés pour être uniformément valides dans des régions aussi vastes que possible. Ils sont cependant largement améliorables dans des sous-domaines spécifiques dont la réunion recouvre celle des conditions (i) et (ii). En particulier, la Proposition 10.1, relative à la zone sur-critique est susceptible de fournir des termes d'erreur relatifs de l'ordre d'une puissance négative de x. Il découle par exemple de cet énoncé que, pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément sous la condition $y > \mathrm{e}^{(\log x)^{1/2+\varepsilon}}$, nous avons

$$N(x,y) = yF(v)\Big\{1 + O\Big(y^{-\sqrt{2/(\log x \log_2 x)}}\Big)\Big\}. \tag{3·25}$$

Ce résultat améliore significativement (1·12). La Proposition 10.1 fournit des précisions supplémentaires.

Théorème 3.3. *(i) Nous avons*

$$N(x,y) = \{1 + O(\eta_x)\}\, yF(v)\, \mathrm{e}^{-\{1+O(\varepsilon_x)\}\mathcal{K}} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{3·26}$$

(ii) Sous la condition $x \geqslant 16$, $\mathrm{e}^{2M_x} \leqslant y \leqslant x$, *nous avons*

$$N(x,y) = \{1 + O(\eta_x)\}\, yF(v)\mathrm{e}^{-\Delta + O(\Delta/(\log \mathrm{v})^2)}. \tag{3·27}$$

(iii) Pour $x \geqslant 16$, $\log y \ll \sqrt{\log x}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log_2 x}}$, *nous avons*

$$N(x,y) = y\mathrm{e}^{\varrho H_y\{1+O(\varepsilon_x)\}}, \tag{3·28}$$

où H_y *est le plus grand entier* H *tel que* $\prod_{j\leqslant H} p_j \leqslant y$.

Nous déduisons notamment du Théorème 3.2(ii), du Théorème 3.3(i) et de (3·22) le résultat suivant qui, comme indiqué plus haut, confirme que le changement de phase du comportement asymptotique de $N(x,y)/y$ se situe autour de la zone $y \approx \mathcal{Y}_x\mathrm{e}^{-3M_x/8}$ et fournit une description quantitative de la transition.

Corollaire 3.4. *(i) La relation asymptotique* $N(x,y) \sim yF(v)$ *a lieu si, et seulement si,* $\Delta = o(1)$, *autrement dit* $y > \mathcal{Y}_x\mathrm{e}^{-3M_x/8}\mathrm{e}^{\psi_x\sqrt{\log x \log_2 x}}$ *avec* $\psi_x \to \infty$.

(ii) Si $y \leqslant \mathcal{Y}_x\mathrm{e}^{-M_x/4}$, *nous avons* $N(x,y) = yF(v)^{\Theta+\nu}$ *avec* $\nu \ll \varepsilon_x/y^{\sigma_v}$.

Ainsi, pour tout $c \in]0,1[$ fixé, nous avons $N(x,y) = yF(v)^{c+o(1)}$ si, et seulement si,

$$y = \mathrm{e}^{\{Z_c/2+o(1)\}\sqrt{2\log x \log_2 x}}$$

où $Z_c := J_1(\varrho_c)/\sqrt{J_2(\varrho_c)}$ et ϱ_c est solution de l'équation $\mathrm{e}^{-\varrho} + \frac{1}{4}\varrho^2 J_1(\varrho)^2/J_2(\varrho) = c^2$, alors que

$$N(x,y) = yF(v)^{o(1)} \Leftrightarrow \log y = o\big(\sqrt{\log x \log_2 x}\,\big).$$

3·3. Évaluation des paramètres du col

La détermination de formules asymptotiques satisfaisantes pour les paramètres α et β solutions du système (2·2) est particulièrement délicate, notamment dans le cas des petites valeurs de y, où les discontinuités de différentes fonctions sommatoires liées aux nombres premiers doivent être prises en compte.

Pour fixer les idées, commençons par indiquer les ordres de grandeur. Pour x assez grand et $x \geqslant y \geqslant 2$, nous avons, en vertu de (6·8), (6·76) et (6·74) *infra*,

$$\alpha \asymp \begin{cases} \dfrac{\log y}{\log x \log_2 2y} \asymp \sigma_v \dfrac{Z \log_2 x}{\log_2 2y} & (Z \ll 1), \\ \sigma_v & (Z \gg 1), \end{cases} \qquad \beta \asymp 1 + \lambda \asymp \frac{\log_2 x}{\log_2 2y},$$

$$\lambda \asymp \begin{cases} \dfrac{\log(1+1/Z)}{\log_2 2y} & (Z \ll 1), \\ \dfrac{(\Delta+1)\sigma_v}{\log(2+1/\Delta)} & (Z \gg 1), \end{cases} \qquad \lambda \asymp \frac{1}{\log y} \quad (Z > \log_2 x). \tag{3·29}$$

L'énoncé de nos résultats les plus précis nécessite de nouvelles définitions. Notant avec Tchébychev

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p \qquad (x \geqslant 2), \tag{3·30}$$

nous introduisons, pour $t > 0$, les fonctions réciproques

$$\mathcal{U}_t^+ := \inf\{p \in \mathcal{P} : \vartheta(p) > t\}, \quad \mathcal{U}_t^- := \inf\{p \in \mathcal{P} : \vartheta(p) \geqslant t\}, \quad \mathcal{U}_t := \sqrt{\mathcal{U}_t^+ \mathcal{U}_t^-}, \tag{3·31}$$

et posons

$$\mathcal{T}(t) := \pi(U_t^-) - \frac{\vartheta(\mathcal{U}_t^-) - t}{\log \mathcal{U}_t^+} = \pi(\mathcal{U}_t^-) - \frac{\vartheta(\mathcal{U}_t^-) - t}{\log t + O(1)}, \tag{3·32}$$

de sorte que

$$\log \mathcal{U}_t^\pm \asymp \log(2+t), \quad \mathcal{T}(t) \asymp \frac{t+2}{\log(2+t)} \quad (t > 0), \qquad \mathcal{T}(t) \sim \frac{t}{\log t} \qquad (t \to \infty).$$

Comme l'application $D := \Gamma'/\Gamma$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, nous pouvons définir

$$G(t) := \frac{1}{t} D^{-1}(\log t) \qquad (t > 0), \tag{3·33}$$

de sorte que[7]

$$G(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{2t} + O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big) & (t \to +\infty), \\ \dfrac{1}{t \log(1/t)} \Big\{ 1 + O\Big(\dfrac{1}{\log(1/t)}\Big) \Big\} & (t \to 0+), \end{cases} \tag{3·34}$$

$$G(t) \asymp (2 + 1/t)/\log(2 + 1/t) \qquad (t > 0).$$

7. Voir le Lemme 5.4 *infra*.

Nous verrons plus loin que la quantité $\log y/\sqrt{\log x \log_2 x}$ intervient naturellement dans les calculs. Nous définissons les domaines

$$\mathscr{D}^- := \Big\{(x,y) \in [16,\infty[\times[2,x/2] : \log y/\sqrt{\log x \log_2 x} \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{\log_2 x}}\Big\}, \tag{3·35}$$

$$\mathscr{D}^+ := \Big\{(x,y) \in [16,\infty[\times[2,x/2] : \log y/\sqrt{\log x \log_2 x} \geqslant \mathrm{e}^{-2\sqrt{\log_2 x}}\Big\}. \tag{3·36}$$

Il est à noter que les domaines $\mathscr{D}^-$ et $\mathscr{D}^+$ ne sont pas disjoints. Ils correspondent à des zones centrées sur des régions dans lesquelles les paramètres du col ont des comportements distincts.

Rappelons les définitions des paramètres λ en (3·5) et ϱ en (3·15). Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.5. *Sous la condition $2 \leqslant y < x$, le système (2·2) admet une unique solution $(\sigma,\kappa) = (\sigma^*,\kappa^*)$ avec $\kappa^* \in \mathbb{R}$ et $\sigma^* > \max\{0, 1-\kappa^*\}$. Posant $\alpha = \sigma^*$, $\beta = \kappa^*$ lorsque $v = \log(x/y) \geqslant 6$, nous avons en outre :*

(i) uniformément pour $(x,y) \in \mathscr{D}^-$, $y \in \mathbb{N}$, $y \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \{1+O(\varepsilon_x)\}\frac{\mathcal{T}(\log y)}{\log x}, \\ \lambda \log\big(\mathcal{U}_{\log y}\big) &= \log\left(\frac{\log x \log_2 x}{(\log y)^2}\right)\left\{1+O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{19/80}(\log_3 x)^{41/40}}\right)\right\}; \end{aligned} \tag{3·37}$$

(ii) uniformément pour $(x,y) \in \mathscr{D}^+$, $y \leqslant x/\mathrm{e}^6$,

$$\alpha = \left\{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right\}\sigma_v\sqrt{J_2(\varrho)}, \qquad \lambda = \left\{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right\}\varrho\, G(\Delta) v \sigma_v^2. \tag{3·38}$$

Remarques. (a) Dans chacune des zones $\mathscr{D}^-$ et $\mathscr{D}^+$, des estimations plus précises sont fournies au paragraphe 6.4.

(b) Par (3·15), nous avons $\sigma_v\sqrt{J_2(\varrho)} = J_1(\varrho)/\log y$. La seconde expression est plus maniable dans (3·38) lorsque $Z \to 0$, soit $y = \mathrm{e}^{o\left(\sqrt{\log x \log_2 x}\right)}$, alors que la première fournit immédiatement $\alpha \sim \sigma_v$ (avec un terme d'erreur explicite) lorsque $Z \to \infty$, i.e. $(\log y)/\sqrt{\log x \log_2 x} \to \infty$.

En pratique, l'explicitation des formules asymptotiques (3·37) et (3·38) n'est pas toujours immédiate. Pour fixer les idées, observons par exemple que, si $\log y = (\log x)^b$ avec $b \in]0,1[$ fixé, nous avons, quand $x \to \infty$,

$$\alpha \sim \begin{cases} \dfrac{(\log x)^{b-1}}{b\log_2 x} & \text{si } 0 < b < \frac12, \\[2ex] \sqrt{\dfrac{2}{\log x \log_2 x}} & \text{si } \frac12 < b < 1, \end{cases} \qquad \lambda = \begin{cases} \dfrac{1-2b}{b} + o(1) & \text{si } 0 < b < \frac12, \\[2ex] \dfrac{1+o(1)}{(\log x)^b} & \text{si } \frac12 < b < 1. \end{cases}$$

4. Applications

4·1. Comparaison avec la majoration de Rankin

Compte tenu de (3·9) et (9·2) *infra*, l'estimation (3·12) permet d'évaluer précisément le facteur perdu $\mathscr{R} := x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)/N(x,y)$ par application de la majoration de Rankin : dans le domaine $\mathscr{D}_\varepsilon$, nous avons

$$\mathscr{R} \asymp \begin{cases} \dfrac{\log(2+1/\Delta)}{\sqrt{1+\Delta}} \mathrm{v}^{3/4}(\log \mathrm{v})^{1/4} & \text{si } \log y > \sqrt{\log x \log_2 x}, \\ \sqrt{\dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}} \log y & \text{si } \log y \leqslant \sqrt{\log x \log_2 x}. \end{cases} \tag{4·1}$$

On constate ainsi, à l'instar d'autres problèmes arithmétiques comme les entiers friables ou les entiers ayant un nombre prescrit de facteurs premiers, que la majoration de Rankin est remarquablement précise : nous avons $(\log_2 x)^{7/2} \ll \mathscr{R} \ll (\log x)^{5/4}(\log_2 x)^{-1/4}$ dans l'ensemble du domaine $\mathscr{D}_\varepsilon$ et il est vraisemblable que la majoration persiste pour $x \geqslant y \geqslant 2$.

4·2. Comportement local

L'un des avantages spécifiques de la méthode du col et des évaluations implicites qu'elle produit consiste à permettre une description précise du comportement local des quantités étudiées même lorsque le comportement global ne relève pas d'une formule asymptotique explicite. Dans cette direction, nous obtenons les résultats suivants.

Théorème 4.1. *Sous les conditions* $\mathrm{e}^{(\log_2 x)^{3+\varepsilon}} \leqslant y \leqslant x$, *nous avons*

$$N(x\mathrm{e}^t, y) = \{1 + O(E^*)\}\mathrm{e}^{\alpha t} N(x,y) \qquad \big(|t| \ll \mathrm{v}^{1/6}\big), \tag{4·2}$$

$$N(x, y\mathrm{e}^t) = \{1 + O(E^*)\}\mathrm{e}^{\beta t} N(x,y) \qquad \big(|t| \ll \min((\log y)^{1/6}, \mathrm{v}^{1/12})\big). \tag{4·3}$$

De plus, pour $2 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log x \log_2 x}}$, $|t| \ll (\log x \log_2 2y)/\log y$, *nous avons*

$$N(x\mathrm{e}^t, y) = \left\{1 + O\left(\frac{\{|t| + \log y\}\log y}{\log x \log_2 y}\right)\right\} N(x,y)\mathrm{e}^{\alpha t}. \tag{4·4}$$

Présentée de manière uniforme, la première partie de ce théorème est en fait la concaténation de trois énoncés plus précis, respectivement relatifs aux zones sous-critique, critique et sur-critique, et établis au paragraphe 13.

La Proposition 13.1, relative à la zone sur-critique, étend notamment le domaine de validité des estimations de Squalli [25]. Une version adaptée aux intervalles courts fait l'objet du Corollaire 10.2.

La spécialisation suivante, établie en détail au paragraphe 13.5, donne une idée concrète du comportement local.

Corollaire 4.2. *Nous avons, lorsque* $x \to \infty$,

$$N(2x, y) \sim N(x,y) \Leftrightarrow y = o(x), \tag{4·5}$$

$$N(x, 2y) \sim 2N(x,y) \Leftrightarrow \log y > (\log x)^{1/2+o(1)}, \tag{4·6}$$

$$(\forall b > 1) \qquad N(x, 2y) \sim 2^b N(x,y) \Leftrightarrow \log y = (\log x)^{1/(b+1)+o(1)}. \tag{4·7}$$

4·3. Étude de $K(x)$ et d'autres quantités liées au noyau d'un entier

En 1965, Schwarz [24] obtient la formule asymptotique implicite

$$K(x) = \frac{1+o(1)}{2\sqrt{\pi}}\Big(\frac{\log_2 x}{2\log x}\Big)^{1/4} \min_{\sigma>0} x^\sigma \mathscr{F}(\sigma,1) \tag{4·8}$$

en utilisant un théorème taubérien dû à Ingham [16].

Les estimations asymptotiques de $N(x,y)$ établies au Théorème 3.2 et les formules relatives au comportement local dans la zone critique (Proposition 13.4) permettent une évaluation explicite de $K(x)$ via la représentation

$$K(x) = \int_1^\infty \frac{N(x,y)}{y^2}\,\mathrm{d}y. \tag{4·9}$$

Les détails techniques nécessaires à cette application sont fortement simplifiés par le fait de disposer de formules précises pour le comportement local : il suffit de développer l'intégrande au voisinage du point dominant. Nous obtenons le résultat suivant, démontré au paragraphe 14.1. Ici et dans la suite, nous désignons par γ la constante d'Euler.

Théorème 4.3. *Il existe une suite de polynômes $\{R_j\}_{j=1}^\infty$ vérifiant $\deg R_j \leqslant j$ et telle que l'on ait, pour chaque entier $N \geqslant 1$ et uniformément pour $x \geqslant \mathrm{e}^3$,*

$$K(x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^\gamma F(\log x)(\log_2 x)\bigg\{1 + \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{R_j(\log_3 x)}{(\log_2 x)^j} + O_N\bigg(\Big(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\Big)^{N+1}\bigg)\bigg\}. \tag{4·10}$$

En particulier,

$$R_1(z) = -z, \qquad R_2(z) = 2z - \tfrac{1}{3}\pi^2. \tag{4·11}$$

Remarque. Il est possible déduire rapidement (4·8) de (4·10) en utilisant (8·8), (14·2), (5·98) et (5·80) *infra*. Nous omettons les détails.

Nous pouvons également donner, pour le facteur $o(1)$ dans la conjecture d'Erdős (1·6), une formule asymptotique très précise, qui fournit à son tour un développement asymptotique grâce à (2·9). Le théorème suivant est démontré au paragraphe 14.2.

Théorème 4.4. *Nous avons*

$$K_2(x) = K_1(x)\sigma_{\log x}\bigg\{1 + O\bigg(\sqrt{\frac{\log_2 x}{\log x}}\bigg)\bigg\} \qquad (x \geqslant 3). \tag{4·12}$$

Nos estimations sont en principe susceptibles de fournir des évaluations asymptotiques pour la fonction sommatoire de toute fonction régulière de $k(n)$. Ainsi, en écrivant $k(n)^t = t\int_I u^{t-1}\,\mathrm{d}u$ avec $I := [0,k(n)]$ ou $[k(n),\infty[$ selon que $t>0$ ou $-1<t<0$, nous obtenons

$$\sum_{n\leqslant x} k(n)^t \sim \big\{1 - t\widehat{F}(t+1)\big\}x^{t+1} = \frac{\mathscr{G}(t+1)x^{t+1}}{t+1} \qquad (t>-1,\ x\to\infty)$$

où nous avons posé

$$\widehat{F}(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-us} F(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\mathscr{G}(s) - s}{s(1-s)} \qquad (s > 0).$$

On retrouve de cette manière le terme principal de la formule de Wigert [34], correspondant à $t = 1$ et dont le terme résiduel a été précisé par Cohen [8] puis, sous l'hypothèse de Riemann, par Suryanarayana [26].

Bien que non triviaux, les termes d'erreur obtenus par cette méthode pour les cas particuliers précédents sont structurellement moins précis que ceux que l'on peut déduire, par exemple, d'une approche par convolution. Dans certains problèmes analogues, cependant, cette approche permet des améliorations significatives de résultats de la littérature.

C'est le cas, par exemple, pour le problème de la valeur moyenne de la fonction indice de composition d'un entier, $i(n) := (\log n)/\log k(n)$ $(n > 1)$. Nos estimations impliquent immédiatement

$$\begin{aligned}\sum_{1<n\leqslant x} i(n) &= \lfloor x \rfloor + \int_2^x \frac{N(x,y)\log x}{y(\log y)^2}\,\mathrm{d}y - \int_1^x\int_2^\infty \frac{N(t,y)}{ty(\log y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\ &= x + x\int_0^{\log(x/2)} F(v)\Big\{\frac{\mathrm{e}^{-v}\log x}{(\log x - v)^2} - \mathrm{li}_2\Big(\frac{x}{\mathrm{e}^v}\Big)\Big\}dv + O\Big(x\mathrm{e}^{-cL(x)}\Big)\end{aligned} \tag{4·13}$$

pour tout $c < \sqrt[3]{3}$, où l'on a posé

$$\mathrm{li}_2(u) := \int_2^u \mathrm{d}t/(\log t)^2 \quad (u \geqslant 2), \qquad L(x) := (\log x)^{2/3}/(\log_2 x)^{1/3}.$$

Cela fournit en particulier un renforcement significatif du résultat correspondant de [10], où est établie la formule

$$\sum_{1<n\leqslant x} i(n) = \sum_{0\leqslant j\leqslant N} \frac{c_j x}{(\log x)^j} + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{N+1}}\Big) \tag{4·14}$$

pour tout $N \geqslant 0$ et une suite réelle convenable $\{c_j\}_{j=0}^\infty$. De plus, nous pouvons aisément identifier les coefficients : posant $\mathcal{P}_j(v) := jv^{j-1} - (j-1)!\sum_{0\leqslant m<j-1} v^m/m!$, nous avons

$$c_0 = 1, \quad c_j = \int_0^\infty \mathcal{P}_j(v)F(v)\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v \quad (j \geqslant 1). \tag{4·15}$$

4·4. Nouvelle formulation de la conjecture abc

Issue, en 1985, d'une discussion entre Masser et Oesterlé, la conjecture *abc* est aujourd'hui l'un des plus célèbres problèmes ouverts en mathématiques. L'une de ses formulations équivalentes consiste à stipuler que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante M_ε telle que les conditions $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) = 1$ impliquent $c := a+b \leqslant M_\varepsilon k(abc)^{1+\varepsilon}$. Elle fournit donc une limitation essentielle pour la structure multiplicative d'un produit dont les facteurs sont liés par une relation additive. Ses très nombreuses conséquences, notamment au grand théorème de Fermat, ont été abondamment décrites dans la littérature.

L'hypothèse heuristique sous-tendant la conjecture *abc* consiste à supposer que les nombres $k(a)$, $k(b)$ et $k(c)$ se comportent essentiellement comme des variables aléatoires indépendantes lorsque les tailles des paramètres sont d'un ordre de grandeur fixé. Nos résultats relatifs à $N(x,y)$ fournissant essentiellement une description des mesures de répartition de ces variables aléatoires, il est naturel d'en attendre une formulation précise de la conjecture. Dans le travail [23] en collaboration avec Stewart, nous obtenons la version suivante grâce à un argument probabiliste de type Borel–Cantelli.

Conjecture. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante positive A telle que, pour tout triplet (a,b,c) d'entiers positifs satisfaisant à $(a,b)=1$, $c=a+b$, $k=k(abc)$, on ait*

$$c \leqslant AkF(\tfrac{2}{3}\log k)^{3-(\log 4-\varepsilon)/\log_2(k+2)},$$

alors que l'inégalité $c > kF\big(\frac{2}{3}\log k\big)^{3-(\log 4+\varepsilon)/\log_2(k+2)}$ a lieu pour une infinité de tels triplets.

L'article [23] contient une variante plus élaborée de la conjecture, également établie sous la seule hypothèse d'indépendance statistique entre $k(c)$ et le vecteur $(k(a),k(b))$, dans laquelle le facteur d'incertitude pour $c=a+b$ est de l'ordre d'une puissance fixe de $\log k$.

5. Estimations préliminaires

5·1. Les fonctions J_k

Rappelons la notation (3·14). Nous avons

$$sJ_k(s) = \mathrm{e}^{-s} - kJ_{k+1}(s), \quad J_k'(s) = -J_{k-1}(s) \qquad (s>0,\ k\in\mathbb{Z}). \tag{5·1}$$

La dernière inégalité implique immédiatement

$$J_k(s) - J_k(s+u) = \int_s^{s+u} J_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant uJ_{k-1}(s) \qquad (s,u>0,\ k\in\mathbb{Z}). \tag{5·2}$$

Par ailleurs,

$$J_1(s) \asymp \mathrm{e}^{-s}\log(1+1/s) \quad (s>0), \qquad J_k(s) \asymp_k \frac{\mathrm{e}^{-s}}{1+s} \quad (s>0,\ k\geqslant 2), \tag{5·3}$$

d'où

$$J_2(s) = 1 + O\big(s\log(1+1/s)\big) \qquad (0<s\leqslant 1), \tag{5·4}$$

$$J_k(s) = \frac{1}{k-1} + O(s) \qquad (k\geqslant 3,\ 0<s\leqslant 1), \tag{5·5}$$

$$J_k(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\{1+O(1/s)\} \qquad (k\geqslant 0,\ s\geqslant 1). \tag{5·6}$$

Pour $k\geqslant 0$, les intégrales $J_{-k}(s)$ se calculent classiquement. On obtient

$$J_{-k}(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}P_k(1/s)$$

où P_k est un polynôme à coefficients rationnels positifs de degré k, de terme constant 1, et de coefficient dominant $k!$. En particulier,

$$J_{-k}(s) \asymp_k \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\Big(1+\frac{1}{s^k}\Big) \qquad (k \geqslant 0,\ s>0). \tag{5·7}$$

La formule suivante est classique (cf. par exemple [29], lemme III.5.9)

$$J_1(s) = \log(1/s) - \gamma + \int_0^{-s} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (s>0). \tag{5·8}$$

Le résultat suivant nous permettra de déduire de l'équation (3·15) une évaluation du paramètre ϱ. Nous posons

$$j(s) := J_1(s)^2/J_2(s). \tag{5·9}$$

Lemme 5.1. *La fonction $u \mapsto j(u)$ définit une bijection décroissante de l'intervalle $]0,+\infty[$ sur lui-même. Notant $t \mapsto h_t$ sa réciproque, nous avons*

$$h_t = \mathrm{e}^{-\gamma-\sqrt{t}}\Big\{1+O\Big(t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\Big)\Big\} \qquad (t\to+\infty), \tag{5·10}$$

$$h_t = \log(1/t) - \log_2(1/t) + \frac{\log_2(1/t)+O(1)}{\log(1/t)} \qquad (t\to 0+). \tag{5·11}$$

En particulier,

$$J_1(h_t) = \sqrt{t} + O\Big(t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\Big) \qquad (t\to+\infty), \tag{5·12}$$

$$J_1(h_t) = t + O\Big(\frac{t}{\log(1/t)}\Big) \qquad (t\to 0+). \tag{5·13}$$

Démonstration. Nous avons

$$j'(u) = \frac{J_1(u)(J_1(u)^2 - 2J_2(u)\mathrm{e}^{-u}/u)}{J_2(u)^2} \qquad (u>0).$$

Comme l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique $J_1(u)^2 \leqslant J_2(u)\mathrm{e}^{-u}/u$, nous obtenons

$$-j'(u) \asymp \frac{J_1(u)\mathrm{e}^{-u}}{uJ_2(u)} \qquad (u>0), \tag{5·14}$$

ce qui établit bien la première assertion.

Il est alors immédiat que $h_t = o(1)$ lorsque $t\to\infty$. Par (5·8) et (5·1), il suit, lorsque $t\to\infty$,

$$J_1(h_t) = \log\big(1/h_t\big) - \gamma + O\big(h_t\big), \tag{5·15}$$

$$J_2(h_t) = \mathrm{e}^{-h_t} - h_tJ_1(h_t) = 1 + O\big(h_t\log\big(1/h_t\big)\big), \tag{5·16}$$

d'où, successivement,

$$\begin{aligned}
\log\big(1/h_t\big) - \gamma + O\big(h_t\big) &= \sqrt{t}\big\{1+O(h_t\log(1/h_t))\big\},\\
\log(1/h_t) &= \gamma + \sqrt{t} + O(th_t),\\
h_t^{-1} &= \mathrm{e}^{\gamma+\sqrt{t}}\big\{1+O(th_t)\big\} = \mathrm{e}^{\gamma+\sqrt{t}}\Big\{1+O\Big(t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Cela fournit (5·10), puis (5·12) grâce à (5·8).

Pour établir (5·11) et (5·13), nous observons que $\lim_{t\to 0+} h_t = +\infty$, d'où, par (5·6),

$$t = j(h_t) = \frac{\mathrm{e}^{-h_t}}{h_t}\left\{1 + O\left(1/h_t\right)\right\}, \quad (t \to 0+). \tag{5·17}$$

Il suit

$$h_t + \log h_t = \log(1/t) + O(1/h_t) = \log(1/t) + O(1/\log(1/t))$$

d'où l'on déduit (5·11), puis (5·13) en reportant dans (5·6). □

Lemme 5.2. *(i) Soit $k \geqslant 3$. Nous avons $J_k(s+u) = J_k(s)\left\{1 + O(u)\right\}$ $(s > 0,\ u > 0)$.*

(ii) Nous avons $J_2(s+u) = J_2(s)\left\{1 + O\big(u\log\{1 + 1/u\}\big)\right\}$ $(s > 0,\ 0 < u \leqslant 1)$.

(iii) Pour $k \in \{1, 2\}$, nous avons $J_k(s+u) = J_k(s)\left\{1 + O(u)\right\}$ $(s \geqslant 1,\ 0 < u \leqslant 1)$.

Démonstration. Le point (i) résulte de (5·2) et de la seconde formule (5·3). Le même argument fournit (iii) via (5·6). Pour établir (ii), nous pouvons supposer $0 < s < 1$. Le résultat annoncé découle alors de la première formule (5·3). □

Lemme 5.3. *Avec les notations précédentes, nous avons*

$$\sqrt{J_2(h_t)} + \frac{\mathrm{e}^{-h_t}}{\sqrt{J_2(h_t)}} = \sqrt{h_t^2 t + 4\mathrm{e}^{-h_t}} \qquad (t > 0). \tag{5·18}$$

Démonstration. Posons provisoirement $h := h_t$. Par définition de h et en utilisant (5·1), nous pouvons écrire

$$J_1(h)^2 = tJ_2(h) = t\big(\mathrm{e}^{-h} - hJ_1(h)\big),$$

d'où

$$J_1(h) = \frac{-ht + \sqrt{h^2t^2 + 4t\mathrm{e}^{-h}}}{2} = \frac{2t\mathrm{e}^{-h}}{ht + \sqrt{h^2t^2 + 4t\mathrm{e}^{-h}}}.$$

Il suit

$$\begin{aligned}\sqrt{J_2(h)} + \frac{\mathrm{e}^{-h}}{\sqrt{J_2(h)}} &= \frac{\mathrm{e}^{-h}\sqrt{t}}{J_1(h)} + \frac{J_1(h)}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-h}\sqrt{t}\big(ht + \sqrt{h^2t^2 + 4t\mathrm{e}^{-h}}\big)}{2t\mathrm{e}^{-h}} + \frac{-ht + \sqrt{h^2t^2 + 4t\mathrm{e}^{-h}}}{2\sqrt{t}},\end{aligned}$$

d'où la formule annoncée. □

5·2. *Autour de la fonction* Γ *d'Euler*

5·2·1. *Preuve des relations* (3·9)

Rappelons la définition (3·7), où $D := \Gamma'/\Gamma$, de sorte que

$$D'(s) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{1}{(m+s)^2} = \int_0^\infty \frac{u\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-u}} \qquad (\Re e\,(s) > 0). \tag{5·19}$$

Les relations (3·9) résultent immédiatement de l'énoncé suivant.

Lemme 5.4. *Nous avons*

$$D(u) = \begin{cases} -\dfrac{1}{u} + O(1) & (0 < u \leqslant 1), \\ \log u - \dfrac{1}{2u} + O\Big(\dfrac{1}{u^2}\Big) & (u \geqslant 1), \end{cases} \qquad D'(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{u^2} + O(1) & (0 < u < 1), \\ \dfrac{1}{u} + O\Big(\dfrac{1}{u^2}\Big) & (u \geqslant 1), \end{cases}$$

$$\gamma(u) = \begin{cases} \dfrac{2\pi u}{\mathrm{e}}\{1 + O(u)\} & (0 < u < 1), \\ \gamma(u) = \sqrt{2\pi u}\{1 + O(1/u)\} & (u \geqslant 1). \end{cases}$$

Démonstration. Lorsque $0 < u < 1$ les estimations indiquées découlent de la formule du produit pour $\Gamma(u)$. Lorsque $u \geqslant 1$, elles sont conséquences immédiates de la formule de Stirling complexe

$$\log\Gamma(s) = (s - \tfrac12)\log s - s + \tfrac12\ln(2\pi) - \int_0^{+\infty} B_1(t)\frac{\mathrm{d}t}{s+t} \qquad (s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-)$$

où dans le membre de droite, le logarithme complexe est pris en détermination principale et B_1 désigne la première fonction de Bernoulli. Nous omettons les détails. □

Notons à fins de référence ultérieure que

$$D'(u) \asymp \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} \qquad (u > 0). \tag{5·20}$$

5·2·2. *Évaluation d'une intégrale complexe*

Pour $\lambda > 0$, $s = \alpha + i\tau \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant |\tau|T < \alpha\lambda$, $\zeta \in \mathbb{C}$, posons

$$I(\lambda, s; T, \zeta) := \int_{-T}^{T} \Gamma\Big(\frac{\lambda + i\tau + it}{s}\Big)\mathrm{e}^{t\zeta}\,\mathrm{d}t.$$

On vérifie sans peine que cette intégrale est bien définie car l'argument de la fonction Γ est de partie réelle positive dans l'intégrande.

Lemme 5.5. *Il existe $c_0 > 0$ tel que, notant $s := \alpha + i\tau$ et sous les conditions*

$$0 < \alpha \leqslant \min(\tfrac13, T), \quad |\tau| \leqslant \tfrac18\alpha, \quad T|\tau| \leqslant \tfrac16\alpha\lambda, \quad \lambda|\tau| \leqslant \tfrac18 T\alpha,$$
$$|\tau|\log\Big(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\Big) \leqslant \frac{c_0\alpha T}{\lambda + T}, \quad |\Re e\,(s\zeta)| < \frac{T}{40(\lambda+T)}, \quad |\tau\Im m\,(s\zeta)| \leqslant \frac{\alpha T}{40(T+\lambda)},$$

on ait

$$I(\lambda, s; T, \zeta) = 2\pi s\mathrm{e}^{-\exp(is\zeta) + i(\lambda+i\tau)\zeta} + O\bigg((\lambda+\alpha)\Gamma\Big(\frac{\lambda}{\alpha}\Big)\mathrm{e}^{-T^2/\{6\alpha(\lambda+T)\}}\bigg). \tag{5·21}$$

Démonstration. Nous avons

$$I(\lambda,s;T,\zeta)=s\int_{-T/s}^{T/s}\Gamma\Big(\frac{\lambda+i\tau}{s}+it\Big)\mathrm{e}^{s\zeta t}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $r:=|s|$, $\vartheta:=\arg s\in[-\pi/16,\pi/16]$, de sorte que $|\vartheta|\leqslant\pi|\tau|/2r$, et remplaçons le segment d'intégration $[-T/s,T/s]$ par $[-T\alpha/r^2,T\alpha/r^2]$ dans la dernière intégrale. D'après le théorème des résidus, l'erreur commise est

$$\begin{aligned}
&\ll\max_{\varepsilon=\pm1}\alpha\int_0^{T|\tau|/r^2}\Big|\Gamma\Big(\mathrm{e}^{-i\vartheta}\frac{\lambda+i\tau}{r}+i\frac{T\alpha}{r^2}+\varepsilon h\Big)\mathrm{e}^{s\zeta(T\alpha/r^2+ih)}\Big|\,\mathrm{d}h\\
&\ll\max_{\varepsilon=\pm1}\alpha\int_0^{T|\tau|/r^2}\Big|\Gamma\Big(\frac{\lambda\cos\vartheta+\tau\sin\vartheta}{r}\pm h+i\frac{T\alpha+\alpha\tau-\varepsilon\lambda|\tau|}{r^2}\Big)\Big|\,\mathrm{e}^{T/\{20\alpha(T+\lambda)\}}\,\mathrm{d}h\\
&\ll\alpha\Gamma\Big(\frac{\lambda}{\alpha}\Big)\Big(\frac{2\lambda}{\alpha}\Big)^{2T|\tau|/\alpha^2}\mathrm{e}^{-T^2/\{5\alpha(\lambda+T)\}}\ll\alpha\Gamma\Big(\frac{\lambda}{\alpha}\Big)\mathrm{e}^{-T^2/\{6\alpha(\lambda+T)\}},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les majorations

$$\begin{aligned}
\frac{|\Gamma(x+iy)|^2}{\Gamma(x)^2}&=\prod_{k\geqslant0}\frac{1}{1+y^2/(k+x)^2}\\
&\leqslant\exp\Big\{-\tfrac12\sum_{k\geqslant y}\frac{y^2}{(k+x)^2}\Big\}\leqslant\mathrm{e}^{-y^2/(2x+2y)}\qquad(x>0,\ y\geqslant0),\\
\Gamma(x+y)&\ll\Gamma(x)(2x)^{|y|}\qquad\big(x>0,\ |y|\leqslant\tfrac12x\big).
\end{aligned}$$

En effet, il résulte de nos diverses hypothèses que

$$\frac{\lambda(1-\cos\vartheta)}{r}+\frac{\tau\sin\vartheta}{r}+\frac{T|\tau|}{r^2}\leqslant\frac{\lambda}{\alpha}\Big\{\tfrac12\vartheta^2+\frac{|\vartheta\tau|}{\lambda}+\frac{T|\tau|}{\alpha\lambda}\Big\}\leqslant\frac{\lambda}{\alpha}\Big\{\tfrac12\vartheta^2+\tfrac16|\vartheta|+\tfrac16\Big\}\leqslant\frac{\lambda}{2\alpha}\cdot$$

Nous pouvons alors étendre l'intégrale sur $[-T\alpha/r^2,T\alpha/r^2]$ à la droite réelle tout entière, la convergence étant assurée par la majoration de $|\Re e\,(s\zeta)|$. Notant R le terme résiduel de (5·21), il suit

$$I(\lambda,s;T,\zeta)=s\int_{\mathbb{R}}\Gamma\Big(\frac{\lambda+i\tau}{s}+it\Big)\mathrm{e}^{s\zeta t}\,\mathrm{d}t+O\big(R\big)=s\int_{\mathbb{R}}\Gamma\big(\mu+i(t+\nu)\big)\mathrm{e}^{s\zeta t}\,\mathrm{d}t+O\big(R\big)$$

où l'on a posé $\mu:=(\alpha\lambda+\tau^2)/|s|^2$, $\nu:=(\alpha-\lambda)\tau/|s|^2$, de sorte que $\mu+i\nu=(\lambda+i\tau)/s$. La dernière intégrale vaut

$$2\pi s\mathrm{e}^{(\mu+i\nu)is\zeta}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu+i\mathbb{R}}\Gamma(z)\mathrm{e}^{-is\zeta z}\,\mathrm{d}z=2\pi s\mathrm{e}^{(\mu+i\nu)is\zeta-\exp(is\zeta)},$$

en vertu de la formule d'inversion de Mellin

$$\mathrm{e}^{-\exp w}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu+i\mathbb{R}}\Gamma(z)\mathrm{e}^{-zw}\,\mathrm{d}z\qquad(\mu>0,\ |\Im m\,w|<\pi/2).$$

□

5·2·3. Une formule intégrale pour $D(x)$

Lemme 5.6. *Nous avons*

$$D(x) = \log x - \int_0^\infty \Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-u}} - \frac{1}{u}\Big)\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u \qquad (x>0). \tag{5·22}$$

Démonstration. Une formule de Gauss (cf. [32], § XII.12.3) permet d'écrire

$$D(x) := \int_0^\infty \Big(\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} - \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{1-\mathrm{e}^{-u}}\Big)\,\mathrm{d}u \qquad (x>0).$$

Le résultat annoncé découle alors de l'identité bien connue

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-ux}}{u}\,\mathrm{d}u = \log x \qquad (x>0).$$

□

5·3. Sommes sur les nombres premiers

Posant

$$\mathscr{L}(t) := \exp\big\{(\log T)^{3/5}/(\log_2 T)^{1/5}\big\} \quad (t\geqslant 0,\ T := t+3), \tag{5·23}$$

nous pouvons énoncer le théorème des nombres premiers sous la forme

$$\vartheta(t) := \sum_{p\leqslant t}\log p = t + O\big(t/\mathscr{L}(t)^{2c}\big) \qquad (t\geqslant 3) \tag{5·24}$$

où c est une constante positive convenable.

Lemme 5.7. *Soient $a,b\in\mathbb{R}^+$, $2\leqslant a<b$ et soit $\varphi\in\mathcal{C}^1([a,b])$ une fonction monotone. Pour tout entier $j\geqslant 0$, nous avons*

$$\sum_{a<p\leqslant b}\varphi(p)(\log p)^{j+1} = \int_a^b \varphi(t)(\log t)^j\,\mathrm{d}t + O_j\bigg(\frac{b|\varphi(b)|}{\mathscr{L}(b)^c} + \frac{a|\varphi(a)|}{\mathscr{L}(a)^c} + \int_a^b \frac{|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t}{\mathscr{L}(t)^c}\bigg)$$

où $c>0$ est la constante apparaissant dans (5·24).

Démonstration. Les estimations annoncées découlent classiquement, via (5·24), d'une intégration par parties. □

Lemme 5.8. *Soit $j\in\mathbb{Z}$. Pour x assez grand et $2\leqslant u\leqslant x^{19/40}$, nous avons*

$$\sum_{x-x/u<p\leqslant x}(\log p)^{j+1} \asymp \frac{x(\log x)^j}{u}, \tag{5·25}$$

$$\sum_{p\leqslant x} p^u(\log p)^{j+1} \asymp \frac{x^{1+u}(\log x)^j}{u}, \tag{5·26}$$

$$\sum_{p>x}\frac{(\log p)^{j+1}}{p^u} \asymp \frac{x^{1-u}(\log x)^j}{u}. \tag{5·27}$$

Démonstration. La majoration contenue dans (5·25) découle de celle de Montgomery & Vaughan [18]

$$\pi(x+y)-\pi(x)<\frac{2y}{\log y}\qquad (x,y\geqslant 2). \tag{5·28}$$

La minoration correspondante résulte de celle de Baker, Harman & Pintz [1]

$$\pi(x+x^{21/40})-\pi(x)>\frac{9}{100}\frac{x^{21/40}}{\log x}\qquad \big(x\geqslant x_0\big). \tag{5·29}$$

Les estimations (5·26) et (5·27) sont obtenues à partir de (5·25) en scindant les sommations en intervalles du type $]x\mathrm{e}^{k/u},x\mathrm{e}^{(k+1)/u}]$ $(k\in\mathbb{Z})$. Nous omettons les détails. □

Lemme 5.9. *Sous les conditions* $x\geqslant 2$, $0\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{12}$, $x^{(7/12)-\eta}\leqslant y\leqslant x/(\log x)^4$, *nous avons*

$$\pi(x)-\pi(x-y)=\frac{y}{\log x}\bigg\{1+O\Big(\eta^4+\Big(\frac{\log_2 x}{\log x}\Big)^4\Big)\bigg\}. \tag{5·30}$$

Démonstration. Il s'agit du théorème principal de [14]. □

Lemme 5.10. *Pour* x *suffisamment grand et* $\log x\leqslant u\leqslant x^{5/12}/\log x$, *nous avons*

$$\sum_{x/2<p\leqslant 2x}\frac{(p/x)^u\log p}{\{1+(p/x)^u\}^2}=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}\frac{x}{u}\cdot \tag{5·31}$$

Démonstration. Posons $K:=\lfloor x^{5/12}\rfloor$ et $x_k:=(2x)4^{-k/K}$ $(0\leqslant k\leqslant K)$, de sorte que $x_k\asymp x$ $(0\leqslant k\leqslant K)$. Comme $x_k-x_{k+1}\ll x_k^{7/12}$ uniformément pour $0\leqslant k\leqslant K$, nous obtenons, en choisissant $\eta(x_k)\asymp 1/\log x_k$ dans (5·30), l'estimation uniforme en k

$$\sum_{x_{k+1}<p\leqslant x_k}\log p=\{\log x+O(1)\}\{\pi(x_k)-\pi(x_{k+1})\}=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}(x_k-x_{k+1}).$$

Posons alors $\varphi(x,u,t):=(t/x)^u/\{1+(t/x)^u\}^2=\frac{1}{4}\operatorname{ch}^{-2}\{\frac{1}{2}u\log(t/x)\}$, de sorte que, toujours uniformément en k, nous pouvons écrire

$$\varphi(x,u,t)=\varphi(x,u,x_k)\Big\{1+O\Big(\frac{u}{x^{5/12}}\Big)\Big\}\qquad (0\leqslant k\leqslant K,\ x_{k+1}\leqslant t\leqslant x_k).$$

Comme $u/x^{5/12}\ll 1/\log x$, il s'ensuit que le membre de gauche de (5·31) vaut

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k\leqslant K-1}\sum_{x_{k+1}<p\leqslant x_k}\varphi(x,u,p)\log p&=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}\sum_{0\leqslant k\leqslant K-1}(x_k-x_{k+1})\varphi(x,u,x_k)\\ &=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}\sum_{0\leqslant k\leqslant K-1}\int_{x_{k+1}}^{x_k}\varphi(x,u,t)\,\mathrm{d}t=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}\int_{x/2}^{2x}\varphi(x,u,t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Enfin, en faisant appel à la seconde formule (5·41) *infra*, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_{x/2}^{2x}\varphi(x,u,t)\,\mathrm{d}t &= x\int_{1/2}^{2}\frac{t^u\,\mathrm{d}t}{(1+t^u)^2} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{u2^u}\Big)\Big\}x\int_0^\infty\frac{t^u\,\mathrm{d}t}{(1+t^u)^2}\\ &= \Big\{1+O\Big(\frac{1}{u2^u}\Big)\Big\}x\frac{\mathfrak{S}(u-1)}{u(u-1)} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{u^2}\Big)\Big\}\frac{x}{u}\cdot\end{aligned}$$

□

Lemme 5.11. *Soit $k\in\mathbb{Z}$. Il existe une constante $x_0=x_0(k)$ telle que l'on ait, uniformément pour $s>1$*

$$\sum_{p>x}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^s}\asymp_k\sum_{x<p\leqslant 2x}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^s}+(\log 2x)^{k+1}J_{-k}\big((s-1)\log 2x\big)\qquad(x>x_0).$$

En particulier, nous avons, uniformément pour $|\sigma|\leqslant\frac12\min(1/\log(2x),s-1)$,

$$\sum_{p>x}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^{s+\sigma}}\ll_k\sum_{p>x}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^s}\cdot\tag{5·32}$$

Démonstration. Pour $1<s\leqslant 2$, nous avons

$$\sum_{p>2x}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^s}\asymp\int_{2x}^\infty\frac{(\log u)^k}{u^s}\,\mathrm{d}u = J_{-k}\big((s-1)\log 2x\big)(\log 2x)^{k+1}.$$

Pour $s>2$, un découpage dyadique fournit

$$\sum_{p>2x}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^s}\ll\frac{x^{1-s}(\log x)^k}{2^s}$$

alors que nous avons trivialement

$$\sum_{x<p\leqslant 2x}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^s}\geqslant\sum_{x<p\leqslant 5x/3}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^s}\gg(3/5)^s x^{1-s}(\log x)^k.$$

D'où

$$\sum_{p>2x}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^s}\ll\sum_{x<p\leqslant 2x}\frac{(\log p)^{k+1}}{p^s},$$

ce qui établit le premier point, en vertu de (5·3) et (5·7).

Le second point est alors immédiat. □

Lemme 5.12. *Soit $\varepsilon \in]0,1[$ fixé. Il existe $x_0(\varepsilon) \geqslant 1$ tel que, sous les conditions $x \geqslant x_0(\varepsilon)$, $1 \leqslant u \leqslant x^{19/40}$, $|t| \leqslant x^{1-\varepsilon}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, on ait*

$$\sum_{x<p\leqslant x\mathrm{e}^{1/u}} \{\sin(\vartheta + t\log p)\}^2 \gg_\varepsilon \frac{xt^2}{u(u^2+t^2)\log x}. \tag{5·33}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $\vartheta \in [0,2\pi]$ et $t > 0$. Désignons par S la somme à minorer et posons $I :=]x, x\mathrm{e}^{1/u}]$.

Notant $\|v\| := \min_{n\in\mathbb{Z}} |v-n|$ $(v \in \mathbb{R})$, nous avons, pour tout $\nu \in]0, \frac12]$,

$$S \gg \sum_{p\in I} \left\| \frac{\vartheta + t\log p}{\pi} \right\|^2 \geqslant \nu^2(V-W), \tag{5·34}$$

avec

$$V := \sum_{p\in I} 1 \gg \frac{x}{u\log x}, \quad W := \sum_{\substack{p\in I \\ \|(\vartheta+t\log p)/\pi\|\leqslant\nu}} 1,$$

où la minoration de V résulte de (5·25).

Choisissons $\nu := ht/(u+t)$ où $h \in]0, \frac12]$ est une constante absolue qui sera précisée plus loin. Alors

$$W \ll \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{p\in I \\ k\pi-\nu\leqslant\vartheta+t\log p\leqslant k\pi+\nu}} 1.$$

La somme intérieure relève de (5·28). En observant que, pour $x \geqslant x_0(\varepsilon)$,

$$k\pi = t\log x + O(1+t/u), \quad k\pi + t\log(\nu/t) \asymp k,$$

nous obtenons

$$W \ll \frac{x\nu(1+t/u)}{t\log x} \ll \frac{hx}{u\log x}.$$

Pour h assez petite, nous avons donc $W \leqslant \frac12 V$. Cela implique la minoration annoncée en reportant dans (5·34). □

Le résultat suivant est relatif à l'équirépartition de la suite $\{t\log p\}_{p\in\mathcal{P}}$ modulo 1 où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Nous posons

$$W(z) := \exp\{z^{1/4}\} \qquad (z \geqslant 3). \tag{5·35}$$

Lemme 5.13. *Soient $c_1, c_2 > 0$. Pour $z \geqslant 3$, $1 < \sigma \leqslant W(\log z)^{c_1}$, $|t| \leqslant \exp\{(\log z)^{37/36}\}$, nous avons*

$$\sum_{p>z} \frac{\log p}{p^{\sigma+it}} = \frac{z^{1-\sigma-it}}{\sigma-1+it} + O\Big(\frac{z^{1-\sigma}}{W(\log z)^{c_2}}\Big). \tag{5·36}$$

Démonstration. Posons

$$\gamma_\varepsilon(t) := 1/\big\{\log(2+|t|)\big\}^{2(1+\varepsilon)/3} \quad (t\in\mathbb{R}), \qquad \mathscr{L}_\varepsilon(z) := \exp\big\{(\log z)^{(3/5)-\varepsilon}\big\} \quad (z\geqslant 3).$$

Le membre de gauche de (5·36) vaut classiquement

$$\sum_{n>z}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}} + O\big(z^{(1/2)-\sigma}\big) = \frac{z^{1-\sigma-it}}{\sigma-1+it} + O\bigg(\sigma z^{1-\sigma}\Big\{\frac{1}{\mathscr{L}_\varepsilon(z)^2} + z^{-\gamma_\varepsilon(t)}\Big\}\bigg)$$

où la seconde estimation peut être établie par intégration complexe — cf. [29], (III.5.72).

Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{12}$. Les conditions $|t| \leqslant \exp\big\{(\log z)^{1+\varepsilon/3}\big\}$ et $\sigma \leqslant W(\log z)^{c_1}$ impliquent

$$\sigma\Big\{\frac{1}{\mathscr{L}_\varepsilon(z)^2} + z^{-\gamma_\varepsilon(t)}\Big\} \ll \frac{1}{W(\log z)^{c_2}},$$

d'où (5·36). □

5·4. Une famille d'intégrales

Pour $j,\ell,m,n\in\mathbb{Z}$, $r := \ell+m+n-1$, $\sigma>0$, $\kappa>0$, $n\kappa+r\sigma>1$, nous définissons

$$\mathcal{Y}_{j\ell mn} = \mathcal{Y}_{j\ell mn}(\sigma,\kappa) := \int_2^\infty \frac{(\log t)^j t^{m\kappa}}{(t^\sigma-1)^{\ell-1}\{1+t^\kappa(t^\sigma-1)\}^{m+n}}\,\mathrm{d}t. \tag{5·37}$$

Pour certaines valeurs des indices, ces intégrales interviennent, via le théorème des nombres premiers, dans l'estimation des dérivées successives de la fonction $f(\sigma,\kappa)$ définie en (3·2).

Nos approximations sont exprimées en fonction des intégrales J_k définies en (3·14) et de la fonction $\mathfrak{S}$ définie par

$$\mathfrak{S}(t) := \frac{\pi t/(1+t)}{\sin\big\{\pi t/(1+t)\big\}} \qquad (t>0) \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}(0) := 1. \tag{5·38}$$

Notons en particulier que

$$\mathfrak{S}(t) \asymp 1+t, \quad \mathfrak{S}(t)-1 \asymp \frac{t^2}{1+t}, \quad \frac{\mathfrak{S}(t)}{1+t} - 1 \ll \frac{t}{1+t} \qquad (t>0). \tag{5·39}$$

La fonction $\mathfrak{S}$ permet le calcul des intégrales

$$M(m,n,s) := \int_0^\infty \frac{t^{ms}\,\mathrm{d}t}{(1+t^s)^{m+n}} \qquad (s>1).$$

Le changement de variable $u := t^s/(t^s+1)$ ramène le calcul de $M(m,n,s)$ à celui d'une fonction Bêta d'Euler. En utilisant alors l'équation fonctionnelle de la fonction Γ et la formule des compléments, nous obtenons

$$M(m,n,s) = \frac{\mathfrak{S}(s-1)}{s-1}\prod_{1\leqslant k\leqslant m+n-1}\Big|1-\frac{1+ms}{ks}\Big|. \tag{5·40}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^s} = \frac{\mathfrak{S}(s-1)}{s-1}, \quad \int_0^\infty \frac{t^s}{(1+t^s)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathfrak{S}(s-1)}{s(s-1)},\\ &\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^s)^2} = \frac{\mathfrak{S}(s-1)}{s}\end{aligned} \qquad (s>1), \tag{5·41}$$

alors qu'une intégration par parties fournit

$$\int_0^\infty \log\Big(1+\frac{1}{t^s}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{s\mathfrak{S}(s-1)}{s-1}\cdot \tag{5·42}$$

Dans toute la suite, pour $\sigma>0$, $\kappa \geqslant 1-\sigma$, nous notons $X := X(\sigma,\kappa)$ l'unique solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation

$$\mathrm{e}^{\kappa X}(\mathrm{e}^{\sigma X}-1) = 1, \tag{5·43}$$

et nous posons systématiquement

$$\xi := \kappa+\sigma-1 \geqslant 0, \quad r := \ell+m+n-1, \quad \vartheta := n\kappa + r\sigma - 1. \tag{5·44}$$

Commençons par expliciter quelques relations asymptotiques liant σ, κ et X.

Lemme 5.14. *Sous les conditions $\sigma>0$, $\kappa+\sigma\geqslant 1$ et $X(\sigma,\kappa)>\log 2$, nous avons*

$$0<\sigma X \leqslant \log 2, \tag{5·45}$$

$$1 \asymp \sigma X \mathrm{e}^{\kappa X} = 1+O(\sigma X), \tag{5·46}$$

$$\mathrm{e}^X = \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma X}\big\{1+O(\sigma X)\big\}, \quad \mathrm{e}^X \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma X}, \tag{5·47}$$

$$\mathrm{e}^{\kappa X} \asymp \frac{1+\kappa/\sigma}{\log(1+\kappa/\sigma)}, \quad X \asymp \frac{\log(1+1/\sigma)}{\kappa}\cdot \tag{5·48}$$

De plus, pour toute constante $\eta\in]0,1]$ et σ assez petit, la relation $\kappa\log(1+\kappa)\leqslant \eta\log(1/\sigma)$ implique $X\gg \log_2(1/\sigma)$ et

$$\kappa \leqslant \mathrm{e}^{\eta X\{1+O(\varepsilon)\}} \tag{5·49}$$

où l'on a posé $\varepsilon := \{\log_2(1/\sigma)\}/\log_3(1/\sigma)$.

Démonstration. L'encadrement (5·45), qui implique $0<\sigma<1$, est immédiat. La relation (5·46) en résulte via la formule $\sigma X \asymp \mathrm{e}^{\sigma X}-1 = \sigma X\{1+O(\sigma X)\}$ par insertion dans (5·43). Les relations (5·47) sont de simples reformulations de (5·46). Nous déduisons enfin de (5·46) que $\mathrm{e}^{\kappa X}\kappa X \asymp \kappa/\sigma$, ce qui implique la première estimation de (5·48). La seconde est alors immédiate.

Sous l'hypothèse $\kappa\log(1+\kappa)\leqslant \eta\log(1/\sigma)$, nous avons $X\gg (1/\eta)\log_2(1/\sigma)$ d'après (5·48). Enfin

$$\kappa\log\kappa \leqslant \eta\log(1/\sigma) \leqslant \eta\kappa X + O(\log\kappa X) = \eta\kappa X\{1+O(\varepsilon)\}.$$

Cela implique bien (5·49). □

Remarque. En vue des applications arithmétiques correspondant au cas $(\sigma,\kappa)=(\alpha,\beta)$ défini par (2·2), nous privilégierons dans les énoncés l'emploi systématique de (5·47).

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous allégeons les notations en omettant les indices j,ℓ,m,n. Nous posons ainsi

$$\mathfrak{g}(t) := \frac{(\log t)^j t^{m\kappa}}{(t^\sigma-1)^{\ell-1}\{1+t^\kappa(t^\sigma-1)\}^{m+n}}, \quad \mathfrak{h}(t) := \frac{(\log t)^j}{t^{n\kappa}(t^\sigma-1)^r}, \tag{5·50}$$

$$\widetilde{\mathfrak{g}}(t) := \frac{t^{m(\kappa+\sigma)}}{\{1+t^{\kappa+\sigma}\}^{m+n}}, \quad \widetilde{\mathfrak{h}}(t) := \frac{1}{t^{n(\kappa+\sigma)}}, \tag{5·51}$$

$$A(\sigma,\kappa) := \int_0^1 \widetilde{\mathfrak{g}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \{\widetilde{\mathfrak{g}}(t)-\widetilde{\mathfrak{h}}(t)\}\,\mathrm{d}t. \tag{5·52}$$

À fins de référence ultérieure, nous observons d'une part qu'un calcul de routine implique, dès que $n\geqslant 1$, $m\geqslant 0$,

$$A(\sigma,\kappa) \leqslant \int_0^1 \widetilde{\mathfrak{g}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \{\widetilde{\mathfrak{h}}(t)-\widetilde{\mathfrak{g}}(t)\}\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{1+m(1+\xi)}, \tag{5·53}$$

et, d'autre part, que, sous l'hypothèse supplémentaire $\kappa+\sigma>1$, nous avons $\widetilde{\mathfrak{h}}\in L^1[1,\infty[$ et

$$A(\sigma,\kappa) = M(m,n,\kappa+\sigma) - 1/(n\kappa+n\sigma-1). \tag{5·54}$$

Rappelons la notation ϑ en (5·44).

Lemme 5.15. *Pour tous $j,\ell,m,n\in\mathbb{Z}$ satisfaisant à $n\geqslant 1$, $m\geqslant 0$, $r\geqslant 1$, et uniformément sous les conditions*

$$0<\sigma<\tfrac14, \quad \kappa+\sigma\geqslant 1, \quad n\kappa+r\sigma>1, \quad X(\sigma,\kappa)\geqslant 1, \tag{5·55}$$

nous avons

$$\mathcal{Y}(\sigma,\kappa) \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\vartheta X}X^j}{(\sigma X)^r(1+m\kappa)} + X^{j+1}J_{-j}\big(\vartheta X\big) + \frac{X^{j+1}}{(\sigma X)^r}J_{r-j}\big(\vartheta X\big), \tag{5·56}$$

$$\mathcal{Y}(\sigma,\kappa) = \frac{\mathrm{e}^{-\vartheta X}X^j}{(\sigma X)^r}A(\sigma,\kappa) + X^{j+1}\int_1^\infty \frac{u^j\mathrm{e}^{-u\vartheta X}}{(1-\mathrm{e}^{-u\sigma X})^r}\,\mathrm{d}u + O(R) \tag{5·57}$$

avec $R := \mathrm{e}^{-\vartheta X}X^{j-1}/\{(\sigma X)^r(1+m\kappa)\} \asymp \mathrm{e}^{(1+m\kappa)X}X^{j-1}/\{(\sigma X)^{\ell-1}(1+m\kappa)\} \ll \mathcal{Y}(\sigma,\kappa)/X$.

Démonstration. Nous avons trivialement $\mathcal{Y}(\sigma,\kappa)\asymp Y_1+Y_2$ avec

$$Y_1:=\int_2^{\mathrm{e}^X}\frac{(\log t)^j t^{m\kappa}}{(\sigma\log t)^{\ell-1}}\,\mathrm{d}t,\qquad Y_2:=\int_{\mathrm{e}^X}^{\infty}\frac{(\log t)^j}{t^{n\kappa}(t^\sigma-1)^r}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$Y_1\asymp\frac{X^j\mathrm{e}^{(1+m\kappa)X}}{(\sigma X)^{\ell-1}(1+m\kappa)}\asymp\frac{X^j\mathrm{e}^{-\vartheta X}}{(\sigma X)^r(1+m\kappa)}$$

où la seconde expression est obtenue par insertion de la relation $\sigma X\asymp\mathrm{e}^{-\kappa X}$. Pour estimer Y_2, nous utilisons la formule

$$\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-u})^r}\asymp 1+\frac{1}{u^r}\qquad(u>0,\ r\geqslant 1).\tag{5·58}$$

Il suit

$$Y_2\asymp\int_{\mathrm{e}^X}^{\infty}\frac{(\log t)^j}{t^{n\kappa+r\sigma}}\bigg\{1+\frac{1}{(\sigma\log t)^r}\bigg\}\,\mathrm{d}t$$

ce qui implique (5·56), après changement de variable. On remarque que chacun des trois termes du membre de droite est susceptible de dominer les deux autres.

Pour établir (5·57), décomposons $\mathcal{Y}(\sigma,\kappa)=\sum_{1\leqslant k\leqslant 3}\mathcal{Y}^{(k)}$, avec

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^{(1)}&:=\int_2^{\mathrm{e}^X/X}\mathfrak{g}(t)\,\mathrm{d}t+\int_{X\mathrm{e}^X}^{\infty}\{\mathfrak{g}(t)-\mathfrak{h}(t)\}\,\mathrm{d}t,\\ \mathcal{Y}^{(2)}&:=\int_{\mathrm{e}^X/X}^{\mathrm{e}^X}\mathfrak{g}(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\mathrm{e}^X}^{X\mathrm{e}^X}\{\mathfrak{g}(t)-\mathfrak{h}(t)\}\,\mathrm{d}t,\\ \mathcal{Y}^{(3)}&:=\int_{\mathrm{e}^X}^{\infty}\mathfrak{h}(t)\,\mathrm{d}t=X^{j+1}\int_1^{\infty}\frac{u^j\mathrm{e}^{-u\vartheta X}}{(1-\mathrm{e}^{-u\sigma X})^r}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

et observons que

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(t)-\mathfrak{h}(t)&=\frac{(\log t)^j\big[\{t^\kappa(t^\sigma-1)\}^{m+n}-\{1+t^\kappa(t^\sigma-1)\}^{m+n}\big]}{(t^\sigma-1)^r t^{n\kappa}\{1+t^\kappa(t^\sigma-1)\}^{m+n}}\\ &\ll\frac{(\log t)^j}{(t^\sigma-1)^r t^{n\kappa}\{1+t^\kappa(t^\sigma-1)\}}.\end{aligned}$$

Nous avons tout d'abord

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^{(1)}&\ll\sigma^{1-\ell}\int_2^{\mathrm{e}^X/X}(\log t)^{j-\ell+1}t^{m\kappa}\,\mathrm{d}t+\int_{X\mathrm{e}^X}^{\infty}\frac{(\log t)^j}{t^{(n+1)\kappa}(\sigma\log t)^{r+1}}\,\mathrm{d}t\\ &\ll\frac{X^j\mathrm{e}^{(1+m\kappa)X}}{(\sigma X)^{\ell-1}X^{1+m\kappa}(1+m\kappa)}+\int_{X\mathrm{e}^X}^{\infty}\frac{(\log t)^j}{t^{(n+1)\kappa+(r+1)\sigma}}\bigg\{1+\frac{1}{(\sigma\log t)^{r+1}}\bigg\}\,\mathrm{d}t\ll R,\end{aligned}$$

grâce à (5·3) et (5·7), compte tenu du fait que $(n+1)\kappa+(r+1)\sigma\gg 1$.

Ensuite, les approximations

$$(t\mathrm{e}^X)^\sigma - 1 = (\mathrm{e}^{\sigma X} - 1)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log t}{X}\Big)\Big\} \quad \text{et} \quad (t\mathrm{e}^X)^\kappa\{(t\mathrm{e}^X)^\sigma - 1\} = t^{\kappa+\sigma}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log t}{X}\Big)\Big\}$$

valides pour $1/X \leqslant t \leqslant X$, permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^{(2)} &= \mathrm{e}^X \int_{1/X}^1 \mathfrak{g}\big(t\mathrm{e}^X\big)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^X \int_1^X \{\mathfrak{g}\big(t\mathrm{e}^X\big) - \mathfrak{h}\big(t\mathrm{e}^X\big)\}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^X X^j}{(\mathrm{e}^{\sigma X} - 1)^{\ell+m-1}}\bigg\{\int_{1/X}^1 \widetilde{\mathfrak{g}}(t)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log t}{X}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}t \\ &\qquad\qquad + \int_1^X \{\widetilde{\mathfrak{g}}(t) - \widetilde{\mathfrak{h}}(t)\}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log t}{X}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}t\bigg\}.\end{aligned}$$

En estimant e^X par (5·47), puis (5·47) sous la forme

$$\mathrm{e}^{-\xi X} = \{1 + O(\sigma X)\}\mathrm{e}^{-\vartheta X}/(\sigma X)^{n-1}, \tag{5·59}$$

et enfin (5·53), nous obtenons

$$\mathcal{Y}^{(2)} = A(\sigma,\kappa)\frac{\mathrm{e}^{-\vartheta X} X^j}{(\sigma X)^r} + O(R).$$

Compte tenu de la seconde expression de $\mathcal{Y}^{(3)}$, cela implique bien (5·57). □

L'énoncé suivant contient l'essentiel de nos évaluations concernant les intégrales (5·37). Nous nous limitons aux cas utiles pour les dérivées d'ordre un et deux de $f(\sigma,\kappa) = \log \mathscr{F}(\sigma,\kappa)$, soit

$$j \in \{0,1\}, \quad \ell \geqslant 0, \quad m \in \{0,1\}, \quad n \in \{1,2\}. \tag{5·60}$$

Lemme 5.16. *Sous les conditions* (5·55), *nous avons*

$$\mathcal{Y}_{1\ell 02}(\sigma,\kappa) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^\ell X^{\ell-1}} \qquad (\ell \geqslant 1), \tag{5·61}$$

$$\mathcal{Y}_{1\mathbf{0}11}(\sigma,\kappa) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\frac{D'(\xi/\sigma)\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^2}, \tag{5·62}$$

$$\mathcal{Y}_{1\ell 11}(\sigma,\kappa) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\frac{J_\ell\big((\xi+\sigma)X\big)}{\sigma^{\ell+1}X^{\ell-1}} \qquad (\ell \geqslant 1), \tag{5·63}$$

$$\mathcal{Y}_{0101}(\sigma,\kappa) = \frac{\mathfrak{S}(\xi)J_1(\xi X) + \log(\xi/\sigma) - D(\xi/\sigma)}{\sigma} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma X^2}\Big), \tag{5·64}$$

$$\mathcal{Y}_{0\ell 01}(\sigma,\kappa) = \mathfrak{S}(\xi)\frac{J_\ell(\xi X)}{\sigma^\ell X^{\ell-1}} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^\ell X^{\ell+1}}\Big) \qquad (\ell \geqslant 2), \tag{5·65}$$

$$\begin{aligned}&\int_2^\infty \log\Big(1 + \frac{1}{t^\kappa(t^\sigma - 1)}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{\log t} \\ &\qquad = \frac{\mathfrak{S}(\xi)}{\sigma X}\Big\{\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{X} + J_2(\xi X)\Big\} + \log(1 + 1/\xi) + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}\kappa}{\sigma X^3}\Big).\end{aligned} \tag{5·66}$$

De plus les relations (5·61), (5·63) *et* (5·65) *sont également valides lorsque* $\sigma + \kappa = 1$.

Démonstration. Commençons par établir les relations (5·61), (5·63) et (5·65), pour lesquelles $r \geqslant 2$, ce qui permet de faire appel à la formule

$$\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-t})^r} = \frac{1}{t^r} + O\Big(\frac{1}{t^{r-1}}+1\Big) \quad (t>0) \tag{5·67}$$

pour estimer le second terme du membre de droite de (5·57), pour lequel nous conservons la notation $\mathcal{Y}^{(3)}$. Cette démarche est justifiée par le fait que l'intégrale correspondante est dominée par les petites valeurs de la variable u. Il suit

$$\mathcal{Y}^{(3)} = X^{j+1}\bigg\{\frac{J_{r-j}(\vartheta X)}{(\sigma X)^r} + O\bigg(\frac{J_{r-j-1}(\vartheta X)}{(\sigma X)^{r-1}} + J_{-j}(\vartheta X)\bigg)\bigg\}. \tag{5·68}$$

Montrons (5·61). Nous avons $j=1$, $m=0$, $n=2$, $r=\ell+1$. Compte tenu des estimations de J_k et du fait que $\vartheta \gg 1$, l'estimation (5·68) implique

$$\mathcal{Y}^{(3)} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{X^2 J_\ell(\vartheta X)}{(\sigma X)^{\ell+1}} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{X\mathrm{e}^{-\vartheta X}}{(\sigma X)^{\ell+1}\,\vartheta}.$$

De plus, par (5·54) et (5·40), nous avons

$$A(\sigma,\kappa) = \frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi} - \frac{1}{n(1+\xi)-1} = \frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi} - \frac{1}{\vartheta} + O(\sigma)$$

d'où, en reportant dans (5·57),

$$\mathcal{Y}(\sigma,\kappa) = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\frac{X\mathrm{e}^{-\vartheta X}}{(\sigma X)^{\ell+1}},$$

ce qui implique bien (5·61), compte tenu de (5·59).

Considérons ensuite (5·63), correspondant donc à $j=1$, $r=\ell+1\geqslant 2$, $\vartheta=\xi+\ell\sigma$. Nous déduisons alors de (5·3) et (5·7) que $(\sigma X)^r J_{-1}(\vartheta X)/J_\ell(\vartheta X) \ll 1/X$. Par (5·68), il suit

$$\mathcal{Y}^{(3)} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{X^2 J_\ell(\vartheta X)}{(\sigma X)^{\ell+1}}.$$

En reportant dans (5·57) compte tenu de (5·54), nous obtenons

$$\mathcal{Y}(\sigma,\kappa) = \frac{\mathrm{e}^{-\vartheta X}X}{(\sigma X)^r}\bigg(\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{\xi(\xi+1)} - \frac{1}{\xi}\bigg) + \frac{X^2 J_\ell(\vartheta X)}{(\sigma X)^r}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}.$$

Si $\xi X \leqslant 1$, alors $\{\mathfrak{S}(\xi)/(\xi+1)\}-1 \ll \xi \ll 1/X$. Comme cette condition implique également $J_\ell(\vartheta X)\gg 1$, il vient

$$\mathcal{Y}(\sigma,\kappa) = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{X^2 J_\ell(\vartheta X)}{(\sigma X)^r} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\frac{X^2 J_\ell(\vartheta X)}{(\sigma X)^r}.$$

Si $\xi X > 1$, nous avons

$$\mathrm{e}^{-\vartheta X} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\mathrm{e}^{-\xi X}, \quad J_\ell(\vartheta X) = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}J_\ell(\xi X).$$

Nous pouvons alors conclure la preuve de (5·63) en remarquant que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}X}{(\sigma X)^r}\bigg(\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{\xi(\xi+1)} - \frac{1}{\xi}\bigg) + \frac{X^2 J_\ell(\xi X)}{(\sigma X)^r} - \frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\frac{X^2 J_\ell(\xi X)}{(\sigma X)^r}\\ \ll \frac{X^2}{(\sigma X)^r}\bigg(\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{\xi+1}-1\bigg)\bigg(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\xi X} - J_\ell(\xi X)\bigg) \ll \frac{X J_\ell(\xi X)}{(\sigma X)^r},\end{aligned}$$

où l'on a fait appel à (5·6) et à la dernière majoration (5·39).

Nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite de cette démonstration une variante du calcul précédent : pour tout $k \geqslant 1$, nous avons

$$\mathrm{e}^{-\xi X}\frac{\big(\mathfrak{S}(\xi)-1\big)}{\xi X}+J_k(\xi X)=\mathfrak{S}(\xi)J_k(\xi X)+O\left(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{X^2}\right)\qquad(\xi>0). \tag{5·69}$$

Cette estimation est obtenue en soustrayant au membre de gauche le premier terme du membre de droite et en factorisant le terme $\mathfrak{S}(\xi)-1$: le résultat découle alors de (5·6) et de la deuxième estimation de (5·39).

Prouvons à présent (5·65). Nous avons $j=m=0$, $n=1$, $r=\ell\geqslant 2$. Les estimations (5·57) et (5·59) permettent d'écrire successivement

$$\mathcal{Y}(\sigma,\kappa)=\frac{\mathrm{e}^{-\vartheta X}}{\sigma^\ell X^\ell}\left(\frac{\mathfrak{S}(\xi)-1}{\xi}\right)+\mathcal{Y}^{(3)}+O(R)=\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^\ell X^\ell}\left(\frac{\mathfrak{S}(\xi)-1}{\xi}\right)+\mathcal{Y}^{(3)}+O(R),$$

où le terme d'erreur est acceptable au vu de l'estimation annoncée. Estimons alors $\mathcal{Y}^{(3)}$ par (5·68). Les termes restes sont à nouveau acceptables. Le terme principal relève du Lemme 5.2(iii) qui fournit $J_\ell(\vartheta X)=\{1+O(1/X^2)\}J_\ell(\xi X)$, d'où

$$\mathcal{Y}^{(3)}=\frac{XJ_\ell(\xi X)}{\sigma^\ell X^\ell}+O(R).$$

L'estimation (5·69) permet alors de conclure.

Pour établir (5·62), avec donc $j=m=n=r=1$, $\ell=0$, $\vartheta=\xi$, nous déduisons de (5·57) et (5·68) sous la forme $\mathcal{Y}^{(3)}=\{1+O(\sigma X+\sigma/\xi)\}\mathrm{e}^{-\xi X}/(\sigma\xi)$ que

$$\mathcal{Y}(\sigma,\kappa)=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}+\frac{\sigma}{\xi}\Big)\Big\}\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}\mathfrak{S}(\xi)}{\sigma\xi(1+\xi)}.$$

Compte tenu de la relation

$$D'\Big(\frac{\xi}{\sigma}\Big)=\frac{\sigma}{\xi}+O\Big(\frac{\sigma^2}{\xi^2}\Big)\qquad(\xi\geqslant\sigma),$$

nous obtenons ainsi la validité de (5·62) lorsque $\xi>\sigma X$.

Lorsque $\xi\leqslant\sigma X$, nous remplaçons (5·68) par l'évaluation plus précise

$$\mathcal{Y}^{(3)}=\int_X^\infty\frac{u\mathrm{e}^{-\xi u}}{1-\mathrm{e}^{-\sigma u}}\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty\frac{u\mathrm{e}^{-\xi u}}{1-\mathrm{e}^{-\sigma u}}\,\mathrm{d}u+O\Big(\frac{X}{\sigma}\Big)=\frac{D'(\xi/\sigma)}{\sigma^2}+O\Big(\frac{X}{\sigma}\Big)$$

et appliquons la dernière majoration (5·39) pour obtenir

$$\mathcal{Y}(\sigma,\kappa)=\frac{D'(\xi/\sigma)}{\sigma^2}+O\Big(\frac{X}{\sigma}\Big)=\frac{D'(\xi/\sigma)}{\sigma^2}\big\{1+O(\sigma X^2)\big\},$$

où pour la seconde estimation nous avons utilisé la décroissance de D' sous la forme $D'(\xi/\sigma)\geqslant D'(X)\gg 1/X$ $(\xi\leqslant\sigma X)$. Comme $\mathfrak{S}(\xi)\mathrm{e}^{-\xi X}/(1+\xi)=1+O(\xi X)$ lorsque $\xi\leqslant\sigma X$, nous obtenons à nouveau (5·62).

Considérons à présent (5·64). Pour $(j,\ell,m,n)=(0,1,0,1)$, la formule (5·57) s'écrit

$$\mathcal{Y}(\sigma,\kappa)=\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma X}\Big(\frac{\mathfrak{S}(\xi)-1}{\xi}\Big)+\int_X^\infty\frac{\mathrm{e}^{-u\xi}}{1-\mathrm{e}^{-\sigma u}}\,\mathrm{d}u+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma X^2}\Big). \tag{5·70}$$

La dernière intégrale vaut

$$\frac{J_1(\xi X)}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma X}^\infty\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-u}}-\frac{1}{u}\Big)\mathrm{e}^{-\xi u/\sigma}\,\mathrm{d}u=\frac{J_1(\xi X)+\log(\xi/\sigma)-D(\xi/\sigma)}{\sigma}+O(X)$$

d'après le Lemme 5.6, et où nous avons utilisé le fait que $1/(1-\mathrm{e}^{-u})-1/u\in[\frac12,1]$ pour $u>0$. En reportant dans (5·70) et en utilisant (5·69) avec $k=1$, nous obtenons bien (5·64).

Il reste à prouver (5·66). Désignons par $\mathcal{Y}_0(\sigma,\kappa)$ le membre de gauche et posons

$$\mathfrak{g}_0(t):=\log\Big(1+\frac{1}{t^\kappa(t^\sigma-1)}\Big)\frac{1}{\log t},\qquad \mathfrak{h}_0(t):=\frac{1}{t^\kappa(t^\sigma-1)\log t}.$$

Nous commençons par établir un analogue de (5·57). La méthode étant identique, nous nous contentons de brèves indications. Nous obtenons successivement

$$\int_2^{\mathrm{e}^X/X^2}\mathfrak{g}_0(t)\,\mathrm{d}t\ll\int_2^{\mathrm{e}^X/X^2}\log\Big(\frac{\mathrm{e}^{\kappa X}X}{t^\kappa\log t}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{\log t}\ll\frac{\mathrm{e}^X\kappa}{X^2},$$

où la première borne résulte de l'évaluation $1/\sigma\asymp X\mathrm{e}^{\kappa X}$, et

$$\int_{X^2\mathrm{e}^X}^\infty\{\mathfrak{g}_0(t)-\mathfrak{h}_0(t)\}\,\mathrm{d}t\ll\int_{X^2\mathrm{e}^X}^\infty\frac{\mathrm{d}t}{t^{2\kappa}(t^\sigma-1)^2\log t}\ll\frac{\mathrm{e}^X}{X^3},$$

où nous avons utilisé la minoration $\kappa\geqslant 3/4$. Nous avons ensuite

$$\int_{\mathrm{e}^X/X^2}^{\mathrm{e}^X}\mathfrak{g}_0(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^X}{X}\int_0^1\log\Big(1+\frac{1}{t^{\kappa+\sigma}}\Big)\,\mathrm{d}t+O\Big(\frac{\mathrm{e}^X\kappa}{X^2}\Big),$$

$$\int_{\mathrm{e}^X}^{X^2\mathrm{e}^X}\{\mathfrak{g}_0(t)-\mathfrak{h}_0(t)\}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^X}{X}\int_1^\infty\Big\{\log\Big(1+\frac{1}{t^{\kappa+\sigma}}\Big)-\frac{1}{t^{\kappa+\sigma}}\Big\}\,\mathrm{d}t+O\Big(\frac{\mathrm{e}^X\kappa}{X^2}\Big),$$

d'où

$$\mathcal{Y}_0(\sigma,\kappa)=\frac{\mathrm{e}^X}{X}B(\sigma+\kappa)+\int_{\mathrm{e}^X}^\infty\frac{\mathrm{d}t}{t^\kappa(t^\sigma-1)\log t}+O\Big(\frac{\mathrm{e}^X\kappa}{X^2}\Big) \tag{5·71}$$

avec

$$B(\sigma+\kappa):=\int_0^\infty\log\Big(1+\frac{1}{t^{\kappa+\sigma}}\Big)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{\xi}=\mathfrak{S}(\xi)+\frac{\mathfrak{S}(\xi)-1}{\xi}\cdot$$

L'intégrale de (5·71) vaut

$$\begin{aligned}\int_X^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi u}}{(1-\mathrm{e}^{-\sigma u})u}\,\mathrm{d}u &= J_1(\xi X) + \int_X^\infty \frac{\mathrm{e}^{-(\xi+\sigma)u}}{(1-\mathrm{e}^{-\sigma u})u}\,\mathrm{d}u \\ &= J_1(\xi X) + \frac{J_2(\xi X+\sigma X)}{\sigma X} + \int_X^\infty \frac{\mathrm{e}^{-(\xi+\sigma)u}}{u}\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sigma u}} - \frac{1}{\sigma u}\Big)\,\mathrm{d}u \\ &= J_1(\xi X) + \frac{J_2\big(\{\xi+\sigma\}X\big)}{\sigma X} + O\big(J_1\big(\{\xi+\sigma\}X\big)\big) \\ &= \log(1+1/\xi) + \frac{J_2\big(\{\xi+\sigma\}X\big)}{\sigma X} + O(X),\end{aligned}$$

où la dernière estimation résulte de (5·8). En insérant successivement dans (5·71), l'estimation (5·46), la formule $J_2\big(\{\xi+\sigma\}X\big) = J_2\big(\xi X\big) + O(\sigma\kappa X^2)$, qui découle de (5·8), et (5·69) avec $k=2$, nous obtenons finalement (5·66). □

5·5. *Une famille de séries*

Parallèlement aux intégrales $\mathcal{Y}_{j\ell mn}$ définies en (5·37), nous introduisons, pour

$$j,\ell,m,n\in\mathbb{Z},\quad \sigma>0,\quad \kappa>0,$$

les séries

$$S_{j\ell mn} = S_{j\ell mn}(\sigma,\kappa) := \sum_p \frac{(\log p)^{j+1}p^{m\kappa}}{(p^\sigma-1)^{\ell-1}\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^{m+n}}, \tag{5·72}$$

convergentes dès que $n\kappa+(\ell+m+n-1)\sigma>1$, et qui interviennent, pour certaines valeurs des indices, dans le calcul des dérivées d'ordre au plus 2 de la fonction $f(\sigma,\kappa)$ définie en (3·2).

Lemme 5.17. *Soient $j\in\mathbb{N}$, $n\in\{1,2\}$, $\ell\in\mathbb{N}^*$. Avec les notations* (5·72) *et* (5·37)*, et sous les conditions $0<\sigma<\frac14$, $\kappa+\sigma\geqslant 1$, $n\kappa+(n+\ell-1)\sigma>1$, $X(\sigma,\kappa)\geqslant 1$, nous avons*

$$S_{j\ell 0n}(\sigma,\kappa) = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\mathscr{L}(\mathrm{e}^X)^c}\Big)\Big\}\,\mathcal{Y}_{j\ell 0n}(\sigma,\kappa), \tag{5·73}$$

où c est une constante absolue positive.

Démonstration. D'après le Lemme 5.7, nous avons, pour une constante absolue convenable $c>0$,

$$S_{j\ell 0n} = \int_2^\infty \frac{(\log t)^j}{(t^\sigma-1)^{\ell-1}\{1+t^\kappa(t^\sigma-1)\}^n}\,\mathrm{d}t + O\Big(\frac{1}{\sigma^{\ell-1}} + \int_2^\infty \frac{\varphi(t)(\log t)^j}{\mathscr{L}(t)^c}\,\mathrm{d}t\Big)$$

avec $\varphi(t) := 1/[(t^\sigma-1)^{\ell-1}\{1+t^\kappa(t^\sigma-1)\}^n]$. Scindons la dernière intégrale à $t=\mathrm{e}^X$ et observons que $\varphi(t)\asymp 1/\{\sigma\log t\}^{\ell-1}$ si $2\leqslant t\leqslant \mathrm{e}^X$. Par un calcul de routine, il suit

$$\frac{1}{\sigma^{\ell-1}} + \int_2^{\exp X} \frac{\varphi(t)(\log t)^j}{\mathscr{L}(t)^c}\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{\mathscr{L}(\mathrm{e}^X)^c}\int_2^{\exp X}\varphi(t)(\log t)^j\,\mathrm{d}t,$$

ce qui implique immédiatement (5·73). □

Lemme 5.18. *Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que l'on ait*

$$S_{1\ell 11}(\sigma,\kappa) = \Big\{1 + O\Big(\frac{\kappa}{\mathscr{L}(\mathrm{e}^X)^c}\Big)\Big\}\mathcal{Y}_{1\ell 11}(\sigma,\kappa) \tag{5·74}$$

uniformément pour $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, $\kappa + \sigma \geqslant 1$, $\kappa + (\ell+1)\sigma > 1$, $X(\sigma,\kappa) \geqslant 1$.

Démonstration. Observons que $S_{1\ell 11} = S_{1(\ell+1)01} - S_{1(\ell+1)02}$. En appliquant le Lemme 5.17 à chacun des deux termes du membre de droite, nous obtenons

$$S_{1\ell 11} = \mathcal{Y}_{1\ell 11} + O\Big(\frac{\mathcal{Y}_{1(\ell+1)01}}{\mathscr{L}(\mathrm{e}^X)^c}\Big).$$

Or, il résulte de (5·56) que, notant $\vartheta = \kappa + (\ell+1)\sigma - 1$, nous avons

$$\mathcal{Y}_{1(\ell+1)01} \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\vartheta X}X + X^2 J_\ell(\vartheta X)}{(\sigma X)^{\ell+1}} + X^2 J_{-1}(\vartheta X),$$
$$\mathcal{Y}_{1\ell 11} \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\vartheta X}X + X^2 J_\ell(\vartheta X)}{(\sigma X)^{\ell+1}\kappa} + X^2 J_{-1}(\vartheta X).$$

Les membres de droite sont trivialement du même ordre lorsque, par exemple, $\frac{3}{4} < \kappa \leqslant 2$. Sous l'hypothèse $\kappa > 2$, nous avons $\vartheta \asymp \kappa \gg 1$, et, d'après (5·3), $J_{-1}(\vartheta X) \asymp J_\ell(\vartheta X) \asymp \mathrm{e}^{-\vartheta X}/\kappa X$. Cela implique l'estimation $\mathcal{Y}_{1(\ell+1)01} \asymp \kappa\mathcal{Y}_{1\ell 11}$, qui est donc uniformément valable dans les conditions de l'énoncé. La formule (5·74) en découle immédiatement. □

Lemme 5.19. *Soient $0 < \eta < \frac{5}{12}$ et $\ell \in \mathbb{N}$. La formule asymptotique*

$$S_{1\ell 11}(\sigma,\kappa) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{X\mathrm{e}^X}{\kappa\sigma^\ell X^\ell} = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\mathcal{Y}_{1\ell 11}(\sigma,\kappa) \tag{5·75}$$

a lieu uniformément sous les conditions

$$0 < \sigma < \tfrac{1}{4}, \quad \kappa \geqslant 1-\sigma, \quad X(\sigma,\kappa) \geqslant 1, \quad \kappa+(1+\ell)\sigma > 1, \quad \sqrt{\log(1/\sigma)} \leqslant \kappa \leqslant \eta\frac{\log(1/\sigma)}{\log_2(1/\sigma)}.$$

Démonstration. Pour $j = m = n = 1$ et avec la notation $\mathfrak{g}(t)$ introduite en (5·50), nous avons

$$\sum_{p\leqslant \mathrm{e}^X/2} \mathfrak{g}(p)\log p \ll \frac{X\mathrm{e}^{(1+\kappa)X}}{2^\kappa(\sigma X)^{\ell-1}} \asymp \frac{X\mathrm{e}^X}{2^\kappa\sigma^\ell X^\ell}, \qquad \sum_{2\mathrm{e}^X/3<p\leqslant \mathrm{e}^X} \mathfrak{g}(p)\log p \gg \frac{X\mathrm{e}^X(2/3)^\kappa}{\sigma^\ell X^\ell}.$$

De même, en minorant $p^\sigma - 1$ par $\sigma\log p$, nous obtenons

$$\sum_{p>2\mathrm{e}^X} \mathfrak{g}(p)\log p \ll \frac{X\mathrm{e}^X}{2^\kappa\sigma^\ell X^\ell}, \qquad \sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant 5\mathrm{e}^X/3} \mathfrak{g}(p)\log p \gg \frac{X\mathrm{e}^X}{\sigma^\ell X^\ell}(3/5)^\kappa,$$

où la première estimation résulte d'un découpage dyadique. Nous voyons ainsi que

$$S_{1\ell 11} = \sum_p \mathfrak{g}(p)\log p = \big\{1 + O\big((\tfrac{5}{6})^\kappa\big)\big\} \sum_{\mathrm{e}^X/2<p\leqslant 2\mathrm{e}^X} \mathfrak{g}(p)\log p. \tag{5·76}$$

Or les estimations $p^\sigma - 1 = \{1 + O(\sigma X)\}\sigma\log p$, $\log p = X + O(1)$ $(\mathrm{e}^X/2 < p \leqslant 2\mathrm{e}^X)$ et la seconde formule (5·47) impliquent

$$p^\kappa = (p/\mathrm{e}^X)^\kappa \frac{\{1+O(\sigma X)\}}{\sigma X}, \quad p^\kappa(p^\sigma - 1) = (p/\mathrm{e}^X)^\kappa\{1+O(1/X)\} \qquad (\mathrm{e}^X/2 < p \leqslant 2\mathrm{e}^X)$$

et donc

$$\sum_{\mathrm{e}^X/2<p\leqslant 2\mathrm{e}^X} \mathfrak{g}(p)\log p = \frac{\{1+O(1/X)\}X}{\sigma^\ell X^\ell} \sum_{\mathrm{e}^X/2<p\leqslant 2\mathrm{e}^X} \frac{(p/\mathrm{e}^X)^\kappa \log p}{\{1+(p/\mathrm{e}^X)^\kappa\}^2}.$$

Or il résulte de (5·48) et (5·49) que nos hypothèses impliquent $X \ll \kappa \ll \mathrm{e}^{5X/12}/X$. La première égalité de (5·75) découle donc du Lemme 5.10 via (5·76). Pour établir la seconde, nous observons d'abord que, puisque $\xi \asymp \kappa \gg X$, nous avons $\mathfrak{S}(\xi)/(1+\xi) = 1+O(1/X)$. Nous appliquons ensuite (5·62) lorsque $\ell = 0$ et (5·63) lorsque $\ell \geqslant 1$. Dans le premier cas, la formule annoncée résulte de (5·47) et de l'estimation $D'(u) = 1/u + O\big(1/u^2\big)$ $(u \geqslant 1)$ donnée au Lemme 5.4 ; dans le second cas, il suffit d'insérer (5·6). □

La proposition suivante précise l'approximation de $S_{0\ell 01}$ par $\mathcal{Y}_{0\ell 01}$ lorsque ℓ vaut 1 ou 2. Dans la preuve, nous ferons notamment appel au résultat suivant, qui est valable sous des hypothèses plus générales et que nous énonçons séparément à fins de référence ultérieure. Avec la notation $\mathfrak{g}(t)$ de (5·50) et en spécialisant $(j,m,n) = (0,0,1)$, nous avons

$$S_{0\ell 01}(\sigma,\kappa) \asymp \mathfrak{g}(2) + \mathcal{Y}_{0\ell 01}(\sigma,\kappa) \qquad \big(\sigma > 0,\ \ell \in \{1,2\},\ \kappa + \ell\sigma > 1\big). \tag{5·77}$$

Pour établir cela, nous observons que le Lemme 5.7 permet d'écrire

$$S_{0\ell 01} = \mathcal{Y}_{0\ell 01} + R, \quad R \ll \mathfrak{g}(2) + \int_2^\infty \frac{\mathfrak{g}(t)}{\mathscr{L}(t)^c}\,\mathrm{d}t,$$

avec donc $\mathcal{Y}_{0\ell 01} = \int_2^\infty \mathfrak{g}(t)\,\mathrm{d}t$. Cela implique immédiatement la majoration contenue dans (5·77). Pour établir la minoration, nous observons d'une part que l'on a trivialement $\mathfrak{g}(2) \leqslant S_{0\ell 01}$ et d'autre part, en scindant convenablement la dernière intégrale et exploitant la décroissance de $\mathfrak{g}$ et $1/\mathscr{L}$, que $|R| \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{Y}_{0\ell 01} + O\big(\mathfrak{g}(2)\big)$, d'où $\mathcal{Y}_{0\ell 01} \ll S_{0\ell 01} + \mathfrak{g}(2) \ll S_{0\ell 01}$.

Proposition 5.20. *(i) Sous les conditions $\sigma > 0$, $\kappa + \sigma > 1$, $X(\sigma,\kappa) > \log 2$, nous avons*

$$S_{0101}(\sigma,\kappa) \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma X} + \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\xi} + \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma}\log\Big(1 + \frac{1}{\xi X}\Big), \tag{5·78}$$

$$S_{0201}(\sigma,\kappa) \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^2 X^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^2 X(1+\xi X)}. \tag{5·79}$$

(ii) Pour $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{4}$, $\sigma + \kappa > 1$, $X(\sigma,\kappa) \geqslant 1$, *nous avons*

$$S_{0101}(\sigma,\kappa) = \frac{\mathfrak{S}(\xi)J_1(\xi X) + \log(\xi/\sigma) - D(\xi/\sigma)}{\sigma} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma X^2}\Big), \tag{5·80}$$

$$S_{0201}(\sigma,\kappa) = \mathfrak{S}(\xi)\frac{J_2(\xi X)}{\sigma^2 X} + O\left(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^2 X^3}\right)\cdot \tag{5·81}$$

De plus, les relations (5·79) *et* (5·81) *sont également valides lorsque* $\sigma + \kappa = 1$.

Démonstration. Prouvons d'abord l'assertion (i). Sous les hypothèses effectuées, nous avons $\mathfrak{g}(2) \asymp \sigma^{1-\ell}$ dans (5·77), d'où

$$\mathfrak{g}(2) + \int_2^{\exp X} \mathfrak{g}(t)\,\mathrm{d}t \asymp \frac{1}{\sigma^{\ell-1}} + \int_2^{\exp X} \frac{\mathrm{d}t}{(\sigma\log t)^{\ell-1}} \asymp \frac{\mathrm{e}^X}{(\sigma X)^{\ell-1}}. \tag{5·82}$$

De plus, (5·58) fournit directement

$$\int_{\exp X}^{\infty} \mathfrak{g}(t)\,\mathrm{d}t \asymp \frac{\mathrm{e}^{-(\xi+(\ell-1)\sigma)X}}{\xi + (\ell-1)\sigma} + \frac{J_\ell\big(\xi X + (\ell-1)\sigma X\big)}{\sigma^\ell X^{\ell-1}}. \tag{5·83}$$

En reportant dans (5·77), nous obtenons (5·78), puis (5·79), en notant que, pour $\ell = 2$, le premier terme de (5·83) est dominé par le second.

Pour achever la preuve, nous observons que les formules asymptotiques énoncées en (ii) découlent immédiatement de (5·73), (5·64) et (5·65). □

5·6. Étude asymptotique de $f(\sigma,\kappa)$

Proposition 5.21. *Sous les conditions* $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, $\kappa + \sigma > 1$, $X(\sigma,\kappa) \geqslant 1$, *nous avons*

$$f(\sigma,\kappa) = \frac{\mathfrak{S}(\xi)}{\sigma X}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{X} + J_2(\xi X)\right\} + \log(1 + 1/\xi) + O\left(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}\kappa}{\sigma X^3}\right). \tag{5·84}$$

Démonstration. Conservons la notation $\mathcal{Y}_0(\sigma,\kappa)$ pour le membre de gauche de (5·66) et posons

$$\mathfrak{g}_1(t) := \log\Big(1 + \frac{1}{t^\kappa(t^\sigma - 1)}\Big),$$

de sorte que la seconde estimation (5·48) implique alors $\mathfrak{g}_1(t) \leqslant \mathfrak{g}_1(2) \ll \kappa X$ $(t \geqslant 2)$. D'après le Lemme 5.7, nous avons donc, en minorant par exemple $\mathscr{L}(t)^c$ par $\gg (\log t)^3$,

$$f(\sigma,\kappa) - \mathcal{Y}_0(\sigma,\kappa) \ll \mathfrak{g}_1(2) + \int_2^\infty \frac{\mathfrak{g}_1(t)}{(\log t)^4}\,\mathrm{d}t \ll \frac{\kappa \mathrm{e}^X}{X^3} + \int_{\exp X}^\infty \frac{\mathfrak{g}_1(t)}{(\log t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Observons ensuite que

$$\mathfrak{g}_1(t) \asymp \frac{1}{t^{\kappa+\sigma}}\Big(1 + \frac{1}{\sigma\log t}\Big) \qquad \big(t > \mathrm{e}^X\big).$$

Nous obtenons que la dernière intégrale est

$$\ll \frac{1}{X^2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-\xi X z}\Big(1 + \frac{1}{\sigma X z}\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z^3} \ll \frac{J_3(\xi X)}{X^2} + \frac{J_4(\xi X)}{\sigma X^3} \ll \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma X^3},$$

en vertu de (5·3). L'estimation (5·84) résulte alors de (5·66). □

5·7. Dérivées secondes

5·7·1. Estimations de f''_{jk} aux arguments réels

La fonction $f(\sigma,\kappa)$ est définie en (3·2). Ses dérivées secondes sont données par les expressions

$$\begin{aligned} f''_{20}(\sigma,\kappa) &= \sum_p \frac{(\log p)^2 p^\sigma\{1+p^\kappa(p^{2\sigma}-1)\}}{(p^\sigma-1)^2\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^2}, \\ f''_{02}(\sigma,\kappa) &= \sum_p \frac{(\log p)^2 p^\kappa(p^\sigma-1)}{\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^2}, \\ f''_{11}(\sigma,\kappa) &= \sum_p \frac{(\log p)^2 p^{\kappa+\sigma}}{\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^2}. \end{aligned} \tag{5·85}$$

Proposition 5.22. *Sous les conditions* $0<\sigma<\frac14$, $\kappa+\sigma>1$, $X(\sigma,\kappa)\geqslant 1$, *nous avons*

$$f''_{20}(\sigma,\kappa) = \Big\{1+O\Big(\frac1X\Big)\Big\}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\Big\{\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^3X^2}+2\frac{J_2(\xi X)}{\sigma^3X}+\frac{1}{\xi^2}\Big\}. \tag{5·86}$$

Démonstration. Posons $U:=p^\sigma-1$. De la décomposition

$$p^\sigma\{1+p^\kappa(p^{2\sigma}-1)\} = 1+U+p^\kappa U^3+3p^\kappa U^2+2p^\kappa U$$

nous déduisons, avec la notation (5·72),

$$f''_{20}(\sigma,\kappa) = S_{1302}+S_{1202}+S_{1011}+3S_{1111}+2S_{1211}.$$

Appliquons alors les lemmes 5.17 et 5.18. Nous obtenons, avec la notation (5·37),

$$f''_{20}(\sigma,\kappa) = \{1+O(\varepsilon)\}\{\mathcal{Y}_{1302}+\mathcal{Y}_{1202}\}+\{1+O(\kappa\varepsilon)\}\{\mathcal{Y}_{1011}+3\mathcal{Y}_{1111}+2\mathcal{Y}_{1211}\},$$

où nous avons posé $\varepsilon := 1/\mathscr{L}(\mathrm{e}^X)^c$; d'où

$$f''_{20}(\sigma,\kappa) = \big\{1+O(\varepsilon)\big\}\big(\mathcal{Y}_{1302}+\mathcal{Y}_{1202}+\mathcal{Y}_{1011}+3\mathcal{Y}_{1111}+2\mathcal{Y}_{1211}\big) \tag{5·87}$$

lorsque, par exemple, $\kappa\leqslant 2$.

Nous allons montrer que (5·87) persiste pour $\kappa>2$. En effet, posant $\vartheta_\ell := \kappa+(\ell+1)\sigma-1 \asymp \kappa$ $(\ell\geqslant 0)$ et $\vartheta := 2\kappa+4\sigma-1\asymp\kappa$, nous déduisons de (5·3), (5·7), (5·45) et (5·46) que

$$J_k(\vartheta_\ell X)\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\vartheta_\ell X}}{\vartheta_\ell X}\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\kappa X},\quad J_k(\vartheta X)\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\vartheta X}}{\vartheta X}\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}\mathrm{e}^{-\kappa X}}{\kappa X}\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}\sigma X}{\kappa X}\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

L'estimation (5·56) implique alors

$$\mathcal{Y}_{1\ell 11}\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\kappa\,\sigma^{\ell+1}X^\ell}\quad(\ell\geqslant 0),\qquad \mathcal{Y}_{1302}\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^3X^2},$$

d'où $\kappa(\mathcal{Y}_{1011}+\mathcal{Y}_{1111}+\mathcal{Y}_{1211})\ll\mathcal{Y}_{1302}$.

Ainsi (5·87) est valide sous les conditions de l'énoncé. En utilisant (5·56) à nouveau, on constate que $\mathcal{Y}_{1202}+\mathcal{Y}_{1111} \ll \{\mathcal{Y}_{1302}+\mathcal{Y}_{1211}+\mathcal{Y}_{1011}\}/X$. Compte tenu de (5·61), (5·62) et (5·63), nous obtenons

$$f''_{20}(\sigma,\kappa)=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\Big\{\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^3X^2}+2\frac{J_2(\xi X)}{\sigma^3X}+\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}D'(\xi/\sigma)}{\sigma^2}\Big\}.$$

Le dernier terme dans l'accolade de droite vaut $\{1+O(1/X)\}/\xi^2$ lorsque $\xi \leqslant \sigma/\sqrt{X}$. Dans le cas contraire, il est $\ll \mathrm{e}^{-\xi X}(\sigma+\xi)/(\sigma\xi^2) \ll J_2(\xi X)/\sigma^3X^2$ en vertu de (5·3) avec $k=2$. Cela implique bien (5·86). □

Proposition 5.23. *(i) Soient η_0, η_1 tels que $0<\eta_0<\frac{5}{12}$, $\eta_0<\eta_1<\frac{19}{40}$. Il existe $0<\eta_2<\frac{1}{4}$ tel que, sous les conditions $0<\sigma<\eta_2$, $\kappa+\sigma>1$, $\kappa\log(1+\kappa)\leqslant\eta_0\log(1/\sigma)$, nous ayons*

$$f''_{02}(\sigma,\kappa)\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}D'(\xi/\sigma)}{\sigma^2}, \tag{5·88}$$

$$f''_{02}(\sigma,\kappa)=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}D'(\xi/\sigma)}{\sigma^2}, \tag{5·89}$$

$$f''_{11}(\sigma,\kappa)\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^2}\log\Big(1+\frac{1}{\xi X+\sigma X}\Big)+\frac{1}{\xi^2}, \tag{5·90}$$

$$f''_{11}(\sigma,\kappa)=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\}\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\frac{J_1\big(\xi X+\sigma X\big)+\mathrm{e}^{-\xi X}D'(\xi/\sigma)}{\sigma^2}. \tag{5·91}$$

De plus, (5·88) *et* (5·90) *sont également valides lorsque $\eta_0\log(1/\sigma)<\kappa\log(1+\kappa)\leqslant\eta_1\log(1/\sigma)$.*

(ii) Pour $0<\sigma<\frac{1}{4}$, $\kappa=1$, nous avons

$$f''_{11}(\sigma,1)=\frac{1+X}{\sigma^2}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{X^2}\Big)\Big\}. \tag{5·92}$$

Démonstration. Avec la notation (5·72), nous avons

$$f''_{02}(\sigma,\kappa)=S_{1011},\quad f''_{11}(\sigma,\kappa)=S_{1011}+S_{1111}.$$

Les relations (5·89) et (5·91) découlent donc de (5·62), (5·63) et (5·74), lorsque, disons, $\kappa\leqslant X^2$. Dans le cas contraire, observons que, d'après le Lemme 5.14, nous avons $\kappa\leqslant\mathrm{e}^{5X/12}$ dès que η_2 est assez petit. Le Lemme 5.19 fournit donc la validité de (5·89) et (5·91) dans ce domaine complémentaire.

Montrons (5·88) et (5·90). Nos hypothèses impliquent alors $\kappa\leqslant\mathrm{e}^{19X/41}$ via (5·49). Une manipulation impliquant (5·58) et analogue à celle de la preuve de (5·56), fournit alors $S_{1\ell11}\asymp\mathcal{Y}_{1\ell11}$ ($\ell=0$ ou 1), grâce au Lemme 5.8. Les estimations annoncées résultent donc de (5·56), (5·3) et (5·7).

Il reste à établir (5·92). Nous avons

$$f''_{11}(\sigma,1)=\sum_{p>\mathrm{e}^X}\frac{(\log p)^2p^\sigma}{p(p^\sigma-1)^2}+O\Big(\frac{1}{\sigma^2X}\Big)=\frac{1}{\sigma^2}\int_{\sigma X}^\infty\frac{u\mathrm{e}^u}{(\mathrm{e}^u-1)^2}\,\mathrm{d}u+O\Big(\frac{1}{\sigma^2X}\Big)$$

où la seconde égalité découle d'une application standard du théorème des nombres premiers. Maintenant

$$\begin{aligned}\int_{\sigma X}^\infty\frac{u\mathrm{e}^u}{(\mathrm{e}^u-1)^2}\,\mathrm{d}u&=\frac{\sigma X}{\mathrm{e}^{\sigma X}-1}+\int_{\sigma X}^\infty\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u-1}\\&=1+O(\sigma X)+\int_{\sigma X}^\infty\Big(\frac{1}{\mathrm{e}^u-1}-\frac{1}{u\mathrm{e}^u}\Big)\,\mathrm{d}u+J_1(\sigma X)=1+\gamma+O(\sigma X)+J_1(\sigma X),\end{aligned}$$

d'après (5·22) avec $x=1$. La formule annoncée résulte alors de (5·8) en notant que $\log(1/\sigma X)=X+O(\sigma X)$ d'après (5·47). □

5·7·2. Estimation de la hessienne

Rappelons la définition de la hessienne $\delta(\sigma,\kappa)$ en (3·3) et posons

$$\Xi(\sigma,\kappa):=\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^3X^2}+\frac{2J_2(\xi X)}{\sigma^3X}\Big)\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}D'(\xi/\sigma)}{\sigma^2}-\frac{J_1(\xi X+\sigma X)^2}{\sigma^4}. \tag{5·93}$$

Proposition 5.24. *Sous les conditions $\sigma>0$, $\kappa+\sigma>1$, nous avons $\delta(\sigma,\kappa)>0$. De plus, pour tout $0<\eta_0<\frac{5}{12}$, il existe $0<\eta_1<\frac14$ tel que l'on ait*

$$\delta(\sigma,\kappa)=\Big(\frac{\mathfrak{S}(\xi)}{1+\xi}\Big)^2\Xi(\sigma,\kappa)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big\} \tag{5·94}$$

dès que $0<\sigma<\eta_1$, $\kappa+\sigma>1$ et $\kappa\log(1+\kappa)\leqslant\eta_0\log(1/\sigma)$.

Démonstration. Avec les notations (5·72), nous avons

$$\begin{aligned}&f''_{20}(\sigma,\kappa)=S_{1302}+S_{1202}+S_{1011}+3S_{1111}+2S_{1211},\\&f''_{02}(\sigma,\kappa)=S_{1011},\quad f''_{11}(\sigma,\kappa)=S_{1011}+S_{1111},\end{aligned} \tag{5·95}$$

d'où $\delta(\sigma,\kappa)=\big(S_{1302}+S_{1202}+S_{1111}+S_{1211}\big)S_{1011}+S_{1211}S_{1011}-S_{1111}^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquant $S_{1211}S_{1011}-S_{1111}^2\geqslant0$, nous obtenons

$$\delta(\sigma,\kappa)\asymp\big(S_{1302}+S_{1202}+S_{1111}+S_{1211}\big)S_{1011}>0. \tag{5·96}$$

Il résulte alors des Lemmes 5.17, 5.18 et 5.19 que

$$\delta(\sigma,\kappa)=\big(\mathcal{Y}_{1302}+\mathcal{Y}_{1202}+\mathcal{Y}_{1111}+\mathcal{Y}_{1211}\big)\mathcal{Y}_{1011}+\big(\mathcal{Y}_{1211}\mathcal{Y}_{1011}-\mathcal{Y}_{1111}^2\big)+O\big(\delta(\sigma,\kappa)/X\big).$$

De plus, pour η_1 suffisamment petit, nous déduisons de (5·96) et de ces mêmes trois lemmes, compte tenu de (5·3), que

$$\delta(\sigma,\kappa)\asymp\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^3X^2}+\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^3X\{1+\xi X\}}\Big)\frac{D'(\xi/\sigma)\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^2}\asymp\frac{\mathrm{e}^{-2\xi X}(1+\xi)(1+\sigma/\xi)}{\sigma^4\xi X(1+\xi X)}. \tag{5·97}$$

La relation (5·94) découle alors du Lemme 5.16. □

5·7·3. Estimation de $g''(\sigma)$

Lemme 5.25. *Avec la notation* (2·6) *et sous la condition* $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, *nous avons*

$$g''(\sigma) = \frac{2}{\sigma^3 \log(1/\sigma)} \Big\{ 1 + \frac{\log_2(1/\sigma) + O(1)}{\log(1/\sigma)} \Big\}. \tag{5·98}$$

Démonstration. Pour tout $\sigma > 0$, nous avons, par (2·6),

$$\begin{aligned} g''(\sigma) &= \sum_p \frac{(\log p)^2 p^\sigma \{1 + (p+1)(p^{2\sigma} - 1)\}}{(p^\sigma - 1)^2 \{1 + (p+1)(p^\sigma - 1)\}^2} \\ &= \sum_p \frac{(\log p)^2 p^\sigma \{p^\sigma + p^{1-\sigma}(p^{2\sigma} - 1)\}}{(p^\sigma - 1)^2 \{1 + p^{1-\sigma}(p^\sigma - 1)\}^2}, \end{aligned} \tag{5·99}$$

où la seconde expression découle de la première via l'identité

$$1 + (p+1)(p^\sigma - 1) = p^\sigma \{1 + p^{1-\sigma}(p^\sigma - 1)\}.$$

Posant $U := p^\sigma - 1$, la décomposition $p^\sigma + p^{1-\sigma}(p^{2\sigma} - 1) = 1 + U + p^{1-\sigma}U^2 + 2p^{1-\sigma}U$ permet alors d'écrire, avec la notation (5·72),

$$g''(\sigma) = S_{1302}(\sigma, 1-\sigma) + S_{1202}(\sigma, 1-\sigma) + S_{1111}(\sigma, 1-\sigma) + 2S_{1211}(\sigma, 1-\sigma).$$

Cela étant, désignons par $X := X(\sigma, 1-\sigma)$ la solution de (5·43) pour $\kappa = 1-\sigma$, de sorte que $\xi = 0$ dans (5·61) et (5·63). Notons d'emblée que, comme $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, nous avons $\mathrm{e}^X - \mathrm{e}^{3X/4} > 1$ et donc $X > 1$.

Évaluons $S_{1\ell 02}(\sigma, 1-\sigma)$ par (5·73) et $\mathcal{Y}_{1\ell 02}(\sigma, 1-\sigma)$ par (5·61) pour $\ell \in \{2, 3\}$. Il vient

$$S_{1\ell 02}(\sigma, 1-\sigma) = \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{X}\Big) \Big\} \frac{1}{\sigma^\ell X^{\ell-1}} \qquad \big(\ell \in \{2, 3\}\big).$$

Semblablement, en estimant $S_{1\ell 11}(\sigma, 1-\sigma)$ par (5·74) et $\mathcal{Y}_{1\ell 11}(\sigma, 1-\sigma)$ par (5·63) pour $\ell \in \{1, 2\}$, nous obtenons

$$S_{1\ell 11}(\sigma, 1-\sigma) = \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{X}\Big) \Big\} \frac{J_\ell(\sigma X)}{\sigma^{\ell+1} X^{\ell-1}} \qquad \big(\ell \in \{1, 2\}\big).$$

De plus, $J_2(\sigma X) = 1 + O\big(\sigma \log\{1/(\sigma X)\}\big) = 1 + O(1/X)$ d'après (5·4), alors que (5·3) implique $J_1(\sigma X) \asymp \log(1/\sigma X) \asymp X$. Ainsi

$$g''(\sigma) = \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{X}\Big) \Big\} \Big\{ \frac{1}{\sigma^3 X^2} + \frac{1}{\sigma^2 X} + \frac{J_1(\sigma X)}{\sigma^2} + 2\frac{J_2(\sigma X)}{\sigma^3 X} \Big\} = \frac{2}{\sigma^3 X} \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{X}\Big) \Big\}.$$

Enfin, la relation (5·47) implique $\mathrm{e}^X \sigma X \asymp 1$, et donc $X = \log(1/\sigma) - \log_2(1/\sigma) + O(1)$. □

5·8. Prolongement holomorphe de $f(\sigma,\kappa)$

Ici et dans toute la suite nous posons systématiquement $s=\sigma+i\tau$, $z=\kappa+it$ et adoptons la même convention lorsque les nombres complexes s ou z sont assortis d'un indice.[8] Pour $c>0$, $0<\sigma_0<\frac14$, $\kappa_0+\sigma_0>1$, $\xi_0:=\sigma_0+\kappa_0-1$, nous définissons les domaines

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_c(\sigma_0,\kappa_0)&:=\big\{s\in\mathbb{C}:|\sigma-\sigma_0|\leqslant c\min(\sigma_0,\xi_0),\ |\tau|\leqslant c\sigma_0\big\},\\ \mathscr{R}'_c(\sigma_0,\kappa_0)&:=\{z\in\mathbb{C}:|\kappa-\kappa_0|\leqslant c\min(1/X_0,\xi_0),\ |t|\leqslant c/X_0\},\\ \mathscr{U}_c(\sigma_0,\kappa_0)&:=\mathscr{R}_c(\sigma_0,\kappa_0)\times\mathscr{R}'_c(\sigma_0,\kappa_0).\end{aligned}\tag{5·100}$$

Proposition 5.26. *(i) Il existe une constante absolue $c>0$ telle que, sous les conditions $0<\sigma_0<\frac14$, $\sigma_0+\kappa_0>1$, $X_0:=X(\sigma_0,\kappa_0)>\log 2$, la formule*

$$f(s,z)=\sum_p\log\Big(1+\frac{1}{p^z(p^s-1)}\Big)\tag{5·101}$$

où le logarithme complexe est pris en détermination principale sur $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^-$, définisse un prolongement holomorphe de $f(\sigma,\kappa)$ dans le domaine $\mathscr{U}(\sigma_0,\kappa_0)$. De plus, nous avons dans les mêmes conditions

$$f^{(j)}_{j0}(s,z)\ll_j\Big(\frac{1}{\xi_0}+\frac{1}{\sigma_0}\Big)^{j-2}f''_{20}(\sigma_0,\kappa_0)\qquad(j\geqslant 2),\tag{5·102}$$

$$f^{(k)}_{0k}(s,z)\ll_k\Big(\frac{1}{\xi_0}+X_0\Big)^{k-2}f''_{02}(\sigma_0,\kappa_0)\qquad(k\geqslant 2),\tag{5·103}$$

$$f^{(j+k)}_{jk}(s,z)\ll_{j,k}\Big(\frac{1}{\xi_0}+\frac{1}{\sigma_0}\Big)^{j-1}\Big(\frac{1}{\xi_0}+X_0\Big)^{k-1}f''_{11}(\sigma_0,\kappa_0)\quad(j\geqslant 1,\ k\geqslant 1).\tag{5·104}$$

(ii) Sous les conditions $0<\sigma<\frac14$, $\kappa+\sigma>1$, $X(\sigma,\kappa)>\log 2$, $|\tau|\leqslant c\sigma$, $|t|\leqslant c/X$, nous avons

$$f''_{02}(s,z)=\frac{1}{s^2}D'\Big(1+\frac{z-1}{s}\Big)+O\Big(\frac{\log(1/\sigma)}{\sigma}\Big).\tag{5·105}$$

Démonstration. Les estimations $\mathrm{d}X/\mathrm{d}\sigma\ll 1/(\sigma\kappa)$, $\mathrm{d}X/\mathrm{d}\kappa\ll X/\kappa$ impliquent immédiatement $X-X_0\ll c$ sous les hypothèses effectuées. Ainsi, pour un choix convenable de c, nous avons certainement $X\leqslant X_0+\log 2$. Cela implique que le facteur eulérien $1+1/\{p^z(p^s-1)\}$ n'est pas réel négatif si $p>2\mathrm{e}^{X_0}$. Dans le cas contraire, notant $\vartheta:=\arg(p^s-1)$, nous avons

$$t^2(\log p)^2+\vartheta^2\ll t^2X_0^2+\tau^2/\sigma_0^2\ll c^2,$$

ce qui implique à nouveau que le terme général de (5·101) est bien défini. Comme nous avons également $\kappa+\sigma>1+\xi(1-2c)>1$ lorsque $(s,z)\in\mathscr{U}_c(s_0,z_0)$, la première partie de l'assertion (i) est bien vérifiée.

8. Dans ce paragraphe uniquement, la notation σ_0 est affranchie de la convention (2·8).

Pour établir les majorations indiquées des dérivées, il suffit de vérifier qu'il existe $c > 0$ tel que, pour $j + k = 2$,

$$f''_{jk}(s,z) \ll f''_{jk}(\alpha,\beta) \qquad (j+k=2) \qquad \Big((s,z) \in \mathscr{U}_{2c}(\sigma_0,\kappa_0)\Big). \tag{5·106}$$

En effet, les majorations annoncées résultent de (5·106) via les inégalités de Cauchy appliquées sur le bord de $\mathscr{U}_{2c} = \mathscr{U}_{2c}(\sigma_0,\kappa_0)$.

Pour prouver (5·106), nous nous restreignons au cas de $f''_{20}(s,z)$, les deux autres étant similaires. Posons pour tout $(s,z) \in \mathscr{U}_c$

$$\mathfrak{g}(p;s,z) := \frac{p^s\{1+p^z(p^{2s}-1)\}}{(p^s-1)^2\{1+p^z(p^s-1)\}^2},$$

de sorte que $f''_{20}(s,z) = \sum_p \mathfrak{g}(p;s,z)(\log p)^2$. Comme $p^{\kappa_0}(p^{\sigma_0}-1) > \mathrm{e}^{2X_0} \geqslant 2$ si par exemple $p > \mathrm{e}^{4X_0}$, nous avons certainement $\mathfrak{g}(p;s,z) \ll \mathfrak{g}(p;\sigma_0,\kappa_0)$ lorsque $(s,z) \in \mathscr{U}_{2c}$, $p > \mathrm{e}^{4X_0}$. Lorsque $p \leqslant \mathrm{e}^{4X_0}$, nous avons $p^z(p^s-1) = p^{\kappa_0}(p^{\sigma_0}-1)\{1+O(t\log p)\}+O(\tau/\alpha)$, d'où $|\mathfrak{g}(p;s,z)| \asymp \mathfrak{g}(p;\sigma_0,\kappa_0)$ et donc $f''_{20}(s,z) \ll f''_{20}(\sigma_0,\kappa_0)$. Comme nos hypothèses impliquent $\kappa \asymp \kappa_0$, $\sigma \asymp \sigma_0$, $\xi \asymp \xi_0$ et donc $\kappa_0 X_0 \mathrm{e}^{\kappa_0 X_0} \asymp \kappa X \mathrm{e}^{\kappa X}$, puis $\kappa_0 X_0 = \kappa X + O(1)$, il est clair que $\mathfrak{g}(p;\sigma,\kappa) \asymp \mathfrak{g}(p;\sigma_0,\kappa_0)$ pour $p \leqslant \mathrm{e}^{X_0}$. Nous concluons la démonstration en observant que la majoration

$$\sum_{p>\mathrm{e}^{X_0}} \mathfrak{g}(p;\sigma,\kappa) \ll \sum_{p>\mathrm{e}^{X_0}} \mathfrak{g}(p;\sigma_0,\kappa_0)$$

découle de (5·58) et de (5·32).

Il reste à établir (5·105). Nous avons

$$f''_{02}(s,z) = \sum_p \frac{(\log p)^2}{p^z(p^s-1)} - R, \quad R := \sum_p \frac{(\log p)^2\{1+2p^z(p^s-1)\}}{p^z(p^s-1)\{1+p^z(p^s-1)\}^2}. \tag{5·107}$$

Pour $p > 2\mathrm{e}^X$, l'inégalité triviale $|p^z(p^s-1)| \geqslant p^\kappa(p^\sigma-1) > 2^\kappa > 2^{3/4}$ implique

$$\left|\frac{1+2p^z(p^s-1)}{p^z(p^s-1)\{1+p^z(p^s-1)\}^2}\right| \ll \frac{1+2|p^z(p^s-1)|}{|p^z(p^s-1)|^3} \ll \frac{1+2p^\kappa(p^\sigma-1)}{p^\kappa(p^\sigma-1)\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^2}.$$

Par ailleurs, pour $p \leqslant 2\mathrm{e}^X$, nous avons, sous les hypothèses de l'énoncé,

$$|1+p^z(p^s-1)| \asymp 1+p^\kappa(p^\sigma-1), \quad |1+2p^z(p^s-1)| \asymp 1+2p^\kappa(p^\sigma-1).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} R &\ll \sum_p \frac{(\log p)^2\{1+2p^\kappa(p^\sigma-1)\}}{p^\kappa(p^\sigma-1)\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^2} \ll \sum_p \frac{(\log p)^2}{p^\kappa(p^\sigma-1)\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}} \\ &\ll \sum_{p\leqslant \mathrm{e}^X} \frac{\log p}{\sigma p} + \sum_{p>\mathrm{e}^X} \frac{1}{\sigma^2 p^{2\kappa}} \ll \frac{X}{\sigma} + \frac{\mathrm{e}^{(1-2\kappa)X}}{\sigma^2 X} \ll \frac{X}{\sigma} \ll \frac{\log(1+1/\sigma)}{\sigma}, \end{aligned}$$

où l'on a successivement fait appel à (5·46), (5·47) et (5·48).

Compte tenu de l'estimation classique

$$\sum_p \frac{(\log p)^2}{p^w} = -\Big(\frac{\zeta'}{\zeta}\Big)'(w) + O(1) = \frac{1}{(w-1)^2} + O(1) \qquad (w \in \mathbb{C},\ |w| \ll 1),$$

nous pouvons récrire le terme principal de (5·107) sous la forme

$$\begin{aligned}\sum_p \frac{(\log p)^2}{p^z} \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{1}{p^{\nu s}} &= \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant 1+1/\sigma} \sum_p \frac{(\log p)^2}{p^{z+\nu s}} + O\Big(\sum_p \frac{\log p}{\sigma p^{\kappa+1}}\Big) \\ &= \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant 1/\sigma} \Big\{\frac{1}{(z+s-1+\nu s)^2} + O(1)\Big\} + O\Big(\frac{1}{\sigma}\Big) = \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{1}{(z+s-1+\nu s)^2} + O\Big(\frac{1}{\sigma}\Big)\cdot\end{aligned}$$

Compte tenu de la première représentation (5·19), cela implique bien (5·105). □

6. Les paramètres du col

6·1. Existence et unicité

Rappelons la notation (3·2).

Lemme 6.1. *Soit $y \geqslant 2$. Pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, l'équation*

$$f'_{01}(\sigma, \kappa) = \sum_p \frac{\log p}{p^\kappa(p^\sigma - 1) + 1} = \log y \tag{6·1}$$

possède une unique solution réelle $\sigma = \sigma(\kappa) > \max(0, 1-\kappa)$. Nous avons

$$\lim_{\kappa \to -\infty} \sigma(\kappa) = +\infty, \qquad \lim_{\kappa \to \infty} 2^\kappa \sigma(\kappa) = 0. \tag{6·2}$$

Démonstration. Pour chaque nombre réel κ fixé, le membre de gauche de (6·1) est une bijection décroissante de $]\max(0, 1-\kappa), +\infty[$ sur $]0, \infty[$. Cela implique l'existence et l'unicité de la solution $\sigma = \sigma(\kappa)$ de (6·1).

La minoration $\sigma(\kappa) > \max(0, 1-\kappa)$ fournit trivialement la première relation (6·2). Pour établir la seconde nous observons que, pour $\kappa \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\frac{2^\kappa \sigma(\kappa)}{2^\kappa \sigma(\kappa) + 1} &\ll \frac{2^\kappa(2^{\sigma(\kappa)} - 1)\log 2}{2^\kappa(2^{\sigma(\kappa)} - 1) + 1} = \log 2 - \frac{\log 2}{2^\kappa(2^{\sigma(\kappa)} - 1) + 1} \\ &\leqslant \log y - \frac{\log 2}{2^\kappa(2^{\sigma(\kappa)} - 1) + 1} = \sum_{p \geqslant 3} \frac{\log p}{p^\kappa(p^{\sigma(\kappa)} - 1) + 1} \\ &\ll \frac{1}{3^{\sigma(\kappa)} - 1} \sum_{p \geqslant 3} \frac{\log p}{p^\kappa} \ll \frac{1}{3^\kappa \sigma(\kappa)}\cdot\end{aligned}$$

Il suit $2^{2\kappa}\sigma(\kappa)^2/\{2^\kappa\sigma(\kappa) + 1\} \ll (2/3)^\kappa$, d'où résulte l'égalité requise. □

Proposition 6.2. *Pour tous nombres réels x, y tels que $x > y \geqslant 2$, le système* (2·2) *admet une unique solution réelle (σ^*, κ^*) dans le domaine $\sigma > \max(0, 1-\kappa)$.*

De plus, si $y \leqslant 7x/15$, alors $\kappa^* > 0$ et si $y \leqslant \mathrm{e}^{-7/2}x$, alors $\kappa^* > \frac{1}{2}$.

Démonstration. Posons

$$S(\kappa) := \sum_p \frac{\log p}{(p^{\sigma(\kappa)}-1)\{p^\kappa(p^{\sigma(\kappa)}-1)+1\}} \qquad (\kappa \in \mathbb{R}).$$

La première assertion équivaut clairement à montrer que, lorsque $x > y \geqslant 2$, l'équation $S(\kappa) = v = \log(x/y)$ possède une unique solution réelle $\kappa = \kappa^*$: cela étant acquis, la solution de (2·2) est alors $(\sigma(\kappa^*), \kappa^*)$.

À cette fin, nous allons établir que $S(\kappa)$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, \infty[$. Compte tenu de (6·1), le théorème des fonctions implicites implique que $\sigma(\kappa)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\sigma'(\kappa) = -\frac{f''_{02}(\sigma(\kappa), \kappa)}{f''_{11}(\sigma(\kappa), \kappa)} \qquad (\kappa \in \mathbb{R}).$$

Il s'ensuit que $S(\kappa)$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie, avec la notation (3·3),

$$S'(\kappa) = \frac{f''_{20}(\sigma(\kappa), \kappa) f''_{02}(\sigma(\kappa), \kappa) - \{f''_{11}(\sigma(\kappa), \kappa)\}^2}{\{f''_{11}(\sigma(\kappa), \kappa)\}^2} = \frac{\delta\big(\sigma(\kappa), \kappa\big)}{\{f''_{11}(\sigma(\kappa), \kappa)\}^2} \qquad (\kappa \in \mathbb{R}).$$

La Proposition 5.24 implique donc que $S'(\kappa) > 0$ pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$.

Maintenant, nous avons $\sigma(\kappa) > 1 - \kappa > 1$ pour $\kappa < 0$, d'où

$$0 < S(\kappa) \leqslant \sum_p \frac{\log p}{(p^{1-\kappa}-1)(p^\kappa(p^{1-\kappa}-1)+1)} \ll \sum_p \frac{\log p}{p^{2-\kappa}},$$

et donc $\lim_{\kappa \to -\infty} S(\kappa) = 0$. De plus,

$$S(\kappa) \geqslant \frac{\log 2}{(2^{\sigma(\kappa)}-1)\{2^\kappa(2^{\sigma(\kappa)}-1)+1\}} \to +\infty \qquad (\kappa \to \infty).$$

puisque, d'après le Lemme 6.1, $2^\kappa(2^{\sigma(\kappa)}-1)$ tend vers 0 lorsque $\kappa \to \infty$.

Nous avons donc établi que l'équation $S(\kappa) = v$ possède une solution réelle unique, notée κ^*.

Lorsque $v \geqslant \log \frac{15}{7}$, nous avons

$$S(0) = \sum_p \frac{\log p}{p^{\sigma(0)}(p^{\sigma(0)}-1)} < \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} < 0,756 \leqslant v.$$

Il s'ensuit que $\kappa^* > 0$, en vertu de la monotonie de S. De même, $S(\frac{1}{2}) < \frac{7}{2}$, d'où $\kappa^* > \frac{1}{2}$ dès que $v \geqslant \frac{7}{2}$. □

6·2. Ordres de grandeur

Avec les notations (1·10) et (5·72), le système (2·2) peut être récrit sous la forme

$$\begin{cases} S_{0101}(\sigma,\kappa) = \log y, \\ S_{0201}(\sigma,\kappa) = v. \end{cases} \tag{6·3}$$

Grâce aux évaluations de la Proposition 5.20, nous sommes en mesure d'établir un premier jeu d'estimations concernant la solution $(\sigma,\kappa) = (\alpha,\beta)$ de (6·3) lorsque $v \geqslant 6$. Plus précisément, nous fournissons, dans certains domaines, les ordres de grandeur de α et $\lambda := \alpha + \beta - 1$ définie en (3·5). Réinsérées dans un processus itératif, ces estimations permettront, au paragraphe 6.4, l'obtention de formules asymptotiques.

Nous posons

$$\mathfrak{X} := X(\alpha,\beta). \tag{6·4}$$

Le lemme suivant donne des conditions suffisantes pour que les hypothèses de la Proposition 5.20 soient satisfaites.

Lemme 6.3. *Sous les conditions $y \geqslant 2$ et $v \geqslant 6$, on a $\mathfrak{X} > \log 2$.*

Démonstration. Supposons $\mathfrak{X} \leqslant \log 2$. La relation $\mathrm{e}^{(\beta+\alpha)\mathfrak{X}}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\mathfrak{X}}) = 1$ implique donc

$$\alpha = \alpha_\lambda := \frac{1}{\mathfrak{X}} \log\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(\lambda+1)\mathfrak{X}}}\Big) \geqslant a_\lambda := \frac{1}{\log 2} \log\Big(\frac{1}{1-2^{-(\lambda+1)}}\Big).$$

Observons alors que, pour tout $p \geqslant 2$, l'expression $p^{\lambda+1} - p^{\lambda+1-\alpha_\lambda}$ est une fonction croissante de λ. En effet, la dérivée est proportionnelle à

$$p^{\alpha_\lambda} - 1 + \alpha'_\lambda = p^{\alpha_\lambda} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(\lambda+1)\mathfrak{X}}} \geqslant \mathrm{e}^{\mathfrak{X}\alpha_\lambda} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(\lambda+1)\mathfrak{X}}} = 0.$$

Si $\lambda \geqslant \frac{8}{5}$, il suit

$$\log y = \sum_p \frac{\log p}{p^\beta(p^\alpha - 1) + 1} \leqslant \sum_p \frac{\log p}{1 + p^{13/5}(1 - p^{-a_{8/5}})} < \log 2,$$

une contradiction.

Donc l'hypothèse $\mathfrak{X} \leqslant \log 2$ implique $\lambda < \frac{8}{5}$. Comme α est une fonction décroissante de λ et $1 + p^{\lambda+1} - p^{\lambda+1-\alpha_\lambda} \geqslant p$ pour $\lambda \geqslant 0$, nous pouvons écrire

$$v = \sum_p \frac{\log p}{(p^\alpha - 1)\{1 + p^{\lambda+1}(1 - p^{-\alpha})\}} \leqslant \sum_p \frac{\log p}{(p^{a_{8/5}} - 1)p} < 6,$$

après vérification numérique. □

Nous déduisons immédiatement du Lemme 6.3 et des estimations (5·78), (5·79) que, sous les conditions $y \geqslant 2$, $v \geqslant 6$, nous avons

$$\log y \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}}\Big\{1+\frac{\alpha\mathfrak{X}}{\lambda}+\mathfrak{X}\log\Big(1+\frac{1}{\lambda\mathfrak{X}}\Big)\Big\}, \tag{6·5}$$

$$v \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha^2\mathfrak{X}^2}+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha^2\mathfrak{X}(1+\lambda\mathfrak{X})} \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}(1+\lambda)}{\alpha^2\mathfrak{X}(1+\lambda\mathfrak{X})}. \tag{6·6}$$

La proposition suivante fournit les estimations annoncées pour les ordres de grandeur de α et λ. Nous posons

$$w := \log\Big(\frac{\log y}{1+Z}\Big) \asymp \log\min\big(\log 2y, \sqrt{v\log v}\,\big) \qquad (y \geqslant 2,\ v \geqslant 6) \tag{6·7}$$

et notons que $Z \ll 1 \Leftrightarrow \log y \ll \sqrt{v\log v} \Leftrightarrow \log y \ll \sqrt{\log x\log_2 x} \Leftrightarrow \log y \ll \sqrt{vw}$.

Proposition 6.4. *(i) Sous les conditions $y \geqslant 2$, $v \geqslant 6$, nous avons*

$$\frac{1}{\alpha} \asymp \sqrt{vw}+\frac{vw}{\log y}. \tag{6·8}$$

(ii) Pour x assez grand, et $2 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log x\log_2 x}}$, nous avons

$$\lambda \asymp \frac{1}{\log_2 2y}\log\Big(1+\frac{\log x\log_2 2y}{(\log y)^2}\Big). \tag{6·9}$$

(iii) Il existe $C > 1$ tel que l'on ait, pour x assez grand,

$$\frac{\log y}{\sqrt{\log x\log_2 x}} \asymp \log\Big(1+\frac{1}{\lambda\log_2 x}\Big) \qquad \Big(1 < \frac{\log y}{\sqrt{\log x\log_2 x}} \leqslant C\log_2 x\Big), \tag{6·10}$$

$$\lambda \asymp \frac{1}{\log y} \qquad \Big(\log y > C\sqrt{\log x}\,(\log_2 x)^{3/2}, \quad v \geqslant 6\Big). \tag{6·11}$$

Démonstration. Un calcul facile permet de montrer que toutes les hypothèses impliquent $v \geqslant 6$.

Dans un premier temps, établissons les relations

$$\log(1+1/\alpha) \asymp \log v, \tag{6·12}$$

$$Z \ll 1 \Leftrightarrow \lambda\mathfrak{X} \gg 1. \tag{6·13}$$

Pour prouver (6·12), nous reportons l'estimation (5·47) sous la forme

$$\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}} \tag{6·14}$$

dans (6·6) et obtenons $\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/(\alpha\mathfrak{X}) \ll v \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}(1+\lambda)/\{\alpha(1+\lambda\mathfrak{X})\} \ll \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/\alpha$, d'où la conclusion requise, en vertu de (5·48).

Pour prouver (6·13), nous déduisons de (6·5), (6·6) et (6·12), que

$$Z^2 \asymp \frac{(\log y)^2}{v\log v} \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}(1+\lambda\mathfrak{X})}{(1+\lambda)\mathfrak{X}\log(1+1/\alpha)}\Big\{1+\frac{\alpha\mathfrak{X}}{\lambda}+\mathfrak{X}\log\Big(1+\frac{1}{\lambda\mathfrak{X}}\Big)\Big\}^2. \tag{6·15}$$

Si $\lambda\mathfrak{X} \ll 1$, le membre de droite est $\gg \mathfrak{X}/\log(1+1/\alpha) \gg 1$ par (5·48). Si $\lambda\mathfrak{X} \gg 1$, il est $\ll \mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}(1+\lambda)/\{\lambda\log(1+1/\alpha)\} \ll \mathfrak{X}/\log(1+1/\alpha) \ll 1$.

Nous sommes à présent en mesure de prouver l'assertion (i). Gardons à l'esprit la relation $Z \asymp (\log y)/\sqrt{v \log v}$ qui découle de (3·13) et (2·9).

Lorsque $\log y \leqslant \sqrt{\log x \log_2 x} \asymp \sqrt{v \log v}$, nous avons $\lambda\mathfrak{X} \gg 1$ et donc, par (6·5) et (6·6), en tenant compte de (5·47) et (5·48),

$$\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \ll \log y \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}(\lambda+1)}{\alpha\mathfrak{X}\lambda} \ll \mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}, \qquad v \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}(\lambda+1)}{\alpha^2\mathfrak{X}^2\lambda}. \tag{6·16}$$

Cela implique immédiatement (6·8) sous la forme

$$\alpha \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}(\lambda+1)}{v\lambda\mathfrak{X}^2\alpha} \asymp \frac{\log y}{v\mathfrak{X}} \asymp \frac{\log y}{v \log_2 2y} \asymp \frac{\log y}{vw}.$$

Lorsque $\log y \geqslant \sqrt{\log x \log_2 x} \gg \sqrt{v \log v}$, nous avons $\lambda\mathfrak{X} \ll 1$, d'où par (6·6), $\alpha^2 \asymp 1/v\mathfrak{X} \asymp \sigma_v^2$, en vertu de (5·48), (6·16) et (6·12). Cela implique bien (6·8) sous la forme $1/\alpha \asymp \sqrt{v \log v} \asymp \sqrt{vw}$.

Pour prouver l'assertion (ii), nous réutilisons la première relation (6·16) sous la forme $\log \mathfrak{X} = \log_3 2y + O(1)$ et nous appliquons (6·15). Il suit $\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\lambda\mathfrak{X}} \asymp \mathfrak{X}v(1+\lambda)/(\log y)^2$, d'où

$$\lambda\mathfrak{X} = \log\left(\frac{v\mathfrak{X}}{(\log y)^2}\right) + O\left(\log\left(1 + \frac{\lambda\mathfrak{X}}{1+\lambda}\right)\right), \tag{6·17}$$

ce qui établit bien (6·9) en notant que nos hypothèses impliquent $\log v \asymp \log_2 x$.

Considérons à présent l'assertion (iii). Comme $\lambda\mathfrak{X} \ll 1$, nous déduisons de (6·14), (6·5) et (6·6) et $\mathrm{e}^{\lambda\mathfrak{X}}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\alpha\mathfrak{X} \asymp 1$ que, sous les hypothèses effectuées,

$$\log y \asymp \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}\log\left(1 + \frac{1}{\lambda\mathfrak{X}}\right) \asymp \frac{1}{\lambda} + \log\left(1 + \frac{1}{\lambda \log v}\right)\sqrt{v \log v}, \tag{6·18}$$

d'après (5·48), (6·12) et (6·8). Si $\log y \ll \sqrt{\log x}\,(\log_2 x)^{3/2}$, on déduit de la majoration $1/\lambda \ll \log y$ que le membre de droite est dominé par son dernier terme, d'où (6·10), puisque l'on a encore $v \asymp \log x$. Par ailleurs, (6·18) implique

$$\frac{\log y}{\log v} \ll \frac{1}{\lambda \log v} + \sqrt{v \log v}.$$

Si $\log y > C\sqrt{\log x}\,(\log_2 x)^{3/2}$ avec C assez grand, il s'ensuit que $\lambda \log y \ll 1$ et donc $\lambda \log y \asymp 1$, soit (6·11). □

Lemme 6.5. *Sous les conditions $y \geqslant 2$, $v \geqslant 6$, nous avons*

$$\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} \asymp \frac{w(1+\lambda)}{1+w\lambda}\left(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\sqrt{v \log v}}\right) \asymp \frac{w(1+\lambda)(1+Z)}{(1+w\lambda)\log y}, \tag{6·19}$$

$$\mathfrak{X} \asymp w, \quad \mathfrak{X} = w + O(\log w). \tag{6·20}$$

Démonstration. Lorsque $\log y \leqslant \sqrt{v\log v}$, nous avons $\mathfrak{X} \asymp \log_2 2y \asymp w$ par la première relation (6·16). Reportant dans la seconde en prenant (6·14) et (6·8) en compte, nous obtenons

$$\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} \asymp \frac{1+\lambda}{\lambda\log y} \asymp \frac{w(1+\lambda)}{w\lambda\log y},$$

ce qui équivaut à (6·19). Lorsque $\log y > \sqrt{v\log v}$, nous avons $\lambda w \asymp \lambda\log v \asymp \lambda\mathfrak{X} \ll 1$ et $\alpha \asymp 1/\sqrt{v\log v}$ par (6·8). En reportant dans (6·14), nous obtenons de nouveau (6·19).

Les estimations (6·20) découlent immédiatement de (6·19). □

6·3. Étude asymptotique de σ_v

6·3·1. Formule asymptotique

Rappelons la notation (2·6). Pour tout $v \geqslant 6$, la quantité σ_v définie en (2·7) est donc l'unique solution de l'équation

$$-g'(\sigma) = \sum_p \frac{\log p}{\{1+p^{1-\sigma}(p^\sigma-1)\}(p^\sigma-1)} = v. \tag{6·21}$$

Nous rappelons la convention $\sigma_v := \frac{1}{2}$ $(0 \leqslant v < 6)$.

Pour tout $v > 0$, nous notons $V = V(v)$ la solution réelle de l'équation

$$V\mathrm{e}^V = 2v. \tag{6·22}$$

Ainsi, V est la valeur en $2v$ de la fonction W de Lambert — voir par exemple [9]. Un calcul itératif élémentaire fournit $V = \log\big(v/\log v\big) + O(1)$ pour $v \geqslant \log 4$, puis, par exemple,

$$\mathrm{e}^V = \frac{2v}{\log 2v}\bigg\{1 + \frac{\log_2 2v}{\log 2v} + \frac{(\log_2 2v)^2 - \log_2 2v + O(1)}{(\log 2v)^2}\bigg\} \qquad (v \geqslant \log 4). \tag{6·23}$$

Lemme 6.6. *Nous avons*

$$v\sigma_v^2\log(v\sigma_v) = 1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big) \qquad (v \geqslant 3), \tag{6·24}$$

$$\mathrm{e}^V = (v\sigma_v)^2\bigg\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\bigg\} \qquad (v \geqslant 3). \tag{6·25}$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\sigma_v^2 &= \frac{2}{vV}\bigg\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\bigg\}\\ &= \frac{2}{v\log 2v}\bigg\{1 + \frac{\log_2 2v}{\log 2v} + \frac{(\log_2 2v)^2 - \log_2 2v + O(1)}{(\log 2v)^2}\bigg\}\end{aligned} \qquad (v \geqslant 3). \tag{6·26}$$

Démonstration. Les estimations annoncées étant triviales lorsque v est borné, nous supposons v suffisamment grand, et en particulier, $0 < \sigma_v < \frac{1}{4}$, $X_v := X(\sigma_v, 1-\sigma_v) \geqslant 1$, où $X(\sigma,\kappa)$ est défini en (5·43).

Pour v assez grand, le Lemme 5.14 fournit alors les estimations

$$\mathrm{e}^{\sigma_v X_v} \asymp 1, \quad \sigma_v X_v \mathrm{e}^{X_v} \asymp 1, \quad \sigma_v = \frac{1+O(\mathrm{e}^{-X_v})}{X_v \mathrm{e}^{X_v}}. \tag{6·27}$$

La relation (5·79) appliquée avec $(\sigma,\kappa) = (\sigma_v, 1-\sigma_v)$ fournit $v\sigma_v^2 X_v \asymp 1$, d'où nous déduisons par (6·27) que $X_v \mathrm{e}^{2X_v} \asymp v$, puis $\mathrm{e}^{X_v} \asymp \sqrt{v/\log v}$, $X_v \asymp \log v$ et $\sigma_v \asymp 1/\sqrt{v\log v}$.

Avec la notation (5·72), nous avons $-g'(\sigma) = S_{0201}(\sigma, 1-\sigma)$. Appliquons alors (5·81) avec $(\sigma,\kappa) = (\sigma_v, 1-\sigma_v)$ et donc $\xi = 0$. Il vient

$$v = -g'(\sigma_v) = S_{0201}(\sigma_v, 1-\sigma_v) = \frac{1}{\sigma_v^2 X_v}\left\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\right\}.$$

En reportant dans la dernière estimation de (6·27), nous obtenons

$$X_v \mathrm{e}^{2X_v} = v + O(v/(\log v)^2), \tag{6·28}$$

$$X_v \mathrm{e}^{X_v} = \frac{1}{\sigma_v}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\Big\}, \tag{6·29}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma_v^2} = vX_v\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\Big\}, \quad \mathrm{e}^{X_v} = v\sigma_v\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\Big\}, \\ &X_v = \log(v\sigma_v) + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big). \end{aligned} \tag{6·30}$$

En reportant ces deux estimations dans (6·29), nous obtenons bien (6·24).

Multiplions alors (6·24) par $2v$ et insérons (6·22). Il suit

$$(v\sigma_v)^2 \log\left(v^2\sigma_v^2\right) = \mathrm{e}^V V\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\Big\},$$

d'où (6·25). Les estimations (6·26) découlent de ce qui précède en écrivant (6·22) sous la forme $\mathrm{e}^V = 2v/V$ et en faisant appel à (6·25) puis (6·23). □

Remarque. Nous aurons ultérieurement l'occasion d'utiliser (6·26) sous la forme

$$\sigma_v\sqrt{\tfrac{1}{2}v\log v} > 1 \qquad (v \geqslant v_0) \tag{6·31}$$

où v_0 est une constante convenable.

6·3·2. Développement asymptotique

Nous nous proposons ici d'établir les relations (2·9) et (2·10).

Pour tout $v > 0$, σ_v est la solution de l'équation $g'(\sigma) + v = 0$. Or, il résulte de (5·81) et (5·47) que $-g'(\sigma) = \{1 + O(1/X^2)\}X\mathrm{e}^{2X}$ où $X = X(\sigma, 1-\sigma)$. Comme $V\mathrm{e}^V = 2v$ par (6·22), cela suggère que $X = V/2$ fournit une bonne approximation de σ_v. Nous avons

$X(\tau_v, 1-\tau_v) = V/2$ avec $\tau_v := (2/V)\log\{1/(1-\mathrm{e}^{-V/2})\}$, donc $\tau_v^2 = \{1+O(\mathrm{e}^{-V/2)}\}2/vV$. Nous déduisons ainsi de (6·26) que

$$z_v := \sigma_v - \tau_v \ll \sigma_v/(\log v)^2. \tag{6·32}$$

Nous montrons plus loin que, lorsque σ tend vers 0, $g'(\sigma)$ possède un développement asymptotique de la forme

$$g'(\sigma) \approx -X\mathrm{e}^{2X}\Big\{1 + \sum_{m\geqslant 1} \frac{a_m}{X^m}\Big\}, \tag{6·33}$$

avec $X = X(\sigma, 1-\sigma)$. Comme il est d'usage, la relation (6·33) signifie que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on peut remplacer le signe $\approx$ par une égalité quitte à interpréter, dans le membre de droite, la somme des termes d'indices $> k$ par $O(1/X^{k+1})$.

Définissons formellement la suite $\{c_j\}_{j=1}^\infty$ par l'équation $\mathrm{e}^T(1 + T/2X) = 1 + \sum_{m\geqslant 1} a_m/X^m$ où $T := \sum_{j\geqslant 1} c_j/X^j$. Il s'ensuit que $V \approx 2X + T$, d'où nous déduisons successivement, pour des suites $\{d_k\}_{k=1}^\infty$, $\{b_m\}_{m=1}^\infty$ convenables, les développements

$$X = \tfrac{1}{2}V + \sum_{k\geqslant 1} \frac{d_k}{V^k}, \quad X\mathrm{e}^{2X} \approx \tfrac{1}{2}vV\Big\{1 + \sum_{m\geqslant 1} \frac{b_m}{V^m}\Big\}. \tag{6·34}$$

En reportant dans la relation $\sigma_v X_v \mathrm{e}^{X_v} = 1 + O(\sigma_v X_v)$, nous obtenons finalement

$$\sigma_v \approx \sqrt{\frac{2}{vV}}\Big\{1 + \sum_{m\geqslant 1} \frac{b_m}{V^m}\Big\}. \tag{6·35}$$

La relation (2·9) découle immédiatement de (6·35) au vu du développement asymptotique classique (cf. notamment [5], § 2.4)

$$V \approx \log 2v - \log_2 2v + \sum_{n\geqslant 1} \frac{q_n(\log_2 2v)}{(\log 2v)^n} \tag{6·36}$$

où q_n est un polynôme de degré n sans terme constant. Nous avons

$$q_1(z) := z,\ q_2(z) := \tfrac{1}{2}z^2 - z,\ q_3(z) := \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{3}{2}z^2 + z,\ q_4(z) := \tfrac{1}{4}z^4 - \tfrac{11}{6}z^3 + 3z^2 - z,$$

et plus généralement $q_n(z) := \sum_{1\leqslant j\leqslant n}(a_{n-j,j} + b_{n-1-j,j})z^j$ avec

$$\begin{aligned} a_{k,j} &:= \frac{(-1)^k}{(j-1)!}\binom{k+j}{k}\left[\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}z^{j-1}}\frac{\mathrm{e}^{-z}z^{k+j+1}}{(1-\mathrm{e}^{-z})^{k+j+1}}\right]_{z=0}, \\ b_{k,j} &:= \frac{(-1)^k}{(j-1)!}\binom{k+j}{k}\left[\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}z^{j-1}}\frac{z^{k+j+1}}{(1-\mathrm{e}^{-z})^{k+j+1}}\right]_{z=0} \end{aligned} \qquad (k \geqslant 0, j \geqslant 1).$$

Il reste à établir (6·33). Nous montrons en fait que, pour tout $m \geqslant 1$,

$$(6{\cdot}37)\quad a_m = (m-1)!\Big\{1+(-1)^m \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^m}\binom{k+m}{m-1} + \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{(k+m)^m}\binom{k+m-2}{m-1}\Big\}.$$

En particulier, $a_1 = 0$, $a_2 = \pi^2/3$, ce qui implique (2·10) par un calcul de routine.

Compte tenu de (5·73), nous pouvons nous limiter à établir (6·33) en remplaçant, dans le membre de gauche, $-g'(\sigma)$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{0201}(\sigma, 1-\sigma) &= \int_{\log 2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{(\mathrm{e}^{\sigma u}-1)\{1+\mathrm{e}^u(1-\mathrm{e}^{-\sigma u})\}}\,\mathrm{d}u \\ &= \{1+O(\sqrt{\sigma}\,)\}\int_{\log 2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{\sigma u(1+\mathrm{e}^u\sigma u)}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

où la seconde égalité résulte de l'approximation $1-\mathrm{e}^{-\sigma u} = \sigma u\{1+O(\sigma u)\}$ sur l'intervalle $u \leqslant X + 1/\sqrt{\sigma}$ et d'une majoration standard de la contribution complémentaire. Au vu de (5·47), nous pouvons encore, avec une erreur acceptable, remplacer σ par e^{-X}/X dans l'intégrale. Développons alors $1/(1+\mathrm{e}^{u-X}u/X)$ en série entière en $\mathrm{e}^{u-X}u/X$ ou $\mathrm{e}^{X-u}X/u$ selon que l'on a ou non $u \leqslant X$. Comme les sommes partielles sont uniformément bornées, nous obtenons, grâce au théorème de Lebesgue,

$$\mathcal{Y}_{0201}(\sigma, 1-\sigma) = X\mathrm{e}^X\big\{\mathscr{Y}_0(\sigma)+\mathscr{Y}_1(\sigma)\big\} + X^2\mathrm{e}^{2X}\mathscr{Y}_2(\sigma) + O\big(\mathrm{e}^{3X/2}\big)$$

avec $\mathscr{Y}_0(\sigma) := \int_{\log 2}^{X} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u/u \approx \mathrm{e}^X \sum_{n\geqslant 0} n!/X^{n+1}$ et

$$(6{\cdot}38)\quad \begin{aligned}\mathscr{Y}_1(\sigma) &:= \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k\mathrm{e}^{-kX}}{X^k}\int_{\log 2}^{X} \mathrm{e}^{(k+1)u}u^{k-1}\,\mathrm{d}u, \\ \mathscr{Y}_2(\sigma) &:= \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\mathrm{e}^{kX}X^k\int_X^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ku}}{u^{k+2}}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Examinons la série $\mathscr{Y}_1(\sigma)$. Nous avons

$$\int_{\log 2}^{X} \mathrm{e}^{(k+1)u}u^{k-1}\,\mathrm{d}u = \sum_{0\leqslant m<k}\binom{k-1}{m}\frac{(-1)^m m!}{(k+1)^{m+1}}\mathrm{e}^{(1+k)X}X^{k-1-m} + O(2^k) \qquad (k \geqslant 1),$$

d'où, pour X assez grand,

$$\mathscr{Y}_1(\sigma) = \frac{\mathrm{e}^X}{X}\sum_{k\geqslant 0}\sum_{0\leqslant m<k} u_{km} + O(1),$$

où l'on a posé $u_{km} := (-1)^{k+m}\binom{k-1}{m}m!/\{(k+1)^{m+1}X^m\}$. Le développement asymptotique souhaité résulte d'une interversion de sommations. Les séries étant semi-convergentes, la question n'est pas anodine. Cependant, comme $|u_{km}|$ est une fonction ultimement décroissante de k, nous avons, lorsque $K \to \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0}\sum_{0\leqslant m<k} u_{km} &= \sum_{0\leqslant k\leqslant K}\sum_{0\leqslant m<k} u_{km} + o(1) = \sum_{0\leqslant m<K}\sum_{m<k\leqslant K} u_{km} + o(1) \\ &= \sum_{0\leqslant m<K}\Big\{\sum_{k>m} u_{km} + O\Big(\frac{1}{KX^m}\Big)\Big\} + o(1) = \sum_{0\leqslant m<K}\sum_{k>m} u_{km} + o(1).\end{aligned}$$

Ainsi, posant $a_{1m} = (-1)^m m! \sum_{k>m} (-1)^k \binom{k-1}{m} / (k+1)^{m+1}$, nous pouvons énoncer que

$$\mathscr{Y}_1(\sigma) \approx \mathrm{e}^X \sum_{m \geqslant 0} \frac{a_{1m}}{X^{m+1}}. \tag{6·39}$$

La série $\mathscr{Y}_2(\sigma)$ relève d'un traitement similaire. Pour $k \geqslant 1$, nous avons

$$\int_X^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ku}}{u^{k+2}}\,\mathrm{d}u = k^{k+2} \int_{kX}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{k+2}}\,\mathrm{d}u \approx \frac{\mathrm{e}^{-kX}}{X^{k+2}} \sum_{m \geqslant 0} \binom{k+m+1}{m} \frac{(-1)^m m!}{k^{m+1} X^m},$$

d'où

$$\mathscr{Y}_2(\sigma) \approx \frac{1}{X} + \sum_{k \geqslant 1} (-1)^k \sum_{m \geqslant 0} \binom{k+m+1}{m} \frac{(-1)^m m!}{k^{m+1} X^{m+2}}.$$

Comme précédemment la valeur absolue du terme général est une fonction décroissante de k. Posant $a_{2m} := (-1)^m m! \sum_{k \geqslant 1} (-1)^k \binom{k+m+1}{m} / k^{m+1}$, il suit

$$\mathscr{Y}_2(\sigma) \approx \frac{1}{X} + \sum_{m \geqslant 0} \frac{a_{2m}}{X^{m+2}}.$$

Cela implique bien (6·33) avec $a_m := a_{1,m-1} + a_{2,m-1}$ $(m \geqslant 1)$.

6·4. Formules asymptotiques pour les paramètres du col

6·4·1. Petites valeurs de y

Rappelons que nous notons $\{p_j\}_{j=1}^\infty$la suite croissante des nombres premiers et que, pour chaque $y \geqslant 2$, nous désignons par $H = H_y$ l'unique entier vérifiant

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant H} p_j \leqslant y < \prod_{1 \leqslant j \leqslant H+1} p_j, \tag{6·40}$$

de sorte que $\mathcal{U}^\pm_{\log y} = \mathcal{U}_{\log y} = p_{H+1}$, sauf si $y = \prod_{1 \leqslant j \leqslant H} p_j$, auquel cas $\mathcal{U}^-_{\log y} = p_H$, $\mathcal{U}^+_{\log y} = p_{H+1}$, $\mathcal{U}_{\log y} = \sqrt{p_H p_{H+1}}$.

La proposition suivante fournit, pour les petites valeurs de y, des évaluations asymptotiques pour α et β dont le terme d'erreur relatif tend vers 0 dès que x tend vers l'infini. La gestion des valeurs bornées de y est particulièrement délicate et nécessite l'introduction des fonctions $\mathcal{U}^\pm_t$.

Lemme 6.7. *Pour x assez grand, $y \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant y \leqslant \exp\big\{\sqrt{\log_2 x}/\log_3 x\big\}$, nous avons*

$$\alpha = \big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{-\mathfrak{s}_x}\big)\big\} \frac{\mathcal{T}(\log y)}{v}, \qquad \beta = \big\{1 + O(1/\mathfrak{s}_x)\big\} \frac{\log_2 x}{\log \mathcal{U}_{\log y}}, \tag{6·41}$$

où l'on a posé $\mathfrak{s}_x := \sqrt{\log_2 x}$.

Démonstration. Nous pouvons supposer x assez grand, et donc $v \geqslant 6$. D'après (6·8) et (6·9), nous avons, sous les conditions de l'énoncé,

$$\alpha \asymp \frac{\log y}{\log x \log_2 2y}, \qquad \beta \asymp \lambda \asymp \frac{\log_2 x}{\log_2 2y}. \tag{6·42}$$

Soit $H := H_y$. Selon (3·32), nous avons $\mathcal{T}(\log y) = H + \eta$, avec

$$\eta := \frac{\log y - \vartheta(p_H)}{\log p_{H+1}}. \tag{6·43}$$

Rappelons que (α, β) est la solution du système (6·3). En restreignant la sommation de la première équation à $p \leqslant p_{H+1}$, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} &\log y > \frac{\vartheta(p_{H+1})}{1 + p_{H+1}^{\beta}(p_{H+1}^{\alpha} - 1)}, \qquad p_{H+1}^{\beta}\alpha(\log p_{H+1}) \log y > \vartheta(p_{H+1}) - \log y, \\ &\alpha p_{H+1}^{\beta} \gg \frac{1}{y(\log y)\log_2 2y} = \mathrm{e}^{o(\mathfrak{s}_x)}, \end{aligned} \tag{6·44}$$

puisque $\vartheta(p_{H+1}) = \log\big(\prod_{1 \leqslant j \leqslant H+1} p_j\big) \geqslant \log(y+1) \geqslant \log y + 1/2y$.

En reportant la première évaluation (6·42) dans la troisième estimation (6·44) compte tenu de la relation $p_{H+1} \asymp \log y$, nous obtenons $\beta \geqslant \{2 + o(1)\}(\log_2 x)/\log_3 x$. Cela implique en particulier

$$\Big(\frac{p_{j+1}}{p_j}\Big)^{\beta} \geqslant \mathrm{e}^{\{4+o(1)\}\mathfrak{s}_x} \qquad (H - 1 \leqslant j \leqslant H + 1). \tag{6·45}$$

Cette inégalité découle trivialement de la deuxième évaluation (6·42) pour y borné ; lorsque y est suffisamment grand, il résulte du théorème des nombres premiers que

$$p_{H+1} = \{1 + O(1/\log_2 2y)\}\log y \leqslant \{1 + o(1)\}\sqrt{\log_2 x}/\log_3 x,$$

et la minoration

$$(p_{j+1}/p_j)^{\beta} \geqslant (1 + 2/p_j)^{\beta} \geqslant \mathrm{e}^{2\beta/p_j - 2\beta/p_j^2}$$

fournit encore (6·45).

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \log y &= \sum_{p \leqslant p_{H+1}} \frac{\log p}{p^{\beta}(p^{\alpha} - 1) + 1} + O\Big(\frac{1}{\alpha\beta p_{H+2}^{\beta-1}}\Big) = \sum_{p \leqslant p_{H+1}} \frac{\log p}{p^{\beta}(p^{\alpha} - 1) + 1} + O\big(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x}\big) \\ &\leqslant \vartheta(p_{H-1}) + \sum_{p_H \leqslant p \leqslant p_{H+1}} \frac{\log p}{p^{\beta}(p^{\alpha} - 1) + 1} + O\big(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x}\big). \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{4}(\log p_H + \log p_{H+1}) \leqslant \frac{3}{4}\log p_H$ pour $H \geqslant 1$, il suit

$$p_H^{\beta}(p_H^{\alpha} - 1) \leqslant 3 \tag{6·46}$$

pour x assez grand et donc, en minorant p_H/p_{H-1} par (6·45), $p_{H-1}^{\beta}(p_{H-1}^{\alpha} - 1) \ll \mathrm{e}^{-7\mathfrak{s}_x/2}$.

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\log y &= \sum_{p\leqslant p_{H-1}} \frac{\log p}{1+O(\mathrm{e}^{-7\mathfrak{s}_x/2})} + \log p_H - \frac{p_H^\beta(p_H^\alpha-1)\log p_H}{1+p_H^\beta(p_H^\alpha-1)} \\ &\quad + \frac{\log p_{H+1}}{1+p_{H+1}^\beta(p_{H+1}^\alpha-1)} + O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x}) \\ &= \vartheta(p_H) - \frac{p_H^\beta(p_H^\alpha-1)\log p_H}{1+p_H^\beta(p_H^\alpha-1)} + \frac{\log p_{H+1}}{1+p_{H+1}^\beta(p_{H+1}^\alpha-1)} + O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x}),\end{aligned}$$

ce que nous récrivons sous la forme

$$\log y - \vartheta(p_H) + \frac{p_H^\beta(p_H^\alpha-1)\log p_H}{1+p_H^\beta(p_H^\alpha-1)} + O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x}) = \frac{\log p_{H+1}}{1+p_{H+1}^\beta(p_{H+1}^\alpha-1)}\cdot \tag{6·47}$$

Si $y \geqslant 1+\prod_{1\leqslant j\leqslant H} p_j$, alors $\log y - \vartheta(p_H) \gg 1/y = \mathrm{e}^{o(\mathfrak{s}_x)}$, d'où, pour x assez grand,

$$\log y - \vartheta(p_H) \ll \frac{\log p_{H+1}}{1+p_{H+1}^\beta(p_{H+1}^\alpha-1)} \ll \frac{1}{\alpha p_{H+1}^\beta}\cdot$$

Ainsi, $p_{H+1}^\beta\alpha \ll y = \mathrm{e}^{o(\mathfrak{s}_x)}$, et donc, compte tenu de (6·44) et (6·42),

$$\beta\log p_{H+1} = \log(1/\alpha) + o(\mathfrak{s}_x) = \log_2 x + O(\log_2 2y + \mathfrak{s}_x) = \{1+O(1/\mathfrak{s}_x)\}\log_2 x.$$

Cela fournit bien l'évaluation de β annoncée en (6·41) lorsque $\mathfrak{U}_{\log y} = p_{H+1}$.

Lorsque $y = \prod_{1\leqslant j\leqslant H} p_j$, et donc $\mathfrak{U}_{\log y} = \sqrt{p_H p_{H+1}}$, $\log y = \vartheta(p_H)$, nous pouvons écrire

$$\sum_{p\leqslant p_H} \frac{p^\beta(p^\alpha-1)\log p}{p^\beta(p^\alpha-1)+1} = \sum_{p\geqslant p_{H+1}} \frac{\log p}{p^\beta(p^\alpha-1)+1}$$

puis, par une manipulation à présent standard,

$$\frac{p_H^\beta(p_H^\alpha-1)\log p_H}{1+p_H^\beta(p_H^\alpha-1)} = \{1+O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x})\}\frac{\log p_{H+1}}{1+p_{H+1}^\beta(p_{H+1}^\alpha-1)}\cdot \tag{6·48}$$

Compte tenu de (6·46), nous obtenons $p_H^\beta(p_H^\alpha-1)\log p_H \ll 1/(\alpha p_{H+1}^\beta)$, et donc

$$\big\{p_H^\beta(p_H^\alpha-1)\big\}^2 \ll (p_H/p_{H+1})^\beta \ll \mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x}, \quad \frac{1}{1+p_{H+1}^\beta(p_{H+1}^\alpha-1)} \ll \mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x/2}. \tag{6·49}$$

En reportant dans (6·48), nous obtenons

$$p_H^\beta(p_H^\alpha-1)\log p_H = \{1+O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x/2}))\}\frac{\log p_{H+1}}{p_{H+1}^\beta(p_{H+1}^\alpha-1)},$$

et finalement $(p_H p_{H+1})^{\beta/2}\alpha\log p_H = 1+O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x/2})$, puisque $\alpha\log p_{H+1} \ll \mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x/2}$. Il suit

$$\beta\log\mathfrak{U}_{\log y} = \tfrac12\beta\log(p_H p_{H+1}) = \log(1/\alpha) + O(\log y) = \{1+O(1/\mathfrak{s}_x)\}\log_2 x.$$

Nous avons donc établi inconditionnellement l'évaluation de β annoncée dans (6·41).

Pour établir celle de α, nous raisonnons à nouveau par dichotomie selon les valeurs de y.

Si $y \geqslant 1+\prod_{1\leqslant j\leqslant H} p_j$, alors l'estimation $p_{H+1}^{\beta}\alpha \ll y = \mathrm{e}^{o(\mathfrak{s}_x)}$ précédemment obtenue et l'inégalité (6·45) implique $\alpha p_H^{\beta}\log p_H \ll \mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x}/y$. En reportant à nouveau dans (6·47), nous obtenons

$$\frac{1}{1+p_{H+1}^{\beta}(p_{H+1}^{\alpha}-1)} = \{1+O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x})\}\eta, \tag{6·50}$$

où η est défini en (6·43).

Lorsque $y = \prod_{1\leqslant j\leqslant H} p_j$, la seconde estimation (6·49) implique que le membre de gauche de (6·50) est $\ll \mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x/2}$.

Insérons finalement ces estimations dans la seconde équation de (6·3). Nous obtenons

$$\begin{aligned}\alpha v &= \sum_p \frac{\alpha\log p}{(p^\alpha-1)(p^\beta(p^\alpha-1)+1)}\\ &= \{1+O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x/2})\}\sum_{p\leqslant p_H} 1+\frac{1+O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x/2})}{1+p_{H+1}^{\beta}(p_{H+1}^{\alpha}-1)}+O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x/2})\\ &= \{1+O(\mathrm{e}^{-3\mathfrak{s}_x/2})\}(H+\eta),\end{aligned}$$

ce qui implique bien le résultat annoncé. □

Lemme 6.8. *Sous les conditions $x \geqslant 3$, $2 \leqslant y \leqslant \exp\exp\sqrt{\log_2 x}$, nous avons*

$$\alpha = \frac{H_y}{\log x}\left\{1+O\left(\frac{\log_2 y}{\log_2 x}+\frac{1}{(\log y)^{19/40}}\right)\right\}, \tag{6·51}$$

$$\beta = \frac{\log_2 x}{\log \mathfrak{U}_{\log y}}\left\{1+O\left(\frac{\log_2 y}{\log_2 x}+\frac{1}{(\log y)^{19/40}}+\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)\right\}. \tag{6·52}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer x assez grand. Nous observons par ailleurs que les relations (6·42) persistent dans le domaine considéré.

Posant

$$S := S_{-1101}(\alpha,\beta) = \sum_p \frac{1}{p^\beta(p^\alpha-1)+1},$$

nous commençons par établir la formule

$$\alpha\log x = S + O\Big(\frac{(\log y)^2}{\log x\log_2 2y}\Big). \tag{6·53}$$

À cette fin, ajoutons membre à membre les deux équations (6·3) pour obtenir, avec la notation (6·4),

$$\begin{aligned}\alpha\log x &= \sum_p \frac{p^\alpha\alpha\log p}{(p^\alpha-1)\{p^\beta(p^\alpha-1)+1\}}\\ &= \sum_{p\leqslant\exp(3\mathfrak{X})}\frac{1+O(\alpha\log p)}{p^\beta(p^\alpha-1)+1}+O\Big(\sum_{p>\exp(3\mathfrak{X})}\frac{1+\alpha\log p}{p^\beta(p^\alpha-1)+1}\Big)\\ &= S+O\Big(\alpha\log y+\sum_{p>\exp(3\mathfrak{X})}\frac{1}{p^\beta(p^\alpha-1)}\Big) = S+O\Big(\alpha\log y+\frac{1}{\mathrm{e}^{3(\beta-1)\mathfrak{X}}\alpha\mathfrak{X}}\Big).\end{aligned}$$

La relation (6·42) implique que le premier terme d'erreur est de l'ordre du reste de (6·53). Comme (5·46) implique $\mathrm{e}^{\beta\mathfrak{X}}\alpha\mathfrak{X} \asymp 1$, le second terme d'erreur est $\ll \mathrm{e}^{(3-2\beta)\mathfrak{X}} \ll \mathrm{e}^{-(\beta+1)\mathfrak{X}} \ll \alpha$.

Cela achève la preuve de (6·53).

Considérons ensuite (6·51). La première équation (6·3) permet d'écrire

$$\log y \geqslant \tfrac{1}{2}\vartheta(\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}) \gg \mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \tag{6·54}$$

et

$$\log y - \vartheta(\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}) = -\sum_{p\leqslant \exp\mathfrak{X}} \frac{p^\beta(p^\alpha-1)\log p}{p^\beta(p^\alpha-1)+1} + \sum_{p>\exp\mathfrak{X}} \frac{\log p}{p^\beta(p^\alpha-1)+1}.$$

Notons que $\mathfrak{X} \asymp \log_2 2y \ll (\log_2 x)/\log_2 2y \asymp \beta$ par (6·42). Posant $\mathfrak{X}_1 := (1-3/\beta)\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_2 := (1+3/\beta)\mathfrak{X}$, $\mathfrak{D} := 2+\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\mathfrak{X}/\beta$, nous avons

(6·55)
$$\sum_{p\leqslant \exp\mathfrak{X}_1} \frac{p^\beta(p^\alpha-1)\log p}{p^\beta(p^\alpha-1)+1} + \sum_{p>\exp\mathfrak{X}_2} \frac{\log p}{p^\beta(p^\alpha-1)+1} \ll \alpha\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\beta\mathfrak{X}-3\mathfrak{X}} + \frac{\mathrm{e}^{(3/\beta-2)\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\beta\mathfrak{X}}} \ll \mathrm{e}^{-2\mathfrak{X}},$$

et, par (5·28),

(6·56)
$$\sum_{\mathfrak{X}_1<\log p\leqslant\mathfrak{X}} \frac{p^\beta(p^\alpha-1)\log p}{p^\beta(p^\alpha-1)+1} + \sum_{\mathfrak{X}<\log p\leqslant\mathfrak{X}_2} \frac{\log p}{p^\beta(p^\alpha-1)+1} \ll \sum_{\mathfrak{X}_1<\log p\leqslant\mathfrak{X}_2} \log p \ll \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{X}}{\log\mathfrak{D}}.$$

Rappelant la définition de $H = H_y$ en (6·40), de sorte que $\log y = \vartheta(p_H) + O(\mathfrak{X})$, nous avons donc

$$\vartheta(p_H) - \vartheta(\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}) \ll \mathfrak{D}\mathfrak{X}/\log\mathfrak{D}. \tag{6·57}$$

Si $p_H - \mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \gg \mathrm{e}^{21\mathfrak{X}/40}$, le membre de gauche de (6·57) est $\gg p_H - \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$ par (5·29). Nous obtenons donc inconditionnellement

$$p_H - \mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \ll \mathfrak{D}\mathfrak{X}/\log\mathfrak{D} + \mathrm{e}^{21\mathfrak{X}/40}. \tag{6·58}$$

Nous pouvons alors écrire $S - H = S_1 + S_2 + S_3$, avec

$$\begin{aligned} S_1 &:= \sum_{p\leqslant\min(p_H,\exp\mathfrak{X})} \frac{-p^\beta(p^\alpha-1)}{1+p^\beta(p^\alpha-1)} \\ &\ll \sum_{p\leqslant\min(p_H,\exp\mathfrak{X}_1)} p^\beta(p^\alpha-1) + \sum_{\min(p_H,\exp\mathfrak{X}_1)<p\leqslant\min(p_H,\exp\mathfrak{X})} p^\beta(p^\alpha-1) \\ &\ll \mathrm{e}^{-2\mathfrak{X}} + \frac{\mathfrak{D}}{\log\mathfrak{D}} \ll \frac{\mathfrak{D}}{\log\mathfrak{D}}, \end{aligned}$$

grâce à (6·55) et (6·56),

$$\begin{aligned} S_2 &:= \sum_{\min(p_H,\exp\mathfrak{X})<p\leqslant p_H} \frac{-p^\beta(p^\alpha-1)}{1+p^\beta(p^\alpha-1)} + \sum_{p_H<p\leqslant\max(p_H,\exp\mathfrak{X})} \frac{1}{1+p^\beta(p^\alpha-1)} \\ &\ll \pi(\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}) - \pi(p_H) \ll \frac{\vartheta(\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}) - \vartheta(p_H)}{\mathfrak{X}} \ll \frac{\mathfrak{D}}{\log\mathfrak{D}} + \frac{\mathrm{e}^{21\mathfrak{X}/40}}{\mathfrak{X}} \ll \frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\beta} + \frac{\mathrm{e}^{21\mathfrak{X}/40}}{\mathfrak{X}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S_3 &:= \sum_{p>\max(p_H,\exp\mathfrak{X})} \frac{1}{1+p^\beta(p^\alpha-1)} \\
&\ll \sum_{\max(p_H,\exp\mathfrak{X})<p\leqslant\max(p_H,\exp\mathfrak{X}_2)} \frac{1}{p^\beta(p^\alpha-1)} + \sum_{p>\max(p_H,\exp\mathfrak{X}_2)} \frac{1}{p^\beta(p^\alpha-1)} \\
&\ll \frac{\mathfrak{D}}{\log\mathfrak{D}} + \mathrm{e}^{-2\mathfrak{X}} \ll \frac{\mathfrak{D}}{\log\mathfrak{D}},
\end{aligned}$$

de nouveau grâce à (6·55) et (6·56).

En tenant compte de (6·54), il suit

$$S-H \ll \frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\beta\mathfrak{X}} + \frac{\mathrm{e}^{21\mathfrak{X}/40}}{\mathfrak{X}} \ll \frac{\log y}{\log_2 x} + \frac{(\log y)^{21/40}}{\log_2 2y} \ll H\Big\{\frac{\log_2 2y}{\log_2 x} + \frac{1}{(\log y)^{19/40}}\Big\},$$

dont nous déduisons (6·51) en reportant dans (6·53).

Pour établir (6·52), nous déduisons dans un premier temps de l'évaluation

$$\beta\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\beta\mathfrak{X}} \asymp \beta/\alpha \asymp \frac{\log x\log_2 x}{\log y}$$

que $\beta\mathfrak{X} = \log_2 x + O(\log_2 y + \log_3 x)$. Comme par ailleurs (6·58) implique

$$p_H - \mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \ll \frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\beta} + \mathrm{e}^{21\mathfrak{X}/40} \ll \frac{\log y\log_2 2y}{\log_2 x} + (\log y)^{21/40}$$

et $\log\mathcal{U}_{\log y} = \log p_H + O\big(p_H^{-19/40}\big)$, nous pouvons écrire

$$\mathfrak{X} = \log\mathcal{U}_{\log y}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 2y}{\log_2 x} + \frac{1}{(\log y)^{19/40}}\Big)\Big\},$$

ce qui implique bien (6·52). □

Posons

$$Q(x,y) := \log\Big(\frac{\log x}{(\log y)^2}\Big),$$

de sorte que, pour $(x,y)\in\mathscr{D}^-$ — cf. (3·35) —, nous avons $Q(x,y)\gg\sqrt{\log_2 x}$.

Lemme 6.9. *Pour $(x,y)\in\mathscr{D}^-$, $y\geqslant\log x$, nous avons*

$$\alpha = \frac{\log y}{\log x\log_2 y}\left\{1 + O\Big(\frac{1}{Q(x,y)} + \frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\right\}, \tag{6·59}$$

$$\lambda = \frac{Q(x,y)}{\log_2 y}\left\{1 + O\Big(\frac{\log_3 y}{Q(x,y)} + \frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\right\}. \tag{6·60}$$

Démonstration. D'après la Proposition 5.20(ii) et le Lemme 6.3, nous avons, dès que $y \geqslant 2$, $v \geqslant 6$,

$$\log y = \frac{\mathfrak{S}(\lambda)J_1(\lambda\mathfrak{X}) + \log(\lambda/\alpha) - D(\lambda/\alpha)}{\alpha} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}^2}\Big), \tag{6·61}$$

$$v = \frac{\mathfrak{S}(\lambda)J_2(\lambda\mathfrak{X})}{\alpha^2\mathfrak{X}} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha^2\mathfrak{X}^3}\Big). \tag{6·62}$$

Or, dans la région considérée, nous déduisons de (6·8), (6·9) et (5·48) que

$$\frac{\log(\lambda/\alpha) - D(\lambda/\alpha)}{\alpha} \ll \frac{1}{\lambda} \ll \mathfrak{X}, \qquad J_1(\lambda\mathfrak{X}) \asymp J_2(\lambda\mathfrak{X}) \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\lambda\mathfrak{X}}.$$

Comme $\mathfrak{S}(\lambda) \asymp 1 + \lambda$ par (5·39), il suit

$$\log y = \frac{\mathfrak{S}(\lambda)J_1(\lambda\mathfrak{X})}{\alpha}\left\{1 + O\Big(\frac{\lambda}{(1+\lambda)\log_2 y}\Big)\right\},$$
$$v = \frac{\mathfrak{S}(\lambda)J_2(\lambda\mathfrak{X})}{\alpha^2\mathfrak{X}}\left\{1 + O\Big(\frac{\lambda}{(1+\lambda)\log_2 y}\Big)\right\}.$$

Effectuons le quotient de ces deux estimations membre à membre. En faisant appel à (5·6), (6·20) et en notant que $\lambda\mathfrak{X} \asymp Q(x,y)$, nous obtenons bien (6·59).

D'après (6·17) et (6·54), nous avons

$$Q(x,y) = \lambda\mathfrak{X} + O\big(\log\mathfrak{X}\big) = \lambda\mathfrak{X} + O(\log_3 y).$$

D'après la deuxième estimation (6·20) pour $\mathfrak{X}$, cela établit (6·60). □

Proposition 6.10. *Sous la condition* $(x,y) \in \mathscr{D}^-$, $y \in \mathbb{N}$, $y \geqslant 2$, *nous avons*

$$\alpha = \frac{\mathcal{T}(\log y)}{\log x}\left\{1 + O\left(\frac{(\log_3 x)^{19/40}}{(\log_2 x)^{19/80}}\right)\right\}, \tag{6·63}$$

$$\lambda \log \mathcal{U}_{\log y} = Q(x,y)\left\{1 + O\left(\frac{(\log_3 x)^{19/40}}{(\log_2 x)^{19/80}}\right)\right\}. \tag{6·64}$$

Démonstration. Lorsque $\log y \leqslant \sqrt{\log_2 x}/\log_3 x$, nous pouvons appliquer (6·41) en observant que, dans cette circonstance, $Q(x,y) = \log_2 x + O(\log_3 x)$. Cela implique bien (6·63) et (6·64), avec de la marge.

Lorsque $\sqrt{\log_2 x}/\log_3 x < \log y \leqslant \exp\sqrt{\log_2 x}$, nous avons

$$H_y = \mathcal{T}(\log y)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}, \qquad \log_2 x = Q(x,y)\left\{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right)\right\}.$$

Les estimations annoncées découlent donc du Lemme 6.8.

Enfin, lorsque $\exp\sqrt{\log_2 x} < \log y \leqslant \sqrt{\log x}/\mathrm{e}^{\sqrt{\log_2 x}}$, nous pouvons appliquer le Lemme 6.9, en notant que $\log_2 y = \log \mathcal{U}_{\log y} + O(1)$, $\mathcal{T}(\log y) = (\log y)/\{\log_2 y + O(1)\}$. □

6·4·2. Grandes valeurs de y

Rappelons les notations v en (1·10), σ_v en (2·7), et $Z = Z(x,y)$ en (3·13). Il est également utile de garder à l'esprit la formule asymptotique (2·9). Nous posons encore

$$\mathfrak{R}_0 := \frac{Z}{(\log_2 x)^2} + \frac{(1+Z)^2 \log(2+1/Z)}{\mathrm{e}^Z \log_2 x}.$$

Lemme 6.11. *Il existe une constante absolue $c \in]0, \frac{1}{3}[$ telle que, sous la condition*

$$x \geqslant 16, \quad \mathrm{e}^{-2\sqrt{\log_2 x}} < \frac{\log y}{\sqrt{\log x \log_2 x}} \leqslant c \log_2 x, \tag{6·65}$$

nous ayons

$$\alpha = \{1 + O(\mathfrak{R}_0)\}\sigma_v \sqrt{J_2(\varrho)}, \qquad \lambda = \{1 + O(\mathfrak{R}_0)\}\frac{\varrho}{\log(v\sigma_v)}. \tag{6·66}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer x assez grand. Observons d'emblée que les conditions (6·65) impliquent $\mathfrak{R}_0 \ll 1/\sqrt{\log_2 x}$.

Pour un choix convenable de c, les relations (6·8), (6·9), et (6·10) impliquent $1/\lambda \ll (\log x)^{1/8}$ et $\lambda/\alpha \leqslant 1$, d'où

$$\frac{\log(\lambda/\alpha) - D(\lambda/\alpha)}{\alpha} \ll \frac{1}{\lambda} \ll v^{1/8}. \tag{6·67}$$

De plus, il découle de (6·9), (6·10) et (6·13) que (6·65) implique $\lambda \ll 1/\sqrt{\log_2 x}$ et donc $\mathfrak{S}(\lambda) = 1 + O(\lambda^2)$, en vertu de (5·39). Reportons cette estimation dans (6·61) et (6·62), en tenant compte de (6·14) et (6·67). Comme $v^{1/8}/\log y \ll \lambda^2$, nous obtenons

$$\frac{J_1(\lambda\mathfrak{X})}{\alpha} = \Big\{1 + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\mathfrak{X}\log y} + \lambda^2\Big)\Big\}\log y, \qquad \frac{J_2(\lambda\mathfrak{X})}{\alpha^2\mathfrak{X}} = \Big\{1 + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}^2 v} + \lambda^2\Big)\Big\}v.$$

Nous avons $\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \log y \asymp (\lambda + 1/w)/(1+Z)$ par (6·19), avec $w \asymp \mathfrak{X} \asymp \log_2 x$. Ainsi

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\mathfrak{X}\log y} \ll \frac{1}{(1+Z)(\log x)^2} + \frac{\lambda}{(1+Z)\log_2 x} \ll \frac{1}{(1+Z)(\log x)^2} + \lambda^2.$$

Par ailleurs, grâce à (6·14) et (6·8) récrite sous la forme $1/\alpha \asymp \sqrt{vw}(1 + 1/Z)$ sous la condition (6·65), nous pouvons écrire

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}^2 v} \asymp \frac{(\log y)(\lambda + 1/w)\sqrt{vw}}{w^2 v Z} \asymp \frac{\lambda}{w} + \frac{1}{w^2} \ll \lambda^2 + \frac{1}{w^2}.$$

Il suit

$$\begin{aligned} \frac{J_1(\lambda\mathfrak{X})}{\alpha} &= \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(1+Z)(\log_2 x)^2} + \lambda^2\Big)\Big\}\log y, \\ \frac{J_2(\lambda\mathfrak{X})}{\alpha^2\mathfrak{X}} &= \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^2} + \lambda^2\Big)\Big\}v. \end{aligned} \tag{6·68}$$

Rappelons la définition de ϱ en (3·15) et l'évaluation (3·17), que nous récrivons sous la forme

$$\varrho \asymp \mathrm{e}^{-Z} \log\Big(2 + \frac{\log x \log_2 x}{(\log y)^2}\Big). \tag{6·69}$$

Dans un premier temps, établissons (6·66) sous la condition

$$\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log_2 x}} < \log y/\sqrt{\log x \log_2 x} \leqslant 1, \tag{6·70}$$

qui implique donc $\mathfrak{X} \asymp \log_2 y \asymp \log_2 x$, $1 \ll \lambda\mathfrak{X} \ll \sqrt{\log_2 x}$ et $Z \ll 1$, de sorte que $\varrho \asymp \lambda \log_2 y$ d'après (6·9). Nous déduisons alors de (6·19) que

$$\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \asymp \lambda \log y \asymp \varrho \frac{\log y}{\log v} \asymp \varrho \sqrt{\frac{v}{\log v}} \frac{\log y}{\sqrt{\log x \log_2 x}}, \tag{6·71}$$

d'où $\mathfrak{X} = \frac{1}{2}\log(v/\log v) + O(\varrho) = \log(v\sigma_v) + O(\varrho)$. Comme il découle de (6·25) et (6·26) que $v\sigma_v^2 \log(v\sigma_v) = 1 + O\big(1/(\log v)^2\big)$, il suit

$$v\mathfrak{X} = \frac{1}{\sigma_v^2}\Big\{1 + O\Big(\frac{\varrho}{\log v}\Big)\Big\}.$$

Effectuons alors le quotient membre à membre des estimations (6·68). Compte tenu de ce qui précède, nous obtenons, avec la notation $j(s)$ définie en (5·9),

$$\begin{aligned} j(\lambda\mathfrak{X}) &= \frac{J_1(\lambda\mathfrak{X})^2}{J_2(\lambda\mathfrak{X})} = \frac{(\log y)^2}{v\mathfrak{X}}\Big\{1 + O\Big(\frac{\varrho}{\log v}\Big)\Big\} \\ &= Z^2\Big\{1 + O\Big(\frac{\varrho}{\log v}\Big)\Big\} = j(\varrho)\Big\{1 + O\Big(\frac{\varrho}{\log v}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Comme $\varrho \gg 1$, nous avons $j'(\varrho) \asymp j(\varrho) = Z^2$ d'après (5·14) et (5·3). Par ailleurs, comme $\lambda\mathfrak{X} \gg 1$, il résulte de (5·47), (6·71) et (6·8) que $j'(\lambda\mathfrak{X}) \asymp \mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}/(\lambda\mathfrak{X}) \asymp \alpha\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/\lambda \asymp \alpha \log y \asymp Z^2$. Il suit

$$j(\lambda\mathfrak{X}) - j(\varrho) \asymp \int_{\varrho}^{\lambda\mathfrak{X}} j'(u)\,\mathrm{d}u \asymp j'(\varrho)\{\lambda\mathfrak{X} - \varrho\} \asymp j(\varrho)\{\lambda\mathfrak{X} - \varrho\},$$

et donc $\lambda\mathfrak{X} = \varrho\{1 + O(1/\log v)\}$. Nous avons établi plus haut que $\mathfrak{X} = \log(v\sigma_v) + O(\varrho)$ dans le domaine (6·70). Compte tenu de (6·69), nous obtenons bien l'estimation annoncée en (6·66) pour λ.

Pour établir l'estimation de α dans le domaine (6·70), nous observons que $\lambda \gg 1/\log_2 x$ et donc $\alpha = \{1 + O(\lambda^2)\}J_1(\lambda\mathfrak{X})/\log y$ par (6·68). Or, nous avons comme précédemment $J_1'(\varrho) \asymp J_1'(\lambda\mathfrak{X}) \asymp J_1(\varrho) \asymp j'(\varrho)$, d'où

$$J_1(\lambda\mathfrak{X}) - J_1(\varrho) = \int_{\varrho}^{\lambda\mathfrak{X}} J_1'(u)\,\mathrm{d}u \asymp j(\lambda\mathfrak{X}) - j(\varrho) \ll J_1(\varrho)\frac{\varrho}{\log v},$$

et donc $\alpha = \{1 + O(\varrho/\log v)\}J_1(\varrho)/\log y$. La formule requise pour α découle alors de l'identité $J_1(\varrho) = Z\sqrt{J_2(\varrho)}$ et de (6·69).

Il reste à établir (6·66) lorsque $1 \leqslant (\log y)/\sqrt{\log x \log_2 x} \leqslant c \log_2 x$. Nous avons alors $\lambda \ll 1/\log v$ par (6·10), d'où nous déduisons, en effectuant le quotient membre à membre des relations (6·68), que

$$j(\lambda\mathfrak{X}) = \frac{(\log y)^2}{v\mathfrak{X}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\Big\}. \tag{6·72}$$

D'après (6·10), nous avons $\lambda\mathfrak{X} \ll 1$ et donc $\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \asymp \sqrt{v/\log v}$ par (6·19). En insérant l'estimation $\mathfrak{X} = \frac{1}{2}\log(v/\log v) + O(1)$ dans (6·72) et en tenant compte de (6·26), nous obtenons

$$j(\lambda\mathfrak{X}) = Z^2\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log v}\Big)\Big\} = j(\varrho)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log v}\Big)\Big\}.$$

Comme $j(u) \asymp \{\log(1 + 1/u)\}^2$ et $j'(u) \asymp \{\log(1 + 1/u)\}/u$ pour $u \ll 1$, nous obtenons que $j'(u) \asymp Z/u$ lorsque u varie dans un intervalle d'extrémités ϱ et $\lambda\mathfrak{X}$, puis

$$j(\lambda\mathfrak{X}) - j(\varrho) = \int_{\varrho}^{\lambda\mathfrak{X}} j'(u)\,\mathrm{d}u \asymp Z\log(\lambda\mathfrak{X}/\varrho) \ll \frac{Z^2}{\log v}\cdot$$

Comme $Z/\log v \ll 1$, il suit

$$\lambda\mathfrak{X} = \varrho\Big\{1 + O\Big(\frac{Z}{\log v}\Big)\Big\}.$$

En diminuant si nécessaire la valeur de c, nous obtenons $\lambda\mathfrak{X} \asymp \varrho \asymp \mathrm{e}^{-Z} \gg v^{-1/3}$. Comme $\alpha\mathfrak{X} \asymp \sqrt{(\log v)/v} \ll \varrho$ d'après (6·8), nous pouvons déduire de (5·47) que

$$\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\alpha\mathfrak{X} = \mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}\{1 + O(\varrho)\} = 1 + O(\varrho). \tag{6·73}$$

Insérons alors l'évaluation

$$J_2(\lambda\mathfrak{X}) = 1 + O\left(\lambda\mathfrak{X}\log(1 + 1/\lambda\mathfrak{X})\right) = 1 + O\left(Z\mathrm{e}^{-Z}\right),$$

qui découle de (5·3), dans la seconde formule (6·68). Il vient

$$\frac{1}{\alpha^2} = v\mathfrak{X}\left\{1 + O\left(E\right)\right\}, \qquad E := \frac{1}{(\log v)^2} + Z\mathrm{e}^{-Z}.$$

En exprimant α par (6·73), nous obtenons $2\mathfrak{X}\mathrm{e}^{2\mathfrak{X}} = 2v\{1 + O(E)\}$, d'où $\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} = v\sigma_v\{1 + O(E)\}$ par (6·25), et finalement $\mathfrak{X} = \log(v\sigma_v)\{1 + O(E/\log v)\}$.

En insérant cette dernière évaluation dans (6·72), nous obtenons

$$j(\lambda\mathfrak{X}) = Z^2\left\{1 + O\left(E\right)\right\}$$

puis, en raisonnant comme précédemment, $|\log(\varrho/\lambda\mathfrak{X})| \ll EZ$, ce qui établit (6·66) en tenant compte de notre dernière évaluation de $\mathfrak{X}$.

Pour prouver l'estimation (6·66) relative à α, nous utilisons la première formule (6·68) et observons que, dans le domaine considéré,

$$J_1(\lambda\mathfrak{X}) - J_1(\varrho) \asymp \int_{\varrho}^{\lambda\mathfrak{X}} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \asymp \log(\lambda\mathfrak{X}/\varrho) \ll EZ.$$

Cela implique immédiatement le résultat souhaité, compte tenu de l'identité $J_1(\varrho) = Z\sqrt{J_2(\varrho)}$. □

Corollaire 6.12. *Soit $K \geqslant 1$. Il existe $x_0 = x_0(K)$ tel que, sous les conditions*

$$x \geqslant x_0(K), \qquad \mathrm{e}^{KM_x/2} \leqslant y \leqslant x/\mathrm{e}^6,$$

nous ayons $\lambda \ll 1/(\log_2 x)^{K+1}$, $\lambda Z \ll (\log_2 v)/(\log v)^{K+1}$.

Démonstration. Lorsque $v \leqslant \sqrt{\log x}$, nous déduisons de (6·11) et (6·26) que

$$\lambda \asymp \frac{1}{\log y} \asymp \frac{1}{\log x}, \quad \lambda Z \asymp \sigma_v \asymp \frac{1}{\sqrt{v \log v}},$$

ce qui implique trivialement le résultat annoncé.

Lorsque $v > \sqrt{\log x}$, nous avons en particulier

$$Z = \sigma_v \log y \geqslant K\sigma_v \sqrt{\tfrac{1}{2} v \log v} \log_2 v \geqslant K \log_2 v$$

d'après (6·31).

Si $Z \leqslant c \log v$ où $c > 0$ est une constante assez petite, nous déduisons alors de (6·66) et (6·69) que

$$\lambda \asymp \frac{\varrho}{\log v} \asymp \frac{\mathrm{e}^{-Z}}{\log v} \ll \frac{1}{(\log v)^{K+1}}, \quad \lambda Z \asymp \frac{Z\mathrm{e}^{-Z}}{\log v} \ll \frac{\log_2 v}{(\log v)^{K+1}},$$

ce qui fournit le résultat requis puisque $\log v \asymp \log_2 x$.

Si $Z > c \log v \gg \log_2 x$, nous invoquons (6·11) pour obtenir $\lambda \log v \ll \mathrm{e}^{-c_1 Z} \ll v^{-cc_1}$, où c_1 est une constante convenable. □

Rappelons que la quantité $\Delta \asymp v\sigma_v/\mathrm{e}^Z$ a été définie en (3·18).

Proposition 6.13.

(i) Pour $y \geqslant 10$, $v \geqslant 6$, nous avons

$$\lambda \asymp \frac{\log(2 + 1/Z)}{\mathrm{e}^Z \log_2 y} + \frac{\sigma_v}{\log\big(2 + 1/\Delta\big)}, \tag{6·74}$$

$$\frac{\lambda}{\alpha} \asymp \begin{cases} \dfrac{\log x}{\log y} \log(1 + 1/Z) & \text{si } Z \ll 1, \\[2ex] \dfrac{\Delta + 1}{\log(2 + 1/\Delta)} & \text{si } Z \gg 1, \end{cases} \tag{6·75}$$

$$\beta \asymp \lambda + 1 \asymp \frac{\log_2 x}{\log_2 y}. \tag{6·76}$$

(ii) Sous la condition $\mathrm{e}^{M_x} \leqslant y \leqslant x/\mathrm{e}^6$, nous avons

$$\alpha = \sigma_v \left\{ 1 + O\Big(\frac{(\log v)^2}{\mathrm{e}^Z \log_2 y} + \frac{(\log v)^{3/2}}{\sqrt{v} \log(2 + 1/\Delta)} \Big) \right\}. \tag{6·77}$$

(iii) Avec la notation (3·18) et sous la condition $\mathrm{e}^{2M_x} \leqslant y \leqslant x/\mathrm{e}^6$, nous avons

$$\mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)} = \Delta \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{(\log v)^2} \Big) \Big\}, \tag{6·78}$$

$$\lambda = \frac{\varrho\, G(\Delta)}{\log(v\sigma_v)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{(\log v)^2} \right) \right\}. \tag{6·79}$$

(iv) Sous les conditions $\log y \geqslant \sqrt{\log x}\,(\log_2 x)^2$, $v \geqslant 6$, nous avons

$$\lambda = \frac{1}{\log y} \Big\{ 1 + O\Big(\frac{\sqrt{v}(\log v)^{3/2}}{\log y} \Big) \Big\}. \tag{6·80}$$

Démonstration. Commençons par établir l'assertion (iii). À cette fin, prouvons que l'on a

$$\alpha = \sigma_v\big\{1 + O\big(\lambda(\log v)^2\big)\big\} \tag{6·81}$$

pour $\mathrm{e}^{M_x} \leqslant y \leqslant x/\mathrm{e}^6$, notant que, sous ces hypothèses, le Corollaire 6.12 fournit

$$\lambda(\log v)^2 \ll (\log v)^2/(\log_2 x)^3 \ll 1/\log_2 x.$$

Rappelons la définition de $g(\sigma)$ en (2·6). Avec la notation (5·72), nous avons

$$g'(\alpha) = -S_{0201}(\alpha, 1-\alpha), \qquad v = S_{0201}(\alpha, \beta),$$

de sorte que, notant $\mathfrak{f}(t) := \sum_p (\log p)^2 p^{1-\alpha+t}/\{1 + p^{1-\alpha+t}(p^\alpha - 1)\}^2$, nous avons

$$v + g'(\alpha) = S_{0201}(\alpha, \beta) - S_{0201}(\alpha, 1-\alpha) = -\int_0^\lambda \mathfrak{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque v est borné, nous avons $\alpha \gg 1$ par (6·8), donc $\mathfrak{f}(t) \ll \sum_p (\log p)^2/p^{1+\alpha} \ll 1$ $(t \geqslant 0)$.

En revanche, si v est assez grand, nous avons $\alpha \asymp 1/\sqrt{v \log v}$ par (6·8), d'où

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}(t) &\ll \sum_p \frac{(\log p)^2}{p^{1-\alpha}(p^\alpha - 1)^2} \ll \frac{1}{\alpha^2} \sum_{p \leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{1}{p} + \sum_{p > \exp(1/\alpha)} \frac{(\log p)^2}{p^{1+\alpha}} \qquad (t \geqslant 0).\\ &\ll \frac{\log(1/\alpha)}{\alpha^2} \ll v(\log v)^2\end{aligned}$$

Nous avons donc dans tous les cas

$$g'(\alpha) - g'(\sigma_v) \ll \lambda v(\log v)^2. \tag{6·82}$$

Rappelons l'expression de $g''(\sigma)$ en (5·99). Si $v \ll 1$, alors $\sigma_v \gg 1$, $\alpha \gg 1$, donc $g''(\sigma) \gg 1$ lorsque σ parcourt l'intervalle d'extrémités σ_v et α. Il suit

$$|\alpha - \sigma_v| \ll |g'(\alpha) - g'(\sigma_v)| \ll \lambda\sigma_v(\log v)^2.$$

Il reste à examiner le cas où v est suffisamment grand, et donc σ_v et α arbitrairement petits. Pour $\sigma \in [0, \frac{1}{4}[$, nous avons par (5·98) $g''(\sigma) \asymp 1/\{\sigma^3 \log(1/\sigma)\}$. Comme $\alpha \asymp \sigma_v \asymp 1/\sqrt{v \log v}$, nous déduisons de (6·82) que $|\alpha - \sigma_v| v^{3/2}(\log v)^{1/2} \ll \lambda v(\log v)^2$. Cela complète la démonstration de (6·81)

Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'assertion (iii). Les hypothèses impliquent trivialement $Z \geqslant 4\log_2 v$ via (6·31) dès que x est assez grand. D'après (6·13), nous avons donc $\lambda\mathfrak{X} \ll 1$. Comme $\mathfrak{X} \asymp \log v$ par (6·20), nous avons $\mathfrak{S}(\lambda) = 1 + O(\lambda^2)$ en vertu de (5·39). Reportons dans (6·61) pour obtenir

$$\log y = \frac{J_1(\lambda\mathfrak{X}) + \log(\lambda/\alpha) - D(\lambda/\alpha)}{\alpha} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}^2} + \lambda^2 \frac{J_1(\lambda\mathfrak{X})}{\alpha}\Big).$$

Maintenant (6·14) et (6·19) fournissent $\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}/\alpha\mathfrak{X}^2 \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/\mathfrak{X} \asymp (\log y)/\{Z(\log v)^2\}$ alors que (5·3) et (6·5) impliquent $J_1(\lambda\mathfrak{X})/\alpha \asymp \mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}\log(1+1/\lambda\mathfrak{X})/\alpha \ll \log y$. Ainsi

$$\frac{J_1(\lambda\mathfrak{X})+\log(\lambda/\alpha)-D(\lambda/\alpha)}{\alpha} = \Big\{1+O\Big(\lambda^2+\frac{1}{(\log v)^2 Z}\Big)\Big\}\log y, \tag{6·83}$$

d'où, par (6·81),

$$J_1(\lambda\mathfrak{X})+\log(\lambda/\alpha)-D(\lambda/\alpha) = Z+O\Big(\lambda Z(\log v)^2+\frac{1}{(\log v)^2}\Big) = Z+O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big),$$

où la seconde estimation découle du Corollaire 6.12 qui implique, sous nos hypothèses,

$$\lambda \ll 1/(\log v)^5, \quad \lambda Z \ll 1/(\log v)^4.$$

Cela étant, observons que (5·8) permet d'écrire

$$J_1(\lambda\mathfrak{X}) = \log(1/\lambda\mathfrak{X})-\gamma+O(\lambda\mathfrak{X}) = \log(1/\lambda\mathfrak{X})-\gamma+O(1/(\log v)^4).$$

Compte tenu de la définition de Δ en (3·18), nous constatons que (6·78) résulte de

$$\log\Big(\frac{1}{\alpha\mathfrak{X}}\Big) = \log(v\sigma_v)+O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big).$$

Pour établir cette évaluation, nous déduisons de (5·47) et des estimations (6·8), (6·20) et $\lambda \ll 1/(\log v)^5$ que

$$\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha}\{1+O(\alpha\mathfrak{X})\} = \frac{1}{\alpha}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\log v)^4}\Big)\Big\}.$$

Or il découle de (6·81) et (6·24) que $\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} = v\sigma_v\big\{1+O\big(1/(\log v)^2\big)\big\}$. Ainsi

$$\log\Big(\frac{1}{\alpha\mathfrak{X}}\Big) = \mathfrak{X}+O\Big(\frac{1}{(\log v)^4}\Big) = \log(v\sigma_v)+O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big),$$

ce qui complète la preuve de (6·78).

Considérons ensuite (6·79). Rappelons la définition (3·33), posons $r := \Delta G(\Delta)$, de sorte que $D(r) = \log\Delta$, et récrivons (6·78) sous la forme

$$D(\lambda/\alpha)-D(r) \ll 1/(\log v)^2.$$

Compte tenu de (5·20), il suit

$$\Big|\log\frac{\lambda r}{\alpha}\Big| \ll \Big|\int_r^{\lambda/\alpha}\Big(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\Big)\,\mathrm{d}u\Big| \ll \frac{1}{(\log v)^2}$$

et donc $\lambda/\alpha = r\big\{1+O\big(1/(\log v)^2\big)\big\} = \Delta G(\Delta)\big\{1+O\big(1/(\log v)^2\big)\big\}$.

Comme (3·16) peut être récrite sous la forme $\Delta = v\sigma_v\varrho\big\{1+O\big(1/(\log v)^3\big)\big\}$ (puisque $Z \geqslant 4\log_2 v$), nous obtenons par insertion de (6·81)

$$\lambda = \varrho v\sigma_v^2 G(\Delta)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\Big\}.$$

Il suffit alors d'appliquer (6·24) pour obtenir (6·79). La preuve de l'assertion (iii) est donc complète.

Établissons ensuite l'assertion (iv). Nous pouvons supposer x, et donc v, assez grand, de sorte que nos hypothèses impliquent $Z \geqslant (\log v)^{3/2}$ et, par exemple, via le Corollaire 6.12, $\lambda \ll 1/\log v$. Nous évaluons λ à partir de la première équation (2·2). Nous pourrions faire appel à (5·80) mais il est plus simple de raisonner directement. Nous avons

$$\log y = \sum_p \frac{\log p}{p^\beta(p^\alpha - 1) + 1} = \sum_p \frac{\log p}{p^{\alpha+\beta} - 1} + \sum_p \frac{(p^\beta - 2)\log p}{\{p^\beta(p^\alpha - 1) + 1\}(p^{\beta+\alpha} - 1)}. \tag{6·84}$$

Comme v est grand, nous avons $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\beta > 0$. La dernière somme est donc

$$\ll \sum_p \frac{\log p}{p(p^\alpha - 1)} \ll \sum_{p \leqslant \exp(1/\alpha)} \frac{1}{\alpha p} + \sum_{p > \exp(1/\alpha)} \frac{\log p}{p^{1+\alpha}} \ll \frac{\log(1/\alpha)}{\alpha} \ll \sqrt{v}(\log v)^{3/2}.$$

Comme la première somme du membre de droite de (6·84) vaut classiquement $1/\lambda + O(1)$, nous obtenons bien (6·80).

Prouvons à présent l'assertion (i). Comme le résultat est immédiat lorsque x est borné, nous supposons x arbitrairement grand.

Lorsque $\log y \leqslant \sqrt{\log x \log_2 x}$, nous avons $Z \ll 1$, donc le premier terme dans le membre de droite de (6·74) domine. Les estimations (6·9) et (6·8) fournissent alors

$$\lambda \asymp \frac{\log(1 + 1/Z)}{\log_2 y}, \quad \alpha \asymp \frac{\log y}{\log x \log_2 y},$$

ce qui implique bien (6·74) et (6·75).

Lorsque $1 \ll \log y/\sqrt{\log x \log_2 x} \leqslant c \log_2 x$ avec une constante c suffisamment petite, nous avons $v \asymp \log x$, $\Delta \asymp \mathrm{e}^{-Z}\sqrt{\log x/\log_2 x}$ et $\sigma_v \asymp 1/\sqrt{\log x \log_2 x}$. Pour un choix convenable de c, nous avons $\mathrm{e}^Z \ll \sqrt{\log x/\log_2 x}$ de sorte que $\Delta \gg 1$ et $\mathrm{e}^{-Z}/\log_2 x \gg \sigma_v$. Par ailleurs, (6·66) implique alors

$$\lambda \asymp \frac{\varrho}{\log(v\sigma_v)} \asymp \frac{\mathrm{e}^{-Z}}{\log_2 x}, \quad \frac{\lambda}{\alpha} \asymp \Delta.$$

Nous retrouvons donc encore (6·74) et (6·75) puisque $\Delta \gg 1$.

Lorsque $c \log_2 x < \log y/\sqrt{\log x \log_2 x} \leqslant (\log_2 x)^{3/2}$, nous avons $\Delta \asymp \mathrm{e}^{-Z}\sqrt{\log x/\log_2 x}$ et $\sigma_v \asymp 1/\sqrt{\log x \log_2 x}$. Les relations (6·74) et (6·75) découlent donc de (6·79), (3·17) et (3·34).

Lorsque $\log y/\sqrt{\log x \log_2 x} > (\log_2 x)^{3/2}$, nous avons $\lambda \asymp 1/\log y$ d'après (6·11). Compte tenu des estimations $\alpha \asymp 1/\sqrt{v \log v}$ et $\log(2 + 1/\Delta) \asymp Z$, nous obtenons encore (6·74) et (6·75).

Il reste à établir (6·76). D'après la dernière partie de la Proposition 6.2, nous avons $\beta > \frac{1}{2}$ pour $v \geqslant 6$. De plus, par (6·74), nous avons $\lambda \ll 1$ si $Z > 1$. La relation (6·76) est donc satisfaite sous cette hypothèse supplémentaire. Lorsque $Z \leqslant 1$, nous avons $\lambda + 1 \asymp (\log_2 x)/\log_2 y$ par (6·74), alors que $\alpha \asymp (\log y)/\{\log x \log_2 y\} = o(1)$ par (6·8). Cela complète la preuve du point (i).

Pour établir l'assertion (ii), nous appliquons (6·81) et (6·74), en notant que les hypothèses impliquent $Z \gg 1$. □

Proposition 6.14. *Sous la condition* $(x,y)\in\mathscr{D}^+$, *nous avons*

$$\alpha=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\Big)\Big\}\sigma_v\sqrt{J_2(\varrho)},\qquad \lambda=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\Big)\Big\}\varrho\,G(\Delta)v\sigma_v^2. \tag{6·85}$$

Démonstration. Dans le domaine (6·65), nous pouvons appliquer (6·66). Quitte à restreindre la taille de la constante c, nous avons $\Delta\asymp v\sigma_v\mathrm{e}^{-Z}\gg(\log x)^{1/4}$, de sorte sur (3·34) implique $G(\Delta)=1+O(v^{-1/4})$. Nous obtenons donc (6·85) puisque nous avons $\mathfrak{R}_0\ll 1/\sqrt{\log_2 x}$ dans le domaine (6·66).

Dans le domaine complémentaire, nous avons $Z\gg\log_2 x$ et $\sqrt{J_2(\varrho)}=1+O\big(Z\mathrm{e}^{-Z}\big)$, compte tenu de (5·4) et (3·17). L'évaluation souhaitée pour α résulte donc de (6·77).

Si $c\log_2 x<\log y/\sqrt{\log x\log_2 x}\leqslant(\log_2 x)^{3/2}$, la formule asymptotique relative à λ découle pleinement de (6·79).

Enfin, lorsque $\log y/\sqrt{\log x\log_2 x}>(\log_2 x)^{3/2}$, nous avons $Z\gg(\log_2 x)^{3/2}$ et donc $\log(1/\Delta)=Z-\log(v\sigma_v)-\gamma=Z\big\{1+O\big(1/\sqrt{\log_2 x}\big)\big\}$. La relation (3·34) implique alors

$$\varrho G(\Delta)v\sigma_v^2=\frac{1}{\log y}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\Big)\Big\},$$

de sorte que l'évaluation souhaitée découle de (6·80). □

6·5. Preuve du Théorème 3.5

Le Théorème 3.5 est la synthèse des Propositions 6.2, 6.10 et 6.14.

Nous notons en particulier que la Proposition 6.10 implique la deuxième estimation (3·37) puisque nous avons, sous les hypothèses effectuées,

$$\log\Big(\frac{\log x\log_2 x}{(\log y)^2}\Big)=Q(x,y)\Big\{1+O\Big(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\Big)\Big\},$$

ce qui fournit bien un terme d'erreur admissible.

7. Préparation à l'emploi de la méthode du col

Nous nous proposons ici de majorer $|\mathscr{F}(\sigma+i\tau,\kappa+it)|/\mathscr{F}(\sigma,\kappa)$ dans le plus grand domaine possible en (τ,t). À cette fin, nous introduisons le facteur eulérien

$$\mathfrak{H}_p(\tau,t):=1+\frac{1}{p^{\kappa+it}(p^{\sigma+i\tau}-1)}\cdot$$

et observons que, pour $p\geqslant 2$, nous avons

$$|\mathfrak{H}_p(\tau,t)|\leqslant\mathfrak{H}_p(0,0)\exp\Big\{-\frac{1-\cos(\tau\log p)}{16p^\sigma\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}}-\frac{p^\kappa(p^\sigma-1)\{1-\cos(t\log p)\}}{16\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^2}\Big\}. \tag{7·1}$$

De plus, sous la condition supplémentaire $|\tau\log p|\leqslant 1$, $|t\log p|\leqslant 1$, nous avons

$$|\mathfrak{H}_p(\tau,t)|\leqslant\mathfrak{H}_p(0,0)\exp\Big\{-\frac{\min(1,\tau^2/\sigma^2)}{4\pi^2p^\sigma\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}}-\frac{p^\kappa(p^\sigma-1)(t\log p)^2}{8\pi^2\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^2}\Big\} \tag{7·2}$$

Pour établir (7·1) et (7·2), posons, dans ce paragraphe exclusivement, $D := p^\kappa(p^\sigma - 1)$ et

$$\vartheta := \tau \log p, \quad \psi := t \log p, \quad w := \arg(p^{\sigma+i\tau} - 1), \quad 1 + h := \frac{|p^{\sigma+i\tau} - 1|}{p^\sigma - 1}, \quad r := \frac{h}{1+h},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{|\mathfrak{H}_p(\tau,t)|^2}{\mathfrak{H}_p(0,0)^2} &= \Big(1 - \frac{r}{D+1}\Big)^2 - \frac{2D\{1-\cos(w+\psi)\}}{(1+h)(D+1)^2} \\ &\leqslant \exp\Big\{ -\frac{r(2-r)}{D+1} - \frac{2D\{1-\cos(w+\psi)\}}{(1+h)(D+1)^2} \Big\}. \end{aligned} \tag{7·3}$$

Si $h > 1$, nous avons $r/(D+1) > 1/(2D+2)$, donc (7·1) et (7·2) sont vérifiées.

Dans le cas contraire, $r \leqslant \frac{1}{2}$, et

$$\begin{aligned} \frac{|\mathfrak{H}_p(\tau,t)|}{\mathfrak{H}_p(0,0)} &\leqslant \exp\Big\{ -\frac{3r}{4(D+1)} - \frac{D\{1-\cos(w+\psi)\}}{2(D+1)^2} \Big\} \\ &\leqslant \exp\Big\{ -\frac{3r}{8(D+1)} - \frac{D(1-\cos\psi)}{16(D+1)^2} \Big\}. \end{aligned} \tag{7·4}$$

La première inégalité résulte immédiatement de (7·3). Pour établir la seconde, nous observons que, si $|w| \leqslant \frac{1}{2}|\psi| \pmod{2\pi}$, alors $1-\cos(w+\psi) \geqslant 1-\cos(\frac{1}{2}\psi) \geqslant \frac{1}{4}\{1-\cos\psi\}$. Si, au contraire, $|w| > \frac{1}{2}|\psi| \pmod{2\pi}$, nous avons $\sin w = p^\sigma(\sin\vartheta)/\{(1+h)(p^\sigma-1)\}$, et donc

$$\tfrac{1}{2}(1-\cos\psi) \leqslant (\sin w)^2 = \frac{p^{2\sigma}(\sin\vartheta)^2}{(p^\sigma-1)^2 + 2p^\sigma(1-\cos\vartheta)} \leqslant \frac{2p^{2\sigma}(1-\cos\vartheta)}{(p^\sigma-1)^2 + 2p^\sigma(1-\cos\vartheta)} \leqslant 3r.$$

Maintenant, $3h \geqslant h(2+h) = 2p^\sigma\{1-\cos\vartheta\}/(p^\sigma-1)^2$, d'où

$$r \geqslant \frac{2p^\sigma(1-\cos\vartheta)}{3(p^\sigma-1)^2 + 2p^\sigma(1-\cos\vartheta)} \geqslant \frac{1-\cos\vartheta}{2p^\sigma}, \tag{7·5}$$

et donc (7·1) en reportant dans (7·4).

Pour établir (7·2), nous observons que, puisque $r \leqslant \frac{1}{2}$, la première inégalité (7·5) implique $2p^\sigma(1-\cos\vartheta) \leqslant 3(p^\sigma-1)^2$, et donc

$$r \geqslant \frac{p^\sigma(1-\cos\vartheta)}{3(p^\sigma-1)^2} \geqslant \frac{2\tau^2}{3\pi^2 p^\sigma \sigma^2}. \tag{7·6}$$

En reportant dans (7·4), nous obtenons immédiatement (7·2).

Nous notons également que, lorsque $t = 0$, la preuve de (7·1) et (7·2) fonctionne *mutatis mutandis* lorsque D est remplacé par $(p+1)(p^\sigma - 1)$. Ainsi, posant

$$\mathfrak{H}_p^*(\tau) := 1 + \frac{1}{(p+1)(p^{\sigma+i\tau}-1)},$$

nous obtenons pour $p \geqslant 2$

$$\frac{|\mathfrak{H}_p^*(\tau)|}{\mathfrak{H}_p^*(0)} \leqslant \begin{cases} \exp\Big\{-\dfrac{1-\cos(\tau\log p)}{16p^\sigma\{1+(p+1)(p^\sigma-1)\}}\Big\} & (p \geqslant 2), \\ \exp\Big\{-\dfrac{\min(1,\tau^2/\sigma^2)}{4\pi^2 p^\sigma\{1+(p+1)(p^\sigma-1)\}}\Big\} & (p \geqslant 2,\ |\tau\log p| \leqslant 1). \end{cases} \tag{7·7}$$

Le résultat suivant sera utile pour estimer les produits eulériens relatifs aux facteurs $\mathfrak{H}_p$ et $\mathfrak{H}_p^*$. Nous rappelons les notations $W(z)$ en (5·35), $X(\sigma,\kappa)$ en (5·43), et ξ en (5·44).

Lemme 7.1. *Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $c > 0$. Supposons $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $1-\sigma < \kappa \leqslant \mathrm{e}^{19X/40}$ et X suffisamment grand.*

(i) Si $1/X \ll |\tau| \leqslant \exp\big(X^{37/36}\big)$ et $\xi \ll W(X)^c$, nous avons

$$\sum_{p>\mathrm{e}^X} \frac{1-\cos(\tau\log p)}{p^\kappa(p^\sigma-1)} \gg \frac{\mathrm{e}^X\tau^2}{\xi^2+\tau^2}\Big\{\frac{\xi X}{1+\xi^2X^2} + \mathrm{e}^{-\xi X}\Big\}. \tag{7·8}$$

(ii) Si $1/X \ll |\tau| \leqslant \mathrm{e}^{(1-\varepsilon)X}$ ou si $1/X \ll |\tau| \leqslant \exp\big(X^{37/36}\big)$ et $\sigma^c \ll \xi \ll W(X)^c$, nous avons

$$\sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant \mathrm{e}^{1/\sigma}} \frac{1-\cos(\tau\log p)}{p^\kappa(p^\sigma-1)} \gg \frac{\mathrm{e}^X\tau^2}{\xi^2+\tau^2}\Big\{\frac{\xi X}{1+\xi^2X^2} + \mathrm{e}^{-\xi X}\Big\}. \tag{7·9}$$

(iii) Si $0 < \eta \leqslant 1/2X$, nous avons

$$\sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant \mathrm{e}^{1/\eta}} \frac{(\log p)^2}{p^\kappa(p^\sigma-1)} \gg \frac{X\mathrm{e}^X}{\eta+\xi}. \tag{7·10}$$

Démonstration. Prouvons l'assertion (i). Posons $T := W(X)^c$. Le membre de gauche de (7·8) est clairement minoré par

$$\begin{aligned} \sum_{p>\mathrm{e}^X} \frac{1-\cos(\tau\log p)}{p^{\kappa+\sigma}\sigma\log p} &\geqslant \int_0^T \sum_{p>\mathrm{e}^X} \frac{\{1-\cos(\tau\log p)\}\log p}{\sigma p^{\kappa+\sigma+u}} u\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant \int_0^T \Big\{\frac{\mathrm{e}^{-(\xi+u)X}}{\xi+u} - \frac{\mathrm{e}^{-(\xi+u)X}}{|\xi+u+i\tau|}\Big\}\frac{u}{\sigma}\,\mathrm{d}u + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma W(X)^{7c}X^2}\Big) \\ &\geqslant \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{2\sigma}\int_0^T \frac{u\mathrm{e}^{-uX}\tau^2}{(\xi+u)\{(\xi+u)^2+\tau^2\}}\,\mathrm{d}u + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma W(X)^{7c}X^2}\Big) \\ &\geqslant \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{2\sigma}\int_0^\infty \frac{u\mathrm{e}^{-uX}\tau^2}{(\xi+u)\{(\xi+u)^2+\tau^2\}}\,\mathrm{d}u + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma W(X)^{7c}X^2}\Big), \end{aligned} \tag{7·11}$$

où la seconde estimation résulte de (5·36) puisque nos hypothèses impliquent pleinement $\kappa+\sigma+T \leqslant W(X)^{2c}$, et la dernière inégalité découle de la précédente grâce à la majoration

$$\int_T^\infty \frac{u\mathrm{e}^{-uX}\tau^2}{(\xi+u)\{(\xi+u)^2+\tau^2\}}\,\mathrm{d}u \ll \frac{\mathrm{e}^{-TX}}{X} \ll \frac{1}{W(X)^{7c}X^2}.$$

De plus, comme $|\tau| \gg 1/X$ et $\xi+1 \leqslant W(X)^{2c}$, l'intégrale du second membre de (7·11) est supérieure à

$$\int_0^T \frac{u\mathrm{e}^{-uX}}{(\xi+u)\{X^4(\xi+u)^2+1\}}\,\mathrm{d}u \gg \frac{1}{X^6W(X)^{6c}},$$

de sorte qu'elle domine le terme reste dans (7·11). En estimant $\mathrm{e}^{-\xi X}/\sigma$ par (5·47), nous obtenons que la quantité à minorer dans (7·8) est $\gg X\mathrm{e}^X\mathfrak{I}$ avec

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} &:= \int_0^\infty \frac{u\mathrm{e}^{-uX}\tau^2\,\mathrm{d}u}{(\xi+u)\{(\xi+u)^2+\tau^2\}} \gg \int_0^\xi \frac{u\mathrm{e}^{-uX}\tau^2\,\mathrm{d}u}{\xi(\xi^2+\tau^2)} + \int_\xi^\infty \frac{u\mathrm{e}^{-uX}\tau^2\,\mathrm{d}u}{(\xi+u)\{(\xi+u)^2+\tau^2\}}\\
&\asymp \int_0^{\xi X} \frac{\tau^2 s\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s}{\xi X^2\{\xi^2+\tau^2\}} + \int_\xi^\infty \frac{\tau^2\mathrm{e}^{-uX}\,\mathrm{d}u}{u^2+\tau^2}\\
&\asymp \frac{\tau^2\xi}{(\xi^2+\tau^2)(1+\xi^2X^2)} + \frac{\tau^2\mathrm{e}^{|\tau|X}}{|\tau|+\xi}J_2\big(|\tau|X+\xi X\big)\\
&\asymp \frac{\tau^2\xi}{(\xi^2+\tau^2)(1+\xi^2X^2)} + \frac{\tau^2\mathrm{e}^{-\xi X}}{(|\tau|+\xi)(|\tau|X+\xi X)} \asymp \frac{\tau^2}{\xi^2+\tau^2}\Big\{\frac{\xi}{1+\xi^2X^2}+\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{X}\Big\}.
\end{aligned}$$

Cela implique bien (7·8) en comparant ξX à 1.

De plus, lorsque $\xi > \sigma^c$, nous avons

$$\sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant \mathrm{e}^{1/\sigma}} \frac{1-\cos(\tau\log p)}{p^\kappa(p^\sigma-1)} = \sum_{p>\mathrm{e}^X} \frac{1-\cos(\tau\log p)}{p^\kappa(p^\sigma-1)} + O\Big(\sum_{p>\mathrm{e}^{1/\sigma}} \frac{1}{p^{\kappa+\sigma}}\Big),$$

où la dernière somme est $\ll \log(1+1/\xi) \ll X$. Il s'ensuit que (7·8) implique la seconde partie de l'assertion (ii). Pour établir la première, nous pouvons pleinement supposer $\xi \gg W(X)^c$. Nous avons alors, d'après (5·33),

$$\sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant \mathrm{e}^{1/\sigma}} \frac{1-\cos(\tau\log p)}{p^\kappa(p^\sigma-1)} \gg \sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant \mathrm{e}^{X+1/\kappa}} \{1-\cos(\tau\log p)\} \gg \frac{\mathrm{e}^X\tau^2}{\kappa(\kappa^2+\tau^2)X}.$$

Comme nos hypothèses impliquent $\xi X \gg 1$ et $\xi \asymp \kappa$, il est immédiat que la dernière minoration est du même ordre que le membre de gauche de (7·8). Cela conclut la preuve de l'assertion (ii).

Il reste à établir l'assertion (iii). Posons $Y := 1/\eta$. Nous pouvons écrire

$$\sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant \mathrm{e}^Y} \frac{(\log p)^2}{p^\kappa(p^\sigma-1)} \gg \frac{1}{\sigma}\sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant \mathrm{e}^Y} \frac{\log p}{p^{\kappa+\sigma}}.$$

Si $\kappa+\sigma>2$, la dernière somme en p est

$$\gg \mathrm{e}^{-\kappa X}\sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant \mathrm{e}^{X+1/2\kappa}}\log p \gg \frac{\mathrm{e}^{-\kappa X}}{\kappa}\asymp \frac{\sigma X\mathrm{e}^X}{\kappa}$$

d'après (5·25) et (5·47). Cela implique bien la première minoration de (7·10). Si $\kappa+\sigma\leqslant 2$, le théorème des nombres premiers fournit immédiatement

$$\sum_{\mathrm{e}^X<p\leqslant \mathrm{e}^Y}\frac{\log p}{p^{\kappa+\sigma}}\asymp\int_{\mathrm{e}^X}^{\mathrm{e}^Y}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\kappa+\sigma}}\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}-\mathrm{e}^{-\xi Y}}{\xi}\asymp\frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\xi+\eta},$$

en vertu de l'estimation générale $\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-b}\asymp \mathrm{e}^{-a}(b-a)/(1+b-a)$ $(0<a<b)$, puisque nos hypothèses impliquent $Y-X\asymp Y$. Compte tenu de (5·47), cela permet de conclure. □

8. Étude de $F(v)$ par la méthode du col

8·1. Série génératrice

Rappelons la définition de $\psi(m)$ en (1·8). Un calcul standard permet de déduire de (2·5) que

$$\mathscr{G}(s)=\frac{6}{\pi^2}\prod_p\Big(1+\frac{1}{(p+1)(p^s-1)}\Big)=\frac{6}{\pi^2}\sum_m\frac{1}{\psi(m)m^s}\qquad(\Re e\,(s)>0), \tag{8·1}$$

de sorte que la solution σ_v de l'équation (2·7) est bien donnée par (6·21).

Lemme 8.1. *La représentation intégrale* (2·4) *est valide pour tout* $v>0$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer (1·9) en faisant appel à la formule de Perron

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma+i\mathbb{R}}\frac{\mathrm{e}^{xs}}{s(1-s)}\,\mathrm{d}s=\min(1,\mathrm{e}^x)\qquad(0<\sigma<1,\ x\in\mathbb{R}).$$

□

Rappelons la notation $g(\sigma)$ en (2·6).

Lemme 8.2. *Nous avons*

$$g(\sigma_v)=v\sigma_v\Big(1+\frac{1}{\log(v\sigma_v)}\Big)+O\Big(\frac{\sqrt{v}}{(\log v)^{5/2}}\Big)\quad(v\geqslant 2). \tag{8·2}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer v assez grand et donc σ_v arbitrairement petit. Rappelons la définition de la série de Dirichlet $\mathscr{F}(s,z)$ en (2·1) et la notation (3·2). Pour $\sigma\in]0,\frac13[$, nous avons

$$g(\sigma)-f(\sigma,1)=\sum_p\log\Big(1-\frac{p^{\sigma-1}}{1+p(p^\sigma-1)}\Big)\ll\log_2(1/\sigma), \tag{8·3}$$

où la majoration résulte d'une scission de la somme à e^X et e^{2X} avec $X=X(\sigma,1)$ tel que défini en (5·43). Au vu de (2·9), nous pouvons donc nous limiter à évaluer $f(\sigma_v,1)$.

À cette fin, appliquons (5·84) avec $(\sigma,\kappa)=(\sigma_v,1)$. Posant $X_v=X(\sigma_v,1)$, il vient

$$f(\sigma_v,1)=\frac{\mathfrak{S}(\sigma_v)}{\sigma_v X_v}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-\sigma_v X_v}}{X_v}+J_2(\sigma_v X_v)\right\}+\log(1+1/\sigma_v)+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\sigma_v X_v}}{\sigma_v X_v^3}\Big).$$

En faisant appel aux estimations (6·26), (5·47) et (6·24), nous obtenons successivement

$$\mathrm{e}^{X_v}\asymp\sqrt{v/\log v},\quad X_v\mathrm{e}^{X_v}=\frac{1}{\sigma_v}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\Big\}=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\log v)^2}\Big)\Big\}v\sigma_v\log(v\sigma_v)$$

et donc $X_v=\log(v\sigma_v)+O\big(1/(\log v)^2\big)$. La formule (8·2) résulte alors des estimations $\mathfrak{S}(\sigma_v)=1+O(\sigma_v^2)$ et $J_2\big(\sigma_v X_v\big)=1+O\left(\sigma_v {X_v}^2\right)$ établies respectivement en (5·39) et (5·4). □

Lemme 8.3. *Pour $v\geqslant 2$ et $|\sigma-\sigma_v|\ll\sigma_v/\log v$, nous avons*

$$g''(\sigma)=\frac{2v}{\sigma_v}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log v}\Big)\Big\}. \tag{8·4}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer v arbitrairement grand, de sorte que l'hypothèse implique $\sigma<\frac14$ et $\sigma\asymp\sigma_v$. Nous pouvons alors appliquer (5·98) en notant que, d'après (6·24), puisque $v\sigma_v\asymp 1/(\sigma_v\log v)$,

$$\begin{aligned}\frac{\log(1/\sigma_v)+\log_2(1/\sigma_v)}{\sigma_v^2\{\log(1/\sigma_v)\}^2}&=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log v}\Big)\Big\}v\frac{\{\log(1/\sigma_v)-\log_2 v\}\{\log(1/\sigma_v)+\log_2 v\}}{\{\log(1/\sigma_v)\}^2}\\&=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log v}\Big)\Big\}v.\end{aligned}$$

□

Lemme 8.4. *Pour v suffisamment grand, la formule*

$$g(s)=\log(6/\pi^2)+\sum_p\log\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^s-1)}\right)\qquad\big(|s-\sigma_v|<\tfrac23\sigma_v\big), \tag{8·5}$$

où le logarithme complexe est pris en détermination principale sur $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^-$, définit un prolongement holomorphe de $g(\sigma)$. Pour tout $\ell\in\mathbb{N}^*$, nous avons alors

$$g^{(\ell)}(s)\ll_\ell v^{(\ell+1)/2}(\log v)^{(\ell-1)/2}\qquad\big(|s-\sigma_v|\leqslant\tfrac12\sigma_v\big). \tag{8·6}$$

Démonstration. Notons $U=U_v>1$ la solution réelle de l'équation $(1+U)(U^{\sigma_v/3}-1)=2$, de sorte que $U\asymp\sqrt{v/\log v}$. Soit $s\in\mathbb{C}$, $|s-\sigma_v|<\frac23\sigma_v$. Comme $|p^s-1|\geqslant p^{\sigma_v/3}-1$ pour tout nombre premier p, nous avons $|(p+1)(p^s-1)|\geqslant 2$ si $p>U$. Pour $p\leqslant U$, $s=\sigma+it$, nous pouvons écrire

$$\Re e\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^s-1)}\right)=1+\frac{p^\sigma\cos(t\log p)-1}{(p+1)|p^s-1|^2}=1+\frac{p^\sigma-1+O(\sigma_v^2(\log p)^2)}{(p+1)|p^s-1|^2}>0$$

puisque $p^\sigma-1\geqslant\frac13\sigma_v\log p$. Chaque terme de la série de (8·5), qui est uniformément convergente sur le disque considéré, est donc bien défini. Cela implique la première assertion.

Pour établir (8·6), nous observons que, pour $s=\sigma+it$, $|s-\sigma_v|<\frac{2}{3}\sigma_v$,

$$|g'(s)|=\bigg|\sum_p\frac{-\log p}{(p^s-1)(1+p-p^{1-s})}\bigg|\leqslant\sum_p\frac{\log p}{(p^\sigma-1)(1+p-p^{1-\sigma})}=-g'(\sigma)\asymp v$$

où la dernière estimation découle de l'identité $-g'(\sigma)=S_{0201}(\sigma,1-\sigma)$ (avec la notation (5·72)) et de (5·79) et (6·26). L'estimation requise en découle par application de la majoration de Cauchy pour un disque de rayon $\sigma_v/7$. □

Lemme 8.5. *Posons* $\eta_v:=\log v/\sqrt{g''(\sigma_v)}\asymp(\log v)^{3/4}/v^{3/4}$ $(v\geqslant 2)$. *Pour v suffisamment grand, nous avons*

$$|\mathscr{G}(\sigma_v+it)|\leqslant\mathscr{G}(\sigma_v)\,\mathrm{e}^{-c(\log v)^2}\qquad(\eta_v\ll|t|\leqslant\exp\big\{(\log v)^{38/37}\big\}),\tag{8·7}$$

où c est une constante absolue convenable.

Démonstration. Posons $X_v:=X(\sigma_v,1)=\frac12\log v-\frac12\log_2 v+O(1)$ comme dans la preuve du Lemme 8.2, de sorte que $\eta_v\asymp\mathrm{e}^{-3X_v/2}$. La première estimation (7·7) et (7·9) appliqués avec $(\kappa,\sigma)=(1,\sigma_v)$ permettent d'écrire, lorsque, disons $1/2X_v<|t|\leqslant\mathrm{e}^{(\log v)^{38/37}}\leqslant\mathrm{e}^{X_v^{37/36}}$,

$$\frac{|\mathscr{G}(\sigma_v+it)|}{\mathscr{G}(\sigma_v)}\leqslant\exp\bigg\{-\sum_{\mathrm{e}^{X_v}<p\leqslant\mathrm{e}^{1/\sigma_v}}\frac{1-\cos(t\log p)}{16p^{\sigma_v}(p+1)(p^{\sigma_v}-1)}\bigg\}\ll\mathrm{e}^{-c\exp(X_v)},$$

ce qui implique amplement (8·7). Lorsque $|t|\leqslant 1/2X_v$, la deuxième estimation (7·7) fournit

$$\frac{|\mathscr{G}(\sigma_v+it)|}{\mathscr{G}(\sigma_v)}\leqslant\exp\bigg\{-\sum_{\mathrm{e}^{X_v}<p\leqslant\mathrm{e}^{1/(|t|+\sigma_v)}}\frac{\min(1,t^2/\sigma_v^2)}{4\pi^2p^{\sigma_v}\{1+(p+1)(p^{\sigma_v}-1)\}}\bigg\}.$$

La dernière somme en p est $\gg\min(1,t^2/\sigma_v^2)/(X_v\sigma_v)\gg X_v^2\asymp(\log v)^2$. □

8·2. Formule asymptotique

Théorème 8.6. *Nous avons*

$$F(v)=\frac{\mathrm{e}^{v\sigma_v}\mathscr{G}(\sigma_v)}{\sigma_v\sqrt{2\pi g''(\sigma_v)}}\bigg\{1+O\bigg(\sqrt{\frac{\log v}{v}}\bigg)\bigg\}\qquad(v\geqslant 2).\tag{8·8}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer v assez grand et donc $0<\sigma_v<1$. En tronquant l'intégrale (2·4) à $\Im m\,s=\pm v^2$ et en choisissant $\sigma=\sigma_v$, nous obtenons

$$F(v)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_v-iv^2}^{\sigma_v+iv^2}\frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{s(1-s)}\,\mathrm{d}s+O\bigg(\frac{\mathrm{e}^{v\sigma_v}\mathscr{G}(\sigma_v)}{v^2}\bigg),\tag{8·9}$$

dont le terme d'erreur est admissible au vu de (8·4) et (6·26). Rappelons la définition de η_v dans l'énoncé du Lemme 8.5. La majoration (8·7) nous permet d'englober la contribution du domaine $\eta_v \leqslant |\Im m\, s| \leqslant v^2$ dans ce même terme résiduel. En estimant, dans l'intervalle restant, l'intégrande par la formule de Taylor à l'ordre 4 et en utilisant (8·6), il suit

$$F(v) = \frac{\mathrm{e}^{\sigma_v v}\mathscr{G}(\sigma_v)}{2\pi}\int_{-\eta_v}^{\eta_v} \Upsilon(t)\mathrm{e}^{-g''(\sigma_v)t^2/2}\,\mathrm{d}t + O\bigg(\frac{\mathrm{e}^{v\sigma_v}\mathscr{G}(\sigma_v)}{v^2}\bigg),$$

avec

$$\begin{aligned}\Upsilon(t) :&= \frac{\mathrm{e}^{-ig'''(\sigma_v)t^3/6+O(t^4D_4)}}{(\sigma_v+it)(1-\sigma_v-it)}\\ &= \frac{1}{\sigma_v(1-\sigma_v)}\bigg\{1 - it\frac{1-2\sigma_v}{\sigma_v(1-\sigma_v)} - \tfrac{1}{6}ig'''(\sigma_v)t^3 + O\bigg(\frac{t^2}{\sigma_v^2} + t^6D_3^2 + D_4t^4\bigg)\bigg\},\end{aligned}$$

où $D_\ell := v^{(\ell+1)/2}(\log v)^{(\ell-1)/2}$ $(\ell \geqslant 0)$. La contribution des termes impairs étant nulle par symétrie, nous obtenons

$$F(v) = \frac{\mathscr{G}(\sigma_v)\mathrm{e}^{\sigma_v v}}{2\pi\sigma_v(1-\sigma_v)}\bigg\{\int_{-\eta_v}^{\eta_v} \mathrm{e}^{-g''(\sigma_v)t^2/2}\,\mathrm{d}t + O(E)\bigg\}$$

avec

$$E := \frac{\sigma_v}{v^2} + \frac{1}{\sigma_v^2 D_2^{3/2}} + \frac{D_3^2}{D_2^{7/2}} + \frac{D_4}{D_2^{5/2}} \ll \sqrt{\frac{\log v}{g''(\sigma_v)v}}.$$

Comme

$$\int_{-\eta_v}^{\eta_v} \mathrm{e}^{-g''(\sigma_v)t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{g''(\sigma_v)}}\bigg\{1 + O\bigg(\int_{\log v}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\bigg)\bigg\} = \sqrt{\frac{2\pi}{g''(\sigma_v)}}\,\bigg\{1 + O\Big(\frac{1}{v}\Big)\bigg\},$$

nous obtenons bien (8·8). □

8·3. Développement asymptotique

Le développement asymptotique (2·12) pour $\log F(v)$ résulte simplement de celui de σ_v, décrit en (2·9) et explicité au paragraphe 6.3.2. En effet, au vu de (8·8) et (8·4), il suffit d'établir l'existence d'un développement asymptotique de la forme indiquée pour

$$v\sigma_v + g(\sigma_v) = \int_6^v \sigma_t\,\mathrm{d}t + O(1).$$

Nous obtenons donc (2·12) par intégration. Les polynômes Q_j sont définis par les relations

$$Q_0(z) = 1, \quad Q_j(z) - (2j-1)Q_{j-1}(z) + 2Q'_{j-1}(z) = P_j(z) \qquad (j \geqslant 1). \tag{8·10}$$

Ainsi, $Q_1(z) = P_1(z) + 1$, $Q_2(z) = P_2(z) + 3P_1(z) + 2$, comme annoncé.

Remarque. Nous pouvons également établir l'existence d'un développement asymptotique de la forme

$$g(\sigma) \approx \mathrm{e}^X \sum_{m\geqslant 0} \frac{c_m}{X^m}, \tag{8·11}$$

ce qui présente un intérêt intrinsèque. Cela fournit une preuve alternative de (2·12) en choisissant $X := X(\sigma, 1-\sigma)$ et $\sigma = \sigma_v$, de sorte que, avec la notation (6·22), $X = V/2$ et $\mathrm{e}^X = \sqrt{v/X}$.

Pour montrer (8·11), nous écrivons

$$g(\sigma) = -\int_\sigma^1 g'(s)\,\mathrm{d}s + g(1)$$

et effectuons le changement de variable défini par $z := X(s, 1-s)$, de sorte que

$$s = \frac{1}{z}\log\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-z}}\Big), \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = \frac{\log(1-\mathrm{e}^{-z})}{z^2} - \frac{1}{z(\mathrm{e}^z-1)} = -\frac{z+1}{z^2\mathrm{e}^z} + O\Big(\frac{1}{z\mathrm{e}^{2z}}\Big).$$

D'après (6·33), il suit

$$g(\sigma) \approx \int_{\log 2}^X \frac{(z+1)\mathrm{e}^z}{z}\Big\{1 + \sum_{m\geqslant 1}\frac{a_m}{z^m}\Big\}\,\mathrm{d}z,$$

d'où (8·11) résulte immédiatement.

8·4. Comportement local

Proposition 8.7. *Pour $v \geqslant 2$, $|h| \ll v^{3/4}(\log v)^{1/4}$, nous avons*

$$F(v+h) = \mathrm{e}^{h\sigma_v}F(v)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log v + h^2/v}{\sqrt{v\log v}}\Big)\Big\}. \tag{8·12}$$

Démonstration. Posons $\varphi(v) := v\sigma_v + g(\sigma_v) - \log\sigma_v - \frac{1}{2}\log g''(\sigma_v)$, de sorte que, d'après (8·8), $F(v) = \big\{1 + O\big(\sqrt{(\log v)/v}\big)\big\}\mathrm{e}^{\varphi(v)}/\sqrt{2\pi}$. Nous déduirons (8·12) d'une étude locale de $\varphi(v)$. Nous avons $g'(\sigma_v) + v = 0$ par définition, donc $\mathrm{d}\sigma_v/\mathrm{d}v = -1/g''(\sigma_v)$ et

$$\varphi'(v) = \sigma_v + \frac{1}{\sigma_v g''(\sigma_v)} + \frac{g'''(\sigma_v)}{2g''(\sigma_v)^2} = \sigma_v + O\Big(\frac{1}{v}\Big),$$
$$\varphi''(v) = -\frac{1}{g''(\sigma_v)} + \frac{1}{\sigma_v^2 g''(\sigma_v)^2} + \frac{g'''(\sigma_v)}{\sigma_v g''(\sigma_v)^3} - \frac{g^{(4)}(\sigma_v)}{2g''(\sigma_v)^3} + \frac{g'''(\sigma_v)}{g''(\sigma_v)^4} \ll \frac{1}{v\sqrt{v\log v}},$$

où les estimations résultent de (6·26), (8·4) et (8·6). Il s'ensuit que, sous les hypothèses effectuées

$$\varphi(v+h) - \varphi(v) - h\sigma_v \ll \frac{h}{v} + \frac{h^2}{v\sqrt{v\log v}} \ll \frac{\log v + h^2/v}{\sqrt{v\log v}}.$$

En reportant dans (8·8), cela implique bien (8·12). □

Proposition 8.8. *Nous avons*

$$F(v+h) \ll F(v)\mathrm{e}^{h\sigma_v} \qquad (v \geqslant 2, v+h \geqslant 0). \tag{8·13}$$

Démonstration. Supposons d'abord $h \geqslant 0$. D'après (8·8), (8·4) et (6·26) nous avons $F(v) \asymp \mathrm{e}^{v\sigma_v+g(\sigma_v)}\{(\log v)/v\}^{1/4}$ pour $v \geqslant 2$. Comme $(v+h)\sigma_{v+h} + g(\sigma_{v+h}) = \min_{\sigma>0}\{(v+h)\sigma + g(\sigma)\} \leqslant (v+h)\sigma_v + g(\sigma_v)$ il suit

$$\begin{aligned} F(v+h) &\asymp \mathrm{e}^{(v+h)\sigma_{v+h}+g(\sigma_{v+h})}\left(\frac{\log(v+h)}{v+h}\right)^{1/4} \\ &\ll \mathrm{e}^{(v+h)\sigma_v+g(\sigma_v)}\left(\frac{\log v}{v}\right)^{1/4} \ll \mathrm{e}^{h\sigma_v}F(v), \end{aligned}$$

c'est-à-dire (8·13).

Pour établir (8·13) lorsque $-v \leqslant h \leqslant 0$, nous pouvons supposer v assez grand. Lorsque, par exemple, $|h| \leqslant \frac{4}{5}v$, le raisonnement précédent s'applique sans modification. Si $v+h \ll 1$, nous avons $F(v+h) \ll 1$ alors que, lorsque $v \to \infty$,

$$F(v) = \mathrm{e}^{\{1+o(1)\}\sqrt{8v/\log v}}, \quad h\sigma_v \sim -v\sigma_v \sim -\sqrt{\frac{2v}{\log v}}\cdot$$

La majoration (8·13) est donc encore valable. Si, finalement, $|h| \geqslant \frac{4}{5}v$, le résultat découle des estimations asymptotiques

$$F(v+h) \leqslant F(v/5) = F(v)^{1/\sqrt{5}+o(1)}, \qquad F(v)\mathrm{e}^{-v\sigma_v} = F(v)^{1/2+o(1)} \qquad (v \to \infty).$$

□

Le résultat suivant précise (8·12) pour les valeurs modérées de h. L'expression (1·9) montre que F est presque partout dérivable : si $v \notin \log \mathbb{N}^*$, nous avons en fait

$$F'(v) = \frac{6}{\pi^2}\sum_{m>\mathrm{e}^v}\frac{1}{m\psi(m)}\cdot \tag{8·14}$$

Dans toute la suite, nous adoptons la normalisation $F'(v) := \frac{1}{2}F'(v+) + \frac{1}{2}F'(v-)$.

Proposition 8.9. *Nous avons*

$$F'(v) = \left\{1 + O\left(\sqrt{\frac{\log v}{v}}\right)\right\}\sigma_v F(v) \qquad (v \geqslant 2), \tag{8·15}$$

$$F(v+h) - F(v) = \left\{1 + O\left(\frac{\log v + |h|}{\sqrt{v\log v}}\right)\right\}h\sigma_v F(v) \quad \left(v \geqslant 2,\ h \ll \sqrt{v\log v}\,\right). \tag{8·16}$$

Démonstration. Compte tenu de la normalisation indiquée plus haut, nous obtenons par inversion de Laplace que

$$F'(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma+i\mathbb{R}}\frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{1-s}\,\mathrm{d}s \qquad (v > 0,\ 0 < \sigma < 1), \tag{8·17}$$

la convergence de l'intégrale étant classiquement conséquence du fait que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $\mathscr{G}(s)$ est nulle. Une version effective de la formule de Perron (cf., par exemple, [29], th. II.2.3) permet alors d'écrire, sous les mêmes conditions,

$$F'(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{1-s}\,\mathrm{d}s + O(R_T) \qquad (T \geqslant 2), \tag{8·18}$$

avec

$$\begin{aligned} R_T &:= \sum_{m\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\sigma v}}{m^\sigma \psi(m)\{1+T|v-\log m|\}} \\ &\ll \frac{\mathrm{e}^{\sigma v}\mathscr{G}(\sigma)}{T} + \sum_{1\leqslant h\leqslant T} \frac{\mathrm{e}^{\sigma v}}{h} \sum_{h\leqslant T|\log m - v|\leqslant h+1} \frac{1}{m^\sigma\psi(m)} \\ &\ll \frac{\mathrm{e}^{\sigma v}\mathscr{G}(\sigma)}{T} + \frac{\mathrm{e}^{\sigma v}\log T}{T}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} |\mathscr{G}(s)|\,|\mathrm{d}s|, \end{aligned}$$

où la seconde estimation résulte d'une manipulation classique — cf., par exemple, [29], Exercice 171 — consistant à majorer la fonction indicatrice d'un intervalle par une fonction en chapeau.

Nous sommes à présent en mesure d'établir (8·15). Nous pouvons supposer v suffisamment grand, de sorte que $0 < \sigma_v < 1$. Appliquons (8·18) avec $\sigma := \sigma_v$, $T := \exp\{(\log v)^{26/25}\}$. En employant (8·7) pour $1 \leqslant |\Im m\, s| \leqslant T$, nous obtenons $R_T \ll \mathrm{e}^{v\sigma_v}\mathscr{G}(\sigma_v)(\log T)/T$. L'intégrale de (8·18) peut alors être estimée comme celle de (8·9). Nous omettons les détails, qui sont essentiellement identiques. Cela complète la preuve de (8·15).

Considérons ensuite la formule (8·16). Comme

$$\sigma_{v+t} - \sigma_v \ll t/g''(\sigma_v) \asymp t\sigma_v/v \quad (|t| \leqslant v/2), \tag{8·19}$$

nous déduisons de (8·15) et (8·12) que

$$F'(v+t) = \sigma_v F(v)\biggl\{1 + O\biggl(\sqrt{\frac{\log v}{v}} + |t|\sigma_v\biggr)\biggr\} \qquad (t\sigma_v \ll 1). \tag{8·20}$$

Cela implique (8·16) par intégration entre les bornes 0 et h. □

Remarque. Dans son domaine de validité, la relation (8·16) est plus précise que (8·12).

9. Nouvelle estimation de la hessienne

Nous nous proposons ici de mettre à profit les évaluations des paragraphes 6 et 8 pour affiner l'estimation (5·94) dans le cas $(\sigma,\kappa) = (\alpha,\beta)$ et pour les grandes valeurs du paramètre y. Nous rappelons les notations Z en (3·13) et Δ en (3·18) et notons d'abord que les estimations (5·97), (6·6), (6·8), (6·19), (6·20), (6·74), (6·75) et (6·76) fournissent après calcul, pour $x \geqslant y \geqslant 2$,

(9·1)

$$\delta(\alpha,\beta) \asymp \frac{(1+\lambda w)(1+\alpha/\lambda)(\log y)^2}{(1+\lambda)\lambda w\alpha^2(1+Z^2)} \asymp \begin{cases} \dfrac{(\log x)^2(\log_2 2y)^3}{\log_2 x} & \text{si } Z \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{\{\log(2+1/\Delta)\}^2 \mathrm{v}^{5/2}(\log \mathrm{v})^{3/2}}{1+\Delta} & \text{si } Z > 1. \end{cases}$$

De plus, il suit, par (6·8) et (6·76),

$$\alpha^2\beta^2\delta(\alpha,\beta) \asymp \begin{cases} \dfrac{(\log y)^2\log_2 x}{\log_2 2y} & \text{si } Z \leqslant 1, \\ \dfrac{\{\log(2+1/\Delta)\}^2 \mathrm{v}^{3/2}\sqrt{\log \mathrm{v}}}{1+\Delta} & \text{si } Z > 1. \end{cases} \tag{9·2}$$

Proposition 9.1. *Sous la condition*

$$x \geqslant \mathrm{e}^6, \qquad \mathrm{e}^{M_x} \leqslant y \leqslant x/\mathrm{e}^6, \tag{9·3}$$

nous avons

$$\delta(\alpha,\beta) = \frac{D'(\lambda/\alpha)g''(\sigma_v)}{\alpha^2}\biggl\{1 + O\biggl(\frac{(\Delta+1)(\log v)^2\sigma_v}{\log(2+1/\Delta)}\biggr)\biggr\}. \tag{9·4}$$

Démonstration. L'hypothèse (9·3) implique $Z > 2\log_3 x$ en vertu de (6·31), $\mathfrak{X} \asymp \log v$ par (6·20), et

$$\lambda \asymp \frac{(\Delta+1)\sigma_v}{\log(2+1/\Delta)}, \quad \mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \asymp \sqrt{\frac{v}{\log v}}, \quad \alpha \asymp \frac{1}{\sqrt{v\log v}} \asymp \frac{1}{\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}. \tag{9·5}$$

respectivement par (6·74), (6·19) et (6·8). Notons au passage que $\lambda \ll 1/(\log_2 x)^3 \ll 1/\mathfrak{X}^3$ et que le terme d'erreur de (9·4) est de l'ordre de $\lambda(\log v)^2$.

Posons, avec les notations (5·72), pour $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, $\kappa \geqslant 1-\sigma$,

$$\mathcal{S}(\sigma,\kappa) := S_{1302} + S_{1202} + S_{1111} + 2S_{1211} = \sum_p \frac{(\log p)^2\{p^\sigma + p^\kappa(p^{2\sigma}-1)\}}{(p^\sigma-1)^2\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^2},$$

de sorte que, par (5·95), $\delta(\sigma,\kappa) = \mathcal{S}(\sigma,\kappa)f''_{02}(\sigma,\kappa) - S_{1111}(\sigma,\kappa)^2$.

Pour $(\sigma,\kappa) = (\alpha,\beta)$ et $\ell = 1$, la première estimation (5·75) implique $S_{1111}(\alpha,\beta) \ll \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/\alpha$. De plus, (5·73) et (5·61) avec $\ell \in \{2,3\}$ d'une part, (5·63) et (5·74) avec $\ell \in \{1,2\}$ d'autre part, impliquent

$$S_{1\ell 02}(\alpha,\beta) = \Bigl\{1 + O\Bigl(\frac{1}{\mathfrak{X}}\Bigr)\Bigr\}\frac{\mathfrak{S}(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{(1+\lambda)\alpha^\ell\mathfrak{X}^{\ell-1}} \qquad \bigl(\ell \in \{2,3\}\bigr),$$

$$S_{1\ell 11}(\alpha,\beta) = \Bigl\{1 + O\Bigl(\frac{1}{\mathfrak{X}}\Bigr)\Bigr\}\frac{\mathfrak{S}(\lambda)J_\ell\bigl(\lambda\mathfrak{X}+\alpha\mathfrak{X}\bigr)}{(1+\lambda)\alpha^{\ell+1}\mathfrak{X}^{\ell-1}} \qquad \bigl(\ell \in \{1,2\}\bigr).$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{S}(\alpha,\beta) \asymp 1/(\alpha^3\mathfrak{X}) \asymp \mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{3\mathfrak{X}},$$

où la seconde estimation découle de (6·14). En effet, le résultat est trivial si v et borné et résulte, via les formules précédentes, de (5·3) et de la première estimation (5·39) pour v, et donc $\mathfrak{X}$, assez grand. Comme de plus $f''_{02}(\alpha,\beta) \asymp (\lambda+\alpha)/(\alpha\lambda^2)$, d'après (5·88) et (5·20), il suit, grâce à (6·14),

$$\delta(\alpha,\beta) = \mathcal{S}(\alpha,\beta)f''_{02}(\alpha,\beta)\biggl\{1 + O\Bigl(\frac{\lambda^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{1+\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}\Bigr)\biggr\}.$$

Comme (5·105) implique

$$f''_{02}(\alpha,\beta)=\frac{D'(\lambda/\alpha)}{\alpha^2}\bigg\{1+O\bigg(\frac{\lambda^2\mathfrak{X}}{\lambda+\alpha}\bigg)\bigg\},$$

et comme les deux derniers termes d'erreur sont dominés par celui de (9·4), la preuve de cette formule est réduite à celle de l'évaluation

$$\mathcal{S}(\alpha,\beta)=g''(\sigma_v)\big\{1+O\big(\lambda(\log v)^2\big)\big\}. \tag{9·6}$$

Pour $\sigma>0$, $\kappa\geqslant 1-\sigma$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'_{01}(\sigma,\kappa)&=\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}(\sigma,\kappa)}{\mathrm{d}\kappa}=-\sum_p\frac{(\log p)^3p^\kappa\{1+p^\kappa(p^\sigma+1)\}}{\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^3},\\ &\asymp\sum_p\frac{(\log p)^3p^{2\kappa+\sigma}}{\{1+p^\kappa(p^\sigma-1)\}^3}\asymp\sum_{p\leqslant \mathrm{e}^X}(\log p)^3p^{2\kappa+\sigma}+\sum_{p>\mathrm{e}^X}\frac{(\log p)^3}{p^{\kappa+2\sigma}}\bigg\{1+\frac{1}{\sigma^3(\log p)^3}\bigg\}\end{aligned}$$

où nous avons fait appel à (5·58) pour le dernier terme. Lorsque κ est borné, le théorème des nombres premiers fournit immédiatement, grâce à (5·47),

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'_{01}(\sigma,\kappa)&\asymp X^2\mathrm{e}^{(1+2\kappa)X}+X^3J_{-2}(\xi X+\sigma X)+\frac{J_1(\xi X+\sigma X)}{\sigma^3}\\ &\asymp\frac{\mathrm{e}^X}{\sigma^2}+X^3J_{-2}(\xi X+\sigma X)+\frac{J_1(\xi X+\sigma X)}{\sigma^3}.\end{aligned}$$

Pour $\sigma=\alpha$, $1-\alpha\leqslant\kappa\leqslant\beta$, nous avons $0\leqslant\xi\leqslant\lambda$ et $\mathrm{e}^{\beta\mathfrak{X}}\beta\mathfrak{X}\asymp\mathrm{e}^{\kappa X}\kappa X$ de sorte que $\mathfrak{X}\asymp X$, et donc $\mathrm{e}^X\asymp\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$ par (5·47). Par (9·5), (5·3) et (5·7), il s'ensuit que

$$\mathcal{S}'_{01}(\alpha,\kappa)\ll\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{3\mathfrak{X}}+\frac{1+\mathfrak{X}}{\alpha^3}\ll\mathfrak{X}^4\mathrm{e}^{3\mathfrak{X}}\qquad(1-\alpha\leqslant\kappa\leqslant\beta),$$

d'où

$$\mathcal{S}(\alpha,\beta)-\mathcal{S}(\alpha,1-\alpha)\ll\lambda\mathfrak{X}^4\mathrm{e}^{3\mathfrak{X}}\ll\lambda\mathfrak{X}^2\mathcal{S}(\alpha,\beta). \tag{9·7}$$

Or, avec la définition de $g(\sigma)$ en (2·6), nous avons $\mathcal{S}(\sigma,1-\sigma)=g''(\sigma)$ $(\sigma>0)$. Comme de plus, $\alpha=\sigma_v\{1+O((\log v)^2\lambda)\}$, par (6·77), l'estimation (8·6) appliquée avec $\ell=3$ implique

$$g''(\alpha)=g''(\sigma_v)\{1+O(\lambda(\log v)^2)\}.$$

En reportant dans (9·7), nous obtenons bien (9·6). □

10. Zone sur-critique : méthode élémentaire

Rappelons la définition de la fonction $\psi(m)$ en (1·8) et notons μ la fonction de Möbius. Posant $r(n;\vartheta) := \prod_{p|n}(1+4\vartheta/\sqrt{p})$ pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{1}{2}$, nous aurons l'usage de la formule suivante

$$\sum_{n\leqslant x} \mu(Mn)^2 = \frac{6xM}{\pi^2\psi(M)} + O\big(r(M;\vartheta)x^{1-\vartheta}\big) \quad \big(M \geqslant 1,\ \mu(M)^2 = 1,\ x \geqslant 1\big). \tag{10·1}$$

Pour établir cela, nous insérons la relation de convolution $\mu(Mn)^2 = \mu^2 * \lambda_M(n)$ $(n \geqslant 1)$ où λ_M est la fonction multiplicative définie par $\lambda_M(p^\nu) := (-1)^\nu$ si $p \mid M$, $\nu \geqslant 1$, et $\lambda_M(p^\nu) := 0$ si $p \nmid M$, $\nu \geqslant 1$. Nous intervertissons ensuite les sommations en observant que

$$\sum_{d\geqslant 1} \frac{\lambda_M(d)}{d} = \frac{M}{\psi(M)}, \qquad \sum_{d\geqslant 1} \frac{|\lambda_M(d)|}{\sqrt{d}} \ll r(M;\tfrac{1}{2}) \qquad (M \geqslant 1,\ \mu(M)^2 = 1).$$

Cela implique (10·1) lorsque $\vartheta = \frac{1}{2}$. Le cas général s'en déduit en observant que le terme d'erreur de (10·1) est $\ll \big\{r(M;\frac{1}{2})\sqrt{x}\big\}^{2\vartheta} x^{1-2\vartheta} \ll r(M;\vartheta)x^{1-\vartheta}$.

Nous définissons le terme d'erreur

$$\mathfrak{E}(x,y) := \frac{\sqrt{v\sigma_v}\log y}{y^{\sigma_v}} + \frac{1}{x^{1/16}} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{10·2}$$

Il est à noter que le premier terme est d'un ordre de grandeur supérieur au second dès que v est assez grand.

Proposition 10.1. *Pour $x \geqslant 16$, $\mathfrak{y}_x^{3/2}\mathrm{e}^{5M_x/8} \leqslant y \leqslant x$, nous avons*

$$N(x,y) := yF(v)\big\{1 + O\big(\mathfrak{E}(x,y)\big)\big\}. \tag{10·3}$$

Remarque. Nous n'avons pas cherché à optimiser l'exposant $\frac{1}{16}$ apparaissant dans (10·2).

Démonstration. Soit $0 < \vartheta \leqslant \frac{1}{2}$. Gardant (10·1) à l'esprit, nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned}
N(x,y) &= \sum_{\substack{mk\leqslant x\\ k\leqslant y, k(m)|k}} \mu(k)^2 = \sum_{\substack{mk(m)\leqslant x\\ k(m)\leqslant y}} \sum_{s\leqslant \min(y/k(m), x/mk(m))} \mu(sk(m))^2 \\
&= \sum_{\substack{m\leqslant x/y\\ k(m)\leqslant y}} \sum_{s\leqslant y/k(m)} \mu(sk(m))^2 + \sum_{\substack{x/y<m\leqslant x\\ mk(m)\leqslant x}} \sum_{s\leqslant x/mk(m)} \mu(sk(m))^2 \\
&= \sum_{\substack{m\leqslant x/y\\ k(m)\leqslant y}} \left\{\frac{6y}{\pi^2\psi(m)} + O\left(r(m;\vartheta)\left(\frac{y}{k(m)}\right)^{1-\vartheta}\right)\right\} \\
&\qquad + \sum_{\substack{x/y<m\leqslant x\\ mk(m)\leqslant x}} \left\{\frac{6x}{\pi^2 m\psi(m)} + O\left(r(m;\vartheta)\left(\frac{x}{mk(m)}\right)^{1-\vartheta}\right)\right\} \\
&= yF(v) - R_1 + R_2 + R_3,
\end{aligned}$$

avec

$$R_1 := yF(v) - \sum_{\substack{m\leqslant x/y\\ k(m)\leqslant y}} \frac{6y}{\pi^2\psi(m)} - \sum_{\substack{x/y<m\leqslant x\\ mk(m)\leqslant x}} \frac{6x}{\pi^2 m\psi(m)},$$

$$R_2 \ll \sum_{\substack{m\leqslant x/y\\ k(m)\leqslant y}} r(m;\vartheta)\Big(\frac{y}{k(m)}\Big)^{1-\vartheta}, \quad R_3 \ll \sum_{\substack{x/y<m\leqslant x\\ mk(m)\leqslant x}} r(m;\vartheta)\Big(\frac{x}{mk(m)}\Big)^{1-\vartheta}.$$

Pour tout σ tel que $\sigma \in]0, \frac{1}{2}]$, $0 < \vartheta \leqslant \sigma$, nous avons la majoration de Rankin

$$\begin{aligned} R_2 + R_3 &\ll \sum_{m\geqslant 1} \Big(\frac{y}{k(m)}\Big)^{1-\sigma-\vartheta}\Big(\frac{x}{mk(m)}\Big)^{\sigma} r(m;\vartheta) \\ &\ll y^{1-\vartheta}\mathrm{e}^{\sigma v}\prod_p \Big(1+\frac{r(p;\vartheta)p^{\vartheta}}{p(p^{\sigma}-1)}\Big). \end{aligned} \tag{10·4}$$

Comme $\sum_{m\geqslant 1} 1/m\psi(m) = \pi^2/6$, nous pouvons écrire similairement

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{6}\pi^2 R_1 &= \sum_{\substack{m\leqslant x/y\\ k(m)>y}} \frac{y}{\psi(m)} + \sum_{\substack{x/y<m\leqslant x\\ mk(m)>x}} \frac{x}{m\psi(m)} + \sum_{m>x} \frac{x}{m\psi(m)} \\ &= \sum_{\substack{m\leqslant x/y\\ k(m)>y}} \frac{y}{\psi(m)} + \sum_{\substack{m>x/y\\ mk(m)>x}} \frac{x}{m\psi(m)} \leqslant \sum_{m\geqslant 1}\Big(\frac{y}{k(m)}\Big)^{1-\sigma-\vartheta}\Big(\frac{x}{mk(m)}\Big)^{\sigma}, \end{aligned}$$

de sorte que l'estimation (10·4) est également valable pour R_1.

Lorsque, disons $y > x^{3/4}$, nous choisissons $\sigma = \frac{1}{2}$, $\vartheta = \frac{1}{4}$. Il suit

$$N(x,y) = yF(v) + O(y^{1/4}x^{1/2}) = yF(v)\Big\{1 + O\Big(\sqrt{x}/y^{3/4}\Big)\Big\},$$

ce qui est compatible avec (10·3).

Lorsque $y \leqslant x^{3/4}$, nous pouvons supposer x, et donc v, grand, de sorte que le choix $\sigma = \sigma_v$, $\vartheta = \sigma_v - 1/\log y$ est licite. Il vient

$$N(x,y) - yF(v) \ll y^{1-\sigma_v}\mathrm{e}^{v\sigma_v}\prod_p\Big(1+\frac{p^{\vartheta}r(p;\vartheta)}{p(p^{\sigma_v}-1)}\Big) \ll y^{1-\sigma_v}F(v)\Big(\frac{v}{\log v}\Big)^{1/4}\mathfrak{P}(v),$$

où l'on a tenu compte de (8·8), (2·9), (8·4) et posé

$$\mathfrak{P}(v) := \prod_p\Big(1+\frac{p^{\vartheta}r(p;\vartheta)+p^{\sigma_v-1}-1}{p(p^{\sigma_v}-1)+1-p^{\sigma_v-1}}\Big) \ll \exp\Big\{\sum_p \frac{1}{p^{1+1/\log y}}\Big\} \ll \log y.$$

Cela termine la preuve de (10·3). □

Nous déduisons immédiatement de (10·3) et (8·16) une estimation du cardinal des entiers à petit noyau dans les intervalles courts.

Corollaire 10.2. *Pour* $x \geqslant 16$, $\log y \geqslant \frac{1}{8}\sqrt{2\log x \log_2 x}\,(3\log_2 x + 5\log_3 x)$, $z \geqslant 1$, *nous avons*

$$N\Big(x+\frac{x}{z},y\Big) - N(x,y) = \frac{\sigma_v N(x,y)}{z}\bigg\{1 + O\bigg(\sqrt{\frac{\log \mathrm{v}}{\mathrm{v}}} + \frac{1}{z}\bigg)\bigg\} + O\Big(N(x,y)\mathfrak{E}(x,y)\Big).$$

11. Estimations de $N(x,y)$ par la méthode du col

11·1. Majorations de $|\mathscr{F}(\alpha+i\tau,\beta+it)|$

Dans toute la suite, fixons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et posons

$$\begin{aligned} &\mathscr{Z}^- := \Big\{(x,y) : x \geqslant 16,\ \exp\big\{(\log_2 x)^{3+\varepsilon}\big\} \leqslant y < \exp\exp\big\{(\log_3 x)^4\big\}\Big\},\\ &\mathscr{Z}^+ := \Big\{(x,y) : x \geqslant 16,\ \exp\exp\big\{(\log_3 x)^4\big\} \leqslant y \leqslant x^{3/4}\Big\}, \quad \mathscr{Z} := \mathscr{Z}^- \cup \mathscr{Z}^+. \end{aligned} \tag{11·1}$$

Nous notons d'emblée que, avec la notation (5·35) et pour une constante convenable $c > 0$, nous avons

$$\beta \ll W(\mathfrak{X})^c \qquad \big((x,y) \in \mathscr{Z}^+\big), \tag{11·2}$$

$$\lambda\mathfrak{X} \ll \mathrm{e}^{\mathfrak{X}/\{3+\varepsilon\}} \qquad \big((x,y) \in \mathscr{Z}\big). \tag{11·3}$$

Ces estimations sont triviales si $\beta \leqslant 2$; nous pouvons donc supposer $\log y \leqslant \sqrt{\log x \log_2 x}$ puisque (6·10) et (6·20) impliquent $\lambda\mathfrak{X} \ll 1$ dans le cas contraire. Dans le domaine $\mathscr{Z}^+$, (6·9) implique $\beta \asymp 1 + \lambda \ll \log_2 x$ alors que (6·20) fournit $\mathfrak{X}^{1/4} \gg \log_3 x$, d'où (11·2). Pour prouver (11·3), nous pouvons également supposer $\lambda \gg 1$. Il résulte alors de (6·19) que $\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \asymp \log y$ alors que $\lambda\mathfrak{X} \ll \log_2 x$ par (6·9). Cela implique bien (11·3).

Nous définissons également

$$T_\varepsilon := \begin{cases} \exp\big(\mathfrak{X}^{37/36}\big) & \text{si } (x,y) \in \mathscr{Z}^+,\\ \mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\mathfrak{X}} & \text{si } (x,y) \in \mathscr{Z}^-, \end{cases} \tag{11·4}$$

$$\mathfrak{u} := \alpha\mathfrak{X}^{3/2}\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}/2}, \quad \mathfrak{v} := \mathfrak{X}\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}\sqrt{1+\lambda\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/\mathfrak{X}}, \tag{11·5}$$

et notons que $\mathfrak{v}^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\mathfrak{X}/(\mathfrak{u}+\mathfrak{v}+\lambda) \asymp \mathfrak{X}^2$.

Proposition 11.1. *Avec les notations précédentes, il existe* $c_0 = c_0(\varepsilon) > 0$ *tel que, pour* x *assez grand,* $(x,y) \in \mathscr{Z}$, $(\tau,t) \in [-T_\varepsilon, T_\varepsilon]^2 \smallsetminus [-\mathfrak{u},\mathfrak{u}] \times [-\mathfrak{v},\mathfrak{v}]$, *nous ayons*

$$|\mathscr{F}(\alpha+i\tau,\beta+it)| \leqslant \mathscr{F}(\alpha,\beta)\,\mathrm{e}^{-c_0\mathfrak{X}^2} \tag{11·6}$$

Démonstration. Soit $(\tau,t) \in [-T_\varepsilon, T_\varepsilon]^2$. Par (7·1) avec $(\sigma,\kappa) = (\alpha,\beta)$, nous pouvons écrire $|\mathscr{F}(\alpha+i\tau,\beta+it)| \leqslant \mathscr{F}(\alpha,\beta)\exp\big(-\frac{1}{16}\{S_1(\tau)+S_2(t)\}\big)$ avec

$$S_1(\tau) := \sum_p \frac{1-\cos(\tau\log p)}{p^\alpha\{1+p^\beta(p^\alpha-1)\}}, \quad S_2(t) := \sum_p \frac{p^\beta(p^\alpha-1)\{1-\cos(t\log p)\}}{\{1+p^\beta(p^\alpha-1)\}^2}.$$

Observons alors que la Proposition 6.4 permet facilement de montrer que, pour une constante absolue convenable A, nous avons

$$\lambda > \alpha^A \qquad (y \geqslant 2,\ x \geqslant \mathrm{e}^6 y). \tag{11·7}$$

Comme $\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} < p \leqslant \mathrm{e}^{1/\alpha}$ implique $p^\beta(p^\alpha - 1) > 1$ et $p^\alpha \ll 1$, nous pouvons appliquer (7·9) pour minorer les sommes S_j. Grâce à (11·3), il suit, lorsque $|t| + |\tau| \gg 1/\mathfrak{X}$,

$$S_1(\tau) + S_2(t) \gg \sum_{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} < p \leqslant \mathrm{e}^{1/\alpha}} \frac{2 - \cos(\tau \log p) - \cos(t \log p)}{p^\beta(p^\alpha - 1)} \gg \frac{\lambda \mathfrak{X} \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{1 + \lambda^4 \mathfrak{X}^4} \gg \mathrm{e}^{\varepsilon \mathfrak{X}/\{3+\varepsilon\}},$$

d'où (11·6), avec beaucoup de marge.

Considérons à présent le cas $|t| + |\tau| \leqslant 1/4\mathfrak{X}$. Posant $Y := |t| + |\tau|$, nous avons alors, par (7·2),

$$|\mathscr{F}(\alpha + i\tau, \beta + it)| \leqslant \mathscr{F}(\alpha, \beta)\, \mathrm{e}^{-\min(1, \tau^2/\alpha^2) S_3/4\pi^2 - t^2 S_4/8\pi^2},$$

avec

$$S_3 := \sum_{p \leqslant \mathrm{e}^Y} \frac{1}{p^\alpha\{1 + p^\beta(p^\alpha - 1)\}} \gg \frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\mathfrak{X}}, \quad S_4 := \sum_{p \leqslant \mathrm{e}^Y} \frac{p^\beta(p^\alpha - 1)(\log p)^2}{\{1 + p^\beta(p^\alpha - 1)\}^2} \gg \frac{\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{|t| + |\tau| + \lambda},$$

où la première minoration découle du fait que le terme général est $\gg 1$ et la seconde est obtenue en restreignant l'intervalle de sommation à $]\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}, \mathrm{e}^Y]$ et en appliquant (7·10) avec $(\sigma, \kappa) = (\alpha, \beta)$, $\eta = |\tau| + |t|$. Il suit, pour une constante convenable $c > 0$,

$$|\mathscr{F}(\alpha + i\tau, \beta + it)| \leqslant \mathscr{F}(\alpha, \beta) \exp\Big\{ -\frac{c\tau^2 \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{(\alpha^2 + \tau^2)\mathfrak{X}} - \frac{ct^2 \mathfrak{X} \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{|t| + |\tau| + \lambda} \Big\} \qquad \Big(|t| + |\tau| \leqslant \frac{1}{2\mathfrak{X}}\Big). \tag{11·8}$$

Comme $\tau^2 \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/\{(\alpha^2 + \tau^2)\mathfrak{X}\} \gg \mathfrak{X}^2$ $(|\tau| \geqslant \mathfrak{u})$ et $t^2 \mathfrak{X} \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/(|t| + |\tau| + \lambda) \gg \mathfrak{X}^2$ $(|\tau| \leqslant \mathfrak{u},\ |t| \geqslant \mathfrak{v})$, nous obtenons bien (11·6). □

11·2. Formule de Perron sur les intervalles courts

Rappelons les notations (11·4) et (11·5) et posons

$$\mathfrak{R}^* := \frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha, \beta) \log T_\varepsilon}{\mathfrak{X} \mathrm{e}^{\mathfrak{X}} T_\varepsilon} \sqrt{1 + \lambda \mathfrak{X} \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}. \tag{11·9}$$

Proposition 11.2. *Pour $(x, y) \in \mathscr{Z}$, nous avons*

$$N(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\alpha - i\mathfrak{u}}^{\alpha + i\mathfrak{u}} \int_{\beta - i\mathfrak{v}}^{\beta + i\mathfrak{v}} \frac{\mathscr{F}(s, z) x^s y^z}{sz}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}z + O\big(\mathfrak{R}^*\big). \tag{11·10}$$

Démonstration. La première formule de Perron effective (cf. par exemple [29], th. II.2.3) permet d'écrire

$$N(x,y) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\alpha-iT_\varepsilon}^{\alpha+iT_\varepsilon}\int_{\beta-iT_\varepsilon}^{\beta+iT_\varepsilon}\frac{\mathscr{F}(s,z)x^s y^z}{sz}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z + O(\mathfrak{R}_1^* + \mathfrak{R}_2^*) \tag{11·11}$$

avec

$$\mathfrak{R}_1^* := \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^\alpha y^\beta}{n^\alpha k(n)^\beta\{1+T_\varepsilon|\log(x/n)|\}},\quad \mathfrak{R}_2^* := \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^\alpha y^\beta}{n^\alpha k(n)^\beta\{1+T_\varepsilon|\log\{y/k(n)\}|\}}.$$

Posons $U := \alpha\sqrt{\mathfrak{X}/\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}$. La contribution à $\mathfrak{R}_1^*$ des entiers n tels que $|\log(x/n)| > 1/U$ n'excède pas $x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)U/T_\varepsilon$. La contribution complémentaire peut être évaluée classiquement, comme dans la preuve de la Proposition 8.9. Nous obtenons

$$\mathfrak{R}_1^* \ll \frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)U}{T_\varepsilon} + \frac{x^\alpha y^\beta \log T_\varepsilon}{T_\varepsilon}\int_{-T_\varepsilon}^{T_\varepsilon}|\mathscr{F}(\alpha+i\tau,\beta)|\,\mathrm{d}\tau. \tag{11·12}$$

La dernière intégrale est estimée par (11·6) et (11·8) avec $t = 0$. Nous obtenons la majoration

$$\ll \mathscr{F}(\alpha,\beta)\Big\{T_\varepsilon \mathrm{e}^{-c_0\mathfrak{X}^2} + \int_0^{\mathfrak{u}}\mathrm{e}^{-c_1\tau^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/(\alpha^2\mathfrak{X})}\,\mathrm{d}\tau\Big\} \ll \mathscr{F}(\alpha,\beta)\Big\{\mathrm{e}^{-c_2\mathfrak{X}^2} + \alpha\sqrt{\mathfrak{X}/\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}\Big\}.$$

Comme $\alpha\sqrt{\mathfrak{X}/\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}} \ll \mathrm{e}^{-3\mathfrak{X}/2}/\sqrt{\mathfrak{X}} \ll 1/(\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}})$, cette dernière quantité est $\ll \mathfrak{R}_1^*$.

Pour évaluer $\mathfrak{R}_2^*$, posons $V := \sqrt{1+\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}/(\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}})$, de sorte que (11·12) est valable pour $\mathfrak{R}_1^*$ quitte à remplacer U par V. En faisant alors appel à (11·6) et (11·8) avec $\tau = 0$ nous obtenons que $\mathfrak{R}_2^* \ll \mathfrak{R}^*$.

Maintenant, nous pouvons faire appel à (11·6) pour estimer la différence entre les termes principaux de (11·11) et (11·10). Nous obtenons que cette quantité est

$$\ll \mathscr{F}(\alpha,\beta)x^\alpha y^\beta \mathrm{e}^{-c_0\mathfrak{X}^2}\log(T_\varepsilon/\beta)\log(T_\varepsilon/\alpha) \ll \mathscr{F}(\alpha,\beta)x^\alpha y^\beta \mathrm{e}^{-c_1\mathfrak{X}^2}$$

puisque $\log(1/\alpha) \ll (1+\lambda)\mathfrak{X} \ll \mathrm{e}^{\mathfrak{X}/3}$ lorsque $(x,y) \in \mathscr{Z}$. Cela complète la démonstration. □

11·3. Intégrales gaussiennes

Rappelons ici quelques résultats connus concernant les intégrales gaussiennes en deux variables. Étant donnés a, b, $c \in]0,\infty[$ tels que $d := ac - b^2 > 0$, nous posons

$$Q(\tau,t) := \tfrac{1}{2}a\tau^2 + b\tau t + \tfrac{1}{2}ct^2 \qquad (\tau,t\in\mathbb{R}),$$

d'où, classiquement,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-Q(\tau,t)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{d}},\quad \int_{\mathbb{R}^2}\tau^m t^n \mathrm{e}^{-Q(\tau,t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad (m,n\in\mathbb{N},\ 2\nmid m+n).$$

Lorsque, de plus, $d \asymp ac$, nous avons, pour tous entiers naturels n, m,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tau^m t^n| \, \mathrm{e}^{-Q(\tau,t)} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \ll_{m,n} \frac{1}{a^{m/2} c^{n/2} \sqrt{d}}. \tag{11·13}$$

Cela découle trivialement de l'inégalité $Q(\tau,t) \geqslant \frac{1}{4} d \left(\tau^2/c + t^2/a\right) \gg a\tau^2 + ct^2$ $(\tau, t \in \mathbb{R})$.

Sous la même hypothèse, nous avons donc, pour tout $T > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{|t| \geqslant T} |\tau^m t^n| \, \mathrm{e}^{-Q(\tau,t)} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \ll_{m,n} \frac{T^{n-1} \mathrm{e}^{-dT^2/4a}}{c \, a^{(m+1)/2}},$$

$$\int_{|\tau| > T} \int_{\mathbb{R}} |\tau^m t^n| \, \mathrm{e}^{-Q(\tau,t)} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \ll_{m,n} \frac{T^{m-1} \mathrm{e}^{-dT^2/4c}}{a \, c^{(n+1)/2}}.$$

11·4. Zone sous-critique : méthode du col directe

Nous nous proposons ici d'établir le résultat suivant. Nous rappelons les définitions du paramètre Z en (3·13) et des ensembles $\mathscr{Z}^{\pm}$, $\mathscr{Z}$ en (11·1). Nous introduisons alors la notation

$$E := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\log_2 x}{\log x}} \left\{ \dfrac{1}{Z} + \dfrac{\log(2 + 1/Z)}{Z \log_2 x} + \mathrm{e}^Z \right\} & \text{si } (x,y) \in \mathscr{Z}^+, \\ \dfrac{\log_2 x}{(\log y)^{1/2-\varepsilon}} & \text{si } (x,y) \in \mathscr{Z}^-. \end{cases} \tag{11·14}$$

Il est à noter qu'en vertu de (6·26) nous avons $E \ll 1/(\log_2 x)^{1/2-3\varepsilon}$ en toute circonstance.

Proposition 11.3. *Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{6}[$. Sous les conditions*

$$x \geqslant 16, \quad \mathrm{e}^{(\log_2 x)^{3+\varepsilon}} \leqslant y \leqslant \mathcal{Y}_x \mathrm{e}^{-35 M_x/8}, \tag{11·15}$$

nous avons

$$N(x,y) = \{1 + O(E)\} \frac{x^\alpha y^\beta F(\alpha,\beta)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta(\alpha,\beta)}}. \tag{11·16}$$

Pour tout $(\tau, t) \in \mathbb{R}^2$, nous posons

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_f(\tau,t) := \frac{1}{2} f''_{20}(\alpha,\beta)\tau^2 + f''_{11}(\alpha,\beta)\tau t + \frac{1}{2} f''_{02}(\alpha,\beta) t^2, \\ \mathcal{Q}^*_f(\tau,t) := f''_{20}(\alpha,\beta)\tau^2 + f''_{02}(\alpha,\beta) t^2, \\ \mathcal{W}_f(\tau,t) := \dfrac{1}{6} \displaystyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant 3} \binom{3}{j} f'''_{j,3-j}(\alpha,\beta) \tau^j t^{3-j}, \\ \mathscr{E}_f(\tau,t) := \left(\dfrac{\tau^2}{\alpha^2} + \dfrac{\tau^2 + t^2}{\lambda^2} + \mathfrak{X}^2 t^2 \right) \mathcal{Q}^*_f\big(|\tau|, |t|\big). \end{cases} \tag{11·17}$$

Grâce à (5·94) et (5·104), nous pouvons notamment énoncer que, pour tout $(\tau, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\mathcal{Q}_f(\tau,t)| \ll \mathcal{Q}^*_f(|\tau|,|t|), \qquad |\mathcal{W}_f(\tau,t)| \ll \left(\frac{|\tau|}{\alpha} + \frac{|t| + |\tau|}{\lambda} + \mathfrak{X}|t| \right) \mathcal{Q}^*_f(|\tau|,|t|). \tag{11·18}$$

Lemme 11.4. *Soit $c > 0$ une constante assez petite. Pour $|\tau| \leqslant c\alpha$ et $|t| \leqslant c/\mathfrak{X}$, nous avons*

$$f(\alpha+i\tau,\beta+it) = f(\alpha,\beta) - i\tau\log x - it\log y - \mathcal{Q}_f(\tau,t) - i\mathcal{W}_f(\tau,t) + O\big(\mathscr{E}_f(\tau,t)\big). \tag{11·19}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 4 pour la fonction $u \mapsto f(\alpha+i\tau u, \beta+itu)$ sur l'intervalle $[0,1]$ en majorant le terme résiduel grâce aux inégalités de la Proposition 5.26(i) avec $(\sigma_0,\kappa_0) = (\alpha,\beta)$. □

Nous sommes à présent en mesure d'établir la Proposition 11.3.

D'après (6·26), la condition (11·15) implique

$$y^{\sigma_v} = \mathrm{e}^Z \ll \sqrt{v}/(\log v)^{17/2}, \tag{11·20}$$

d'où, par (6·20), $\Delta \gg (\log v)^8 \gg \mathfrak{X}^8$. En reportant dans (6·75), nous voyons en particulier que $\lambda \gg \alpha\mathfrak{X}^8$, d'où, par (5·47) avec $\lambda \ll 1/\mathfrak{X}$,

$$\lambda \gg \mathfrak{X}^7\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}. \tag{11·21}$$

D'après (5·97) et (5·47), nous avons

$$\delta := \delta(\alpha,\beta) \asymp \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda\mathfrak{X}}(1+\lambda)}{\alpha^4\lambda\mathfrak{X}(1+\lambda\mathfrak{X})} \asymp \frac{(1+\lambda)\mathfrak{X}\mathrm{e}^{2\mathfrak{X}}}{\alpha^2\lambda(1+\lambda\mathfrak{X})} \ll \frac{\mathfrak{X}\mathrm{e}^{2\mathfrak{X}}}{\alpha^2\lambda}\cdot \tag{11·22}$$

Il suit donc avec la notation (11·9)

$$\frac{\alpha\beta\sqrt{\delta}\,\mathfrak{R}^*}{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)} \ll \frac{(1+\lambda)\sqrt{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} + 1/\lambda\mathfrak{X}}\log T_\varepsilon}{T_\varepsilon} \ll \frac{(1+\lambda)\mathrm{e}^{\mathfrak{X}/2}\log T_\varepsilon}{T_\varepsilon}, \tag{11·23}$$

où la dernière estimation découle de (11·21).

Nous obtiendrons (11·16) en estimant le terme principal de (11·10). L'intégrande est évalué par (11·19) et notre première tâche consiste à déterminer les ordres de grandeur des termes apparaissant au membre de droite. Par (5·86), (5·3), (6·14) et (11·21), nous avons

$$f''_{20}(\alpha,\beta) \asymp \frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\alpha^2\mathfrak{X}} + \frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\alpha^2(1+\lambda\mathfrak{X})} + \frac{1}{\lambda^2} \asymp \frac{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}(1+\lambda)}{\alpha^2(1+\lambda\mathfrak{X})}\cdot \tag{11·24}$$

De plus, la majoration (11·3) permet d'appliquer la Proposition 5.23. Les estimations (5·88) et (5·20) impliquent donc, compte tenu de (11·21),

$$f''_{02}(\alpha,\beta) \asymp \mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/\lambda\cdot \tag{11·25}$$

Il est alors aisé de vérifier à l'aide de (5·104) et (11·18) que, lorsque $|\tau| \leqslant \mathfrak{u}$, $|t| \leqslant \mathfrak{v}$, les quantités $\mathcal{W}_f(\tau,t)$ et $\mathscr{E}_f(\tau,t)$ sont bornées. Il résulte donc de (11·19) que le terme principal de (11·10) vaut

$$\frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)}{4\pi^2\alpha\beta}\int_{-\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}\int_{-\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}} \mathrm{e}^{-Q_f(\tau,t)}\Big\{1 - i\mathcal{W}_f(\tau,t) - i\frac{\tau}{\alpha} - i\frac{t}{\beta} + O\big(\mathscr{E}^*_f(\tau,t)\big)\Big\}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \tag{11·26}$$

avec

$$\mathscr{E}^*_f(\tau,t) := \mathscr{E}_f(t,\tau) + \mathcal{W}_f(t,\tau)^2 + \frac{\tau^2}{\alpha^2} + \frac{t^2}{\beta^2} \ll \Big(\frac{\tau^2}{\alpha^2} + \frac{t^2}{\lambda^2} + \mathfrak{X}^2t^2\Big)\Big\{1 + \mathcal{Q}^*_f\big(|\tau|,|t|\big)^2\Big\},$$

où l'estimation découle de (11·17) compte tenu du fait que, sous nos hypothèses, $\alpha \ll \lambda$.

Évaluons l'intégrale double de (11·26) en remarquant que la contribution des termes impairs est nulle par symétrie. Pour estimer le terme d'erreur, nous posons provisoirement, afin de simplifier l'écriture, $\mathfrak{p} := \sqrt{f''_{20}(\alpha,\beta)}$, $\mathfrak{q} := \sqrt{f''_{02}(\alpha,\beta)}$, de sorte que, par (11·22), (11·24) et (11·25), $\sqrt{\delta} \asymp \mathfrak{p}\mathfrak{q}$. De plus, puisque $\mathcal{Q}_f^*(1/\mathfrak{p}, 1/\mathfrak{q}) = 2$ par construction, (11·13) implique immédiatement via un changement de variables linéaire que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathcal{Q}_f(\tau,t)}\mathscr{E}_f^*(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \ll \frac{\mathscr{E}_f^*(1/\mathfrak{p},1/\mathfrak{q})}{\sqrt{\delta}} \ll \frac{1+\lambda^2\mathfrak{X}^2}{\sqrt{\delta}\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}.$$

Comme $\min(\mathfrak{u}^2\mathfrak{p}, \mathfrak{v}^2\mathfrak{q}) \gg \mathfrak{X}^2$, nous avons encore

$$\int_{-\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}\int_{-\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}} \mathrm{e}^{-\mathcal{Q}_f(\tau,t)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \big\{1+O\big(\mathrm{e}^{-c\mathfrak{X}^2}\big)\big\}\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}},$$

d'où finalement

$$N(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta F(\alpha,\beta)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta}}\bigg\{1+O\bigg(\frac{1+\lambda^2\mathfrak{X}^2}{\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}} + \frac{(1+\lambda)\mathrm{e}^{\mathfrak{X}/2}\log T_\varepsilon}{T_\varepsilon}\bigg)\bigg\}. \tag{11·27}$$

Il reste à montrer que le terme d'erreur est bien compatible avec (11·16). Dans le domaine considéré, nous avons

$$w \asymp \mathfrak{X} \asymp \log_2 y, \quad \lambda \asymp \frac{\log(2+1/Z)}{\mathrm{e}^Z\log_2 y}, \quad \mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} \asymp \frac{(1+\lambda)(1+Z)\log_2 y}{(1+\lambda\log_2 y)\log y}.$$

La première estimation résulte de (6·20), la seconde de (6·74) et (11·20), et la troisième de (6·19). En considérant séparément les cas $\lambda\mathfrak{X} \gg 1$ et $\lambda\mathfrak{X} \ll 1$, qui correspondent respectivement à $Z \ll 1$ et $Z \gg 1$ d'après (6·13), il suit

$$\frac{1+\lambda^2\mathfrak{X}^2}{\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}} \asymp \frac{(1+Z\mathrm{e}^Z)\log_2 y + \log(2+1/Z)}{\log y} \ll \sqrt{\frac{\log v}{v}}\bigg\{\frac{1}{Z}+\mathrm{e}^Z+\frac{\log(2+1/Z)}{Z\log v}\bigg\},$$

où nous avons utilisé les estimations $\log_2 y \ll \log v$ et $\log y \asymp Z\sqrt{v\log v}$. Compte tenu de (11·3) et (11·4), cela fournit bien (11·16) lorsque $(x,y) \in \mathscr{Z}^+$ puisque $v \asymp \log x$ dès que $y \leqslant x^{1/4}$.

Dans le domaine $\mathscr{Z}^-$, nous avons $\lambda \asymp (\log_2 x)/\log_2 y \gg 1$ d'après (6·9), alors que (6·19) implique $\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \asymp \log y$. Le second terme d'erreur de (11·27) est alors $\asymp (\log_2 x)/(\log y)^{1/2-\varepsilon}$ et partant domine le premier.

11·5. Zone critique : méthode du col indirecte

11·5·1. Objectif

Nous nous proposons ici d'établir le résultat suivant, qui permet d'effectuer la jonction entre les Propositions 10.1 et 11.3. Nous nous sommes cantonnés, pour la simplicité de l'énoncé, à un domaine relativement restreint. Cependant, la méthode employée permettrait, moyennant un affaiblissement du terme résiduel, de relâcher la borne supérieure jusqu'à, par exemple, $\log y \leqslant (\log x)^{9/16}$.

Nous posons

$$\mathfrak{R} := \big\{\Delta^2 + \log(1+1/\Delta)\big\}\sqrt{\frac{\log_2 x}{\log x}}, \qquad \mathfrak{R}_1 := (1+\Delta^2)\frac{(\log_2 x)^{5/2}}{\sqrt{\log x}}\cdot \tag{11·28}$$

Notons que, sous la condition $y \geqslant \sqrt{\mathcal{Y}_x}\mathrm{e}^{5M_x/8}$, nous avons $\mathfrak{R} \ll \mathfrak{R}_1 \ll 1/(\log_2 x)^{11}$.

Introduisons encore, pour $s = \sigma + i\tau$, les quantités

$$A(s) = A(s;x,y) := \frac{sD(\lambda/\alpha)}{\alpha} + (s-\alpha)\Big(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{V+2}{2s}\Big) \qquad (\sigma > 0), \tag{11·29}$$

où V a été défini en (6·22), et

$$\psi(s) := \psi(s;x,y) := \mathrm{e}^{-\exp A(s)} \qquad (\sigma > 0), \tag{11·30}$$

$$\mathscr{R}(t,v) := \frac{\mathrm{e}^{D(t)}\big\{\big(\mathrm{e}^{D(t)}-1\big)\big(D(t)-\frac12 V+\gamma-1\big)^2 + 2 + V\big\}}{2g''(\sigma_v)\sigma_v^2}, \tag{11·31}$$

$$\Xi(t,v) := \psi(\sigma_v)\big\{1 - \mathscr{R}\big(t,v\big)\big\}. \tag{11·32}$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 11.5. *Sous la condition*

$$x \geqslant 16, \quad \mathrm{e}^{15M_x/8}\sqrt{\mathcal{Y}_x} \leqslant y \leqslant \mathcal{Y}_x^{10}, \tag{11·33}$$

nous avons

$$N(x,y) = \{1 + O(\mathfrak{R})\}yF(v)\Xi(\lambda/\alpha, v), \tag{11·34}$$

$$N(x,y) = \big\{1 + O(\mathfrak{R}_1)\big\}\frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)\Phi\big(\lambda/\alpha\big)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta}}, \tag{11·35}$$

$$N(x,y) = \{1 + O(\mathfrak{R}_1)\}yF(v)\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)}. \tag{11·36}$$

Il est à noter que, dans (11·34), le terme d'erreur $\mathfrak{R}$ est vraisemblablement optimal lorsque Δ est de l'ordre de l'unité, soit $y = \mathcal{Y}_x\mathrm{e}^{-3M_x/8+O\left(\sqrt{\log x \log_2 x}\right)}$.

11·5·2. Préparation

Commençons par déterminer les ordres de grandeur des paramètres.

Nos hypothèses impliquent $v = \log x + O\big((\log x)^{2/3}\big)$, d'où

$$\tfrac14 \log_2 x + \tfrac{15}{4}\log_3 x < Z \leqslant 5\log v + O(\log_2 v)$$

par (6·26) et (6·31), et donc

$$v^{1/4}(\log v)^{15/4} < \mathrm{e}^Z \ll v^5, \quad \frac{1}{v^5} \ll \Delta \asymp \frac{\sqrt{v/\log v}}{\mathrm{e}^Z} \ll \frac{v^{1/4}}{(\log v)^{17/4}}\cdot$$

Nous avons également $\mathfrak{X} \asymp \log v$ et

$$\lambda \asymp \frac{(\Delta+1)\sigma_v}{\log(2+1/\Delta)}, \quad \mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \asymp \sqrt{\frac{v}{\log v}}, \quad \alpha \asymp \frac{1}{\sqrt{v\log v}} \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}}{\mathfrak{X}}, \quad \Delta \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}-Z}. \tag{11·37}$$

La première estimation est une reformulation de (6·74) et implique $\lambda\mathfrak{X} \ll 1$; la deuxième découle ensuite de (6·19) ; la troisième résulte de (6·8). En particulier,

$$\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}/\mathfrak{X}^2 \asymp \sigma_v/\log v \ll \lambda \ll \mathrm{e}^{-\mathfrak{X}/2}/\mathfrak{X}^5. \tag{11·38}$$

À fins de référence ultérieure, nous récapitulons ce qui précède sous la forme

$$\begin{aligned} &\lambda \asymp \mathrm{e}^{-Z}/\log_2 x \qquad (\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}/\mathfrak{X} \ll \lambda \ll \mathrm{e}^{-\mathfrak{X}/2}/\mathfrak{X}^5),\\ &1/\lambda \ll \mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \qquad (\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}/\mathfrak{X}^2 \ll \lambda \ll \mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}/\mathfrak{X}),\\ &\mathfrak{R} \asymp \mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} + \mathrm{e}^{-2\mathfrak{X}}/\lambda\mathfrak{X} + \lambda^2\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}, \quad \mathfrak{R}_1 \asymp \mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} + \lambda^2\mathfrak{X}^4\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}. \end{aligned} \tag{11·39}$$

Nous avons encore, avec la notation (11·5),

$$f''_{20}(\alpha,\beta) \asymp \mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{3\mathfrak{X}} \asymp \mathfrak{X}^3/\mathfrak{u}^2, \quad f''_{02}(\alpha,\beta) \asymp (1+\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}})/\lambda^2 \ll \mathfrak{X}^6/\mathfrak{v}^2, \tag{11·40}$$

$$f''_{11}(\alpha,\beta) \ll (1+\lambda^2\mathfrak{X}^3\mathrm{e}^{2\mathfrak{X}})/\lambda^2, \tag{11·41}$$

$$f''_{20}(\alpha,\beta)f''_{02}(\alpha,\beta) = \delta\biggl\{1 + O\biggl(\frac{\mathrm{e}^{-3\mathfrak{X}}(1+\lambda^4\mathfrak{X}^6\mathrm{e}^{4\mathfrak{X}})}{\lambda^2\mathfrak{X}^2(1+\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}})}\biggr)\biggr\} = \delta\{1+O(\mathfrak{R}_1)\}. \tag{11·42}$$

Les deux formules de (11·40) découlent respectivement, via (5·47), de (11·24) et (5·88) ; la majoration (11·41) résulte de (5·90) et (11·39) ; enfin, (11·42) est conséquence de (5·93), (5·97) et (11·40).

Posons, pour $s := \sigma + i\tau$, $z := \kappa + it$,

$$\mathscr{H}(s,z) := \prod_p \biggl(1 + \frac{1-p^{-z}}{p^{z+s}(p^s-1)}\biggr) \qquad (\sigma>0,\ \kappa>0,\ \kappa+2\sigma>1), \tag{11·43}$$

de sorte que, sous les mêmes conditions, $\mathscr{F}(s,z) = \zeta(s+z)\mathscr{H}(s,z)$. Un raisonnement analogue à celui de la Proposition 5.26 fournit également que, pour $c>0$ convenable et $\sigma_0>0$, $\kappa_0>0$, $\kappa_0+2\sigma_0>1$, l'expression

$$h(s,z) := \log\mathscr{H}(s,z) = \sum_p \log\biggl(1 + \frac{1-p^{-z}}{p^{z+s}(p^s-1)}\biggr) \qquad (\sigma>0,\ \kappa>0,\ \kappa+2\sigma>1). \tag{11·44}$$

définit un prolongement holomorphe de $\log\mathscr{H}(s,z)$ dans le domaine $\mathscr{U}_c(\sigma_0,\kappa_0)$ explicité en (5·100). Notons encore que, avec la définition (2·5), nous avons $\mathscr{H}(s,1-s) = \mathscr{G}(s)$ $(\sigma>0)$.

Lemme 11.6. *Il existe $c > 0$ tel que, sous les conditions $\sigma > 0$, $1-\sigma \leqslant \kappa \leqslant 2$, $X > \log 2$, $|\tau| \leqslant c\sigma$, $|t| \leqslant c/X$, on ait*

$$h'_{01}(s,z) = f'_{01}(s, s+z) + O\big(\log(1+1/\sigma)\big). \tag{11·45}$$

Démonstration. Comme dans la preuve de la Proposition 5.26, nous avons sous les conditions indiquées

$$|1 + p^z(p^s - 1)| \gg 1 + p^\kappa(p^\sigma - 1) \qquad (p \geqslant 2). \tag{11·46}$$

Posons ensuite

$$r(s,z) := \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^z\{1 + p^{z+s}(p^s-1)\}}\right),$$

de sorte que $h(s,z) = f(s, s+z) + r(s,z)$. Nous avons

$$\begin{aligned} r'_{01}(s,z) &= \sum_p \frac{(\log p)\{1 + 2p^{z+s}(p^s-1)\}}{\big(p^z\{1+p^{z+s}(p^s-1)\} - 1\big)\{1+p^{z+s}(p^s-1)\}} \\ &\ll \sum_p \frac{(\log p)\{1 + 2p^{\kappa+\sigma}(p^\sigma-1)\}}{\big(p^\kappa\{1+p^{\kappa+\sigma}(p^\sigma-1)\} - 1\big)\{1+p^{\kappa+\sigma}(p^\sigma-1)\}} \\ &\ll \sum_{p \leqslant \mathrm{e}^X} \frac{\log p}{p^{\kappa+\sigma}} + \sum_{p > \mathrm{e}^X} \frac{(\log p)}{p^{2(\kappa+\sigma)}}\left\{1 + \frac{1}{\sigma \log p}\right\} \ll \sum_{p \leqslant \mathrm{e}^X} \frac{\log p}{p} + \frac{1}{\sigma}\sum_{p > \mathrm{e}^X} \frac{1}{p^{2(\kappa+\sigma)}} \ll X, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (11·46), (5·58), le théorème des nombres premiers, et finalement (5·47). La deuxième estimation de (5·48) permet alors de conclure. □

Nous posons encore, toujours avec la notation $s = \sigma + i\tau$,

$$\begin{aligned} A_0(s) &:= \frac{s}{\alpha}\{D(\lambda/\alpha) + \gamma\} - \gamma - s(s-\alpha) f''_{11}(\sigma_v, 1) \qquad (\sigma > 0), \\ E_1(t) &:= \mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} + (\lambda + |t|)\mathfrak{X} + (\lambda^2 + t^2)\mathfrak{X}^2 \mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \qquad (t \in \mathbb{R}), \end{aligned} \tag{11·47}$$

et rappelons les définitions des quantités $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ en (11·5).

Lemme 11.7. *Sous les conditions* (11·33) *et pour $s = \alpha + i\tau$, $z = \beta + it$, $|\tau| \leqslant \mathfrak{u}$, $|t| \leqslant \mathfrak{v}$, $w := s + z - 1$, nous avons*

$$\frac{x^s y^z \mathscr{F}(s,z)}{sz} = \big\{1 + O\big(E_1(t)\big)\big\} \frac{y \mathrm{e}^{sv} \mathscr{G}(s)}{s^2} \Gamma\Big(\frac{w}{s}\Big) \mathrm{e}^{-wA_0(s)/s}. \tag{11·48}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\mathscr{H}(s,z)}{\mathscr{H}(s,1-s)} &= \exp\left\{w \int_0^1 h'_{01}(s, 1-s+tw)\,\mathrm{d}t\right\} \\ &= \{1 + O(|w|\mathfrak{X})\} \exp\left\{w \int_0^1 f'_{01}(s, 1+tw)\,\mathrm{d}t\right\} \\ &= \{1 + O(|w|\mathfrak{X})\} \exp\left\{w f'_{01}(s,1) - w^2 \int_0^1 (1-t) f''_{02}(s, 1+tw)\,\mathrm{d}t\right\} \\ &= \left\{1 + O\Big(|w|\mathfrak{X} + \frac{|w|^2\mathfrak{X}}{\alpha}\Big)\right\} \exp\left\{w f'_{01}(s,1) - w^2 \int_0^1 \frac{(1-t)}{s^2} D'\Big(1 + \frac{tw}{s}\Big)\,\mathrm{d}t\right\} \\ &= \left\{1 + O\Big(|w|\mathfrak{X} + \frac{|w|^2\mathfrak{X}}{\alpha}\Big)\right\} \Gamma\Big(1 + \frac{w}{s}\Big) \mathrm{e}^{w f'_{01}(s,1) + \gamma w/s} \end{aligned}$$

où nous avons successivement employé (11·45) et (5·105).

Notant $A_1(s) := \gamma + s\{\log y + f'_{01}(s,1)\}$, il suit

$$\begin{aligned}\frac{x^s y^z \mathscr{F}(s,z)}{sz} &= \big\{1 + O\big(E_1(t)\big)\big\}\frac{y\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{s}\zeta(1+w)\,\Gamma\Big(1+\frac{w}{s}\Big)\,\mathrm{e}^{wA_1(s)/s}\\ &= \big\{1 + O\big(E_1(t)\big)\big\}\frac{y\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{s^2}\,\Gamma\Big(\frac{w}{s}\Big)\,\mathrm{e}^{wA_1(s)/s}\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{z}{\beta} = 1 + O(|t|), \quad \beta = 1 + O(\lambda+\alpha), \quad \Gamma\Big(1+\frac{w}{s}\Big) = \frac{w}{s}\Gamma\Big(\frac{w}{s}\Big), \quad w\zeta(1+w) = 1 + O(|w|).$$

Estimons ensuite $A_1(s)$. Comme $f''_{01}(\alpha,\beta) = -\log y$, nous avons

$$A_1(s) = \gamma + s\{f'_{01}(s,1) - f'_{01}(\alpha,1)\} - s\int_1^\beta f''_{02}(\alpha,u)\,\mathrm{d}u.$$

Or, la relation (5·105) fournit, compte tenu de l'estimation $\beta - 1 \ll \lambda + \alpha$,

$$s\int_1^\beta f''_{02}(\alpha,u)\,\mathrm{d}u = \frac{s}{\alpha}\{D(\lambda/\alpha) + \gamma\} + O\big((\lambda+\alpha)\mathfrak{X}\big).$$

De plus, un développement de $f'_{01}(s,1)$ à l'ordre 2 en $s = \alpha$ fournit, grâce à (5·104) et (5·92),

$$f'_{01}(s,1) = f'_{01}(\alpha,1) + (s-\alpha)f''_{11}(\alpha,1) + O\big(|s-\alpha|^2\mathfrak{X}/\alpha^3\big),$$

d'où $s\{f'_{01}(s,1) - f'_{01}(\alpha,1)\} = s(s-\alpha)f''_{11}(\alpha,1) + O\big(\mathfrak{X}^3\mathrm{e}^{-2\mathfrak{X}}\big)$.

Comme (5·92) et (6·81) permettent d'écrire $f''_{11}(\alpha,1) = f''_{11}(\sigma_v,1) + O(\lambda\mathfrak{X}^5\mathrm{e}^{2\mathfrak{X}})$, nous obtenons finalement $A_1(s) = -A_0(s) + O\big((\lambda+\alpha)\mathfrak{X}\big)$ et donc

$$\mathrm{e}^{wA_1(s)/s} = \{1 + E_1(t)\}\mathrm{e}^{-wA_0(s)/s},$$

ce qui implique bien (11·48). □

La proposition suivante permet de déduire (11·35) et (11·36) de (11·34). Lorsque aucune confusion n'est à craindre nous notons comme précédemment $\delta = \delta(\alpha,\beta)$.

Proposition 11.8. *Sous la condition* (11·33), *nous avons*

$$\begin{aligned}yF(v)\Xi(\lambda/\alpha,v) &= \big\{1 + O(\mathfrak{R}_1)\big\}\frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta}}\Phi(\lambda/\alpha)\\ &= \big\{1 + O(\mathfrak{R}_1)\big\}\,yF(v)\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)}.\end{aligned} \tag{11·49}$$

Démonstration. D'après (9·4), nous avons

$$\delta(\alpha,\beta) = \frac{D'(\lambda/\alpha)g''(\sigma_v)}{\alpha^2}\{1 + O(\lambda\mathfrak{X}^2)\}.$$

Par ailleurs, la relation (11·48) appliquée avec $\tau = t = 0$ fournit

$$\frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)}{\alpha\beta} = \{1 + O(\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} + \lambda\mathfrak{X} + \lambda^2\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}})\}\frac{y\mathrm{e}^{\alpha v}\mathscr{G}(\alpha)}{\alpha^2}\Gamma(\lambda/\alpha)\mathrm{e}^{-(\lambda/\alpha)D(\lambda/\alpha)},$$

d'où

$$\frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta}}\Phi(\lambda/\alpha) = \{1 + O(\mathfrak{R}_1)\}\frac{y\mathrm{e}^{\alpha v}\mathscr{G}(\alpha)}{\alpha\sqrt{2\pi g''(\sigma_v)}}\,\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)}$$

puisque $\lambda\mathfrak{X}^2 + \lambda^2\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} \asymp \mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} + \lambda^2\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}} \ll \mathfrak{R}_1$. Par ailleurs, en vertu de (6·81), de l'estimation $\alpha v + g(\alpha) = \sigma_v v + g(\sigma_v) + O\big(g''(\sigma_v)(\alpha-\sigma)^2\big)$ et (8·4) sous la forme $g''(\alpha) \asymp \mathfrak{X}^3\mathrm{e}^{3\mathfrak{X}}$, nous pouvons écrire

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha v}\mathscr{G}(\alpha)}{\alpha\sqrt{2\pi g''(\sigma_v)}} = \big\{1 + O(\lambda\mathfrak{X}^2 + \lambda^2\mathfrak{X}^4\mathrm{e}^{\mathfrak{X}})\big\}F(v) = \big\{1 + O(\mathfrak{R}_1)\big\}F(v).$$

Ainsi, compte tenu de (3·8),

$$\frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta}}\Phi(\lambda/\alpha) = \{1 + O(\mathfrak{R}_1)\}yF(v)\,\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)}. \tag{11·50}$$

Nous obtiendrons (11·49) en évaluant $\Xi(\lambda/\alpha, v)$.

Commençons par estimer $\mathscr{R}(\lambda/\alpha, v) \ll \mathrm{e}^{2D(\lambda/\alpha)}\{D(\lambda/\alpha)^2 + \mathfrak{X}^2\}/(v\sigma_v)$. Comme $\mathrm{e}^{D(u)} \ll u$ $(u > 0)$, et comme, d'après le Lemme 5.4, $D(\lambda/\alpha) \ll \mathfrak{X}$ dans les conditions (11·33), nous obtenons

$$\mathscr{R}(\lambda/\alpha, v) \ll \frac{\lambda^2\mathfrak{X}^4\mathrm{e}^{2\mathfrak{X}}}{\sqrt{v/\log v}} \ll \lambda^2\mathfrak{X}^4\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \ll \mathfrak{R}_1. \tag{11·51}$$

Par ailleurs, les estimations (5·92) et (5·104) impliquent $f''_{11}(s,1) \ll \mathfrak{X}^3\mathrm{e}^{2\mathfrak{X}}$ pour $s \in \mathbb{C}$, $|s-\alpha| \ll \alpha$. Grâce à (6·75), il suit

$$A'_0(s) \ll \mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \qquad (|s-\alpha| \ll \alpha), \tag{11·52}$$

d'où, par (6·81),

$$A_0(\sigma_v) = D(\lambda/\alpha) + O(\lambda\mathfrak{X}^3). \tag{11·53}$$

et donc

$$\psi(\sigma_v) = \Big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)}\lambda\mathfrak{X}^3\big)\Big\}\,\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)} = \big\{1 + O\big(\lambda^2\mathfrak{X}^4\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\big)\big\}\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)}. \tag{11·54}$$

Compte tenu de (11·51), nous obtenons bien (11·49). □

La proposition suivante fournit une approximation de l'intégrale double de (11·10) par une intégrale simple.

Nous rappelons les définitions de $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ en (11·5) et $\psi(s)$ en (11·30).

Proposition 11.9. *Sous la condition* (11·33), *nous avons*

$$\int_{\alpha-i\mathfrak{u}}^{\alpha+i\mathfrak{u}}\int_{\beta-i\mathfrak{v}}^{\beta+i\mathfrak{v}}\frac{\mathscr{F}(s,z)x^sy^z}{(2i\pi)^2sz}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z=\frac{y}{2i\pi}\int_{\alpha-i\mathfrak{u}}^{\alpha+i\mathfrak{u}}\frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)\psi(s)}{s}\,\mathrm{d}s+O\Big(\frac{x^\alpha y^\beta\mathscr{F}(\alpha,\beta)\mathfrak{R}}{\alpha\beta\sqrt{\delta}}\Big).$$

Démonstration. Insérons l'estimation (11·48) dans le membre de gauche de la formule annoncée. La contribution du terme d'erreur $E_1(t)$ n'excède pas

$$\ll\frac{x^\alpha y^\beta}{\alpha\beta}\int_0^{\mathfrak{u}}\int_0^{\mathfrak{v}}|\mathscr{F}(\alpha+i\tau,\beta+it)|E_1(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau. \tag{11·55}$$

Compte tenu de la majoration (11·8) pour $|\mathscr{F}(\alpha+i\tau,\beta+it)|$, et puisque $\mathfrak{u}\ll\min(\alpha,\lambda)$ sous la condition (11·33), nous voyons que, pour montrer que (11·55) est englobé par le terme d'erreur, il suffit d'établir, pour toute constante $c>0$,

$$\int_0^{\mathfrak{u}}\int_0^{\mathfrak{v}}\mathrm{e}^{-cf_{20}''(\alpha,\beta)\tau^2-ct^2\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/(t+\lambda)}E_1(t)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\ll\frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{\delta}}. \tag{11·56}$$

Posons

$$\mathfrak{s}:=\frac{1}{\sqrt{f_{20}''(\alpha,\beta)}}\asymp\frac{\mathrm{e}^{-3\mathfrak{X}/2}}{\mathfrak{X}},\quad \mathfrak{t}:=\frac{1+1/\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}{\sqrt{f_{02}''(\alpha,\beta)}}\asymp\frac{\sqrt{1+\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}}{\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}$$

de sorte que, par (11·42), $\mathfrak{s}\mathfrak{t}\asymp\big(1+1/\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\big)/\sqrt{\delta}$. Pour tous nombres réels a, b positifs ou nuls nous avons

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-cf_{20}''(\alpha,\beta)\tau^2}\tau^a\,\mathrm{d}\tau\asymp\mathfrak{s}^{a+1}, \tag{11·57}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ct^2\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/(t+\lambda)}t^b\,\mathrm{d}t&\ll\int_0^\lambda\mathrm{e}^{-ct^2\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}/\lambda}t^b\,\mathrm{d}t+\int_\lambda^\infty\mathrm{e}^{-ct\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}t^b\,\mathrm{d}t\\&\ll\Big(\frac{\lambda}{\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}\Big)^{(b+1)/2}+\frac{\mathrm{e}^{-c\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}}{\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}\Big(\lambda+\frac{1}{\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}\Big)^b\ll\mathfrak{t}^{b+1}.\end{aligned} \tag{11·58}$$

Il s'ensuit que le membre de gauche de (11·56) est

$$\frac{\{(\lambda+\mathfrak{t})\mathfrak{X}+(\lambda^2+\mathfrak{t}^2)\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\}(1+\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}})}{\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\sqrt{\delta}}\ll\frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{\delta}}.$$

La contribution à l'intégrale double du terme principal de (11·48) vaut

$$iy\int_{\alpha-i\mathfrak{u}}^{\alpha+i\mathfrak{u}}\frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{s^2}\mathcal{M}(s)\int_{-\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}\Gamma\Big(\frac{s+\beta-1+it}{s}\Big)\mathrm{e}^{-itA_0(s)/s}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \tag{11·59}$$

où l'on a posé $\mathcal{M}(s):=\mathrm{e}^{-(s+\beta-1)A_0(s)/s}$. Comme $s+\beta-1=\lambda+i\tau$, l'intégrale intérieure en t relève de (5·21) avec $T=\mathfrak{v}$, $\zeta:=-iA_0(s)/s$. L'hypothèse (11·33) implique que les conditions

$$\alpha\leqslant\min(\tfrac13,\mathfrak{v}),\quad|\tau|\leqslant\tfrac18\alpha,\quad\mathfrak{v}|\tau|\leqslant\tfrac16\alpha\lambda,\quad\lambda|\tau|\leqslant\tfrac18\mathfrak{v}\alpha,\quad|\tau|\log\Big(1+\frac{\lambda}{\alpha}\Big)\leqslant\frac{c_0\alpha\mathfrak{v}}{\lambda+\mathfrak{v}},$$

où c_0 est une constante assez petite, sont satisfaites.

Pour pouvoir appliquer le Lemme 5.5, il faut encore vérifier que

$$|\Re e\,(s\zeta)| = |\Im m\,A_0(s)| \leqslant \frac{\mathfrak{v}}{40(\lambda+\mathfrak{v})}, \qquad |\tau\Im m\,(s\zeta)| = |\tau\Re e\,A_0(s)| \leqslant \frac{\mathfrak{v}\alpha}{40(\lambda+\mathfrak{v})}\cdot$$

Posons $B_1 := s(s-\alpha)f''_{01}(\sigma_v,1)$, $B_2 := (s/\alpha)\{D(\lambda/\alpha)+\gamma\}-\gamma$, de sorte que $A_0(s) = B_2 - B_1$. En vertu de (5·105) et (11·37), nous pouvons écrire

$$B_1 \ll \mathfrak{u}\alpha f''_{11}(\sigma_v,1) \ll \frac{\mathfrak{X}^{3/2}}{\alpha \mathrm{e}^{3\mathfrak{X}/2}} \ll \frac{\mathfrak{v}}{(\lambda+\mathfrak{v})\sqrt{\mathfrak{X}}}\cdot$$

De plus

$$\Im m\,B_2 \ll \frac{\tau}{\alpha}\big|D(\lambda/\alpha)-D(1)\big| \ll |\tau|\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}} \ll \mathfrak{X}^{5/2}\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}/2} \ll \frac{\mathfrak{v}}{(\lambda+\mathfrak{v})\sqrt{\mathfrak{X}}}\cdot$$

Semblablement, nous avons $\Re e\,B_2 \ll \mathfrak{X}$ de sorte que

$$\tau\Re e\,(B_2) \ll \mathfrak{X}^{3/2}\mathrm{e}^{-3\mathfrak{X}/2} \ll \frac{\mathfrak{v}\alpha}{(\lambda+\mathfrak{v})\sqrt{\mathfrak{X}}}\cdot$$

Ainsi toutes les hypothèses du Lemme 5.5 sont satisfaites. En reportant (5·21) dans (11·59), nous obtenons que l'expression (11·59) vaut

$$2i\pi y\int_{\alpha-i\mathfrak{u}}^{\alpha+i\mathfrak{u}} \frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{s}\,\mathrm{e}^{-\exp A_0(s)}\,\mathrm{d}s$$
$$+\,O\bigg(y\Gamma\Big(\frac{\lambda}{\alpha}\Big)\mathrm{e}^{\alpha v-\mathfrak{v}^2/(5(\lambda+\mathfrak{v}))}\int_{-\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}\bigg|\frac{\mathscr{G}(\alpha+i\tau)}{\mathrm{e}^{(\lambda+i\tau)A_0(s)/s}}\bigg|\,\mathrm{d}\tau\bigg).$$

Un calcul de routine montre que $\Re e\,(\lambda+i\tau)A_0(s)/s = \lambda A_0(\alpha)/\alpha + O(1)$. Compte tenu de la majoration $|\mathscr{G}(\alpha+i\tau)| \ll \mathscr{G}(\alpha)$, il s'ensuit que le dernier terme d'erreur est

$$\ll y\Gamma(\lambda/\alpha)\mathscr{G}(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha v-\mathfrak{v}^2/\{5(\lambda+\mathfrak{v})\}-\lambda A_0(\alpha)/\alpha} \ll \alpha^2 x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)\mathrm{e}^{-\mathfrak{v}^2/\{5(\lambda+\mathfrak{v})\}}$$

où nous avons utilisé (11·48) avec $(s,z)=(\alpha,\beta)$ et donc $w=\lambda$. Comme $\mathfrak{v}^2/\{5(\lambda+\mathfrak{v})\} \gg \mathfrak{X}^2$ par définition de $\mathfrak{v}$, cette majoration est compatible avec le résultat annoncé. Compte tenu de (11·59), cela conclut la démonstration. □

11·5·3. Conclusion

Nous sommes à présent en mesure de compléter la preuve de la Proposition 11.5. Comme (11·35) et (11·36) découlent de (11·34) en vertu de la Proposition 11.8, il reste seulement à établir (11·34).

Posons $\psi_0(s) := \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{A_0(s)}}$ $(\sigma > 0)$. Compte tenu de la Proposition 11.9, nous pouvons nous limiter à estimer

$$\frac{y}{2i\pi}\int_{\alpha-i\mathfrak{u}}^{\alpha+i\mathfrak{u}} \frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{s}\psi_0(s)\,\mathrm{d}s.$$

La première étape consiste à montrer que l'on peut déplacer l'abscisse d'intégration α jusque σ_v au prix d'un terme d'erreur acceptable. D'après le théorème de Cauchy et compte tenu de (11·49), il suffit pour cela d'établir la majoration

$$\ll \int_{\alpha\pm i\mathfrak{u}}^{\sigma_v\pm i\mathfrak{u}} \frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{s}\psi_0(s)\,\mathrm{d}s \ll yF(v)\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)}\mathfrak{R}. \tag{11·60}$$

Or la majoration (11·52) et l'estimation (6·81) impliquent $A_0(s)-A_0(\sigma_v)\ll\lambda\mathfrak{X}^3$ et donc, grâce à (11·53),

$$\psi_0(s)\ll\psi(\sigma_v)\asymp\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)} \tag{11·61}$$

pour tout s du segment d'intégration. Par ailleurs, une altération triviale de la preuve du Lemme 8.5 implique l'existence d'une constante $c>0$ telle que l'on ait, pour les mêmes valeurs de s, $|\mathscr{G}(s)|\leqslant\mathscr{G}(\sigma)\mathrm{e}^{-c\mathfrak{X}^2}\ll\mathscr{G}(\sigma)\mathfrak{R}$. Enfin, sous l'hypothèse $\sigma-\sigma_v\ll\sigma_v\lambda\mathfrak{X}^2$, nous avons

$$\sigma v+g(\sigma)=\sigma_v v+g(\sigma_v)+O\big(g''(\sigma_v)(\sigma-\sigma_v)^2\big)=\sigma_v v+g(\sigma_v)+O\big(\lambda^2\mathfrak{X}^4\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\big)$$

et donc $\mathrm{e}^{\sigma v}\mathscr{G}(\sigma)\ll\mathrm{e}^{\sigma_v v}\mathscr{G}(\sigma_v)$.

Nous obtenons donc bien (11·60).

Nous avons ainsi réduit la preuve de (11·34) à celle de l'estimation

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma_v-i\mathfrak{u}}^{\sigma_v+i\mathfrak{u}} \frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{s}\psi_0(s)\,\mathrm{d}s=\big\{1+O(\mathfrak{R})\big\}F(v)\Xi(\lambda/\alpha,v). \tag{11·62}$$

Comme σ_v est solution de l'équation $g'(\sigma)+v=0$, le membre de droite relève de la méthode du col. Nous avons

$$\psi_0'(s)=-\psi_0(s)\mathrm{e}^{A_0(s)}A_0'(s),\quad \psi_0''(s)=\psi_0(s)\Big\{\Big(\mathrm{e}^{2A_0(s)}-\mathrm{e}^{A_0(s)}\Big)A_0'(s)^2-\mathrm{e}^{A_0(s)}A_0''(s)\Big\},$$
$$A_0'(s)=\frac{D(\lambda/\alpha)-D(1)}{\alpha}-(2s-\alpha)f_{11}''(\sigma_v,1),\qquad A_0''(s)=-2f_{11}''(\sigma_v,1).$$

Grâce à (11·52), il suit, pour $s-\sigma_v\ll\mathfrak{u}$,

$$\psi_0(s)=\psi_0(\sigma_v)\Big\{1+O\big(|s-\sigma_v|\mathrm{e}^{A_0(\sigma_v)}\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}\big)\Big\}=\psi_0(\sigma_v)\Big\{1+O\big(|s-\sigma_v|\lambda\mathfrak{X}^3\mathrm{e}^{2\mathfrak{X}}\big)\Big\}$$

puisque $\mathrm{e}^{A_0(\sigma_v)}\ll\mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)}\ll\lambda/\alpha$. Les inégalités de Cauchy impliquent donc l'existence d'une constante $c>0$ telle que l'on ait

$$\psi_0'''(s)\ll\psi_0(\sigma_v)\lambda^3\mathfrak{X}^9\mathrm{e}^{6\mathfrak{X}}\qquad\big(|s-\sigma_v|\lambda\mathfrak{X}^3\mathrm{e}^{2\mathfrak{X}}\leqslant c\big),$$

d'où, pour $s=\sigma_v+i\tau$, $|\tau|\leqslant\mathfrak{u}$,

$$\psi_0(s)=\psi_0(\sigma_v)+i\tau\psi_0'(\sigma_v)-\tfrac12\tau^2\psi_0''(\sigma_v)+O\Big(\psi_0(\sigma_v)\lambda^3\mathfrak{X}^9\mathrm{e}^{6\mathfrak{X}}\tau^3\Big).$$

En effectuant le développement de Taylor à l'ordre 4 de $sv + g(s)$ en $s = \sigma_v$ et en procédant comme dans la preuve du Théorème 8.6, nous obtenons

$$\int_{\sigma_v - i\mathfrak{u}}^{\sigma_v + i\mathfrak{u}} \frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{2\pi i s}\psi_0(s)\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\sigma_v v}\mathscr{G}(\sigma_v)\psi_0(\sigma_v)}{2\pi\sigma_v}\int_{-\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}} \mathrm{e}^{-\tau^2 g''(\sigma_v)/2}\Big\{1 + \mathfrak{P}(\tau) - \tfrac{1}{2}\tau^2\frac{\psi_0''(\sigma_v)}{\psi_0(\sigma_v)} + O\big(E_2(\tau)\big)\Big\}\,\mathrm{d}\tau$$

avec

$$\mathfrak{P}(\tau) := \frac{\psi_0'(\sigma_v)}{\psi_0(\sigma_v)}i\tau - \frac{i\tau}{\sigma_v} - \tfrac{1}{6}ig'''(\sigma_v)\tau^3,$$
$$E_2(\tau) := \lambda^3\mathfrak{X}^9\mathrm{e}^{6\mathfrak{X}}|\tau|^3 + \frac{\tau^2}{\sigma_v^2} + g'''(\sigma_v)^2\tau^6 + \frac{g''(\sigma_v)\tau^4}{\sigma_v^2}\cdot$$

La contribution de $\mathfrak{P}(\tau)$ est nulle pour des raisons de parité. Une variante immédiate de (11·57) permet de majorer la contribution de $E_2(\tau)$ par

$$\ll \frac{\mathrm{e}^{\sigma_v v}\mathscr{G}(\sigma_v)\psi_0(\sigma_v)}{2\pi\sigma_v\sqrt{g''(\sigma_v)}}E_2\Big(\frac{1}{\sqrt{g''(\sigma_v)}}\Big) \ll \frac{\mathrm{e}^{\sigma_v v}\mathscr{G}(\sigma_v)\psi_0(\sigma_v)\big(1 + \lambda^3\mathrm{e}^{5\mathfrak{X}/2}\mathfrak{X}^6\big)}{2\pi\sigma_v\sqrt{g''(\sigma_v)}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}}\cdot$$

Nous évaluons le terme principal grâce aux formules

$$\int_{-\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}} \mathrm{e}^{-\tau^2 g''(\sigma_v)/2}\tau^{2j}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\sqrt{2\pi}\{1 + O(\mathrm{e}^{-c\mathfrak{X}^2})\}}{g''(\sigma_v)^{j+1/2}} \qquad (j = 0, 1).$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma_v - i\mathfrak{u}}^{\sigma_v + i\mathfrak{u}} \frac{\mathrm{e}^{sv}\mathscr{G}(s)}{s}\psi_0(s)\,\mathrm{d}s = \big\{1 + O(\mathfrak{R}_2)\big\}\frac{\mathrm{e}^{\sigma_v v}\mathscr{G}(\sigma_v)\psi_0(\sigma_v)}{\sigma_v\sqrt{2\pi g''(\sigma_v)}}\Big\{1 - \frac{\psi_0''(\sigma_v)}{2\psi_0(\sigma_v)g''(\sigma_v)}\Big\}$$

avec $\mathfrak{R}_2 := e^{-\mathfrak{X}}\big\{1 + \lambda^3\mathrm{e}^{5\mathfrak{X}/2}\mathfrak{X}^6\big\} \ll \mathfrak{R}$.

Il reste à simplifier l'expression du terme principal. Nous avons

$$\frac{\psi_0''(\sigma_v)}{\psi_0(\sigma_v)} = \Big(\mathrm{e}^{2A_0(\sigma_v)} - \mathrm{e}^{A_0(\sigma_v)}\Big)A_0'(\sigma_v)^2 - \mathrm{e}^{A_0(\sigma_v)}A_0''(\sigma_v).$$

Les quantités $A_0(\sigma_v)$ et $\psi_0(\sigma_v)$ peuvent être estimées par (11·53) et (11·54). De plus, nous pouvons déduire de (5·92) et (6·81) que

$$A_0'(\sigma_v) = \frac{D(\lambda/\alpha) + \gamma - 1 - V/2 + O(\lambda\mathfrak{X}^3)}{\sigma_v}, \quad A_0''(\sigma_v) = -\frac{2 + V}{\sigma_v^2}\big\{1 + O\big(1/\mathfrak{X}^2\big)\big\}$$

de sorte que

$$\frac{\psi_0''(\sigma_v)}{2\psi_0(\sigma_v)g''(\sigma_v)} = \mathscr{R}\big(\lambda/\alpha, v\big) + O\big(\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}\big).$$

Enfin, par (6·81) et (5·92), nous avons $A_0(\sigma_v) = A(\sigma_v) + O(\lambda\mathfrak{X})$, d'où

$$\psi_0(\sigma_v) = \{1 + O(\lambda^2\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{\mathfrak{X}})\}\psi(\sigma_v) = \big\{1 + O\big(\mathfrak{R}\big)\big\}\psi(\sigma_v).$$

Cela achève la démonstration de la Proposition 11.5.

12. Preuves des Théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3

12·1. Preuve du Théorème 3.1

Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{24}$. Rappelons les définitions du domaine $\mathscr{D}_\varepsilon$ et du terme résiduel E^* en (3·10).

Nous nous proposons ici d'établir la formule asymptotique (3·12). Commençons par observer que, lorsque v est borné, nous avons $N(x,y) \asymp x$ d'après la Proposition 10.1, alors que, en vertu de la définition de α et β en (2·3), le second membre de (3·12) est du même ordre de grandeur. Cela suffit à établir (3·12).

Dans le reste de la preuve, nous supposons donc $y \leqslant x/\mathrm{e}^6$.

Si $\mathrm{e}^Z = y^{\sigma_v} \leqslant \sqrt[3]{\log x \log_2 x}$ et $y > \mathrm{e}^{(\log_2 x)^{3+\varepsilon}}$, le couple (x,y) appartient à la zone sous-critique (11·15). La formule (11·16) fournit alors immédiatement l'évaluation souhaitée : en effet, le terme d'erreur E défini en (11·14) est $\ll E^*$ alors que les relations (3·9) et (6·75) impliquent

$$\Phi(\lambda/\alpha) = 1 + O(\alpha/\lambda) = 1 + O(E^*).$$

Si $\mathrm{e}^Z > \sqrt[3]{\log x \log_2 x}$ et $y \leqslant \mathcal{Y}_x^{10}$, nous pouvons appliquer la Proposition 11.5, relative à la zone critique (11·33). En observant que le terme d'erreur $\mathfrak{R}_1$ défini en (11·28) est $\ll E^*$, nous constatons que la formule (11·35) implique encore (3·12).

Nous avons ainsi établi (3·12) lorsque $\mathrm{e}^{(\log_2 x)^{3+\varepsilon}} \leqslant y \leqslant \mathcal{Y}_x^{10}$.

Dans la zone sur-critique $\mathcal{Y}_x^{10} < y \leqslant x/\mathrm{e}^6$, nous disposons de la Proposition 10.1, qui fournit une excellente approximation de $N(x,y)$, mais d'une nature différente. Le résultat suivant permet d'assurer le prolongement des formules asymptotiques issues de la méthode du col. Nous donnons en fait un énoncé plus précis que nécessaire pour notre objectif immédiat : seules les valeurs $y > \mathcal{Y}_x^{10}$ sont à considérer pour compléter la preuve du Théorème 3.1 ; le domaine complémentaire sera exploité ultérieurement.

Rappelons les définitions de $F(t)$ en (1·9) et $\Phi(u)$ en (3·8). Nous posons

$$\mathfrak{B} := \begin{cases} \left\{1 + \dfrac{(1+\Delta^2)(\log v)^2}{\{\log(2+1/\Delta)\}^2}\right\}\sqrt{\dfrac{\log v}{v}} & \text{si } x \geqslant \mathrm{e}^6,\ \mathrm{e}^{2M_x} < y \leqslant x/\mathrm{e}^6, \\ \left\{\mathrm{e}^{-2Z} + \dfrac{1}{(\log_2 x)^4}\right\} Z^2 \sqrt{\dfrac{v}{\log v}} & \text{si } x \geqslant \mathrm{e}^6,\ \mathrm{e}^{\sqrt{\log x \log_2 x}} \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^{2M_x}. \end{cases} \tag{12·1}$$

Proposition 12.1. *Sous la condition $x \geqslant \mathrm{e}^6$, $\mathrm{e}^{\sqrt{\log x \log_2 x}} \leqslant y \leqslant x/\mathrm{e}^6$, nous avons*

$$\frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)\Phi(\lambda/\alpha)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta(\alpha,\beta)}} = yF(v)\,\mathrm{e}^{-\exp\{D(\lambda/\alpha)\}+O(\mathfrak{B})}. \tag{12·2}$$

Admettons provisoirement ce résultat et complétons la preuve du Théorème 3.1.

Comme mentionné plus haut, nous pouvons supposer $\mathcal{Y}_x^{10} < y \leqslant x/\mathrm{e}^6$. Des observations analogues à celles qui ont été effectuées au début de la démonstration de la Proposition 9.1 fournissent alors

$$Z > 5\log_2 x, \quad \log(1/\Delta) \asymp Z = \sigma_v \log y, \quad \Delta \ll \sigma_v/(\log x)^4 \tag{12·3}$$

et donc $\lambda \asymp 1/\log y \ll \sigma_v/\log v$ par (6·74). Ainsi $\mathfrak{B} \ll \sqrt{(\log v)/v}$. Or, par (6·78),

$$e^{D(\lambda/\alpha)} \ll \Delta \ll 1/(\log x)^4. \tag{12·4}$$

En reportant dans (12·2) puis (10·3), nous obtenons encore (3·12). Cela complète la preuve du Théorème 3.1.

Démonstration de la Proposition 12.1. Un examen de la preuve du Lemme 11.7 montre que, pour $\tau = t = 0$, le domaine de validité de la relation (11·48) peut être étendu quitte à remplacer le terme d'erreur relatif $\{1+O(E_1(0))\}$ par $\mathrm{e}^{O(E_1(0))}$. Plus précisément, nous obtenons

$$\frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)}{2\pi\alpha\beta} = \frac{y\mathrm{e}^{\alpha v}\mathscr{G}(\alpha)}{\alpha^2}\Gamma(\lambda/\alpha)\mathrm{e}^{-(\lambda/\alpha)D(\lambda/\alpha)+O\left(\alpha\log v+\lambda\log v+\lambda^2\sqrt{v}(\log v)^{3/2}\right)} \tag{12·5}$$

dès que

$$x \geqslant \mathrm{e}^6, \qquad \mathrm{e}^{\sqrt{\log x\log_2 x}} \leqslant y \leqslant x/\mathrm{e}^6. \tag{12·6}$$

Pour établir (12·2) lorsque $y \geqslant \mathrm{e}^{2M_x}$, nous insérons dans le membre de gauche les relations (12·5), (9·4), l'estimation

$$\alpha v + g(\alpha) = \sigma_v v + g(\sigma_v) + O\big((\sigma_v-\alpha)^2 v^{3/2}\sqrt{\log v}\big)$$

combinée avec (6·81), puis enfin (8·8). Chacun des termes d'erreur ainsi introduits est bien dominé par la première expression de (12·1).

Lorsque $\mathrm{e}^{\sqrt{\log x\log_2 x}} \leqslant y < \mathrm{e}^{2M_x}$, nous avons $\lambda \asymp \mathrm{e}^{-Z}/\mathfrak{X}$ d'après (6·74), et donc $1/\mathfrak{X}^5 \ll \lambda \ll 1/\mathfrak{X}^3$. Comme $\alpha \asymp \mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}/\mathfrak{X}$ d'après (6·14), la relation (5·20) implique $D'(\lambda/\alpha) = \mathrm{e}^{O(\mathfrak{X})}$. En reportant dans (3·8) et compte tenu de l'ordre de grandeur $\Phi(\lambda/\alpha) \asymp 1$, il suit

$$\Gamma(\lambda/\alpha)\mathrm{e}^{-(\lambda/\alpha)D(\lambda/\alpha)} = \mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)+O(\mathfrak{X})}.$$

Par ailleurs, il découle de (5·97) que $\delta \asymp \mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{3\mathfrak{X}}D'(\lambda/\alpha)/\alpha^2$, de sorte que $\delta = \mathrm{e}^{O(\mathfrak{X})}$. Insérons alors ces relations et (12·5) dans le membre de gauche de (12·2) en notant que $\alpha v + g(\alpha) = \sigma_v v + g(\sigma_v) + O\big((\sigma_v-\alpha)^2 v^{3/2}\sqrt{\log v}\big)$. En explicitant le terme d'erreur de (12·5) par (6·74), nous obtenons finalement

$$\frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)}{2\pi\alpha\beta} = \frac{y\mathrm{e}^{\alpha v}\mathscr{G}(\alpha)}{\alpha^2}\Gamma(\lambda/\alpha)\mathrm{e}^{-(\lambda/\alpha)D(\lambda/\alpha)+O(\mathfrak{B}_1)}$$

où l'on a posé $\mathfrak{B}_1 := \big\{\mathrm{e}^{-2Z} + (\alpha/\sigma_v - 1)^2\big\}\sqrt{v/\log v}$.

Enfin, dans le domaine considéré, (6·66) et l'estimation $J_2(\varrho) = 1 + O(\varrho Z)$ impliquent

$$\alpha = \sigma_v\left\{1 + O\Big(\varrho Z + \frac{Z}{(\log_2 x)^2} + \frac{Z^2\mathrm{e}^{-Z}}{\log_2 x}\Big)\right\}.$$

Comme $\mathrm{e}^Z \ll (\log_2 x)^4$ dès que $y < \mathrm{e}^{2M_x}$, nous obtenons bien $\mathfrak{B}_1 \ll \mathfrak{B}$. □

12·2. Preuve du Théorème 3.2

La relation (3·23) découle immédiatement de (11·36) lorsque $\mathrm{e}^{15M_x/8}\sqrt{\mathcal{Y}_x} \leqslant y \leqslant \mathcal{Y}_x^{10}$. Lorsque $y > \mathcal{Y}_x^{10}$, la relation (10·3) implique amplement la conclusion annoncée, compte tenu de (12·3) et (12·4).

La même estimation (10·3) fournit encore (3·24) lorsque $y > \mathcal{Y}_x^{10}$ puisque nous avons alors $\mathrm{e}^{-\Delta} = 1 + O(1/(\log x)^4)$ en vertu de (12·4). Lorsque $y \leqslant \mathcal{Y}_x^{10}$, et donc $v \asymp \log x$, la condition $\mathcal{Y}_x \mathrm{e}^{-3M_x/4} \leqslant y$ implique $Z > \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{3}{2}\log_3 x$ et donc $\Delta \ll \log_2 x$. Par (6·78), il suit

$$\mathrm{e}^{-\exp D(\lambda/\alpha)} = \Big\{1 + O\Big(\frac{\Delta}{(\log_2 x)^2}\Big)\Big\}\mathrm{e}^{-\Delta}.$$

Comme, $\Delta \asymp \mathrm{e}^{-Z}\sqrt{\log x/\log_2 x}$ dans cette zone, le terme d'erreur précédent n'excède pas R_x^-.

12·3. Preuve du Théorème 3.3

Commençons par établir l'assertion (iii), relative au domaine $\log y \ll \sqrt{\log x}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log_2 x}}$.

Si $\mathrm{e}^{\sqrt{\log_2 x}} \leqslant \log y \ll \sqrt{\log x}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\log_2 x}}$, nous avons $\alpha\beta\sqrt{\delta} = (\log x)^{O(1)} = \mathrm{e}^{O((\log_2 y)^2)}$, en vertu de (6·59), (6·60) et (5·97). Par (3·12), (5·84) et (6·62), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\log\big(N(x,y)/y\big) &= \alpha v + \lambda\log y + f(\alpha,\beta) + O((\log_2 y)^2)\\ &= 2\alpha v + \lambda\log y + \frac{\mathfrak{S}(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}^2} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}^3}\Big).\end{aligned}$$

Comme nos hypothèses impliquent, par (6·59) et (6·60),

$$\alpha v \asymp (\log y)/\log_2 y, \qquad \lambda \gg 1/\sqrt{\log_2 y},$$

il vient

$$\log\big(N(x,y)/y\big) = \{1 + O(\varepsilon_x)\}\lambda\log y = \{1 + O(\varepsilon_x)\}H_y\varrho$$

où l'on a utilisé les estimations $H_y = \log y/\{\log_2 y + O(1)\}$ et $\varrho = \log_2 x + O(\log_3 x)$, qui résulte de (3·16).

Lorsque $\log_2 y \leqslant \sqrt{\log_2 x}$, nous utilisons la méthode géométrique exposée au paragraphe III.5.2 de [29], notamment le théorème III.5.3. Notant $\{p_j\}_{j\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers, nous avons, par définition de H_y,

$$N(x,y) = \Big\{1 + O\Big(\frac{(\log y)^2}{\log x\log_2 y}\Big)\Big\}\sum_{h\leqslant H_y}\frac{(\log x)^h}{h!}\sum_{\substack{k\leqslant y\\ \omega(k)=h}}\frac{\mu^2(k)}{\prod_{p|k}\log p} \tag{12·7}$$

En particulier, nous avons trivialement

$$N(x,y) \ll y(\log x)^{H_y} = \mathrm{e}^{H_y\log_2 x + O(H_y\log H_y)},$$

qui implique la majoration contenue dans (3·28).

Pour établir la minoration correspondante, posons $k_y := \prod_{j=1}^{H_y} p_j$, de sorte que

$$N(x,y) \geqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ k(n)=k_y}} 1 = \Big\{1+O\Big(\frac{(\log y)^2}{\log x\log_2 y}\Big)\Big\}\frac{(\log x)^{H_y}}{H_y!\prod_{1\leqslant j\leqslant H_y}\log p_j}$$
$$\geqslant \mathrm{e}^{H_y\log_2 x+O(H_y\log H_y)}.$$

En rassemblant nos estimations, nous obtenons

$$\log\big\{N(x,y)/y\big\} = \Big\{1+O\Big(\frac{\log_2 y}{\log_2 x}\Big)\Big\}H_y\log_2 x = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\Big)\Big\}H_y\log_2 x,$$

d'où (3·28) en vertu de l'estimation de ϱ précédemment citée.

Nous sommes à présent en mesure d'établir l'assertion (i).

Rappelons les définitions des termes résiduels ε_x et η_x en (3·21).

Lorsque $y > x^{3/4}$, nous avons $\mathcal{K} \ll \eta_x$. La relation (3·26) résulte alors de (10·3).

Posons, pour x assez grand, $h_x := (\log_4 x)/\log_3 x$. Nous avons

$$\mathcal{K} = \{1+O(\varepsilon_x)\}\Delta \qquad \big(\mathrm{e}^{(1+2h_x)M_x/4} < y \leqslant x^{3/4}\big). \tag{12·8}$$

En effet, dans le domaine spécifié, $Z \geqslant \frac{1}{2}\log_3 x + \log_4 x$, et donc

$$\varrho \ll 1/\{\sqrt{\log_2 x}\log_3 x\} \tag{12·9}$$

en vertu de (3·17). Ainsi, $\mathcal{K} = v\sigma_v\varrho\{1+O(\varrho Z^2)\}$, ce qui implique bien (12·8).

La relation (3·26) est alors immédiate lorsque $\mathrm{e}^{2M_x} < y \leqslant x^{3/4}$: il suffit d'insérer (12·8) dans (6·78), puis de reporter l'estimation de $\mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)}$ ainsi obtenue dans (12·2).

Lorsque $\mathrm{e}^{(1+2h_x)M_x/4} < y \leqslant \mathrm{e}^{2M_x}$, nous avons

$$1/(\log_2 x)^2 \ll \varrho \ll 1/\{\sqrt{\log_2 x}\log_3 x\}. \tag{12·10}$$

La majoration coïncide avec (12·9), et la minoration découle de (6·26) via (3·17). En particulier, $\lambda/\alpha \asymp \Delta \gg \log_2 x$, et donc

$$\mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)} = \frac{\{1+O(\varepsilon_x)\}\lambda}{\alpha} = \frac{\{1+O(\varepsilon_x)\}\varrho}{\sigma_v\log(v\sigma_v)} = \Delta\{1+O(\varepsilon_x)\} \tag{12·11}$$

où l'on a successivement utilisé le Lemme 5.4, (6·66), l'estimation $J_2(\varrho) = 1+O(\varrho Z)$ conséquence de (5·4), et (6·24).

Notons que sous la condition (12·10), et avec la notation (12·1), nous avons

$$\mathfrak{B} \ll \varrho^2 Z^2 \sqrt{\frac{\log x}{\log_2 x}} \ll \varepsilon_x \Delta.$$

En reportant dans (12·2) compte tenu de (12·11), puis en utilisant (12·8), nous obtenons bien (3·26) sous la condition (12·8).

Il reste à traiter le cas $2 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^{(1+2h_x)M_x/4}$. Nous avons alors $\mathrm{e}^Z \ll \sqrt{\log_2 x}\log_3 x$, et donc $\varrho \gg 1/\{(\log_3 x)\sqrt{\log_2 x}\}$ par (3·17).

Supposons d'abord

$$Z > \mathrm{e}^{-\sqrt{\log_2 x}}. \tag{12·12}$$

Nous avons alors $\log_2 y \asymp \log_2 x$ et $\alpha\beta\sqrt{\delta} = (\log y)^{O(1)}$ en vertu de (6·8), (6·74), (5·97) et (5·45). Ainsi

$$\log\big(N(x,y)/y\big) = \alpha v + \lambda \log y + f(\alpha,\beta) + O(\log_2 y),$$

d'où, par (5·84) puis (6·62),

$$\begin{aligned}\log\big(N(x,y)/y\big) &= \alpha v + \lambda\log y + \frac{\mathfrak{S}(\lambda)}{\alpha\mathfrak{X}}\bigg(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\mathfrak{X}} + J_2(\lambda\mathfrak{X})\bigg) + O\bigg(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}^3}\bigg)\\ &= 2\alpha v + \lambda\log y + \frac{\mathfrak{S}(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}^2} + O\bigg(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\mathfrak{X}}}{\alpha\mathfrak{X}^3}\bigg)\\ &= \big(2\alpha v + \lambda\log y\big)\bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{\log_2 x}\bigg)\bigg\},\end{aligned} \tag{12·13}$$

puisque $2\alpha v + \lambda\log y \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$ et $\mathfrak{X} \asymp \log_2 x$ dans le domaine considéré.

Nous avons encore, par (6·66),

$$\lambda = \bigg\{1 + O\bigg(\frac{\log(2+1/Z)}{\log_2 x}\bigg)\bigg\}\frac{\varrho}{\log(v\sigma_v)}, \quad \alpha = \bigg\{1 + O\bigg(\frac{\log(2+1/Z)}{\log_2 x}\bigg)\bigg\}\sigma_v.$$

Or, d'après (8·8) et (8·2) d'une part, et (6·24), (3·13) et (3·15) d'autre part,

$$v\sigma_v = \bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{\log_2 x}\bigg)\bigg\}\tfrac{1}{2}\log F(v), \quad \frac{\log y}{\log(v\sigma_v)} = \bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{\log_2 x}\bigg)\bigg\}\frac{J_1(\varrho)\log F(v)}{2\sqrt{J_2(\varrho)}}. \tag{12·14}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\log\big\{N(x,y)/y\big\} &= \bigg\{1 + O\bigg(\frac{\log(2+1/Z)}{\log_2 x}\bigg)\bigg\}\bigg(\sqrt{J_2(\varrho)} + \frac{J_1(\varrho)}{2\sqrt{J_2(\varrho)}}\bigg)\log F(v)\\ &= \bigg\{1 + O\bigg(\frac{\log(2+1/Z)}{\log_2 x}\bigg)\bigg\}\Theta\log F(v),\end{aligned} \tag{12·15}$$

où la seconde égalité résulte de (5·18).

Nous avons $\Theta = 1 - \mathcal{K}/(2\sigma_v)$ par (3·18), d'où, par (12·14),

$$\Theta \log F(v) = \log F(v) - \mathcal{K}\{1 + O(1/\log_2 x)\}.$$

Si $Z > 1$, il suit

$$\log\big(N(x,y)/y\big) = \log F(v) - \mathcal{K} + O\bigg(\frac{\log F(v) + \mathcal{K}}{\log_2 x}\bigg).$$

Comme $\log F(v) \asymp v\sigma_v \ll \mathcal{K}\mathrm{e}^Z \ll \varepsilon_x \mathcal{K} \log_2 x$, où la première majoration résulte de (3·20), nous obtenons bien (3·26).

Si $Z \leqslant 1$, nous déduisons de (12·12) et (12·15) que

$$\log\big\{N(x,y)/y\big\} = \log F(v) + O\bigg(\frac{\log F(v)}{\sqrt{\log_2 x}}\bigg) - \bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\bigg)\bigg\}\mathcal{K}.$$

Or, $\mathcal{K} \asymp v\sigma_v \asymp \log F(v)$, d'après la dernière estimation de (3·18) et la première de (12·14). Cela implique bien (3·26).

Lorsque, enfin, $Z \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{\log_2 x}}$, nous déduisons (3·26) de la formule (3·28) établie plus haut. En effet, $\varrho \asymp \log(2 + 1/Z) \ll \log_2 x$ par (3·16), donc

$$H_y \varrho \ll \frac{\log y \log_2 x}{\log_2 y} \ll \sqrt{\log x}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log_2 x}} \ll v\sigma_v \varepsilon_x.$$

Ainsi,

$$N(x,y) = y\,\mathrm{e}^{O(\varepsilon_x v\sigma_v)} = yF(v)\mathrm{e}^{-2v\sigma_v\{1+O(\varepsilon_x)\}}, \tag{12·16}$$

d'après la première estimation de (12·14). De plus, il découle de notre hypothèse sur Z et de (3·16) que $\Theta \ll \varepsilon_x$, d'où $\mathcal{K} = 2v\sigma_v\{1+O(\varepsilon_x)\}$. Cela fournit encore (3·26) en reportant dans (12·16). La démonstration de l'assertion (i) est donc complète.

Prouvons à présent l'assertion (ii).

Lorsque $y > x^{3/4}$, nous avons $\Delta \asymp \mathcal{K} \ll \eta_x$, donc (3·26) implique la formule requise (3·27).

Lorsque $\mathcal{Y}_x^{10} < y \leqslant x^{3/4}$, l'évaluation (3·27) résulte, avec beaucoup de marge, de (12·4) et (10·3).

Lorsque $\mathrm{e}^{15M_x/8}\sqrt{\mathcal{Y}_x} < y \leqslant \mathcal{Y}_x^{10}$, il suffit d'appliquer (11·36) et (6·78).

Lorsque, enfin, $\mathrm{e}^{2M_x} < y \leqslant \mathrm{e}^{15M_x/8}\sqrt{\mathcal{Y}_x}$, nous avons par exemple $\Delta \gg v^{1/8}$. Compte tenu de (12·2) et (6·78), la relation 3·12 sous la forme affaiblie

$$N(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta \mathscr{F}(\alpha,\beta)\Phi(\lambda/\alpha)}{2\pi\alpha\beta\sqrt{\delta(\alpha,\beta)}}\mathrm{e}^{O(\mathfrak{X})},$$

fournit alors (3·27). Cela conclut la preuve de l'assertion (ii) et donc celle du Théorème 3.3.

13. Comportement local de $N(x,y)$

13·1. Zone sur-critique

Nous obtenons le résultat suivant, pour lequel nous rappelons notamment la notation (1·11).

Proposition 13.1. *Soient $\varepsilon > 0$, $C > 0$. Sous les conditions*

$$x \geqslant 16, \quad \mathcal{Y}_x^8 \leqslant y \leqslant x, \quad |t| \leqslant C\mathrm{v}^{3/4}\{\log \mathrm{v}\}^{1/4}, \tag{13·1}$$

nous avons

$$N(x\mathrm{e}^t, y) = N(x,y)\mathrm{e}^{\sigma_v t}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log \mathrm{v} + t^2/\mathrm{v}}{\sqrt{\mathrm{v}\log \mathrm{v}}}\Big)\Big\}, \tag{13·2}$$

$$N(x, y\mathrm{e}^t) = N(x,y)\mathrm{e}^{(1-\sigma_v)t}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log \mathrm{v} + t^2/\mathrm{v}}{\sqrt{\mathrm{v}\log \mathrm{v}}}\Big)\Big\} \qquad \big(|t| \leqslant (1-\varepsilon)\log y\big). \tag{13·3}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que v est assez grand. En effet, dans le cas contraire, le paramètre t est borné et les estimations annoncées résultent de (10·3).

Nous constatons alors que les hypothèses effectuées impliquent que les couples $(\mathrm{e}^t x, y)$ et $(x, \mathrm{e}^t y)$ satisfont aux conditions d'application de la Proposition 10.1 et que le terme d'erreur $\mathfrak{E}(x,y)$ de cet énoncé est $\ll \sqrt{(\log v)/v}$. Les formules asymptotiques (13·2) et (13·3) découlent donc de la Proposition 8.7. □

13·2. Zone sous-critique

Ce paragraphe est consacré à déduire de l'estimation implicite (3·12) une description précise du comportement local de $N(x,y)$ dans la zone sous-critique.

Rappelons la notation (11·14) pour le terme d'erreur E relatif à formule asymptotique implicite pour $N(x,y)$ dans la zone sous-critique.

Proposition 13.2. *Sous la condition* $\mathrm{e}^{(\log_2 x)^{3+\varepsilon}} \leqslant y \leqslant \mathcal{Y}_x^{7/8}$ *nous avons :*

(i) si $y \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log x \log_2 x}}$, $|t| \ll (\log x)\sqrt{\log_2 y}/(\log y)^{3/2}$, *alors*

$$N(\mathrm{e}^t x, y) = \mathrm{e}^{\alpha t} N(x,y)\Big\{1 + O\Big(E + \frac{|t|\log_2 y}{\log x} + \frac{t^2(\log y)^3}{(\log x)^2 \log_2 y}\Big)\Big\}, \tag{13·4}$$

(ii) si $y > \mathrm{e}^{\sqrt{\log x \log_2 x}}$, $|t| \ll (\log x)^{3/4}(\log_2 x)^{1/4}$, *alors*

$$N(\mathrm{e}^t x, y) = \mathrm{e}^{\alpha t} N(x,y)\Big\{1 + O\Big(E + \frac{|t|\log_2 x}{\log x} + \frac{t^2/\log_2 x}{\sqrt{\log x \log_2 x}}\Big)\Big\}, \tag{13·5}$$

(iii) si $y \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log x \log_2 x}}$, $|t| \ll \sqrt{(\log y \log_2 y)/\log_2 x}$, *alors*

$$N(x, \mathrm{e}^t y) = \mathrm{e}^{\beta t} N(x,y)\Big\{1 + O\Big(E + |t|\frac{(\log_2 y)^2 + \log_2 x}{\log y} + \frac{t^2 \log_2 x}{\log y \log_2 y}\Big)\Big\}, \tag{13·6}$$

(iv) si $y > \mathrm{e}^{\sqrt{\log x \log_2 x}}$, $|t| \ll \sqrt{\log x \log_2 x}$, *alors*

$$N(x, \mathrm{e}^t y) = \mathrm{e}^{\beta t} N(x,y)\Big\{1 + O\Big(E + \frac{|t|\log_2 x + t^2/\log_2 x}{\sqrt{\log x \log_2 x}}\Big)\Big\}. \tag{13·7}$$

Démonstration. Avant d'entamer spécifiquement la preuve des points (i) à (iv), commençons par remarquer que, sous les hypothèses effectuées, les couples $(x, y\mathrm{e}^t)$ et $(x\mathrm{e}^t, y)$ considérés satisfont aux conditions de validité (11·15) de la Proposition 11.3.

Par (11·16), nous avons sous les conditions (11·15), et donc *a fortiori* dans les hypothèses présentes,

$$N(x,y) = \{1 + O(E)\}\mathrm{e}^{\varphi(x,y)} \tag{13·8}$$

avec $\varphi(x,y) := \alpha\log x + \beta\log y + f(\alpha,\beta) - \log\alpha - \log\beta - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\delta(\alpha,\beta)$. (Il est à noter que, dans cette expression, α et β sont également fonctions de x et y.) Nous obtiendrons les résultats annoncés en étudiant les variations de φ relativement à chacune des variables.

À cet effet, nous posons $\varphi_1(t) := \varphi(x\mathrm{e}^t, y)$, $\varphi_2(t) := \varphi(x, y\mathrm{e}^t)$.

Les dérivées partielles de la hessienne $\delta = \delta(\sigma,\kappa)$ sont données par les formules suivantes, dans lesquelles, pour la lisibilité, nous omettons l'indication des variables :

$$\delta'_{10} = f'''_{30}f''_{02} + f''_{20}f'''_{12} - 2f''_{11}f'''_{21}, \qquad \delta'_{01} = f'''_{21}f''_{02} + f''_{20}f'''_{03} - 2f''_{11}f'''_{12}.$$

Par (5·102), (5·103) et (5·104), il s'ensuit que

$$\delta'_{10} \ll \Big(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\xi}\Big)f''_{20}f''_{02}, \quad \delta'_{01} \ll \Big(\frac{1}{\xi} + X\Big)f''_{20}f''_{02}.$$

De plus, lorsque $\xi \geqslant \sigma$ (ce qui est réalisé en (α,β) dans la zone sous-critique considérée ici), (5·86), (5·88) et (5·97) impliquent $\delta \asymp f''_{20}f''_{02}$, et donc

$$\delta'_{10}/\delta \ll 1/\sigma, \quad \delta'_{01}/\delta \ll \big(1/\xi + X\big).$$

Posons encore, pour x, y fixés,

$$\begin{aligned} &a_1(t) := \alpha(x\mathrm{e}^t, y), \qquad b_1(t) := \beta(x\mathrm{e}^t, y) \qquad (t \geqslant -v),\\ &a_2(t) := \alpha(x, y\mathrm{e}^t), \qquad b_2(t) := \beta(x, y\mathrm{e}^t) \qquad (-\log(y/2) \leqslant t \leqslant v/2)\\ &\ell_j(t) := a_j(t) + b_j(t) - 1 \qquad (j = 1,2). \end{aligned} \tag{13·9}$$

Notant $a_j := a_j(t)$, $b_j := b_j(t)$ pour simplifier l'écriture, nous avons en particulier

$$\begin{aligned} f'_{10}\big(a_1,b_1\big) + \log x + t = 0, \quad f'_{01}\big(a_1,b_1\big) + \log y = 0,\\ f'_{10}\big(a_2,b_2\big) + \log x = 0, \quad f'_{01}\big(a_2,b_2\big) + \log y + t = 0, \end{aligned}$$

de sorte que, étendant notre convention d'écriture aux dérivées,

$$\begin{aligned} &a'_1 = -\frac{f''_{02}\big(a_1,b_1\big)}{\delta\big(a_1,b_1\big)}, \quad b'_1 = \frac{f''_{11}\big(a_1,b_1\big)}{\delta\big(a_1,b_1\big)} \qquad (t \geqslant -v),\\ &a'_2 = \frac{f''_{11}\big(a_2,b_2\big)}{\delta\big(a_2,b_2\big)}, \quad b'_2 = -\frac{f''_{20}\big(a_2,b_2\big)}{\delta\big(a_2,b_2\big)} \qquad (-\log(y/2) \leqslant t \leqslant v/2). \end{aligned} \tag{13·10}$$

Comme de plus

$$\varphi_1' = a_1 - \frac{a_1'}{a_1} - \frac{b_1'}{b_1} - \frac{\delta_{10}'(a_1,b_1)a_1' + \delta_{01}'(a_1,b_1)b_1'}{\delta(a_1,b_1)},$$
$$\varphi_2' = b_2 - \frac{a_2'}{a_2} - \frac{b_2'}{b_2} - \frac{\delta_{10}'(a_2,b_2)a_2' + \delta_{01}'(a_2,b_2)b_2'}{\delta(a_2,b_2)},$$

nous obtenons $\varphi_1' = a_1 + O\big(|a_1'|/a_1 + |b_1'|/\ell_1 + |b_1'|\mathfrak{X}\big)$, $\varphi_2' = b_2 + O\big(|a_2'|/a_2 + |b_2'|/\ell_2 + |b_2'|\mathfrak{X}\big)$.

Grâce notamment à (5·3) et aux évaluations du Lemme 5.4, les estimations (5·86), (5·88) et (5·90) impliquent respectivement, pour $X > 1$, $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, $\kappa + \sigma > 1$,

$$\begin{aligned} f_{20}''(\sigma,\kappa) &\asymp \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^3 X^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^3 X\{1+\xi X\}} + \frac{1}{\xi^2} \asymp \frac{\mathrm{e}^{X}}{\sigma^2 X} + \frac{\mathrm{e}^{X}}{\sigma^2\{1+\xi X\}} + \frac{1}{\xi^2}, \\ f_{02}''(\sigma,\kappa) &\asymp \mathrm{e}^{-\xi X}\Big\{\frac{1}{\xi\sigma} + \frac{1}{\xi^2}\Big\}, \\ f_{11}''(\sigma,\kappa) &\asymp \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\xi X}\log\Big(1 + \frac{1}{(\xi+\sigma)X}\Big) + \mathrm{e}^{-\xi X}\Big\{\frac{1}{\xi\sigma} + \frac{1}{\xi^2}\Big\}. \end{aligned} \tag{13·11}$$

En particulier, sous la condition supplémentaire $\xi \geqslant \sigma$, nous pouvons écrire

$$f_{02}''(\sigma,\kappa) \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\xi\sigma} \asymp \frac{X\mathrm{e}^{X}}{\xi}, \quad f_{11}''(\sigma,\kappa) \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\xi X}}{\sigma^2}\log\Big(1 + \frac{1}{\xi X}\Big). \tag{13·12}$$

Nous sommes à présent en mesure d'établir les estimations annoncées.

Pour prouver l'assertion (i), nous déduisons de ce qui précède que, si $|t| \leqslant \frac{1}{2}\log x$, nous avons $a_1 \asymp \alpha$, $\ell_1 \asymp \lambda$, $b_1 \asymp \beta$, $\mathrm{e}^{X(a_1,b_1)} \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$ et donc

$$a_1' \ll \frac{\alpha^2\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}}{1+\lambda}, \quad b_1' \ll \alpha\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}},$$

de sorte que $a_1 - \alpha \ll |t|\alpha^2\lambda\mathfrak{X}\mathrm{e}^{-\mathfrak{X}}/(1+\lambda)$, et donc

$$\varphi_1(t) - \varphi_1(0) - t\alpha \ll \frac{|t|\alpha\lambda(\lambda+1)\mathfrak{X} + t^2\alpha^2\lambda^2\mathfrak{X}}{\lambda(1+\lambda)\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}} \ll \frac{|t|\log_2 y}{\log x} + \frac{t^2(\log y)^3}{(\log x)^2\log_2 y}.$$

En reportant dans (13·8), nous obtenons bien (13·4).

Considérons ensuite l'assertion (ii). Nous avons, pour $|t| \ll (\log x)/\log_2 x$,

$$a_1 \asymp \frac{1}{\sqrt{\log x\log_2 x}} \asymp \alpha, \quad \ell_1 \asymp \frac{1}{y^{\sigma_v}\log_2 x} \asymp \lambda, \quad b_1 \asymp \beta, \quad \mathrm{e}^{X(a_2,b_2)} \asymp \sqrt{\frac{\log x}{\log_2 x}} \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}}.$$

Seule l'estimation de $\ell_1 = \ell_1(t)$ est non triviale : comme nos hypothèses impliquent $t\sigma_v/v \ll 1$ et $\log y \ll v$, nous déduisons de (6·74) et (8·19) que $\ell_1 \asymp 1/(y^{\sigma_{v+t\log_2 x}}) \asymp 1/(y^{\sigma_v}\log_2 x)$. Ainsi, $a_1' \ll \alpha^2/\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$, $b_1' \ll \alpha\lambda\mathfrak{X}/\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$, de sorte que $a_1 - \alpha \ll |t|\alpha^2/\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$, et donc

$$\varphi_1(t) - \varphi_1(0) - t\alpha \ll \frac{|t|\alpha\mathfrak{X} + t^2\alpha^2}{\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}} \asymp \frac{|t|\log v}{v} + \frac{t^2}{v\sqrt{v\log v}}.$$

Nous obtenons (13·5) en reportant dans (13·8)

Prouvons (iii). Sous l'hypothèse $|t| \leqslant \frac{1}{2}\log y$, nous pouvons écrire

$$a_2 \asymp \frac{\log y}{\log x \log_2 y} \asymp \alpha,\ \ell_2 \asymp \frac{\log(2+1/Z)}{\log_2 y} \asymp \lambda,$$
$$b_2 \asymp \beta,\ X(a_2,b_2) \asymp \log_2 y \asymp \mathfrak{X},\ \mathrm{e}^{X(a_2,b_2)} \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}},$$

en vertu de (6·8), (6·9), (6·20) et (6·19). Compte tenu de (13·10), (13·11) et (13·12), cela implique $a_2'(t) \ll \alpha/\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$, $b_2'(t) \ll \lambda/\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$, de sorte que $b_2(t) - \beta \ll |t|\lambda/\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$ et

$$\varphi_2(t) - \varphi_2(0) - \beta t \ll \frac{|t|(\mathfrak{X}+\lambda) + t^2\lambda}{\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}} \ll |t|\frac{(\log_2 y)^2 + \log_2 x}{(\log y)} + \frac{t^2 \log_2 x}{(\log y)\log_2 y}.$$

Le report dans (13·8) fournit donc bien (13·6).

Il reste à établir l'assertion (iv). Pour $|t| \ll \sqrt{\log x \log_2 x}$, nous avons

$$a_2 \asymp \frac{1}{\sqrt{\log x \log_2 x}} \asymp \alpha, \quad \ell_2 \asymp \frac{1}{y^{\sigma_v}\log_2 x} \asymp \lambda, \quad b_2 \asymp \beta, \quad \mathrm{e}^{X(a_2,b_2)} \asymp \sqrt{\frac{\log x}{\log_2 x}} \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}},$$

où l'estimation de ℓ_2 est obtenue comme précédemment via (6·74) et (8·19). Il suit $a_2' \ll \alpha\lambda\mathfrak{X}/\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$, $b_2' \ll \lambda/\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$, de sorte que $b_2 - \beta \ll |t|\lambda/\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}$ et donc

$$\varphi_2(t) - \varphi_2(0) - \beta t \ll \frac{|t|\{\lambda\mathfrak{X}^2+1\} + t^2\lambda}{\mathfrak{X}\mathrm{e}^{\mathfrak{X}}} \ll \frac{|t|\log_2 x + t^2/\log_2 x}{\sqrt{\log x \log_2 x}},$$

d'où (13·7) par insertion dans (13·8). □

13·3. Zone critique

Dans un premier temps, nous déduisons de la Proposition 11.5, et plus précisément de la formule (11·36), des formules relatives au comportement local de $N(x,y)$ dans la zone critique.

Rappelons la notation $\mathfrak{R}_1$ en (11·28) et, avec les notations (13·9), posons

$$q_j(t) := \ell_j(t)/a_j(t), \qquad D_j(t) := D(q_j(t)) \qquad (j=1,2).$$

Notons encore

$$T_1 = T_1(x,\Delta) := \frac{\Delta \log x}{(1+\Delta^2)\log_2 x}, \quad T_2 = T_2(x,\Delta) := \frac{\sqrt{\log x \log_2 x}}{1+\Delta}.$$

Proposition 13.3. *Pour x assez grand et $\mathcal{Y}_x^{3/4} \leqslant y \leqslant \mathcal{Y}_x^9$, nous avons*

$$N(x\mathrm{e}^t, y) = \Big\{1 + O\Big(\mathfrak{R}_1 + \frac{(1+\Delta^2)|t|\log_2 x}{\Delta \log x}\Big)\Big\} N(x,y)\mathrm{e}^{\alpha t} \qquad \big(|t| \ll T_1\big), \tag{13·13}$$

$$N(x, y\mathrm{e}^t) = \Big\{1 + O\Big(\mathfrak{R}_1 + \frac{(1+\Delta)|t|}{\sqrt{\log x \log_2 x}}\Big)\Big\} N(x,y)\mathrm{e}^{\beta t} \qquad \big(|t| \ll T_2\big). \tag{13·14}$$

Démonstration. Une vérification facile permet de montrer que, sous nos hypothèses, les couples $(x, y\mathrm{e}^t)$ et $(x\mathrm{e}^t, y)$ considérés sont dans le domaine de validité (11·33) de la formule (11·36).

Prouvons d'abord (13·13). Nous avons, pour $|t| \ll (\log x)/\log_2 x$,

$$a_1 \asymp \frac{1}{\sqrt{\log x \log_2 x}} \asymp \alpha, \quad \frac{\ell_1}{a_1} \asymp \Delta + \frac{1}{\log(2+1/\Delta)} \asymp \frac{\lambda}{\alpha},$$
$$b_1 \asymp \beta, \mathrm{e}^{X(a_2,b_2)} \asymp \sqrt{\frac{\log x}{\log_2 x}} \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}},$$

d'où $a_1' \ll \alpha^3\mathfrak{X}$, $\quad b_1' \ll (\lambda+\alpha)\alpha^2\mathfrak{X}^2$, grâce à (13·10), (13·11) et (13·12).

De plus, $D_1' = D'\big(q_1\big)\big\{b_1'/a_1 - (b_1-1)a_1'/a_1^2\big\}$. Comme $b_1 - 1 \ll \lambda + \alpha$, il s'ensuit que $D_1'(t) \ll \alpha^2(\alpha^2+\lambda^2)\mathfrak{X}^2/\lambda^2$, et donc

$$D_1(t) = D(\lambda/\alpha) + O\Big(\frac{|t|\alpha^2(\alpha+\lambda)^2\mathfrak{X}^2}{\lambda^2}\Big).$$

Pour $|t| \ll \Delta(\log x)/\{(1+\Delta^2)\log_2 x\}$, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{D_1(t)} &= \mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)} + O\Big(\frac{|t|\mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)}\alpha^2(\alpha^2+\lambda^2)\mathfrak{X}^2}{\lambda^2}\Big) = \mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)} + O\Big(\frac{|t|\alpha(\alpha+\lambda)^2\mathfrak{X}^2}{\lambda}\Big)\\ &= \mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)} + O\Big(\frac{(1+\Delta^2)|t|\log_2 x}{\Delta\log x}\Big).\end{aligned}$$

Par (11·36), il suit

$$\begin{aligned}N(\mathrm{e}^t x, y) &= \{1+O(\mathfrak{R}_1)\}yF(v+t)\mathrm{e}^{-\exp D_1(t)}\\ &= \Big\{1 + O\Big(\mathfrak{R}_1 + \frac{(1+\Delta^2)|t|\log_2 x}{\Delta\log x}\Big)\Big\}yF(v)\mathrm{e}^{\sigma_v t - \exp D(\lambda/\alpha)}.\end{aligned}$$

Grâce à (6·81), nous pouvons remplacer $\mathrm{e}^{\sigma_v t}$ par $\mathrm{e}^{\alpha t}$ au prix d'un terme d'erreur qui, compte tenu de (6·74), n'excède pas le précédent.

Cela achève la démonstration de (13·13).

Considérons ensuite (13·14). Comme nos conditions impliquent $\sigma_v \log y \ll \log_2 x$, nous pouvons déduire de (8·19) que

$$\Delta(x, y\mathrm{e}^t) \asymp \Delta \quad (|t| \ll \sqrt{\log x \log_2 x}), \qquad \Delta(x\mathrm{e}^t, y) \asymp \Delta \quad \big(|t| \ll (\log x)/\log_2 x\big),$$

alors que (6·8) et (6·75) impliquent, pour $|t| \ll \sqrt{\log x \log_2 x}$,

$$a_2 \asymp \frac{1}{\sqrt{\log x \log_2 x}} \asymp \alpha, \quad \frac{\ell_2}{a_2} \asymp \Delta + \frac{1}{\log(2+1/\Delta)} \asymp \frac{\lambda}{\alpha},$$
$$b_2 \asymp \beta, \mathrm{e}^{X(a_2,b_2)} \asymp \sqrt{\frac{\log x}{\log_2 x}} \asymp \mathrm{e}^{\mathfrak{X}},$$

d'où $a_2' \ll (\lambda+\alpha)\alpha^2\mathfrak{X}^2$, $b_2' \ll \lambda^2\alpha/(\lambda+\alpha)$. Cette dernière estimation peut être précisée en observant que $\delta - f_{20}''f_{02}'' \ll \{f_{11}''\}^2$ et en faisant appel à (5·105). Nous obtenons

$$b_2' = -\frac{f_{20}''(a_2,b_2)}{\delta(a_2,b_2)} = \frac{-a_2^2}{D'(q_2)}\Big\{1+O\Big(\frac{\lambda^2\mathfrak{X}^2}{\lambda+\alpha}\Big)\Big\}.$$

Compte tenu de la forme du terme principal de (11·36), nous devons établir un contrôle des variations des fonctions $D_j(t)$. Nous avons $D_2' = D'(q_2)\{b_2'/a_2 - (b_2-1)a_2'/a_2^2\}$, de sorte que en écrivant $b_2 - 1 \ll \lambda+\alpha$, nous avons

$$D_2' = -a_2\Big\{1+O\Big(\frac{\lambda^2\mathfrak{X}^2}{\lambda+\alpha}\Big)\Big\} + O\Big((\lambda^2+\alpha^2)\mathfrak{X}^2D'(\lambda/\alpha)\Big). \tag{13·15}$$

Comme, de plus, $a_2 - \alpha \ll |t|(\lambda+\alpha)\alpha^2\mathfrak{X}^2$, nous obtenons, pour $|t| \ll \sqrt{\log x \log_2 x}$,

$$\begin{aligned} D_2 &= D(\lambda/\alpha) - \alpha t + O\Big(|t|\frac{\lambda^2\alpha\mathfrak{X}^2}{\lambda+\alpha} + |t|\frac{\alpha(\lambda^3+\alpha^3)\mathfrak{X}^2}{\lambda^2} + t^2\alpha^2(\lambda+\alpha)\mathfrak{X}^2\Big) \\ &= D(\lambda/\alpha) + O(\alpha|t|), \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{e}^{D_2(t)} = \mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)} + O\big(D(\lambda/\alpha)|t|\alpha\big) = \mathrm{e}^{D(\lambda/\alpha)} + O(\lambda|t|)$.

L'estimation (11·36) implique donc, pour $|t| \ll 1/\{\lambda+\alpha\}$,

$$\begin{aligned} N(x, y\mathrm{e}^t) &= \{1+O(\mathfrak{R}_1)\}yF(v-t)\mathrm{e}^{t-\exp D_2(t)} \\ &= \{1+O(\mathfrak{R}_1+\lambda|t|)\}yF(v)\mathrm{e}^{(1-\sigma_v)t-\exp D(\lambda/\alpha)}. \end{aligned}$$

Comme $1-\sigma_v = \beta + O(\lambda)$ par (6·81), nous obtenons

$$N(x, y\mathrm{e}^t) = \{1+O(\mathfrak{R}_1+\lambda|t|)\}N(x,y)\mathrm{e}^{\beta t-\exp D(\lambda/\alpha)},$$

d'où (13·14) puisque $\lambda \ll (1+\Delta)/\sqrt{\log x \log_2 x}$ en vertu de (6·74). □

Nous établissons ensuite, en exploitant la formule (11·34), un raffinement de (13·14) au voisinage du point

$$y_x := \mathrm{e}^{-f_{01}'(\sigma_{\log x},1)}$$

dont nous verrons plus loin qu'il constitue une bonne approximation du point où l'intégrande de (4·9) est maximal. Quitte à altérer la forme du terme principal, nous visons une estimation valide pour des valeurs de t excédant $\sqrt{\log x \log_2 x}$.

Nous posons

$$\mathfrak{K}(t) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{|t|}|t|}{1+|t|} & \text{si } t<0, \\ t(1+t) & \text{si } t \geqslant 0, \end{cases} \qquad \mathfrak{R}_2(t,v) := \big\{1+\mathrm{e}^{-2\sigma_v t}+\mathrm{e}^{-\sigma_v t}\mathfrak{K}(\sigma_v t)\big\}\frac{(\log_2 x)^{5/2}}{\sqrt{\log x}} \ (t\in\mathbb{R}).$$

Proposition 13.4. *Sous la condition* $\mathcal{Y}_x^{-1/3} \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathcal{Y}_x^7$, *nous avons*

$$N(x, y_x\mathrm{e}^t) = \big\{1 + O\big(\mathfrak{R}_2(t, v_x)\big)\big\} y_x F(v_x)\, \mathrm{e}^{(1-\sigma)t - \exp(-\gamma-\sigma t)} \tag{13·16}$$

où nous avons posé $v_x := \log(x/y_x)$ *et* $\sigma := \sigma_{v_x}$.

Démonstration. Pour toutes les valeurs de t considérées ici, le couple $(x, y_x\mathrm{e}^t)$ appartient au domaine de validité (11·33) de la formule asymptotique (11·34).

D'après (5·78), nous avons $\Delta(x, y_x) \asymp 1$. Un calcul de routine utilisant notamment (8·19) fournit alors

$$\Delta(x, y_x\mathrm{e}^t) \asymp \frac{\sqrt{(\log x)/\log_2 x}}{(y_x\mathrm{e}^t)^{\sigma_{v+t}}} \asymp \mathrm{e}^{-\sigma_v t} \qquad (|t| \ll (\log x)^{3/4}(\log_2 x)^{1/4}),$$

et donc

$$a_2 \asymp \alpha \asymp \frac{1}{\sqrt{\log x \log_2 x}}, \quad \frac{\ell_2}{\alpha} \asymp \mathrm{e}^{-\sigma_v t} + \frac{1}{\log(2 + \mathrm{e}^{\sigma_v t})}, \quad X(a_2, b_2) = \mathfrak{X} + O(1),$$

d'où, par (13·10), (13·11) et (13·12), $a_2' \ll \alpha^3\mathfrak{X}^2(1 + \mathrm{e}^{-\sigma_v t})$, $b_2' \ll \alpha^2\mathrm{e}^{-\sigma_v t} + \alpha^2/\{\log(2 + \mathrm{e}^{\sigma_v t})\}^2$. En substituant ℓ_2 à λ dans la preuve de (13·15) et en prenant en compte les majorations $\ell_2 \ll (1 + \mathrm{e}^{-\sigma_v t})\alpha$ et $\alpha/\ell_2 \ll \log(2 + \mathrm{e}^{\sigma_v t})$, il suit

$$D_2' + a_2 \ll \alpha^2\mathfrak{X}^2(1 + \mathrm{e}^{-\sigma_v t})\{\log(2 + \mathrm{e}^{\sigma_v t})\}^2.$$

De plus, la majoration obtenue pour a_2' implique

$$\int_0^t a_2(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} t\alpha + O\Big(t^2\displaystyle\int_0^1 (1-u)a_2'(tu)\,\mathrm{d}u\Big) = t\alpha + O\Big(\alpha\mathfrak{X}^2\dfrac{\mathrm{e}^{-\sigma_v t}\sigma_v^2 t^2}{1+\sigma_v^2 t^2}\Big) & (t<0),\\ t\alpha + O\Big(t^2\alpha^3\mathfrak{X}^2\Big) & (t>0),\end{cases}$$

alors que

$$\int_0^t (1 + \mathrm{e}^{-\sigma_v u})\{\log(2 + \mathrm{e}^{\sigma_v u})\}\,\mathrm{d}u \asymp \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{e}^{-\sigma_v t}\sigma_v|t|}{1+\sigma_v|t|} & (t<0),\\ t + \sigma_v^2 t^3 & (t>0).\end{cases}$$

Nous obtenons donc, pour les valeurs de t considérées, $D_2(t) + \gamma + \sigma_v t \ll \alpha\mathfrak{X}^2\mathfrak{K}(\sigma_v t)$.

Comme, par hypothèse, $\alpha\mathfrak{X}^2\mathfrak{K}(\sigma_v t) \ll 1$, nous en déduisons

$$\mathrm{e}^{-\exp D_2(t)} = \big\{1 + O\big(\alpha\mathfrak{X}^2\mathrm{e}^{-\sigma_v t}\mathfrak{K}(\sigma_v t)\big)\big\}\mathrm{e}^{-\exp(-\gamma-\sigma_v t)}$$

En reportant dans (11·36), il suit, compte tenu de (8·12),

$$\begin{aligned} N(x, y_x\mathrm{e}^t) &= \Big\{1 + O\Big((1 + \mathrm{e}^{-2\sigma t})\frac{(\log_2 x)^{5/2}}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\} F(v-t)\mathrm{e}^{t - \exp D_1(t)}\\ &= \big\{1 + O\big(\mathfrak{R}_2(t, v_x)\big)\big\} y F(v)\mathrm{e}^{(1-\sigma)t - \exp(-\gamma-\sigma t)}. \end{aligned}$$

Cela complète la preuve de (13·16). □

13·4. Preuve du Théorème 4.1

Version globale pour le domaine $\mathscr{D}_\varepsilon$ de nos estimations relatives au variations locales de $N(x,y)$, le Théorème 4.1 correspond au Théorème 3.1 et pourrait formellement en être déduit, mis à part le complément relatif aux petites valeurs de y. Nous utilisons cependant les Propositions 13.1, 13.2 et 13.3, dont les preuves contiennent certains des calculs nécessaires, et qui nous permettent donc de parvenir plus rapidement au résultat annoncé.

Sous la condition (13·1), nous pouvons appliquer la Proposition 13.1. Dans les hypothèses du Théorème 4.1, nous avons alors $\log y \gg \sqrt{v\log v}$ et les termes d'erreurs de (13·2) et (13·3) sont $\ll \sqrt{(\log \mathrm{v})/\mathrm{v}}$. Par ailleurs, l'estimation $\lambda \asymp 1/\log y \ll 1/\log \mathcal{Y}_x$ résulte de (6·74) alors que (6·81) implique $\sigma_v - \alpha \ll \sigma_v\lambda(\log v)^2 \ll \sigma_v(\log v)^2/\log y \ll 1/v$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\alpha t = \sigma_v t + O(E^*) \qquad (|t| \leqslant v^{1/6}),\\
&\beta t = (1-\sigma_v)t + O\big(\lambda|t| + |(\sigma_v-\alpha)t|\big) = (1-\sigma_v)t + O(E^*) \qquad (|t| \ll v^{1/12}).
\end{aligned}$$

En reportant dans (13·2) et (13·3), nous obtenons bien (4·2) et (4·3).

Dans la zone sous-critique couverte par la Proposition 13.2, un raisonnement dichotomique axé sur les places relatives de $\log y$ et $(\log x)^{1/3}$ permet de montrer que les termes d'erreur de toutes les formules de cet énoncé sont bien $\ll E^*$.

Enfin, dans la zone critique couverte par la Proposition 13.3, nous avons $\Delta \ll v^{1/8}$. Les termes d'erreur de (13·13) et (13·14) sont donc dominés par le second terme de E^*.

Il reste à établir (4·4). La méthode géométrique développée au paragraphe 12.3 fournit facilement le résultat annoncé.

En effet, rappelant que, pour $2 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log x \log_2 x}}$, nous avons $\alpha \asymp H_y/\log x$, et donc

$$(\log x + t)^h = (\log x)^h \mathrm{e}^{\alpha t}\big\{1 + O\big(|t|H_y/\log x\big)\big\} \qquad \big(|h| \leqslant H_y,\ |t| \ll (\log x)/H_y\big),$$

nous obtenons bien (4·4) sous les conditions indiquées en insérant cette estimation dans (12·7).

13·5. Preuve du Corollaire 4.2

La formule (3·24) montre que $N(2x,y) \sim N(x,y)F(v+\log 2)/F(v)$ lorsque v est borné. Par ailleurs, il résulte immédiatement du Théorème 3.5 que $\alpha = o(1)$ si, et seulement si, $v \to \infty$. Cela implique immédiatement (4·5).

Pour établir (4·6), nous observons que $\beta = 1 + o(1)$ équivaut à $\lambda = o(1)$. Le résultat annoncé découle donc de (4·3) et (6·74).

La relation (4·7) découle de (4·3) et des évaluations du Théorème 3.5. En effet, $\beta = b + o(1)$ équivaut à $\lambda = b - 1 + o(1)$ et, en particulier, $\lambda \asymp 1$. Par (6·74), cela implique $(x,y) \in \mathscr{D}^-$. Le Théorème 3.5(i) fournit alors l'estimation de y annoncée.

14. Étude de $K(x)$ et détermination du reste optimal dans la conjecture d'Erdős

14·1. Développement asymptotique : preuve du Théorème 4.3

Soit $x \geqslant 2$. Pour tous $\sigma > 0$, $0 < \kappa < 1$, nous pouvons former la majoration de Rankin

$$K(x) = \int_1^\infty \frac{N(x,y)}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty N(x,\mathrm{e}^u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \leqslant x^\sigma \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\kappa-1)u+f(\sigma,\kappa)}\,\mathrm{d}u. \tag{14·1}$$

Le membre de droite est minimal lorsque $f'_{10}(\sigma,\kappa) + \log x = 0$ et l'intégrande est maximal lorsque $u + f'_{01}(\sigma,\kappa) = 0$. Comme l'intégrale de Perron représentant $K(x)$ est dominée par un petit voisinage du point-selle $r_x > 0$, unique solution de l'équation $f'_{10}(r_x,1) + \log x = 0$, cela suggère que l'intégrale de gauche dans (14·1) est dominée par un voisinage de $Y_x := \mathrm{e}^{-f'_{01}(r_x,1)}$.

D'après (8·3), nous avons, dès que $0 < \sigma < \frac{1}{4}$,

$$g'(\sigma) - f'_{10}(\sigma,1) \asymp \sum_p \frac{p^\sigma \log p}{\{1+p(p^\sigma-1)\}^2} \ll \mathrm{e}^X + \frac{1}{\sigma^2 X^2}\sum_{p>\mathrm{e}^X}\frac{\log p}{p^{2+\sigma}} \ll \frac{1}{\sigma\log(1/\sigma)}$$

où $X := X(\sigma,1) \asymp \log(1/\sigma)$. Comme $g'(\sigma) = -S_{0201}(\sigma) \asymp 1/\{\sigma^2\log(1/\sigma)\}$, nous obtenons $r_x \asymp 1/\sqrt{\log x \log_2 x}$, d'où $-g'(r_x) = \log x + O\big(\sqrt{\log x/\log_2 x}\,\big)$ et finalement

$$r_x = \sigma_{\log x}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x\log_2 x}}\Big)\Big\}, \tag{14·2}$$

en vertu de (8·4) et de l'identité $\mathrm{d}\sigma_v/\mathrm{d}v = -1/g''(\sigma_v)$.

Posons alors

$$s_x := \sigma_{\log x}, \quad y_x := \mathrm{e}^{-f'_{01}(s_x,1)}.$$

Comme, d'après (5·8) et (5·80),

$$-\sigma f'_{01}(\sigma,1) = X + O(1/X^2) \qquad (0 < \sigma < \tfrac{1}{4}), \tag{14·3}$$

nous déduisons de ce qui précède et de (5·92) que $r_x \log Y_x - s_x \log y_x \ll s_x$, ce qui nous conduit à substituer y_x à Y_x dans l'analyse de la première intégrale (14·1). Notons que, d'après (5·78),

$$\log y_x = -f'_{01}(s_x,1) = S_{0101}(s_x,1) \asymp \sqrt{\log x}(\log_2 x)^{3/2} \asymp \log \mathcal{Y}_x. \tag{14·4}$$

À fins de référence ultérieure, nous observons également que (14·3) implique, compte tenu de (6·26), que

$$\Delta(x,y_x) = \frac{s_x\log x}{\mathrm{e}^\gamma y_x^{s_x}} = \mathrm{e}^{-\gamma} + O\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^2}\Big). \tag{14·5}$$

Nous déduirons le Théorème 4.3 du résultat suivant, qui possède un intérêt propre.

Proposition 14.1. *Nous avons*

$$K(x) = \frac{\mathrm{e}^{\gamma} F(\log x)}{s_x y_x^{s_x}} \Big\{ 1 + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{5/2}}{\sqrt{\log x}} \Big) \Big\} \qquad (x \geqslant 3). \tag{14·6}$$

Démonstration. Posons $v_x = \log(x/y_x)$ et notons d'emblée que

$$\sigma_{v_x} - s_x \ll (\log_2 x)/\log x. \tag{14·7}$$

Majorant trivialement la contribution de $u > \log x$ dans la seconde intégrale de (14·1) et effectuant le changement de variable $u = \log y_x + t$ dans l'intégrale restante, nous obtenons

$$K(x) = \int_0^{v_x} N(x, y_x \mathrm{e}^t) \frac{\mathrm{e}^{-t}}{y_x} \, \mathrm{d}t + \int_0^{\log y_x} N(x, y_x \mathrm{e}^{-t}) \frac{\mathrm{e}^t}{y_x} \, \mathrm{d}t + O(1).$$

Notant $h := 2(\log_2 x)/s_x$, nous avons, en vertu de (3·26) et (8·13),

$$\begin{aligned} \int_h^{v_x} N(x, y_x \mathrm{e}^t) \frac{\mathrm{e}^{-t}}{y_x} \, \mathrm{d}t &\ll \int_h^{v_x} F(v_x - t) \, \mathrm{d}t \\ &\ll F(v_x) \int_h^{v_x} \mathrm{e}^{-s_x t/2} \, \mathrm{d}t \ll \frac{F(v_x)}{\mathrm{e}^{s_x h/2} s_x} \ll \frac{F(v_x)}{s_x \log x}. \end{aligned}$$

Observons ensuite que, pour $0 \leqslant t \leqslant \log y_x$, $y = y_x \mathrm{e}^{-t}$, $v = \log(x/y)$, nous avons $y^{\sigma_v} \asymp y_x^{s_x} \mathrm{e}^{-t s_x}$ et donc, d'après (14·5),

$$\Delta(x, y_x \mathrm{e}^{-t}) \asymp \mathrm{e}^{t s_x}.$$

Il suit, compte tenu de (3·26), (3·20) et (8·13), pour une constante convenable $c > 0$,

$$\begin{aligned} \int_h^{\log y_x} N\Big(x, \frac{y_x}{\mathrm{e}^t}\Big) \frac{\mathrm{e}^t}{y_x} \, \mathrm{d}t &\ll F(v_x) \int_h^{\log y_x} \mathrm{e}^{s_x t - c \exp(t s_x)} \, \mathrm{d}t \\ &\ll \frac{F(v_x) \mathrm{e}^{s_x h - c \exp(h s_x)}}{s_x} \ll \frac{F(v_x)}{s_x \log x}. \end{aligned}$$

En rassemblant nos estimations, nous pouvons donc écrire

$$K(x) = \frac{1}{y_x} \int_{-h}^{h} N(x, y_x \mathrm{e}^t) \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t + O\Big(\frac{F(v_x)}{s_x \log x} \Big).$$

D'après (13·16) et (14·7), le terme principal vaut

$$y_x F(v_x) \int_{-h}^{h} \big\{ 1 + O\big(\mathfrak{R}_2(-t, v_x)\big) \big\} \mathrm{e}^{-s_x t - \exp(-\gamma - s_x t)} \, \mathrm{d}t.$$

La contribution à l'intégrale du terme d'erreur est clairement $\ll (\log_2 x)^{5/2}/\{s_x \sqrt{\log x}\}$ alors que celle du terme principal vaut

$$\frac{1}{s_x} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t - \exp(-\gamma - t)} \, \mathrm{d}t + O\Big(\frac{1}{\log x} \Big) = \frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{s_x} \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{\log x} \Big) \Big\}.$$

Nous avons ainsi établi que

$$K(x) = \Big\{ 1 + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{5/2}}{(\log x)^{1/2}} \Big) \Big\} \frac{\mathrm{e}^{\gamma} F(v_x)}{s_x}. \tag{14·8}$$

Cela implique bien (14·6) puisque, d'après (8·12),

$$F(v_x) = \frac{F(\log x)}{y_x^{s_x}} \Big\{ 1 + O\Big(\frac{(\log_2 x)^{5/2}}{\sqrt{\log x}} \Big) \Big\}. \qquad \square$$

Nous sommes à présent en mesure d'établir le Théorème 4.3. Compte tenu de la Proposition 14.1, il suffit de montrer, avec la convention utilisée au paragraphe 6.3.2 concernant les développements asymptotiques, que $s_x y_x^{s_x}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$s_x y_x^{s_x} \approx X \sum_{m\geqslant 0} b_m/X^m$$

avec $X = X(s_x, 1-s_x)$. En effet, la première relation (6·34) et (6·36) impliquent alors (4·10).

Or la technique employée pour établir (6·33) fonctionne sans changement pour $f'_{01}(\sigma,1)$ et fournit $-\sigma f'_{01}(\sigma,1) \approx X_0 \sum_{m\geqslant 0} c_m/X_0^m$ où $X_0 = X(\sigma,1)$. Comme $X_0 \asymp X = X(\sigma, 1-\sigma) \asymp \log(1/\sigma)$ d'après (5·48), et donc $\mathrm{e}^{X_0}X_0 = \{1+O(\sigma\log(1/\sigma))\}\mathrm{e}^X X$ par (5·47), on voit que le développement asymptotique précédent est également valable en remplaçant X_0 par X. De plus, (14·3) implique $c_0 = 1$ et $c_1 = c_2 = 0$.

Cela complète la preuve de (4·10).

Déterminons à présent R_1 et R_2. Compte tenu de (14·3), de l'estimation $\mathrm{e}^X\sigma X = 1 + O(\sigma X)$, et de (6·34) sous la forme $X = \frac{1}{2}V + O(1/V^2)$, nous pouvons écrire

$$K(x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^\gamma F(\log x) V\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{V^2}\Big)\Big\}$$

où $V = V(\log x)$ est la solution de l'équation $V\mathrm{e}^V = 2\log x$.

Parallèlement aux calculs du paragraphe 6.3.2, nous écrivons

$$\begin{aligned}
-f'_{01}(\sigma,1) &\approx \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t(t^\sigma-1)}\\
&= \int_{\mathrm{e}^X/X^2}^{\mathrm{e}^X} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t\log t)/\mathrm{e}^X X} - \int_{\mathrm{e}^X/X^2}^{\mathrm{e}^X} \frac{X\mathrm{e}^X\,\mathrm{d}t}{\{1+t\log t/\mathrm{e}^X X\}t\log t}\\
&\qquad\qquad + \int_{\mathrm{e}^X}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t(t^\sigma-1)} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^X}{X^2}\Big)\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^X\,\mathrm{d}t}{(t+1)\{1+(t\log t)/(X+tX)\}}\\
&\quad - \int_1^{X^2} \frac{\mathrm{e}^X\,\mathrm{d}t}{t(t+1)\{1+(\log t)/X\}\{1+(t\log t)/(X+tX)\}} + \int_{\mathrm{e}^X}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t(t^\sigma-1)} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^X}{X^2}\Big).
\end{aligned}$$

Un calcul direct montre que

$$\int_{\mathrm{e}^X}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t(t^\sigma-1)} = \frac{1}{\sigma}\log\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\sigma X}}\Big) = \frac{X}{\sigma} + O\Big(\frac{1}{\sigma X^3}\Big).$$

Par ailleurs, (5·80) indique que le terme en e^X dans le développement asymptotique de $-f'_{01}(\sigma,1)$ est nul. Il suit

$$-f'_{01}(\sigma,1) = \frac{X}{\sigma} + \frac{c_3}{\sigma X^2} + O\Big(\frac{\log X}{\sigma X^3}\Big)$$

avec

$$c_3 := -\int_0^1 \frac{t\log t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\log t}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\log t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^\infty \frac{\log t}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{K(x)}{\mathrm{e}^{\gamma}F(\log x)} = X\Big\{1 - \frac{c_3}{X^2} + O\Big(\frac{1}{X^3}\Big)\Big\} = \tfrac{1}{2}V - \frac{2c_3}{V} + O\Big(\frac{1}{V^2}\Big).$$

En reportant dans (6·36), nous obtenons bien

$$K(x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma}F(\log x)(\log_2 x)\bigg\{1 - \frac{\log_3 x}{\log_2 x} + \frac{2\log_3 x - \pi^2/3}{(\log_2 x)^2} + O\bigg(\frac{(\log_3 x)^2}{(\log_2 x)^3}\bigg)\bigg\}.$$

14·2. Formule asymptotique pour $K_2(x)/K_1(x)$

Ce paragraphe est dévolu à la preuve du Théorème 4.4.

Comme

$$K_1(x) = xK(x) + O(x), \qquad K_2(x) = xK(x) - \int_0^x K(t)\,\mathrm{d}t,$$

nous déduirons la relation souhaitée d'une évaluation des intégrales de Perron respectives pour $K(x)$ et $\int_0^x K(t)\,\mathrm{d}t$. Nous avons, pour tout $\sigma > 0$,

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma+i\mathbb{R}} \frac{\mathscr{F}(s,1)x^s}{s}\,\mathrm{d}s, \qquad K_2(x) = \frac{x}{2\pi i}\int_{\sigma+i\mathbb{R}} \frac{\mathscr{F}(s,1)x^s}{s+1}\,\mathrm{d}s. \tag{14·9}$$

Selon la méthode du col, le choix optimal de l'abscisse d'intégration est $\sigma = r_x$, unique solution réelle de l'équation $f_{10}'(r_x,1) + \log x = 0$. Par (14·2), nous avons $r_x - \sigma_{\log x} \ll \sigma_{\log x}^2$.

Dans ce qui suit, nous posons $X = X(r_x,1)$. Comme X tend vers l'infini avec x, nous déduisons de (5·86) et (5·3) que

$$f_{20}''(r_x,1) \asymp 1/(r_x^3 X) \asymp (\log x)^{3/2}(\log_2 x)^{1/2}. \tag{14·10}$$

L'évaluation des intégrales (14·9) passe classiquement par une estimation de la décroissance des intégrandes sur une droite verticale. Posant

$$\eta := (\log_2 x)/\sqrt{f_{20}''(r_x,1)} \asymp (\log_2 x/\log x)^{3/4},$$

nous avons, parallèlement à (8·7),

$$|\mathscr{F}(r_x + i\tau,1)| \leqslant \mathscr{F}(r_x,1)\mathrm{e}^{-c(\log_2 x)^2} \qquad \big(\eta \ll |\tau| \leqslant T := \exp\big\{(\log_2 x)^{38/37}\big\}\big). \tag{14·11}$$

Cela résulte de (7·1) et (7·9) lorsque $|\tau| > 1/2X$, et de (7·2) dans le cas contraire. Nous omettons les détails qui sont semblables à ceux de la preuve de (8·7).

Une application de la formule de Perron effective analogue à celle qui a été développée dans la preuve de la Proposition 8.9 implique alors

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r_x-iT}^{r_x+iT} \mathscr{F}(s,1)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s + O\bigg(\frac{x^{r_x}\mathscr{F}(r_x,1)}{T} + \frac{x^{r_x}\log T}{T}\int_{-T}^{T}|\mathscr{F}(r_x+i\tau,1)|\,\mathrm{d}\tau\bigg),$$

d'où nous déduisons grâce à (14·11) que

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r_x-i\eta}^{r_x+i\eta} \mathscr{F}(s,1)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s + O\Big(x^{r_x}\mathscr{F}(r_x,1)\mathrm{e}^{-c(\log_2 x)^2}\Big). \tag{14·12}$$

Par ailleurs, nous déduisons de (7·2) l'existence d'une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\frac{|\mathscr{F}(r_x+i\tau,1)|}{\mathscr{F}(r_x,1)} \leqslant \mathrm{e}^{-c_1\tau^2 f_{20}''(r_x,1)} \qquad (|\tau| \leqslant r_x) \tag{14·13}$$

alors que (5·101) appliquée avec $z = 1$ fournit un prolongement holomorphe de $f(s,1)$ sur un disque de centre r_x et de rayon $\asymp r_x$. Compte tenu de (14·10), nous déduisons donc de (5·102) que l'on a dans ce disque

$$f_{\ell 0}^{(\ell)}(s,1) \ll_\ell (\log x)^{(\ell+1)/2}(\log_2 x)^{(\ell-1)/2} \qquad (\ell \geqslant 1).$$

En estimant à présent l'intégrande dans (14·12) par la formule de Taylor à l'ordre 4, il suit

$$K(x) = \frac{x^{r_x}\mathscr{F}(r_x,1)}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} Y(\tau)\mathrm{e}^{-f_{20}''(r_x,1)\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau + O\big(x^{r_x}\mathscr{F}(r_x,1)\mathrm{e}^{-c(\log_2 x)^2}\big)$$

avec

$$\begin{aligned} Y(\tau) &:= \mathrm{e}^{-if_{30}'''(r_x,1)t^3/6+O(t^4D_4)} \\ &= \frac{1}{r_x}\bigg\{1 - \frac{i\tau}{r_x} - \tfrac{1}{6}f_{30}'''(r_x,1)\tau^3 + O\Big(\frac{\tau^2}{r_x^2} + \tau^6 D_3^2 + D_4\tau^4\Big)\bigg\} \end{aligned}$$

où $D_\ell := (\log x)^{(\ell+1)/2}(\log_2 x)^{(\ell-1)/2}$ $(\ell \geqslant 1)$. La contribution des termes impairs étant nulle par symétrie, il suit

$$K(x) = \frac{x^{r_x}\mathscr{F}(r_x,1)}{2\pi r_x}\bigg\{\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{e}^{-f_{20}''(r_x,1)\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau + O(E)\bigg\}$$

avec

$$E := r_x\mathrm{e}^{-c(\log_2 x)^2} + \frac{1}{r_x^2 D_2^{3/2}} + \frac{D_3^2}{D_2^{7/2}} + \frac{D_4}{D_2^{5/2}} \ll \sqrt{\frac{\log_2 x}{f_{20}''(r_x,1)\log x}}.$$

Nous pouvons alors conclure, comme dans la preuve du Théorème 8.6, que

$$K(x) = \frac{x^{r_x}\mathscr{F}(r_x,1)}{r_x\sqrt{2\pi f_{20}''(r_x,1)}}\bigg\{1 + O\bigg(\sqrt{\frac{\log_2 x}{\log x}}\bigg)\bigg\} \qquad (x \geqslant 3). \tag{14·14}$$

Des calculs identiques fournissent

$$K_2(x) = \frac{x^{1+r_x}\mathscr{F}(r_x,1)}{\sqrt{2\pi f''_{20}(r_x,1)}}\left\{1+O\left(\sqrt{\frac{\log_2 x}{\log x}}\right)\right\} \qquad (x \geqslant 3). \tag{14·15}$$

On note que le facteur $1 + r_x$ attendu au dénominateur du terme principal est englobé par le terme d'erreur.

Compte tenu de l'approximation (14·2), cela complète la preuve du Théorème 4.4.

Bibliographie

[1] R.C. Baker, G. Harman & J. Pintz, The difference between consecutive primes, II, *Proc. London Math. Soc.* (3) **83**, n° 3 (2001), 532–562.

[2] N.G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.* A **54** (1951), 50–60 = *Indag. Math* **13** (1951), 50–60.

[3] N.G. de Bruijn, On the number of integers $\leqslant x$ whose prime factors divide n, *Illinois J. Math.* **6** (1962), 137–141.

[4] N.G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.* A **69** (1966), 239–247 = *Indag. Math.* **28**, 239–247.

[5] N.G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, North Holland (Amsterdam), 3ème éd. ; réimpression : Dover (New York), 1981.

[6] N.G. de Bruijn & J.H. Van Lint, On the number of integers $\leqslant x$ whose prime factors divide n, *Acta Arith.* **8** (1963), 349–356.

[7] N.G. de Bruijn & J.H. Van Lint, On the asymptotic behaviour of some Dirichlet series with a complicated singularity, *Nieuw Arch. Wisk.* (3) **11** (1963), 68–75.

[8] E. Cohen, Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer, *Math. Zeitschr.* **74** (1960), 66–80.

[9] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey & D.E. Knuth, On the Lambert W function, *Adv. Comput. Math.* **5** n° 4 (1996), 329–359.

[10] J.-M. De Koninck & I. Kátai, On the mean value of the index of composition of an integer, *Monatsh. Math.* **145**, n° 2 (2005), 131–144.

[11] P. Erdős & A. Wintner, Additive arithmetical functions and statistical independence, *Amer. J. Math.* **61** (1939), 713–721.

[12] A. Granville & H.M. Stark, *abc* implies no "Siegel zeros" for L-functions of characters with negative discriminant, *Invent. Math.* **139**, n° 3 (2000), 509–523.

[13] G.H. Hardy & S. Ramanujan, Asymptotic formulae for the distribution of integers of various type, *Proc. London Math. Soc. (2)* **16** (1917), 112–132.

[14] D.R. Heath-Brown, The number of primes in short intervals, *J. reine angew. Math* **389** (1988), 22–63.

[15] D.R. Heath-Brown, The Dirichlet divisor problem, in : *Advances in number theory (Kingston, ON, 1991)*, 31-35, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1993.

[16] A.E. Ingham, A Tauberian theorem for partitions, *Ann. of Math.* (2) **42** (1941), 1075–1090.

[17] F. Luca & C. Pomerance, On the radical of a perfect number, *New York J. Math.* **16** (2010), 23–30.

[18] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, The large sieve, *Mathematika* **20** (1973), 119–134.

[19] J. Oesterlé, Nouvelles approches du théorème de Fermat, *Sém. Bourbaki* 1987–88, exposé 694.

[20] J. Pomykała, Primes represented by a system of quadratic forms, *Comment. Math. Prace Mat.* **30**, n° 1 (1990), 125–140.

[21] R.A. Rankin, An Ω-result for the coefficients of cusp forms, *Math. Ann.* **203** (1973), 239–250.

[22] D. Richard, Equivalence of some questions in mathematical logic with conjectures in number theory, in : R. Mollin (ed.), Number theory and applications, Kluwer, 1989, 529–545.

[23] O. Robert, C.L. Stewart & G. Tenenbaum, A refinement of the *abc* conjecture, prépublication.

[24] W. Schwarz, Einige Anwendungen Tauberscher Sätze in der Zahlentheorie, B, *J. reine angew. Math.* **219** (1965), 157–179.

[25] H. Squalli, *Sur la répartition du noyau d'un entier*, Thèse de doctorat de troisième cycle, Université Nancy 1, soutenue le 18 novembre 1985.

[26] D. Suryanarayana, On the core of an integer, *Indian J. Math.* **14**, n° 1 (1972), 65-74.
[27] T. Tao, http://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/the-collatz-conjecture-littlewood-offord-theory-and-powers-of-2-and-3/
[28] G. Tenenbaum, La méthode du col en théorie analytique des nombres, in : Séminaire de Théorie des nombres, Paris 1985-86, *Prog. Math.* **75** (1988), 411–441.
[29] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3ième édition, coll. Échelles, Belin, 2008, 592 pp.
[30] R. Tijdeman, On integers with many small prime factors, *Compositio Math.* **26** (1973), 319-330.
[31] R. Tijdeman, On the maximal distance between integers composed of small primes, *Compositio Math.* **28** (1974), 159–162.
[32] E.T. Whittaker & G.N. Watson, *A course of modern analysis* (4-ième éd.), Cambridge University Press (1986).
[33] K. Wiertelak, On some results connected with Artin conjecture, *Funct. Approx. Comment. Math.* **29** (2001), 159–163.
[34] S. Wigert, Sur quelques formules asymptotiques de la théorie des nombres, *Arkiv för Mat., Astr. och Fysik,* **25** B n° 3 (1935), 6 pp.

Olivier Robert
Université de Lyon & Université de Saint-Étienne
Institut Camille Jordan (UMR 5208 du CNRS)
23, rue du Dr P. Michelon
F-42000 Saint-Étienne
France

olivier.robert@univ-st-etienne.fr

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Faculté des sciences et technologies
Université de Lorraine
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
France

gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr