



HAL
open science

Mesures quadratiques de la proximité des diviseurs

Abdelaziz Raouj, André Stef, G Tenenbaum

► **To cite this version:**

Abdelaziz Raouj, André Stef, G Tenenbaum. Mesures quadratiques de la proximité des diviseurs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2011, 150 (1), pp.73-96. 10.1017/S0305004110000411 . hal-01281305

HAL Id: hal-01281305

<https://hal.science/hal-01281305>

Submitted on 2 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mesures quadratiques de la proximité des diviseurs

A. Raouj, A. Stef & G. Tenenbaum

Sommaire

1	Introduction et énoncé des résultats.....	1
2	Preuve du Théorème 1.1.....	4
3	Preuve du Théorème 1.2.....	5
	3.1 Lemmes.....	5
	3.2 Complétion de l'argument.....	9
4	Preuve du Théorème 1.3.....	14
	4.1 Notations.....	14
	4.2 Propriétés arithmétiques des entiers ayant w facteurs premiers.....	14
	4.3 Préparation.....	19
	4.4 Complétion de l'argument.....	20
5	Preuve du Corollaire 1.6.....	23

1. Introduction et énoncé des résultats

L'aspect fractal de la suite des diviseurs d'un entier normal peut être révélé de diverses manières, comme l'existence d'une dimension de Hausdorff convenablement définie [5]. Cependant, les critères les plus fins sont liés à la conjecture d'Erdős datant de la fin des années 1930, mentionnée dans [3] et établie dans [6], selon laquelle presque tout entier possède deux diviseurs dont le rapport est dans l'intervalle $]1, 2[$. Plusieurs mesures quantitatives associées à cette conjecture ont été considérées dans [4], notamment les fonctions arithmétiques

$$E(n) := \min_{dd'|n, d < d'} \log(d'/d), \quad U(n, \alpha) := \sum_{\substack{dd'|n, (d, d')=1 \\ |\log(d'/d)| \leq (\log n)^\alpha}} 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

D'intéressantes variantes de ces fonctions sont étudiées dans [10] et [15].

Comme dans [4], définissons deux nouvelles fonctions arithmétiques $n \mapsto e(n)$ et $n \mapsto u(n, \alpha)$ par les relations

$$\begin{aligned} E(n) &=:(\log n)^{1-\log 3} \exp \{e(n)\sqrt{\log_2 n}\}, \\ U(n, \alpha) &=:(\log n)^{\log 3-1+\alpha} \exp \{u(n, \alpha)\sqrt{\log_2 n}\}, \end{aligned} \quad (n \geq 3).$$

Ici et dans la suite, nous désignons par \log_k la k -ième itérée de la fonction logarithme. Il a été établi dans [4] que l'on a

$$e(n) \ll \sqrt{\log_3 n}, \quad u(n, \alpha) \ll \sqrt{\log_3 n} \quad \text{pp},$$

où la mention pp indique que la relation ainsi désignée est valable sur un ensemble d'entiers de densité naturelle unité. Une hypothèse heuristique d'équirépartition des quantités $\log(d'/d)$ lorsque $dd'|n$ conduit à supposer que l'on a, en un sens à préciser,

$$E(n) \approx \frac{\log n}{3^{\omega(n)}}, \quad U(n, \alpha) \approx 3^{\omega(n)}(\log n)^{\alpha-1} \quad \text{pp},$$

où $\omega(n)$ désigne le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier n . Il est en particulier conjecturé dans [4], chap. 5, p. 98, que les fonctions $e(n)$ et $u(n, \alpha)$ possèdent des lois de répartition limites. L'un des objectifs du présent travail consiste à établir cette conjecture.

Nous notons Φ la fonction de Gauss

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Théorème 1.1. *Les fonctions arithmétiques $n \mapsto e(n)$ et $n \mapsto u(n, \alpha)$ ($\alpha > 1 - \log 3$) possèdent des lois de répartition limites dont la fonction de répartition commune F est définie par $F(y) := \Phi(y/\log 3)$. Plus précisément, pour tout $\alpha > 1 - \log 3$ fixé et uniformément sous les conditions $x > 16$, $y \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$(1.1) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ e(n) \leq y}} 1 = xF(y) + O\left(\frac{x(\log_3 x)^2}{\sqrt{\log_2 x}}\right), \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ u(n, \alpha) \leq y}} 1 = xF(y) + O\left(\frac{x(\log_3 x)^2}{\sqrt{\log_2 x}}\right).$$

De plus, la loi de répartition de la fonction $n \mapsto u(n, 1 - \log 3)$ est donnée par

$$F^*(y) := \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \Phi(y/\log 3) & \text{si } y \geq 0, \end{cases}$$

et, lorsque $\alpha = 1 - \log 3$, la seconde relation (1.1) a lieu uniformément pour $x > 16$, $y \geq 0$, quitte à remplacer F par F^* .

Remarque. Lorsque $\alpha < 1 - \log 3$, on a $U(n, \alpha) = 1$ pp ; la question de la répartition de $u(n, \alpha)$ est donc sans objet.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \geq 0$, nous posons

$$(1.2) \quad \nabla(n, t) = \nabla^-(n, t) := \sum_{\substack{dd' | n, (d, d') = 1 \\ |\log(d'/d)| \leq t}} 1, \quad \nabla^+(n, t) := 1 + \sum_{\substack{dd' | n \\ 0 < |\log(d'/d)| \leq t}} 1,$$

de sorte que

$$(1.3) \quad E(n) = \min\{t \geq 0 : \nabla^\pm(n, t) > 1\}, \quad U(n, \alpha) = \nabla(n, (\log n)^\alpha) \quad (n \geq 1).$$

Notre approche consiste à évaluer $\nabla^\pm(n, t)$ sur les ensembles

$$\mathcal{E}_w(x) := \{n \leq x : \omega(n) = w\}$$

lorsque le paramètre entier w est voisin de l'ordre normal $\log_2 x$.

Nous posons

$$\pi_w(x) := |\mathcal{E}_w(x)| \quad (x \geq 1).$$

Sauf mention contraire, dans toute la suite de ce travail, les constantes impliquées par les symboles \ll de Vinogradov et O de Landau sont absolues et la lettre c , avec ou sans indice, désigne une constante absolue strictement positive.

Théorème 1.2. *Pour une constante convenable $c > 0$ et sous les conditions*

$$x > 16, \quad t \geq 0, \quad w \in \mathbb{N}, \quad |w/\log_2 x - 1| \leq c, \quad \frac{6}{5} \log_3 x \leq \xi \leq \frac{1}{110} \log_2 x,$$

l'inégalité

$$(1.4) \quad \nabla^+(n, t) \leq 1 + \frac{t3^w w e^{3\xi}}{\log x}$$

a lieu pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll \pi_w(x)e^{-\xi/244}$ exceptions.

Théorème 1.3. Soit $B > 0$. Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que, sous les conditions

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x > 16, \quad 0 \leq t \leq \log x, \quad (\log_2 x)^{10} \leq \psi \leq (\log x)^B, \\ w \in \mathbb{N}, \quad |w - \log_2 x| \leq (\log \psi)^{1/4} (\log_2 x)^{1/2}, \end{aligned}$$

l'inégalité

$$\nabla^-(n, t) \geq \frac{3^w t}{\psi \log x}$$

ait lieu pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll e^{-c_1 \sqrt{\log \psi}} \pi_w(x)$ exceptions.

Désignons par $\Omega(n)$ le nombre des facteurs premiers d'un entier n , comptés avec multiplicité, et posons

$$(1.6) \quad Q(y) := y \log y - y + 1 \quad (y > 0).$$

Une version quantitative classique de l'inégalité de Hardy–Ramanujan — voir par exemple [16], formule (3.52) p. 438 — stipule que, pour tous $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $x > 3$, on a

$$(1.7) \quad (1 - \varepsilon) \log_2 x \leq \omega(n) \leq \Omega(n) \leq (1 + \varepsilon) \log_2 x$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll \varepsilon^{-2} x (\log x)^{-Q(1+\varepsilon)}$ exceptions. Cela nous permet de déduire des Théorèmes 1.2 (avec $\xi := \frac{4}{3} \log_3 x$) et 1.3 (avec $\psi := (\log_2 x)^{10}$) le corollaire suivant, établi grâce aux formules (1.3).

Corollaire 1.4. (i) Pour chaque $\alpha \in]-\infty, 1]$ fixé et tout $x > 16$, les inégalités

$$(1.8) \quad E(n) \geq \frac{\log n}{3^{\omega(n)} (\log_2 n)^5}, \quad U(n, \alpha) \leq 1 + 3^{\omega(n)} (\log_2 n)^5 (\log n)^{\alpha-1}$$

ont lieu pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll x (\log_2 x)^{-1/183}$ exceptions.

(ii) Il existe une constante $b_1 > 0$ telles que, pour chaque $\alpha \in]-\infty, 1]$ fixé et tout $x > 16$, les inégalités

$$(1.9) \quad E(n) \leq \frac{2 \log n}{3^{\omega(n)}} (\log_2 n)^{10}, \quad U(n, \alpha) \geq \frac{3^{\omega(n)} (\log n)^{\alpha-1}}{2 (\log_2 n)^{10}},$$

aient lieu pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll x e^{-b_1 \sqrt{\log_3 x}}$ exceptions.

Nous pouvons également exploiter les renseignements acquis sur la taille des ensembles exceptionnels pour obtenir une évaluation uniforme, valable pp, de la fonction $t \mapsto \nabla(n, t)$.

Corollaire 1.5. Il existe une constante absolue $A > 0$ telle que

$$(1.10) \quad \frac{3^{\omega(n)} t}{\log n} e^{-A(\log_3 n)^2} \leq \nabla^\pm(n, t) \leq 1 + \frac{t 3^{\omega(n)} (\log_2 n)^{736}}{\log n} \quad (0 \leq t \leq \log n) \quad \text{pp.}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les Théorèmes 1.2 et 1.3 avec

$$\xi := 245 \log_3 x, \quad \psi := e^{2(\log_3 x)^2 / c_1^2},$$

aux points tests $t_j := e^j$ ($-\log_2 x - 1 \leq j \leq 1 + \log_2 x$). Le résultat annoncé découle alors de la croissance en t de $\nabla(n, t)$. \square

Ce résultat permet à son tour l'estimation de fonctions arithmétiques générales du type

$$\vartheta(n; f) := \sum_{\substack{dd'|n \\ d < d'}} f(\log(d'/d)).$$

Nous dirons qu'une fonction $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ est à croissance polynomiale s'il existe une constante $K(f) > 0$ telle que

$$f(a)/b^{K(f)} \leq f(ab) \leq f(a)b^{K(f)} \quad (a > 0, b \geq 1).$$

Corollaire 1.6. *Soit $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ une fonction à croissance polynomiale. Nous avons*

$$(1.11) \quad \vartheta(n; f) = \frac{3^{\omega(n)}}{\log n} e^{O((\log_3 n)^2)} \int_{(\log n)/3^{\omega(n)}}^{\log n} f(t) dt \quad \text{pp.}$$

Le cas $f(t) := 1/t^\alpha$ ($\alpha > 0$) de (1.11) est particulièrement intéressant. Nous obtenons

$$(1.12) \quad \sum_{\substack{dd'|n \\ d < d'}} \frac{1}{\{\log(d'/d)\}^\alpha} = \frac{3^{\omega(n)} + 3^{\alpha\omega(n)}}{(\log n)^\alpha} e^{O((\log_3 n)^2)} \quad \text{pp,}$$

ce qui indique notamment que la sommation est essentiellement dominée par son plus grand terme si, et seulement si, $\alpha \geq 1$.

2. Preuve du Théorème 1.1

Le Théorème 1.1 découle du Corollaire 1.4 — mais on pourrait également utiliser une variante effective, établie de la même manière, du Corollaire 1.5 — par le biais du théorème classique d'Erdős-Kac, dont nous rappelons ci-dessous un énoncé avec terme d'erreur optimal.⁽¹⁾

Lemme 2.1 (Erdős-Kac). *Nous avons, uniformément pour $x \geq 3$ et $y \in \mathbb{R}$,*

$$(2.1) \quad \left| \left\{ n \leq x : \frac{\omega(n) - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} \leq y \right\} \right| = x\Phi(y) + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log_2 x}}\right).$$

Cela permet de prouver très simplement le Théorème 1.1. Nous nous contentons de fournir les détails dans le cas de la fonction $e(n)$, les calculs étant essentiellement identiques pour $u(n, \alpha)$.

Il résulte des Théorèmes 1.2 et 1.3 que l'on a, pour une constante A convenable,

$$(2.2) \quad \frac{\log n}{3^{\omega(n)}(\log_2 n)^A} \leq E(n) \leq \frac{\log n}{3^{\omega(n)}} e^{A(\log_3 n)^2}$$

pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus $\ll x/\log_2 x$ exceptions. En reportant dans la définition, nous obtenons, pour ces mêmes entiers,

$$e(n) = \frac{(\log 3)\{\log_2 n - \omega(n)\}}{\sqrt{\log_2 n}} + O\left(\frac{(\log_3 n)^2}{\sqrt{\log_2 n}}\right).$$

Au vu de (2.1), cela implique immédiatement le résultat annoncé.

1. Voir, par exemple, [16] p. 474

3. Preuve du Théorème 1.2

3.1. Lemmes

Le résultat suivant, établi dans [14], fournit une borne supérieure, génériquement exacte à une constante multiplicative près, pour la valeur moyenne sur $\mathcal{E}_w(x)$ d'une fonction multiplicative positive ou nulle vérifiant une condition de croissance peu restrictive.

Ici et dans toute la suite, la lettre p désigne exclusivement un nombre premier.

Lemme 3.1. *Soient A et B deux nombres réels > 0 et f une fonction arithmétique multiplicative à valeurs dans $[0, +\infty[$ telle que*

$$\sum_{p^\nu \leq x} f(p^\nu) \log p^\nu \leq Ax \quad (x \geq 2), \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \leq B.$$

Pour $w \geq 1$, $x \geq 2$, nous avons

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n) \ll \frac{Ax}{(w-1)! \log x} \left(\sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p} + B \right)^{w-1},$$

où la constante implicite est absolue. En particulier, pour toute constante $R > 0$, et uniformément sous la condition $1 \leq w \leq R \log_2 x$, nous avons

$$(3.1) \quad \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n) \ll \pi_w(x) \exp \left\{ \varrho \sum_{p \leq x} \frac{f(p) - 1}{p} \right\}$$

où l'on a posé $\varrho := (w-1)/\log_2 x$ et où la constante implicite dépend au plus de A, B, R .

Nous ferons un usage essentiel du résultat suivant, relatif au nombre des entiers n sans petit facteur premier et pour lesquels $\omega(n)$ est fixé. Nous notons $P^-(n)$ le plus petit facteur premier d'un entier naturel n avec la convention $P^-(1) = \infty$. Pour $x \geq y > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$\pi_k(x, y) = |\{n \leq x : \omega(n) = k, P^-(n) > y\}|.$$

Lemme 3.2. *Soit $R > 0$. Il existe $u_0 = u_0(R) > 0$ tel que l'on ait uniformément pour $u := (\log x)/\log y \geq u_0(R)$, $1 \leq k \leq R \log u$,*

$$(3.2) \quad \pi_k(x, y) \asymp \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Démonstration. L'estimation indiquée est une conséquence très affaiblie de formules asymptotiques dues à Balazard [2] (lemme 5) et Alladi [1] (théorème 7). Alladi montre que l'on a uniformément pour $\exp\{(\log_2 x)^3\} \leq y \leq \sqrt{x}$ et $1 \leq k \leq R \log u$,

$$(3.3) \quad \pi_k(x, y) = \frac{e^{-\gamma\xi}}{\Gamma(1+\xi)} \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ 1 + O_R \left(\frac{1}{\sqrt{\log u}} \right) \right\}$$

avec $\xi := k/(\log u - \gamma)$.⁽²⁾ Balazard, en employant d'ailleurs de manière essentielle d'autres formules établies par Alladi dans [1], montre que

$$(3.4) \quad \pi_k(x, y) = g(\varrho, y) \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ 1 + O_R \left(\frac{1}{\log_2 x} \right) \right\}$$

2. Ici, nous désignons par Γ la fonction Gamma d'Euler et par γ la constante d'Euler.

uniformément pour $\frac{3}{2} \leq y \leq \exp\{(\log x)^{2/5}\}$, $1 \leq k \leq R \log u$, avec $\varrho := (k-1)/\log u$ et

$$g(\varrho, y) := \frac{(\log y)^\varrho}{\Gamma(\varrho+1)} \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\varrho \prod_{p > y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\varrho \left(1 + \frac{\varrho}{p-1}\right).$$

La relation (3.2) résulte immédiatement de (3.3) et (3.4). Nous omettons les détails de la vérification. \square

Lemme 3.3. *Sous les conditions $k \in \mathbb{N}^*$, $x \geq y > \exp\{(\log k)^2\}$, $u := (\log x)/\log y$, nous avons uniformément*

$$(3.5) \quad \pi_k(x, y) \ll \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1} \sqrt{k}}{(k-1)!}.$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas $k \leq 2 \log u$. Nous avons alors

$$(3.6) \quad \pi_k(x, y) \ll \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Cela résulte du Lemme 3.2 si $u > u_0(2)$. Si $u \leq u_0(2)$, alors k est également borné et (3.6) résulte par exemple du crible de Brun.

Plaçons-nous donc dans le cas $k > 2 \log u$. Pour tout $z \geq 1$, nous pouvons écrire, notant μ la fonction de Möbius,

$$\begin{aligned} \pi_k(x, y) &\leq z^{-k} \sum_{\substack{mn \leq x \\ P^-(mn) > y}} \mu(m)^2 (z-1)^{\omega(m)} \\ &\ll \frac{x}{z^k \log y} \prod_{y < p \leq x} \left(1 + \frac{z-1}{p}\right) + \frac{1}{z^k} \sum_{\substack{x/y < m \leq x \\ P^-(m) > y}} \mu(m)^2 (z-1)^{\omega(m)} \\ &\ll \frac{x(1+z/u)}{z^k \log y} \prod_{y < p \leq x} \left(1 + \frac{z-1}{p}\right) \\ &\ll \frac{x(1+z/u)}{z^k \log y} \exp\left\{(z-1) \log u + O\left(ze^{-\sqrt{\log y}}\right)\right\}, \end{aligned}$$

où l'avant-dernière majoration a été obtenue par application du th. 01 de [4]. Cela implique immédiatement le résultat si $k = 1$, en choisissant par exemple $z = 1$. Si $k \geq 2$, nous choisissons $z := k/\log u > 2$ en tenant compte du fait que $u \geq k$. Nous obtenons

$$\pi_k(x, y) \ll \frac{x\{(\log u)/k\}^k e^{k-\log u}}{\log y} \asymp \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^k \sqrt{k}}{k!} \ll \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1} \sqrt{k}}{(k-1)!}.$$

\square

Les deux lemmes suivants concernent la répartition des facteurs premiers des entiers de $\mathcal{E}_w(x)$. Nous désignons par $\{p_k(n) : 1 \leq k \leq \omega(n)\}$ la suite croissante des facteurs premiers distincts d'un entier générique n et posons

$$\omega(n, t) := \sum_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p \leq t}} 1, \quad \Omega(n, t) := \sum_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p \leq t}} \nu \quad (n \in \mathbb{N}^*, t > 0).$$

Lemme 3.4. Soit $R > 1$. Sous les conditions

$$\begin{aligned} x > 16, \quad 3 \leq \xi \leq x, \quad w \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{R} \log_2 x \leq w \leq R \log_2 x, \\ \varrho := (w-1)/\log_2 x, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad \beta := \varrho Q(1/\alpha), \end{aligned}$$

les inégalités

$$(3.7) \quad \max_{\xi < t \leq x} \{\omega(n, t) - \alpha \varrho \log_2 t\} \leq 0,$$

$$(3.8) \quad \min_{\xi < t \leq x} \left\{ \omega(n, t) - \frac{\varrho}{\alpha} \log_2 t \right\} \geq 0,$$

ont lieu pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll_R \beta^{-1} (\log \xi)^{-\beta} \pi_w(x)$ exceptions.

Si nous supposons de plus $\alpha \leq \alpha_0 < 2$, les mêmes estimations sont valables pour $\Omega(n, t)$ à la place de $\omega(n, t)$.

Démonstration. Contentons-nous de considérer (3.7), le cas de (3.8) et de la fonction $\Omega(n, t)$ relevant de manipulations identiques. Pour $j \in \mathcal{J} := [\log_2 \xi - 1, \log_2 x + 1] \cap \mathbb{N}$, posons $t_j := \exp \exp j$. Notant E l'ensemble des entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ tels que

$$\max_{j \in \mathcal{J}} \{\omega(n, t_j) - \alpha \varrho (j-1)\} > 0,$$

nous avons, pour tout y , $1 \leq y \leq 2$,

$$|E| \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} y^{\omega(n, t_j) - \alpha \varrho (j-1)} \ll_R y^{\alpha \varrho \pi_w(x)} \sum_{j \in \mathcal{J}} y^{-\alpha \varrho j} e^{\varrho (y-1)j},$$

où la dernière majoration résulte du Lemme 3.1. En choisissant $y := \alpha \in]1, 2]$, nous obtenons

$$|E| \ll \beta_1^{-1} (\log \xi)^{-\beta_1} \pi_w(x),$$

avec $\beta_1 := \varrho Q(\alpha) > \beta$.

Considérons à présent un entier $n \in \mathcal{E}_w(x) \setminus E$. Pour tout t de $]\xi, x]$, il existe un unique indice $j \in \mathcal{J}$ tel que $t_j < t \leq t_{j+1}$. Nous avons alors

$$\omega(n, t) \leq \omega(n, t_{j+1}) \leq \alpha \varrho \log_2 t_j \leq \alpha \varrho \log_2 t,$$

donc n satisfait (3.7). □

Lemme 3.5. Soit $R > 1$. Sous les conditions

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x > 16, \quad 3 \leq \xi \leq \log_2 x, \quad w \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{R} \log_2 x \leq w \leq R \log_2 x, \\ \varrho := (w-1)/\log_2 x, \quad 1 < \alpha \leq \frac{3}{2}, \quad \beta := Q(\alpha), \end{aligned}$$

les inégalités

$$(3.10) \quad \max_{1 \leq k \leq w} \left\{ \varrho \log \left(\frac{\log x}{\log p_k(n)} \right) - \alpha(w-k) \right\} \leq \xi,$$

$$(3.11) \quad \min_{1 \leq k \leq w} \left\{ \varrho \log \left(\frac{\log x}{\log p_k(n)} \right) - \frac{w-k}{\alpha} \right\} \geq -\xi$$

ont lieu pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll_R \beta^{-1} e^{-\beta \xi} \pi_w(x)$ exceptions.

Démonstration. Commençons par évaluer le nombre des exceptions à (3.10). Le résultat annoncé étant trivialement vérifié si $\xi \leq 2R$, nous pouvons supposer dans la suite $\xi > 2R$. L'expression entre accolades dans (3.10) vaut

$$(1 - \alpha)w - 1 + \alpha k - \varrho \log_2 p_k(n).$$

Elle est donc au plus égale à ξ lorsque $\alpha k \leq (\alpha - 1)w + \frac{3}{4}\xi \leq (\alpha - 1)w + \xi + \varrho \log_2 2$. Dans le cas contraire, elle est évidemment majorée par $y_k - \varrho \log_2 p_k(n)$, avec

$$y_k := k - \frac{3}{4}(\alpha - 1)(w - k) \geq \frac{(\alpha - 1)w}{4\alpha} + \frac{3(3\alpha + 1)\xi}{16\alpha} > \frac{2}{3}\xi.$$

De plus, pour tout n de $\mathcal{E}_w(x)$, l'inégalité

$$(3.12) \quad y_k - \varrho \log_2 p_k(n) \geq \frac{2}{3}\xi$$

équivaut à $\omega(n) - \omega(n, z_k) \leq w - k$ où l'on a posé $z_k := \exp \exp\{(y_k - \frac{2}{3}\xi)/\varrho\}$.

Désignons par W_k le nombre des entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ vérifiant (3.12), de sorte que $\sum_{1 \leq k \leq w} W_k$ représente une majoration du nombre des exceptions à (3.10). Pour tout $v \in]0, 1]$, nous avons

$$\begin{aligned} W_k &\leq \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} v^{\omega(n) - \omega(n, z_k) + k - w} \ll \pi_w(x) \exp\{(k - w) \log v + \varrho(v - 1)(\log_2 x - \log_2 z_k)\} \\ &\ll \pi_w(x) \exp\left\{- (w - k) \log v + (v - 1)\left(\frac{1}{4}(3\alpha + 1)(w - k) + \frac{2}{3}\xi\right)\right\}, \end{aligned}$$

en vertu du Lemme 3.1. Choisisant $v := 4/\{3\alpha + 1\}$, nous obtenons

$$W_k \ll \pi_w(x) e^{-Q(v)(w-k)/v - \frac{2}{3}(1-v)\xi}.$$

On déduit le résultat annoncé de cette estimation par sommation sur $k \leq w$ en observant que $\frac{2}{3}(1 - v) = 2(\alpha - 1)/(3\alpha + 1) > Q(\alpha)$ pour $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$.

Des manipulations similaires permettent d'estimer le nombre des entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ contrevenant à (3.11). L'étape liminaire consiste à se ramener, trivialement, au cas $k \leq w - \alpha\xi$. Il suffit ensuite d'observer que tout entier n contrevenant à (3.11) vérifie

$$\omega(n) - \omega(n, x_k) \geq w - k$$

avec $x_k := \exp \exp\{(w - (w - k)/\alpha + \xi - 1)/\varrho\}$. On peut donc majorer le nombre des entiers exceptionnels par

$$(3.13) \quad \sum_{k \leq w - \alpha\xi} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \alpha^{\omega(n) - \omega(n, x_k) - w + k} \ll \pi_w(x) Q(\alpha)^{-1} e^{-Q(\alpha)\xi}.$$

□

Introduisons, pour chaque entier n de $\mathcal{E}_w(x)$, les produits

$$(3.14) \quad n_{[k]} := \prod_{1 \leq j \leq k} p_j(n)^{\nu_j(n)} \quad (0 \leq k \leq w)$$

où $\nu_j(n)$ désigne l'exposant de $p_j(n)$ dans la décomposition canonique de n . Notre dernier lemme concerne le comportement normal des facteurs premiers multiples des entiers de $\mathcal{E}_w(x)$. Nous considérons en particulier la fonction de Piltz

$$\tau_3(n) := \sum_{dd'|n} 1 = \prod_{p^\nu || n} \binom{\nu + 2}{2} \quad (n \geq 1).$$

Lemme 3.6. Soit $R > 1$. Sous les conditions

$$(3.15) \quad x > 16, \quad w \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{R} \log_2 x \leq w \leq R \log_2 x, \quad T \geq 1,$$

nous avons

$$(3.16) \quad \sup_{1 \leq k \leq w} \tau_3(n_{[k]})/3^k \leq T$$

pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll \pi_w(x)/T$. De plus, la relation

$$\exists k \in [2\xi, w] : p_k(n)^2 | n$$

est réalisée pour au plus $\ll e^{-Q(\frac{1}{2})\xi} \pi_w(x)$ entiers de $\mathcal{E}_w(x)$.

Démonstration. Nous avons $\tau_3(n_{[k]})/3^k \leq \tau_3(n)/3^w = \tau_3(n)/3^{\omega(n)}$ pour tout indice k . Or

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \frac{\tau_3(n)}{3^{\omega(n)}} \ll \pi_w(x)$$

d'après le Lemme 3.1. Cela établit la première assertion de l'énoncé. La seconde résulte du Lemme 3.4 avec par exemple $\alpha := 2$: le nombre des entiers exceptionnels est

$$\ll \pi_w(x) e^{-Q(\frac{1}{2})\xi} + \sum_{\nu \geq 2} \sum_{p > \exp(\xi/R)} \pi_{w-1}\left(\frac{x}{p^\nu}\right) \ll \pi_w(x) \left(e^{-Q(\frac{1}{2})\xi} + \exp\{-e^{\xi/R}\} \right).$$

□

3.2. Complétion de l'argument

La constante c étant supposée assez petite et les paramètres w, ξ , vérifiant

$$w \in \mathbb{N}, \quad (1-c) \log_2 x \leq w \leq (1+c) \log_2 x, \quad \frac{6}{5} \log_3 x \leq \xi \leq \frac{1}{110} \log_2 x,$$

nous posons

$$\vartheta^- := \frac{\log x}{2e^{3\xi} 3^{w\xi}}, \quad \vartheta^+ := e^{-2\xi} \log x.$$

Il suffit d'établir (1.4) lorsque $\vartheta^- \leq t \leq \vartheta^+$. Lorsque $t > \vartheta^+$, l'inégalité est impliquée par la majoration triviale $\nabla^+(n, t) \leq \tau_3(n)$ au vu du Lemme 3.6. Lorsque $t < \vartheta^-$, le résultat appliqué à ϑ^- fournit $\nabla^+(n, t) \leq \nabla^+(n, \vartheta^-) = 1$ avec la majoration requise pour le nombre des exceptions. Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons donc

$$\vartheta^- \leq t \leq \vartheta^+.$$

Soit $\alpha := \frac{78}{71} \in]1, \log 3[$. Pour chaque valeur du paramètre entier ξ , nous considérons le sous-ensemble $\mathcal{E}_w^*(x)$ de $\mathcal{E}_w(x)$ défini par les inégalités (3.10), (3.11) et les conditions

$$(3.17) \quad \min_{2\xi < k \leq w} \log_2 p_k(n)/k > 1/(\varrho\alpha), \quad \max_{1 \leq k \leq w} \tau_3(n_{[k]})/3^k \leq (e/2)^\xi, \quad p_k(n)^2 | n \Rightarrow k \leq 2\xi.$$

D'après les Lemmes 3.4, 3.5 et 3.6, nous avons

$$(3.18) \quad \pi_w^*(x) := |\mathcal{E}_w^*(x)| \geq \{1 - B e^{-\beta\xi}\} \pi_w(x)$$

où $\beta := \min\{Q(\frac{1}{2}), \frac{99}{100}Q(1/\alpha), Q(\alpha)\}$ et B est une constante convenable. Notons que $\beta \geq \frac{1}{244}$.

Posons

$$(3.19) \quad V_t(m, z) := \sum_{\substack{dd'|m \\ 0 < |\log(d'/d) - z| \leq t}} 1 \quad (m \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{R}),$$

de sorte que $\nabla^+(m, t) = 1 + V_t(m, 0)$ pour tout entier m . Notons que

$$(3.20) \quad V_t(mn, z) \leq \sum_{dd'|m} V_t(n, z + \log(d'/d)) \quad (m \geq 1, n \geq 1, z \in \mathbb{R})$$

avec égalité si $(m, n) = 1$.

Notre méthode consiste à évaluer $V_t(n_{[k]}, 0)$ par récurrence sur k , $2\xi < k \leq w$, en exploitant la relation

$$(3.21) \quad V_t(n_{[k+1]}, 0) = V_t(n_{[k]}, 0) + 2V_t(n_{[k]}, \log p_{k+1}(n)) \quad (2\xi < k < w).$$

Plus précisément, nous employons une méthode d'espérance conditionnelle analogue à celle qui a été utilisée dans [13], [7] et [8] pour majorer les moments de la fonction Delta de Hooley, et nous sommes la relation (3.21) sur l'ensemble de tous les entiers de $\mathcal{E}_w^*(x)$ tels que $n_{[k]}/n_{[2\xi]}$ est fixé. Spécifiquement, posant

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &:= \{a : \exists n \in \mathcal{E}_w^*(x), n_{[k]}/n_{[2\xi]} = a\} \quad (2\xi < k < w), \\ \mathcal{M}_\xi(k, a) &:= \{m : \exists n \in \mathcal{E}_w^*(x), n_{[k]} = ma\} \quad (2\xi < k < w, a \in \mathcal{A}_k), \\ \mathcal{M}_\xi &:= \bigcup_{2\xi < k < w} \bigcup_{a \in \mathcal{A}_k} \mathcal{M}_\xi(k, a), \end{aligned}$$

nous pouvons écrire, pour $a \in \mathcal{A}_k$, $2\xi < k \leq w - 2$, compte tenu de (3.17),

$$(3.22) \quad \begin{aligned} S_{k+1}(a) &:= \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w^*(x) \\ n_{[k]}/n_{[2\xi]} = a}} \{V_t(n_{[k+1]}, 0) - V_t(n_{[k]}, 0)\} \log p_{k+1}(n) \\ &\leq \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}_\xi(k, a) \\ P^+(m) < P^-(a) \\ P^+(a) < p < \sqrt{x/am}}} \{V_t(map, 0) - V_t(ma, 0)\} (\log p) \pi_{w-k-1} \left(\frac{x}{map}, p \right), \end{aligned}$$

où, ici et dans la suite, $P^+(m)$ désigne le plus grand facteur premier de l'entier m avec la convention $P^+(1) = 1$. La première des conditions (3.17) garantit que l'on a, dans la dernière sommation,

$$\log_2 p > 2\xi/\varrho\alpha > 2 \log_2 \{1 + w - k\}.$$

Nous pouvons donc employer le Lemme 3.3 pour majorer $\pi_{w-k-1}(x/map, p)$, soit

$$(3.23) \quad \pi_{w-k-1} \left(\frac{x}{map}, p \right) \ll \frac{x\sqrt{w}}{map \log(x/ma)} \frac{\{\log u(ma)\}^{w-k-2}}{(w-k-2)!},$$

où l'on a posé

$$u(ma) := \frac{\log(x/ma)}{\log P^+(a)} \geq \frac{\log(x/map)}{\log p}.$$

La minoration de $p_w(n)$ contenue dans (3.10) implique $\log(x/ma) > e^{-\xi/\varrho} \log x$ pour tous $a \in \mathcal{A}_k$, $m \in \mathcal{M}_\xi(k, a)$. Par (3.21), nous obtenons donc

$$(3.24) \quad S_{k+1}(a) \ll \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}_\xi(k, a) \\ P^+(m) < P^-(a)}} \frac{x\sqrt{w}e^{\xi/\varrho} \{\log u(am)\}^{w-k-2}}{ma \log x (w-k-2)!} Y_t(ma)$$

avec

$$Y_t(ma) := \sum_{p > P^+(a)} \frac{V_t(ma, \log p) \log p}{p}.$$

En exprimant $V_t(ma, \log p)$ comme une somme sur les diviseurs de ma et en intervertissant les sommations, nous obtenons

$$(3.25) \quad Y_t(ma) \leq \sum_{dd'|ma} \sum_{\substack{p > P^+(a) \\ -t - \log(d'/d) \leq \log p \leq t - \log(d'/d)}} \frac{\log p}{p}.$$

Notons que $\log P^+(a) > e^{k/\alpha\varrho}$ en vertu de (3.17). D'après le théorème des nombres premiers, la somme intérieure de (3.25) vaut donc

$$2t + O(\exp\{-e^{k/2\alpha\varrho}\}) \ll t,$$

où la dernière majoration est justifiée par la minoration $k > 2\xi > 2\alpha\varrho \log_3 x$ dès que, par exemple, $c < \frac{1}{11}$. Il suit

$$Y_t(ma) \ll t\tau_3(ma) \leq t3^k(e/2)^\xi.$$

Reportons dans (3.24). Posant $L := 1 + 1/\varrho - \log 2$, nous obtenons

$$(3.26) \quad S_{k+1}(a) \ll \frac{x\sqrt{w}e^{L\xi}3^kt}{(w-k-2)!\log x} \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}_\xi(k,a) \\ P^+(m) < P^-(a)}} \frac{\{\log u(ma)\}^{w-k-2}}{ma}.$$

Notant $P^+(a) = P^+(ma) = p$, $b = ma/p$, avec donc $\omega(b) = k-1$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a \in \mathcal{A}_k, m \in \mathcal{M}_\xi(k,a) \\ P^+(m) < P^-(a)}} \frac{\{\log u(ma)\}^{w-k-2}}{ma(w-k-2)!} &\leq \sum_{p \leq x} \sum_{\substack{\omega(b)=k-1 \\ k \leq \varrho\alpha \log_2 p \\ P^+(b) \leq p}} \frac{(\log_2 x - \log_2 p)^{w-k-2}}{pb(w-k-2)!} \\ &\ll \sum_{p \leq x} \frac{(\log_2 x - \log_2 p)^{w-k-2} (\log_2 p)^{k-1}}{p(k-1)!(w-k-2)!} \\ &\ll \frac{(\log_2 x)^{w-2}}{(w-3)!} \ll w \frac{(\log_2 x)^{w-1}}{(w-1)!}. \end{aligned}$$

En reportant dans (3.26), il suit

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} \{V_t(n_{[k+1]}, 0) - V_t(n_{[k]}, 0)\} \log p_{k+1}(n) \ll t3^k w^{3/2} e^{L\xi} \pi_w(x),$$

et donc, en vertu de (3.10),

$$(3.27) \quad \sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} \{V_t(n_{[k+1]}, 0) - V_t(n_{[k]}, 0)\} \ll \frac{t3^k w^{3/2} e^{\alpha(w-k)/\varrho + (L+1/\varrho)\xi}}{\log x} \pi_w(x).$$

Par sommation sur $k \in]2\xi, w-2]$, il suit

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} \{V_t(n_{[w-1]}, 0) - V_t(n_{[2\xi]}, 0)\} \ll \frac{t3^w w^{3/2} e^{(L+1/\varrho)\xi}}{\log x} \pi_w(x).$$

Posant $K := L + \beta + 1/\varrho = 1 + \beta + 2/\varrho - \log 2$, nous en déduisons que

$$(3.28) \quad V_t(n_{[w-1]}, 0) - V_t(n_{[2\xi]}, 0) \ll \frac{t3^w w^{3/2} e^{K\xi}}{\log x}$$

pour tous les entiers de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll \pi_w(x)e^{-\beta\xi}$ exceptions.

En choisissant la constante c de l'énoncé du Théorème 1.2 assez petite, il s'ensuit que la majoration

$$(3.29) \quad \nabla^+(n_{[w-1]}, t) \leq \nabla^+(n_{[2\xi]}, t) + \frac{t3^w we^{3\xi}}{4 \log x}$$

a lieu, pour tout $t \in [\vartheta^-, \vartheta^+]$ et tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll \pi_w(x)e^{-\beta\xi}$.

Soit alors $z_0 := \exp \exp\{4\xi/(1-c)\}$. D'après (3.8) avec $\alpha = 2$ et $t = z_0$, nous avons $p_{2\xi}(n) \leq z_0$ pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll e^{-4Q(1/2)\xi} \pi_w(x)$ exceptions. De plus, la relation

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\Omega(n) - \omega(n)} \ll \pi_w(x),$$

qui découle du Lemme 3.1, fournit, quitte à négliger $\ll (2/3)^\xi \pi_w(x)$ nouveaux entiers de $\mathcal{E}_w(x)$, la majoration $n_{[2\xi]} \leq z := z_0^{3\xi}$.

Nous avons donc $\nabla^+(n_{[2\xi]}, t) \leq 1 + \nabla_0(n) + 2\nabla_1(n)$ avec

$$\nabla_0(n) := \sum_{\substack{d|n \\ 1 < d \leq e^t}} 1, \quad \nabla_1(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d \leq z}} \sum_{1 < d < d' \leq e^t d} 1.$$

Nous allons montrer que la majoration

$$(3.30) \quad \nabla_j(n) \ll \frac{t3^w}{\log x} \quad (j = 0, 1)$$

a lieu pour tous les entiers restants sauf au plus un nombre acceptable d'exceptions.

Lorsque $j = 0$, nous pouvons supposer $t \geq \log 2$ puisque $\nabla_0(n, t) = 0$ dans le cas contraire. Soit $h := (\log x)^{1/10}$. D'après le Lemme 3.4, nous avons

$$\Omega(n, e^{t+h}) \leq (1+c)\varrho \log(t+h)$$

pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll \pi_w(x)/(\log x)^B$ exceptions, où l'on a posé $B := \frac{1}{10}(1-c)Q(1/(1+c))$. Cela implique, pour les entiers non exceptionnels,

$$\nabla_0(n) \leq 2^{\Omega(n, e^t)} \leq (t+h)^{(1+c)^2 \log 2}.$$

Nous en déduisons bien (3.30) pour $j = 0$ dès que c est assez petite puisque le membre de droite de (3.30) excède $t(\log x)^{(1-c)\log 3 - 1}$.

Pour traiter le cas $j = 1$, nous observons que tout couple $\{d, d'\}$ compté dans $\nabla_1(n)$ vérifie

$$t \geq \log(d'/d) \geq \log(d'/(d'-1)) > 1/d' > e^{-t}/d$$

et donc $d > e^{-t}/t$. Nous pouvons alors écrire

$$\sum_{n \leq x} \nabla_1(n) \leq x \sum_{e^{-t}/t < d \leq z} \frac{1}{d} \sum_{d < d' \leq e^t d} \frac{1}{d'} \ll xt \sum_{e^{-t}/t < d \leq z} \frac{1}{d} \ll tx \log z.$$

Il s'ensuit que (3.30) a lieu pour tous les entiers $n \leq x$ sauf au plus

$$\begin{aligned} &\ll \frac{x(\log x) \log z}{3^w} \ll \pi_w(x) \frac{(w-1)!(\log x)^2 \log z}{3^w (\log_2 x)^{w-1}} \\ &\ll \pi_w(x) (\log x)^{Q(\varrho) - \varrho \log 3 + 1} (\log_2 x)^{1/2} \log z \ll \frac{\pi_w(x)}{(\log x)^{1/50}}, \end{aligned}$$

dès que $\xi \leq \frac{1}{110} \log_2 x$ et la constante c est assez petite, par exemple $c < \frac{1}{30}$. Cela établit bien (3.30) pour $j = 2$.

La conjonction de (3.30) et (3.29) fournit donc l'inégalité

$$(3.31) \quad V_t(n_{[w-1]}, 0) \leq \frac{t3^w we^{3\xi}}{2 \log x}$$

pour tous les entiers de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll \pi_w(x)e^{-\beta\xi}$ exceptions.

Il reste à examiner l'influence du plus grand facteur premier $p_w(n)$ sur la quantité $\nabla^+(n, t)$. Nous avons

$$(3.32) \quad \nabla^+(n, t) = 1 + V_t(n_{[w-1]}, 0) + 2V_t(n_{[w-1]}, \log p_w(n)) \quad (n \in \mathcal{E}_w^*(x)).$$

Pour majorer le dernier terme, nous considérons la fonction sommatoire

$$S(x) := \sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} V_t(n_{[w-1]}, \log p_w(n)) \leq v^{-w} \sum_{n \in \mathcal{E}_w^*(x)} v^{\omega(n)} \sum_{\substack{dd'|n \\ 0 < |\log(d'/d)| \leq t \\ P^+(n)|dd'}} 1 \quad (0 < v \leq 1).$$

D'après (3.10) avec $k = w$, nous avons $\log P^+(n) > e^{-\xi/\varrho} \log x$ pour tous les entiers de $\mathcal{E}_w^*(x)$. Compte tenu de la condition $t \leq \vartheta^+ = e^{-2\xi} \log x$, il s'ensuit que nous pouvons supposer, dans la dernière somme intérieure,

$$\min(d, d') > x_1 := \exp \left\{ \frac{1}{2} e^{-\xi/\varrho} \log x \right\}.$$

Il suit

$$S(x) \ll v^{-w} \sum_{\substack{x_1 < d < d' \\ 0 < \log(d'/d) \leq t}} v^{\omega(dd')} \sum_{m \leq x/dd'} v^{\omega(mdd') - \omega(dd')}.$$

Nous pouvons majorer la somme intérieure en notant que la fonction $m \mapsto v^{\omega(mD) - \omega(D)}$ est multiplicative pour chaque $D \geq 1$. En recourant, par exemple, au théorème III.3.5 de [16], nous obtenons la majoration

$$S(x) \ll v^{-w} x \sum_{\substack{x_1 < d \leq d' \\ dd' \leq x \\ 0 < \log(d'/d) \leq t}} \frac{v^{\omega(dd')}}{\varphi(dd')} \left(\log \frac{2x}{dd'} \right)^{v-1},$$

où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. En employant alors le théorème de Shiu [11] comme dans [4] — formule (5.28) —, nous obtenons, pour chaque d , par sommation d'Abel,

$$\sum_{\substack{x_1 < d < d' \leq x/d \\ 0 < \log(d'/d) \leq t}} \frac{v^{\omega(dd') - \omega(d)}}{\varphi(d')} \left(\log \frac{2x}{dd'} \right)^{v-1} \ll \frac{td}{v\varphi(d)} (\log x_1)^{v-1} \left(\log \frac{2x}{d^2} \right)^{v-1}.$$

Nous avons donc finalement établi que

$$S(x) \ll txv^{-w-1} (\log x_1)^{v-1} \sum_{x_1 < d \leq \sqrt{x}} \frac{v^{\omega(d)} d}{\varphi(d)^2} \left(\log \frac{2x}{d^2} \right)^{v-1} \ll txv^{-w-2} e^{(1-v)\xi/\varrho} (\log x)^{3v-2}.$$

Pour le choix $v := \varrho/3$, il vient

$$S(x) \ll \frac{txe^{3\xi/4} 3^w}{(\log x)^{\varrho(\varrho)+1}} \ll \pi_w(x) \frac{t3^w \sqrt{w} e^{3\xi/4}}{\log x}.$$

Il s'ensuit que la majoration

$$V_t(n_{[w-1]}, \log p_w(n)) \leq \frac{t3^w w e^{3\xi}}{4 \log x}$$

a lieu pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll \pi_w(x) e^{-\beta\xi}$ exceptions.

En reportant dans (3.32) et en tenant compte de (3.31), nous obtenons bien le résultat annoncé.

4. Preuve du Théorème 1.3

4.1. Notations

Le paramètre ψ étant fixé en fonction de x comme indiqué dans l'énoncé, nous nous donnons une constante $c_0 > 0$, qui sera choisie ultérieurement suffisamment petite pour que $2c_0 \log \psi \leq \frac{1}{2} \log_2 x$, et nous posons

$$(4.1) \quad \begin{aligned} L &:= \log_2 x - 2c_0 \log \psi, & M &:= \log_2 x - c_0 \log \psi, & h &:= \left\lceil \sqrt{c_0 \log \psi} \right\rceil, \\ k_j &:= L + jh \quad (0 \leq j \leq h), & \mathcal{K} &:= \{k_j : 1 \leq j \leq h\}. \end{aligned}$$

Nous rappelons la définition de la fonction Q en (1.6).

Enfin, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, nous posons

$$n_k := \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \exp \exp k}} p.$$

Observons que la fonction $n \mapsto n_k$ est un analogue multiplicatif de la fonction $n \mapsto n_{[k]}$ considérée dans la preuve du Théorème 1.2.

4.2. Propriétés arithmétiques des entiers ayant w facteurs premiers

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'établir les propriétés essentielles nécessaires à la preuve du Théorème 1.3 et qui concernent la répartition des facteurs premiers des entiers de $\mathcal{E}_w(x)$.

Lemme 4.1. *Soit $K \leq \log_2 x$. L'encadrement*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\omega(n) - \omega(n_k)}{(\log_2 x) - k} \leq 2 \quad (0 \leq k \leq \log_2 x - K)$$

a lieu pour tous les entiers $n \leq x$ sauf pour au plus $\ll x e^{-K/12}$ exceptions.

Démonstration. Cela résulte immédiatement du lemme 4.5 de [8] en choisissant, dans l'énoncé de ce résultat, $u := k$, $v := \log_2 x$, $\xi_1 = \xi_2 := \frac{1}{2} \sqrt{v - u}$ et en sommant sur k . \square

Lemme 4.2. *Soit $A > 0$. Sous les conditions*

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x &> 16, \quad w \in [1, A \log_2 x] \cap \mathbb{N}, \quad \varrho_0 := \frac{w}{\log_2 x}, \\ 0 &< \alpha < 1, \quad \beta := \varrho_0 Q(\alpha), \quad \frac{14}{\beta} + \frac{2}{\beta} \log \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta}} \right) \leq T \leq h, \end{aligned}$$

l'inégalité

$$(4.3) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \min_{T \leq s < h} \frac{\omega(n_k) - \omega(n_{k-s})}{s} > \alpha \varrho_0 \right\} \right| \geq \frac{9}{10} |\mathcal{K}| = \frac{9}{10} h$$

a lieu pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll \pi_w(x) e^{-\beta T h / 20}$ exceptions.

Démonstration. Notons $D(n)$ le nombre des indices $k \in \mathcal{K}$ qui ne sont pas comptés dans le membre de gauche de (4.3), de sorte que (4.3) équivaut à $D(n) \leq \frac{1}{10} h$. Soit $\ell \in [1, h]$. Nous avons

$$|\{n \in \mathcal{E}_w(x) : D(n) \geq \ell\}| \leq \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}| = \ell}} \prod_{k \in \mathcal{H}} \sum_{T \leq s < h} \alpha^{\omega(n_k) - \omega(n_{k-s}) - \alpha \varrho_0 s}.$$

En développant le dernier produit et intervertissant les sommations, nous obtenons

$$|\{n \in \mathcal{E}_w(x) : D(n) \geq \ell\}| \leq \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}| = \ell}} \sum_{\sigma \in [T, h]^\mathcal{H}} \alpha^{-\alpha \varrho_0 \operatorname{Tr}(\sigma)} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n; \sigma)$$

où nous convenons que $[T, h] := \{s \in \mathbb{N} : T \leq s < h\}$ et avons posé $\operatorname{Tr}(\sigma) := \sum_{k \in \mathcal{H}} \sigma(k)$,

$$f(n; \sigma) := \prod_{k \in \mathcal{H}} \alpha^{\omega(n_k) - \omega(n_{k - \sigma(k)})} \quad (\sigma \in [T, h]^\mathcal{H}).$$

La dernière somme relève du Lemme 3.1. Comme les intervalles $]k - h, k]$, et donc aussi les intervalles $]k - \sigma(k), k]$, sont deux à deux disjoints lorsque k parcourt \mathcal{H} , il vient

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n; \sigma) \ll_A \pi_w(x) \exp \left\{ \varrho(\alpha - 1) \sum_{k \in \mathcal{H}} S_k(\sigma) \right\},$$

où l'on a posé

$$\varrho = \frac{w-1}{\log_2 x}, \quad S_k(\sigma) := \sum_{k - \sigma(k) < \log_2 p \leq k} \frac{1}{p} = \sigma(k) + O(e^{-L}).$$

Comme $\ell \ll L$, nous obtenons

$$(4.4) \quad |\{n \in \mathcal{E}_w(x) : D(n) \geq \ell\}| \ll \pi_w(x) \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}| = \ell}} \sum_{\sigma \in [T, h]^\mathcal{H}} e^{\{\varrho(\alpha-1) - \alpha \varrho_0 \log \alpha\} \operatorname{Tr}(\sigma)}.$$

Observant que

$$\varrho(\alpha - 1) - \alpha \varrho_0 \log \alpha = -\varrho_0 Q(\alpha) + O(1/\log_2 x) = -\beta + O(1/\log_2 x),$$

et que $h\ell \ll \log_2 x$, nous déduisons de (4.4) l'estimation

$$\begin{aligned} |\{n \in \mathcal{E}_w(x) : D(n) \geq \ell\}| &\ll \pi_w(x) \sum_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \\ |\mathcal{H}| = \ell}} \left\{ \sum_{T \leq s < h} e^{-\beta s} \right\}^\ell \\ &\ll \pi_w(x) \binom{h}{\ell} e^{-\beta T \ell} (1 - e^{-\beta})^{-\ell} \ll \pi_w(x) 2^h e^{-\beta T \ell} (1 - e^{-\beta})^{-\ell}. \end{aligned}$$

L'hypothèse (4.2) implique $e^{-\beta T} (1 - e^{-\beta})^{-1} \leq 2^{-10} e^{-\beta T/2}$. Pour le choix $\ell := 1 + [h/10]$, la dernière majoration est donc $\ll \pi_w(x) e^{-\beta T h/20}$. \square

Lemme 4.3. Soit $R > 0$. Pour $x > 16$, $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq \log_2 x$, $T > 0$, on a

$$(4.5) \quad \prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p \leq \exp \exp k}} p^\nu \leq \exp(Te^k)$$

pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf pour au plus $\ll_R e^{-T/2} \pi_w(x)$ exceptions.

Démonstration. Désignons par $n(k)$ le membre de gauche de (4.5) et posons $\alpha := \frac{1}{2}e^{-k}$. Le nombre des entiers exceptionnels au sens de l'énoncé ne dépasse pas

$$e^{-T/2} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} n(k)^\alpha \ll_R e^{-T/2} \pi_w(x),$$

où la majoration résulte immédiatement de (3.1). \square

Lemme 4.4. *Sous les conditions $x > 16$, $w \in [1, 2 \log_2 x] \cap \mathbb{N}$, l'inégalité*

$$(4.6) \quad |\{k \in \mathcal{K} : \log n_k \leq 40e^k\}| \geq \frac{9}{10} |\mathcal{K}| = \frac{9}{10} h$$

a lieu pour tous les entiers $n \in \mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll e^{-h} \pi_w(x)$ exceptions.

Démonstration. Notons $F(n; \mathcal{K}) := |\{k \in \mathcal{K} : \log n_k > 40e^k\}|$. Ainsi (4.6) équivaut à $F(n; \mathcal{K}) \leq h/10$. Nous avons

$$F(n; \mathcal{K}) \leq F_1(n) + F_2(n)$$

où $F_1(n)$ dénombre les indices $j \in [1, h]$ tels que

$$(F_1) \quad \log n_{k_{j-1}} > 2he^{k_{j-1}}$$

et $F_2(n)$ ceux pour lesquels

$$(F_2) \quad \log(n_{k_j}/n_{k_{j-1}}) > 39e^{k_j}.$$

Soit $\ell := 1 + [h/20]$. D'après le Lemme 4.3 appliqué avec $R := 2$ et $T := 2h$, nous avons

$$(4.7) \quad \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ F_1(n) \geq \ell}} 1 \leq \frac{1}{\ell} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} F_1(n) \ll e^{-h} \pi_w(x),$$

puisque $|\mathcal{K}| = h \ll \ell$.

Pour majorer $F_2(n)$, nous écrivons, avec la même valeur de ℓ et en posant $\alpha_j = e^{-k_j}$ ($1 \leq j \leq h$),

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ F_2(n) \geq \ell}} 1 \leq \sum_{\substack{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, h\} \\ |\mathcal{J}| = \ell}} e^{-39\ell} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \prod_{j \in \mathcal{J}} (n_{k_j}/n_{k_{j-1}})^{\alpha_j}.$$

La somme intérieure relève du Lemme 3.1. Elle est

$$\ll \pi_w(x) \exp \left\{ \varrho \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{k_{j-1} < \log_2 p \leq k_j} \frac{p^{\alpha_j} - 1}{p} \right\} \ll \pi_w(x) e^{(e-1)\varrho\ell},$$

où l'on a posé $\varrho := (w-1)/\log_2 x < 2$. Il suit

$$(4.8) \quad \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ F_2(n) \geq \ell}} 1 \ll 2^h e^{-39\ell + 2(e-1)\ell} \pi_w(x) \ll e^{-h} \pi_w(x). \quad \square$$

Le résultat suivant est établi par exemple dans [4], p. 53, ou au lemme III.4.13 de [16].

Lemme 4.5. *Soit f une fonction 2π -périodique, à variation bornée sur $[0, 2\pi]$ et de valeur moyenne*

$$\bar{f} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Pour tout triplet $(\vartheta, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vartheta \neq 0$, $1 < y < z$, on a

$$\sum_{y < p \leq z} \frac{f(\vartheta \log p)}{p} = \bar{f} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right) + O \left(\frac{V(f)}{|\vartheta| \log y} + \frac{M(f) + (1 + |\vartheta|)V(f)}{e\sqrt{\log y}} \right)$$

où l'on a posé $M(f) := \sup_x |f(x)|$, $V(f) := \int_0^{2\pi} |df(x)|$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $\vartheta > 0$, posons

$$\varrho(n, \vartheta) := \prod_{p|n} (1 + 2 \cos(\vartheta \log p)),$$

$$\omega_\vartheta(n) := \omega(n, \exp(1/\vartheta)), \quad \mathcal{R}(n, \vartheta) := \frac{\varrho(n, \vartheta)^2}{3^{\omega(n) + \omega_\vartheta(n)}}.$$

Le résultat suivant peut être établi en appliquant successivement les Lemmes 3.1 et 4.5. Nous omettons les détails qui sont semblables à ceux de la preuve du lemme 51.3 de [4].

Lemme 4.6. *Soit $R > 0$. On a, uniformément pour $x > 16$, $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$, $\varrho := w / \log_2 x$, $\vartheta > 0$ et $k \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) \ll_R \{\log(3 + \vartheta)\}^{4\varrho} \pi_w(x).$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Lemme 4.7. *Soit $R > 0$. Sous les conditions $x > 16$, $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$, $\varrho := w / \log_2 x$, $V > 0$, $H > 1$, $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité*

$$\int_1^H \mathcal{R}(n_k, \vartheta) d\vartheta \leq VH \{\log(3 + H)\}^{4\varrho}$$

a lieu pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf pour au plus $\ll \pi_w(x)/V$ exceptions.

Lemme 4.8. *Soient $R > 0$, $\delta > 1$. Sous les conditions $x > 16$, $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$, $V > 0$, l'inégalité*

$$(4.9) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \int_{e^{h-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta^\delta} \leq V e^{(\delta-1)(k-h)} \right\} \right| \geq \frac{9}{10} h$$

a lieu pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll_{R,\delta} \pi_w(x)/V$ exceptions.

Démonstration. Posons $\ell := 1 + \lceil h/10 \rceil$, et désignons par $G(n; \mathcal{K})$ le nombre des indices $k \in \mathcal{K}$ qui ne sont pas comptés dans le membre de gauche de (4.9). Nous avons

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ G(n; \mathcal{K}) \geq \ell}} 1 \leq \frac{1}{\ell} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} G(n; \mathcal{K}) \leq \frac{1}{\ell V} \sum_{k \in \mathcal{K}} e^{(1-\delta)(k-h)} \int_{e^{h-k}}^1 \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta^\delta}$$

$$\ll_R \frac{\pi_w(x)}{(\delta-1)V},$$

où la dernière somme en n a été estimée grâce au Lemme 4.6. □

Lemme 4.9. *Soit $R > 0$. Sous les conditions*

$$x > 16, \quad w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}, \quad J \in \mathbb{N}, \quad k_j \in \mathbb{N} \quad (0 \leq j \leq J), \quad 0 = k_0 < k_1 < \dots < k_J,$$

nous avons

$$(4.10) \quad \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \prod_{1 \leq j \leq J} \mathcal{R}(n_{k_j}, \vartheta_j) \leq e^{c_2 R J} \pi_w(x) \quad (e^{-k_j} \leq \vartheta_j \leq e^{-k_{j-1}}, \quad 1 \leq j \leq J)$$

où c_2 est une constante absolue positive.

Démonstration. Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $\vartheta > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) &\leq \prod_{\substack{p|n \\ 1/\vartheta < \log p \leq e^k}} \frac{1}{3} (1 + 2 \cos(\vartheta \log p))^2 \\ &= \prod_{\substack{p|n \\ 1/\vartheta < \log p \leq e^k}} \left(1 + \frac{2}{3} \cos(2\vartheta \log p) + \frac{4}{3} \cos(\vartheta \log p)\right). \end{aligned}$$

Par hypothèse, les intervalles $]1/\vartheta_j, e^{k_j}]$ ($1 \leq j \leq J$) sont deux à deux disjoints. Il suit

$$\prod_{1 \leq j \leq J} \mathcal{R}(n_{k_j}, \vartheta_j) \leq f(n)$$

où f est la fonction fortement multiplicative définie par

$$f(p) := 1 + \frac{2}{3} \sum_{1 \leq j \leq J} \mathbf{1}_{[1/\vartheta_j, e^{k_j}]}(\log p) \{ \cos(2\vartheta_j \log p) + 2 \cos(\vartheta_j \log p) \}$$

D'après le Lemme 3.1, nous pouvons écrire, avec $\varrho := (w-1)/\log_2 x$

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} f(n) \ll \pi_w(x) \exp \left\{ \frac{2}{3} \varrho \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{\exp(1/\vartheta_j) < p \leq \exp e^{k_j}} \frac{\cos(2\vartheta_j \log p) + 2 \cos(\vartheta_j \log p)}{p} \right\}.$$

Les sommes intérieures étant uniformément bornées en vertu du Lemme 4.5, nous obtenons bien la majoration requise (4.10). \square

Lemme 4.10. *Soit $R > 0$. Il existe une constante $c_3 = c_3(R) > 0$ telle que, pour tout $\delta > 1$, et uniformément sous les conditions $x > 16$, $w \in [1, R \log_2 x] \cap \mathbb{N}$, l'inégalité*

$$(4.11) \quad \left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \int_{e^{-k}}^{e^{h-k}} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta^\delta} \leq \frac{c_3 e^{(\delta-1)k}}{\delta-1} \right\} \right| \geq \frac{9}{10} h$$

ait lieu pour tous les entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ sauf au plus $\ll_{R,\delta} e^{-h} \pi_w(x)$ exceptions.

Démonstration. Posons $\ell := 1 + \lceil h/10 \rceil$, et désignons par $B(n; \mathcal{K})$ le nombre des indices $k \in \mathcal{K}$ qui ne sont pas comptés dans le membre de gauche de (4.11). Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ B(n; \mathcal{K}) \geq \ell}} 1 &\leq \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \left(\frac{\delta-1}{c_3} \right)^\ell \sum_{\substack{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, h\} \\ |\mathcal{J}| = \ell}} \prod_{j \in \mathcal{J}} e^{(1-\delta)k_j} \int_{e^{-k_j}}^{e^{-k_j-1}} \mathcal{R}(n_{k_j}, \vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta^\delta} \\ &= \left(\frac{\delta-1}{c_3} \right)^\ell \sum_{\substack{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, h\} \\ |\mathcal{J}| = \ell}} \left\{ \prod_{j \in \mathcal{J}} e^{(1-\delta)k_j} \right\} \int_{\Delta(\mathcal{J})} \sum_{n \in \mathcal{E}_w(x)} \prod_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{R}(n_{k_j}, \vartheta_j) \prod_{i \in \mathcal{J}} \frac{d\vartheta_j}{\vartheta_j^\delta} \end{aligned}$$

où l'on a posé $\Delta(\mathcal{J}) := \prod_{j \in \mathcal{J}} [e^{-k_j}, e^{-k_j-1}]$. D'après le Lemme 4.9, la somme intérieure est $\ll e^{c_2 R \ell} \pi_w(x)$. Il s'ensuit que

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_w(x) \\ B(n; \mathcal{K}) \geq \ell}} 1 \ll \pi_w(x) 2^h c_3^{-\ell} e^{c_2 R \ell}.$$

Comme $h \leq 10\ell$, le choix $c_3 := 2^{20} e^{c_2 R + 10}$ permet de conclure. \square

4.3. Préparation

Dans ce paragraphe, nous mettons en place le cadre final de la démonstration du Théorème 1.3.

Dans toute la suite, nous posons

$$(4.12) \quad \delta := \frac{1}{2}\{1 + \log 3\} \approx 1,04931, \quad \alpha := \delta / \log 3 \in]0, 1[.$$

Étant donnés $B > 0$ et $x > 16$, nous considérons des paramètres ψ, w tels que

$$(4.13) \quad (\log_2 x)^{10} \leq \psi \leq (\log x)^B, \quad w \in \mathbb{N}, \quad |w - \log_2 x| \leq (\log \psi)^{1/4} (\log_2 x)^{1/2},$$

et nous posons

$$\varrho_0 = \varrho_0(w, x) := \frac{w}{\log_2 x}, \quad \Theta^- = \Theta^-(w, x, \psi) = \frac{\log x}{3^w} \sqrt{\psi}, \quad \Theta^+ = \Theta^+(x, \psi) := \frac{\log x}{\sqrt{\psi}}.$$

et rappelons les notations (4.1).

Pour tous $c > 0, T > 0$, nous désignons par $\mathcal{S}_w(x; c, T)$ l'ensemble des entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ qui vérifient les six propriétés suivantes :

- (i) $\frac{1}{2} \leq \frac{w - \omega(n_k)}{\log_2 x - k} \leq 2 \quad (k \in \mathcal{K});$
- (ii) $\left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \min_{T \leq s \leq k} \frac{\omega(n_k) - \omega(n_{k-s})}{s} > \alpha \right\} \right| \geq \frac{9}{10} h;$
- (iii) $|\{k \in \mathcal{K} : \log n_k \leq 40e^k\}| \geq \frac{9}{10} h;$
- (iv) $\left| \left\{ k \in \mathcal{K} : \int_{e^{-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \vartheta) d\vartheta / \vartheta^\delta \leq ce^{(\delta-1)k} \right\} \right| \geq \frac{4}{5} h;$
- (v) $\int_1^{1/\Theta^-} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) d\vartheta \leq e^h (\log_2 x)^{4\varrho_0} / \Theta^- \quad (k \in \mathcal{K});$
- (vi) $\prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ \log_2 p \leq M}} p^\nu \leq x^{1/10}$, où M est défini en (4.1).

Le résultat suivant découle immédiatement des Lemmes 4.1, 4.2, 4.4, 4.8, 4.10, 4.7 et 4.3.

Lemme 4.11. *Il existe deux constantes $T > 0, c > 0$ telles que, pour toute constante $B > 0$, tout nombre réel x suffisamment grand, et sous les conditions (4.13), on ait*

$$|\mathcal{S}_w(x; c, T)| \geq \{1 - e^{-(\delta-1)h}\} \pi_w(x).$$

Pour chaque $n \in \mathcal{S}_w(x; c, T)$, notons

$$(4.14) \quad k_1(n) < k_2(n) < \dots < k_v(n)$$

les $v := \lfloor h/2 \rfloor$ plus petits entiers k distincts qui sont simultanément comptés dans les ensembles apparaissant en (ii), (iii), (iv), et désignons par \mathcal{K}_n leur ensemble.

Compte tenu de (4.1), nous déduisons de (i) que, pour tout $n \in \mathcal{S}_w(x; c, T)$, nous avons

$$(4.15) \quad \frac{1}{2} c_0 \log \psi \leq w - \omega(n_k) \leq 4c_0 \log \psi \quad (k \in \mathcal{K}_n).$$

Posons, avec la notation (3.19),

$$\mathcal{L}_t(m) := \{z \in \mathbb{R} : V_t(m, z) > t/\Theta^-\}, \quad \lambda_t(m) := \text{mes } \mathcal{L}_t(m).$$

Lemme 4.12 (Lemme fondamental). *Sous les conditions (4.13) et uniformément pour x assez grand, $n \in \mathcal{S}_w(x; c, T)$, $k \in \mathcal{K}_n$ et $\Theta^- \leq t \leq \Theta^+$, nous avons*

$$\lambda_t(n_k) \gg e^k.$$

Démonstration. Nous employons la méthode développée dans [4] pour établir l'inégalité (5.49), p. 109. Les détails étant très voisins, nous nous limitons à des indications succinctes.

Pour tout entier m sans facteur carré, nous avons

$$3^{\omega(m)} \leq \frac{t + \log m}{\Theta^-} + \left\{ 2\pi \lambda_t(m) \int_{-1/\Theta^-}^{1/\Theta^-} \varrho(m, \vartheta)^2 d\vartheta \right\}^{1/2}.$$

Appliquons cette inégalité pour $t \in [\Theta^-, \Theta^+]$ et $m = n_k$ lorsque $n \in \mathcal{S}_w(x; c, T)$, $k \in \mathcal{K}_n$, en tenant compte du fait que (4.1), (4.15) et (iii) impliquent, si la constante c_0 est choisie assez petite,

$$\frac{\log n_k}{\Theta^-} \leq \frac{40e^k 3^w}{\sqrt{\psi} \log x} \leq \frac{1}{4} 3^{\omega(n_k)} \quad \text{et} \quad \frac{t}{\Theta^-} \leq \frac{\Theta^+}{\Theta^-} = \frac{3^w}{\psi} \leq \frac{1}{4} 3^{\omega(n_k)}.$$

Posant

$$I(m) := \int_0^{1/\Theta^-} \frac{\varrho(m, \vartheta)^2}{3^{2\omega(m)}} d\vartheta \quad (m \geq 1),$$

il résulte de ce qui précède que

$$\lambda_t(n_k) I(n_k) \geq \frac{1}{16\pi} \quad (n \in \mathcal{S}_w(x; c, T), k \in \mathcal{K}_n),$$

de sorte que la preuve du Lemme 4.12 se réduit à établir que

$$I(n_k) \ll e^{-k}.$$

À cette fin, nous introduisons les contributions à l'intégrale $I(n_k)$ des domaines d'intégration $[0, e^{T-k}]$, $[e^{T-k}, 1]$ et $[1, \max(1, 1/\Theta^-)]$. Nous notons ces contributions respectives $I_j(n_k)$ ($1 \leq j \leq 3$). Ici et dans la suite, le paramètre T est tel que défini au Lemme 4.11.

Nous avons trivialement $I_1(n_k) \leq e^{T-k}$. De plus, les propriétés (ii) et (iv) permettent d'écrire

$$I_2(n_k) := \int_{e^{T-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \vartheta) 3^{-(\omega(n_k) - \omega_\vartheta(n_k))} d\vartheta \leq 3 \int_{e^{-k}}^1 \mathcal{R}(n_k, \vartheta) 3^{-\alpha \log(\vartheta e^k)} d\vartheta \ll e^{-k}.$$

Enfin, dans le cas non trivial où $\Theta^- < 1$, nous avons, d'après (4.13), (4.15) et (v),

$$\begin{aligned} I_3(n_k) &\leq 3 \int_1^{1/\Theta^-} \mathcal{R}(n_k, \vartheta) 3^{-\omega(n_k)} d\vartheta \\ &\ll \frac{\psi^{4c_0} (\log_2 x)^{4\varrho} e^h}{3^w \Theta^-} \ll \psi^{3c_0 - 1/2} (\log_2 x)^{4\varrho_0} e^{-k} \ll e^{-k} \end{aligned}$$

sous réserve de diminuer convenablement la valeur de la constante c_0 . □

4.4. Complétion de l'argument

Nous utilisons la technique développée dans la preuve de la proposition 1 de [9] ou du théorème 1 de [12] et reposant sur l'argument mis en place dans [6].

Soient B, x, w, ψ, t satisfaisant (1.5). Observons d'abord, qu'il suffit d'établir que l'inégalité

$$(4.16) \quad \nabla(n, t) \geq t/\Theta^- \quad (\Theta^- \leq t \leq \Theta^+).$$

a lieu avec la majoration annoncée pour le nombre d'exceptions. En effet, si l'entier n de $\mathcal{E}_w(x)$ vérifie (4.16), on a

$$\nabla(n, t) \geq \nabla(n, \Theta^+) \geq \frac{\Theta^+}{\Theta^-} = \frac{3^w}{\psi} \geq \frac{3^w t}{\psi \log x} \quad (\Theta^+ < t \leq \log x),$$

alors que la minoration requise découle de l'inégalité triviale $\nabla(n, t) \geq 1$ lorsque $t < \Theta^-$. Nous pouvons donc nous limiter à établir (4.16).

Le nombre δ étant défini par (4.12), les paramètres c et T étant fixés comme indiqué au Lemme 4.11 et la suite $\{k_j(n)\}_{j=1}^v$ étant définie, pour chaque entier n de $\mathcal{S}_w(x; c, T)$, comme précisé en (4.14), nous posons

$$\begin{aligned} E^w &:= \{n \in \mathcal{E}_w(x) : \nabla(n, t) \leq t/\Theta^-\}, \\ \mathcal{J}_s^w &:= \{n \in \mathcal{S}_w(x; c, T) : \nabla(n_{k_s(n)}, t) \leq t/\Theta^-\} \quad (1 \leq s \leq v := [h/2]). \end{aligned}$$

On a clairement $E^w \cap \mathcal{S}_w(x; c, T) \subset \mathcal{J}_v^w$. En vertu du Lemme 4.11, cela implique que

$$(4.17) \quad |E^w| \leq |\mathcal{J}_v^w| + \pi_w(x)e^{-(1-\delta)h}.$$

Nous allons estimer $|\mathcal{J}_s^w|$ ($1 \leq s \leq v$) par récurrence sur l'indice s . Pour chaque s , nous formons une partition de \mathcal{J}_s^w selon les valeurs de $k_s(n)$: notant

$$\mathcal{J}_{s,k}^w := \mathcal{J}_s^w \cap \{n \in \mathcal{S}_w(x; c, T) : k_s(n) = k\} \quad (k \in \mathcal{K}),$$

nous avons

$$(4.18) \quad \mathcal{J}_s^w = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{J}_{s,k}^w \quad (1 \leq s \leq v).$$

Nous introduisons alors, pour chaque s , les ensembles deux à deux disjoints

$$\mathcal{M}_{s,k}^w := \left\{ m \leq x : \exists n \in \mathcal{J}_{s,k}^w, m = \prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ \log_2 p \leq k}} p^\nu \right\}$$

et nous considérons l'ensemble $\mathcal{D}_{s,k}^w$ des entiers n de $\mathcal{E}_w(x)$ représentables sous la forme $n = mpqb$ où $m \in \mathcal{M}_{s,k}^w$, $P^-(b) > \exp(80e^k)$ et (p, q) est un couple de nombres premiers assujetti aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} e^k < \log p \leq 40e^k, \\ \log p < \log q \leq \log p + 40e^k, \\ \log q - \log p \in \mathcal{L}_t(m_k). \end{cases}$$

Ainsi, les $\mathcal{D}_{s,k}^w$ sont également deux à deux disjoints et l'on vérifie sans peine l'inclusion

$$\bigcup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{D}_{s,k}^w \cap \mathcal{S}_w(x; c, T) \subset \mathcal{J}_s^w \setminus \mathcal{J}_{s+1}^w \quad (1 \leq s < v).$$

Par le Lemme 4.11, nous en déduisons que

$$(4.19) \quad |\mathcal{J}_{s+1}^w| \leq |\mathcal{J}_s^w| - \sum_{k \in \mathcal{X}} |\mathcal{D}_{s,k}^w| + \pi_w(x) e^{-(1-\delta)h} \quad (1 \leq s < v).$$

Il reste à minorer $\mathcal{D}_{s,k}^w$. D'une part, nous avons

$$|\mathcal{D}_{s,k}^w| \geq \sum_{m \in \mathcal{M}_{s,k}^w} \sum_{(p,q)} \sum_b^* 1$$

où l'astérisque indique que la sommation porte sur les entiers $b \leq x_1 := x/(mpq)$ tels que $P^-(b) > y = \exp(e^{k+5})$ et $\omega(b) = j := w - \omega(m) - 2$. Les hypothèses du Lemme 3.2 sont alors satisfaites et l'on a $j \ll \log u$ avec $u := \log x_1 / \log y$. D'où

$$\sum_b^* 1 \gg \frac{x_1 (\log_2 x - k)^{j-1}}{(\log x_1)(j-1)!} \gg \frac{x (\log_2 x - k)^j}{(mpq)j! \log x}$$

puisque $j \asymp \log_2 x - k$. Par ailleurs, le Lemme 4.12 permet, par une manipulation standard reposant sur une application d'une forme forte du théorème des nombres premiers, d'obtenir la minoration

$$\sum_p \frac{1}{p} \sum_q \frac{1}{q} \gg 1.$$

Nous pouvons donc énoncer que

$$(4.20) \quad \mathcal{D}_{s,k}^w \gg \frac{x (\log_2 x - k)^j}{j! \log x} \sum_{m \in \mathcal{M}_{s,k}^w} \frac{1}{m}.$$

D'autre part, nous avons

$$(4.21) \quad |\mathcal{J}_{s,k}^w| \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_{s,k}^w} \sum_{b_2}^{**} 1$$

où la double astérisque indique que la somme ainsi mentionnée porte sur les entiers $b_2 \leq x_2 := x/m$ tels que $P^-(b_2) \geq \exp(e^k)$ et $\omega(b_2) = w - \omega(m) = j + 2$. En appliquant le Lemme 3.2 et la propriété (vi), on obtient

$$(4.22) \quad \sum_{b_2}^{**} 1 \ll \frac{x_2 (\log_2 x - k)^{j+1}}{(j+1)! \log x_2} \ll \frac{x (\log_2 x - k)^j}{mj! \log x}.$$

Nous déduisons de (4.20), (4.21) et (4.22) l'existence d'une constante $c_5 > 0$ telle que

$$(4.23) \quad |\mathcal{D}_{s,k}^w| \geq c_5 |\mathcal{J}_{s,k}^w|.$$

Supposons dans un premier temps que $|E^w| \geq (1 + 2/c_5) e^{-(1-\delta)h} \pi_w(x)$. Compte tenu de (4.17), pour tout entier $s \in [1, v]$, nous avons

$$|\mathcal{J}_s^w| \geq |\mathcal{J}_v^w| \geq |E^w| - \pi_w(x) e^{-(1-\delta)h} \geq (2/c_5) \pi_w(x) e^{-(1-\delta)h}.$$

Il découle donc des relations (4.23), (4.19) et (4.18) que

$$|\mathcal{J}_{s+1}^w| \leq (1 - \frac{1}{2}c_5) |\mathcal{J}_s^w| \quad (1 \leq s < v),$$

ce qui implique par récurrence sur s

$$|\mathcal{J}_v^w| \leq (1 - \frac{1}{2}c_5)^{v-1} |\mathcal{J}_1^w| \leq \pi_w(x) e^{-c_6 h}.$$

Compte tenu de (4.17), nous avons donc finalement établi que l'on a en toute circonstance

$$|E^w| \ll \{e^{-c_6 h} + e^{-(1-\delta)h}\} \pi_w(x) \ll e^{-c_7 h} \pi_w(x) \ll \pi_w(x) e^{-c_2 \sqrt{\log \psi}}.$$

□

5. Preuve du Corollaire 1.6

Pour n assez grand et tel que, par exemple, $3^{\omega(n)} > (\log n)^{21/20}$, nous posons

$$G(n) := 3^{\omega(n)} / \log n,$$

et $L_n := \exp \{(A + \varepsilon_n)(\log_2 n)^2\}$ où A est la constante apparaissant dans (1.10) et ε_n est choisi dans $[0, 1]$ de façon que

$$J_n := \frac{\log\{(\log n)G(n)L_n\}}{2 \log L_n} = \frac{\log\{3^{\omega(n)}L_n\}}{2 \log L_n} \in \mathbb{N}.$$

Définissons alors la suite

$$T_j := G(n)^{-1} L_n^{2j-1} \quad (j \geq 0),$$

qui vérifie donc $T_{J_n} = \log n$. D'après le Corollaire 1.4, nous avons

$$(5.1) \quad T_0 < E(n) \leq T_1 \quad \text{pp},$$

alors que (1.10) permet d'écrire

$$(5.2) \quad L_n^{2j-2} \leq \nabla^+(n, T_{j+1}) - \nabla^+(n, T_j) \leq L_n^{2j+3} \quad (0 \leq j < J_n) \quad \text{pp},$$

où nous avons tenu compte de (5.1) pour le cas $j = 0$. Par ailleurs, f étant nécessairement continue, il existe une suite $\{\xi_j\}_{j=0}^{J_n-1}$ telle que

$$T_j \leq \xi_j \leq T_{j+1} \quad (0 \leq j < J_n), \quad \int_{T_0}^{\log n} f(t) dt = \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{T_{j+1} - T_j\}.$$

Il suit, pour presque tout entier n ,

$$\begin{aligned} \vartheta(n; f) &\leq L_n^{2K(f)} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{\nabla^+(n, T_{j+1}) - \nabla^+(n, T_j)\} \leq \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) L_n^{2j+3+2K(f)} \\ &\leq 2G(n) L_n^{2+2K(f)} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{T_{j+1} - T_j\} = 2G(n) L_n^{2+2K(f)} \int_{T_0}^{\log n} f(t) dt. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_{T_0}^{1/G(n)} f(t) dt \leq L_n^{K(f)} \int_{1/G(n)}^{L_n/G(n)} f(t) dt \leq L_n^{K(f)} \int_{1/G(n)}^{\log n} f(t) dt,$$

nous avons établi la majoration contenue dans (1.11).

Pour montrer la minoration, nous écrivons, compte tenu de (5.1) et (5.2),

$$\begin{aligned} \vartheta(n; f) &\geq \frac{1}{2L_n^{2K(f)}} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{\nabla^+(n, T_{j+1}) - \nabla^+(n, T_j)\} \geq \frac{1}{2} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) L_n^{2j-2-2K(f)} \\ &\geq \frac{G(n)}{4L_n^{3+2K(f)}} \sum_{0 \leq j < J_n} f(\xi_j) \{T_{j+1} - T_j\} = \frac{G(n)}{4L_n^{3+2K(f)}} \int_{T_0}^{\log n} f(t) dt \quad \text{pp}. \end{aligned}$$

Cela complète la démonstration.

Remerciements. Les auteurs tiennent à exprimer leurs plus chaleureux remerciements à l'arbitre, dont la lecture exhaustive et méticuleuse a permis de rectifier un certain nombre d'imprécisions dans la version initiale de ce travail.

Bibliographie

- [1] K. Alladi, The distribution of $\nu(n)$ in the sieve of Eratosthenes, *Quart. J. Math. (2)*, **33** (1982), 129–148.
- [2] M. Balazard, Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **40**, 2 (1990), 255–270.
- [3] P. Erdős, On the density of some sequences of integers, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 685–692.
- [4] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge University Press (1988).
- [5] M. Mendès France & G. Tenenbaum, Systèmes de points, diviseurs, et structure fractale, *Bull. Soc. Math. de France* **121** (1993), 197–225.
- [6] H. Maier & G. Tenenbaum, On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121–128.
- [7] H. Maier & G. Tenenbaum, On the normal concentration of divisors, *J. London Math. Soc. (2)* **31** (1985), 393–400.
- [8] H. Maier & G. Tenenbaum, On the normal concentration of divisors, 2, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, à paraître.
- [9] A. Raouj, Sur la densité de certains ensembles de multiples, 1, *Acta Arith.* **69** (1995), 121–152.
- [10] A. Raouj & G. Tenenbaum, Sur l'écart quadratique moyen des diviseurs d'un entier normal, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **126** (1999), 399–415.
- [11] P. Shiu, A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions, *J. reine angew. Math.* **313** (1980), 161–170.
- [12] A. Stef, *L'ensemble exceptionnel dans la conjecture d'Erdős concernant la proximité des diviseurs*, Thèse de l'Université de Nancy I, 1992.
- [13] G. Tenenbaum, Sur la concentration moyenne des diviseurs, *Comment. Math. Helvetici* **60** (1985), 411–428.
- [14] G. Tenenbaum, A rate estimate in Billingsley's theorem for the size distribution of large prime factors, *Quart. J. Math. (Oxford)* **51** (2000), 385–403.
- [15] G. Tenenbaum, Sur l'écart quadratique moyen des diviseurs d'un entier normal, 2, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **138** (2005), 1–8.
- [16] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, coll. Échelles, Belin, 2008, 592 pp.

Abdelaziz Raouj
 Département de mathématiques
 Université Caddi Ayyad
 Faculté des sciences Semlalia
 BP S15
 Marrakech
 Maroc
 raouj@ucam.ac.ma

André Stef & Gérard Tenenbaum
 Institut Élie Cartan
 Université Henri Poincaré-Nancy 1
 BP 239
 54506 Vandœuvre Cedex
 France
 andre.stef@iecn.u-nancy.fr
 gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr