



HAL
open science

SUR QUELQUES MÉTHODES DE RÉGULARISATION DES INTÉGRALES DIVERGENTES, APPLICATION À LA RENORMALISATION

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. SUR QUELQUES MÉTHODES DE RÉGULARISATION DES INTÉGRALES DIVERGENTES, APPLICATION À LA RENORMALISATION. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2016. hal-01281271v1

HAL Id: hal-01281271

<https://hal.science/hal-01281271v1>

Submitted on 1 Mar 2016 (v1), last revised 14 Jul 2022 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SUR QUELQUES MÉTHODES DE RÉGULARISATION DES INTÉGRALES DIVERGENTES, APPLICATION À LA RENORMALISATION.

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Le but de cet article est de décrire quelques méthodes de calcul de régularisation d'intégrales divergentes intervenant dans la théorie de la renormalisation en physique. On donne une définition générale et on développe quelques procédés de régularisation à partir des séries de Dirichlet. Ces méthodes de régularisation sont développées en utilisant la régularisation des séries divergentes. Elles sont basées sur l'existence d'une extension analytique de certaines séries de Dirichlet. On est amené à décrire des notions nouvelles d'intégration comme l'intégration de Norlund, d'Abel, de Cesàro ainsi que les notions de mesure k -dimensionnelle d'un ensemble mesurable et celle d'extension analytique de ces mesures.

La renormalisation dimensionnelle est développée à partir des idées de Meyer sur la construction d'intégrales D -dimensionnelles. D'autres méthodes sont développées à partir de l'intégration et on donne une généralisation de la notion de mesure de Hausdorff. Une question s'impose: "Pourquoi choisir la régularisation dimensionnelle en physique?" Ce choix devient légitime si on peut donner un sens physique à cette régularisation. La régularisation dimensionnelle a-t-elle un sens physique?

1. INTRODUCTION

En 1972, t'Hooft et Veltman [2] ont développé une méthode de renormalisation par régularisation dimensionnelle. Elle consiste à faire un prolongement analytique de l'intégrale divergente pour des dimensions espace-temps variant dans \mathbb{C} , la fonction obtenue est méromorphe. On renormalise en retirant le terme qui diverge au pôle considéré. Cette méthode de calcul respecte l'unitarité, la causalité et l'invariance de "jauge". Par ce procédé le quadrivecteur impulsion s'écrit

$$I(z) = \int \frac{d^z p}{p^2 - m^2} = -i \frac{(2\pi)^z}{(4\pi)^{\frac{z}{2}}} m^{z-2} \Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right),$$

où Γ est la fonction d'Euler. On étudie la singularité en $z = 4$, en posant $z = 4 - \varepsilon$, on peut écrire

$$\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right) \sim -\frac{2}{\varepsilon} - 1 + \gamma + O(\varepsilon),$$

γ est la constante d'Euler qui est

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)\right).$$

Date: 5 Janvier 2016.

Key words and phrases. Séries de Dirichlet, Fonction zêta, Extension analytique, Intégrale de Lebesgue, Régularisation dimensionnelle, Renormalisation.

Ainsi, $I(z)$ a un pôle simple en $z = 4$,

$$I(z) \sim \frac{2\pi^2 m^2}{4-z} i + \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est fini dans un voisinage de $z = 4$. On renormalise en prenant pour $I(4)$, qui est l'intégrale cherchée, la valeur $\varphi(4)$. Mathématiquement, cette méthode est intéressante, physiquement on est en droit de se poser la question, que représente physiquement la quantité divergente $\frac{2\pi^2 m^2}{4-z} i$. On propose de décrire plusieurs procédés de renormalisation pour l'étude des intégrales divergentes qui, dans le cas de la régularisation k -dimensionnelle, permet de donner un sens mathématique à la régularisation des intégrales divergentes de la forme

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

et permet de comprendre l'interprétation géométrique de la notion de mesure par empilement des volumes des k -boules dans un ensemble mesurable.

2. INTÉGRALE RÉGULARISABLE

On se fixe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, on note

$$\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$$

l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans \mathbb{R} et on pose

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{M}, \mu)}{\sim}$$

les classes de fonctions mesurables pour la relation d'équivalence

$$f \sim g \iff \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0.$$

On définit l'opérateur de Lebesgue \mathcal{L} sur le sous-espace vectoriel \mathcal{E} de \mathcal{F} , des applications intégrables au sens de Lebesgue, par

$$\mathcal{L}(\tilde{f}) = \int_{\Omega} f d\mu, f \in \mathcal{E}.$$

Definition 1. *Si il existe une extension linéaire de \mathcal{L} à un sous-espace vectoriel \mathcal{R} de \mathcal{F} contenant \mathcal{E} , on dit que la mesure μ est régularisable sur \mathcal{R} et si cette extension est unique, on dit que la mesure μ est totalement régularisable sur \mathcal{R} .*

Voici trois exemples de régularisation qui motivent cette définition. Dans ce qui suit, on note $\mathbf{E} = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante, pour l'inclusion, de \mathcal{M} pour laquelle $E_0 = \emptyset$ et qui vérifie

$$\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Régularisation de Cesàro

Definition 2. \tilde{f} est une classe de Cesàro de \mathcal{F} si et seulement si la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_n = \int_{E_n \setminus E_{n-1}} f d\mu, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

existe et cette suite est une suite de Cesàro.

On note \mathcal{C} le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} défini par les classes de Cesàro.

Proposition 1. *La mesure μ est régularisable sur \mathcal{C} .*

Proof. Il faut montrer l'inclusion $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$. On utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue. La suite

$$s_n = \int_{E_n} f d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s = \int_{\Omega} f d\mu$$

si $f \in \mathcal{E}$. La suite de cesàro $\left\{ \frac{s_1 + \dots + s_n}{n} \right\}$ converge vers s et $\tilde{f} \in \mathcal{C}$. \square

Régularisation d'Abel

Avec les mêmes notations que précédemment,

Definition 3. \tilde{f} est une classe d'Abel de \mathcal{F} si et seulement si la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_n = \int_{E_n \setminus E_{n-1}} f d\mu, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

existe et cette suite est une suite d'Abel. La suite $\{a_n\}$ est une suite d'Abel si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

existe.

On note \mathcal{A} le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} défini par les classes d'Abel.

Proposition 2. La mesure μ est régularisable sur \mathcal{A} .

Proof. C'est encore le théorème de convergence dominée qui permet de conclure, en remarquant que le rayon de convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

est supérieur ou égal à 1 si $f \in \mathcal{E}$. \square

ζ -Régularisation

Definition 4. \tilde{f} est une ζ -classe de \mathcal{F} si et seulement si la suite $\{a_n\}$ définie par

$$a_n = \int_{E_n \setminus E_{n-1}} f d\mu, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

existe et cette suite est une ζ -suite pour une suite $\mathbf{E} = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{M} , croissante pour l'inclusion, pour laquelle $E_0 = \emptyset$. La suite $\{a_n\}$ est une ζ -suite si et seulement si

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

existe.

Proposition 3. La mesure μ est régularisable sur \mathcal{Z} .

3. RÉGULARISATION D'UNE MESURE μ

Soit $\mathbf{E} = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille croissante dénombrable d'ensembles mesurables de \mathcal{M} , formant un recouvrement de Ω . On pose $\mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ le sous-espace vectoriel formé des classes $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ telles que

$$\mathbf{1}_{E_n} f \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definition 5. *S'il existe une famille telle que $\mathcal{F}_{\mathbf{E}} = \mathcal{F}$, on dit que la mesure μ est presque finie.*

On définit la série de terme général

$$a_n = \int_{E_n \setminus E_{n-1}} f d\mu, \quad (3.1)$$

en posant $E_{-1} = \emptyset$ et soit ϕ une application linéaire d'un sous-espace vectoriel \mathcal{S} des suites réelles à valeurs dans \mathbb{R} contenant l'ensemble des suites $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum a_n$ converge. L'application $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière si

$$\phi(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

quand $\sum a_n$ est une série convergente, ϕ est stable si

$$\phi(\{a_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}) = \phi(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) - a_0.$$

Remark 1. *En particulier si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ alors $\{a_{n+m}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ et*

$$\phi(\{a_{n+m}\}_{n \in \mathbb{N}}) = \phi(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) - \left(\sum_{k=0}^m a_k \right).$$

L'opérateur

$$\mathcal{L}_{\mathbf{E}, \phi} : \mathcal{F}_{\mathbf{E}, \phi} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{L}(\tilde{f}) = \phi(\{a_n\}),$$

est une extension de l'opérateur de Lebesgue \mathcal{L} à

$$\mathcal{F}_{\mathbf{E}, \phi} = \left\{ \tilde{f} \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}} : \{a_n\} \in \mathcal{S} \right\}$$

où a_n est définie en 3.1.

Theorem 1. *Avec ces hypothèses, on a*

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_{\mathbf{E}, \phi}$$

et la mesure μ est régularisable sur $\mathcal{F}_{\mathbf{E}, \phi}$. Si μ est presque finie alors μ est régularisable sur \mathcal{F} .

Notation 1. *La régularisation ainsi définie est notée*

$$\mathcal{R}(\mathbf{E}, \phi, \mu).$$

4. RÉGULARISATION DES FONCTIONS MESURABLES POSITIVES

Dans ce qui suit, on propose différents types de régularisation des intégrales divergentes, sur un sous-ensemble mesurable de mesure finie, d'une fonction mesurable positive f sur Ω . Si f est une fonction mesurable positive, la suite d'ensembles mesurables $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$E_n = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq n\},$$

pour un sous-ensemble mesurable E et une suite $p = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres positifs telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{p_m}{p_m + p_{m-1} + \cdots + p_0} = 0.$$

On pose

$$\int_E f d^p \mu = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{p_m \int_{E \cap E_0} f d\mu + p_{m-1} \int_{E \cap E_1} f d\mu + \cdots + p_0 \int_{E \cap E_m} f d\mu}{p_m + p_{m-1} + \cdots + p_0}$$

si $\mu(E) < +\infty$ où $\int_{E \cap E_j} f d\mu$ est l'intégrale de Lebesgue de f sur $E \cap E_j$. L'intégrale ainsi définie est l'intégrale de Nörlund de f , sur E , associée à la suite $p = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Theorem 2. *L'intégrale de Nörlund est une régularisation de l'intégrale de Lebesgue de la fonction mesurable positive f .*

Proof. On a

$$\int_E (f + g) d^p \mu = \int_E f d^p \mu + \int_E g d^p \mu \text{ et } \int_E \lambda f d^p \mu = \lambda \int_E f d^p \mu$$

pour f et g mesurables positives. La linéarité s'étend à toutes les fonctions mesurables. Si $\int_E f d\mu < +\infty$ alors $\int_E f^p d\mu < +\infty$ et

$$\int_E f d\mu = \int_E f^p d\mu$$

donne la régularité de l'intégration de Nörlund. \square

Remark 2. *Si*

$$p_n = p_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

on définit l'intégrale de Cesàro d'ordre k .

Avec les mêmes notations et l'hypothèse $\mu(E) < +\infty$, on pose

$$a_n = \int_{(E_n \setminus E_{n-1}) \cap E} f d\mu \text{ pour } n \geq 1$$

et on définit la série entière

$$\mathbf{S}_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

la somme d'Abel d'une fonction f mesurable positive sur E est

$$\int_E f d^a \mu = \lim_{x \rightarrow 1^-} \mathbf{S}_f(x) \leq +\infty.$$

Theorem 3. *La somme d'Abel est une régularisation de l'intégrale de Lebesgue de la fonction mesurable positive f .*

On peut généraliser ce procédé de sommation d'Abel. Si la suite $\lambda = \{\lambda_n\}$ définie par

$$\lambda_n = \int_{E_n \cap E} f d\mu, \quad (4.1)$$

est strictement croissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Avec les notations précédentes, la somme généralisée d'Abel $\int_E f d^\lambda \mu$ est le prolongement analytique en 0, si il existe, de

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp(-\lambda_n x).$$

Remark 3. *Pour*

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \lambda_n = n,$$

\mathcal{A} n'a pas de prolongement analytique en 0. Donc, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ n'est pas régularisable par le procédé de sommation généralisé d'Abel associé à la suite $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$. En effet,

$$\lambda_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{x} = \log(n), \quad n \geq 1$$

et

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{dx}{x} = -\log\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 2.$$

La série d'Abel vérifie formellement

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n^x} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kn^{x+k}} \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(x+k) - 1}{k} = -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\zeta(x+k) - 1}{k} - (\zeta(x+1) - 1), \end{aligned}$$

$\mathcal{A}(x)$ n'admet pas de prolongement analytique en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\zeta(x+k) - 1}{k} = -1 + \gamma$$

et $\zeta(x+1)$ n'admet pas de prolongement analytique en 0.

Tous les procédés de régularisation précédents font intervenir une suite croissante de sous-ensembles mesurables. On veut que ces ensembles soient définis à partir de la fonctions à intégrer, les régularisations de type Dirichlet répondent à cette approche.

5. RÉGULARISATION DE DIRICHLET

Definition 6. Une fonction mesurable positive f a une régularisation de Dirichlet d'ordre λ sur un ensemble mesurable E si la série de Dirichlet

$$\mathcal{D}_\lambda f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \exp(-\lambda_n z)$$

a un prolongement analytique \mathcal{A} en 0, l'intégrale renormalisée est \mathcal{A} où

$$\alpha_n = \int_{E \cap \{\lambda_n \leq f < \lambda_{n+1}\}} f d\mu, \quad n \geq 0$$

la suite $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante de réels positifs tels que $\lambda_1 = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

On définit les deux fonctions de Dirichlet associées à $\mathcal{D}_\lambda f$,

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n \leq x} \alpha_n = \int_{E \cap \{f < \lambda_{E(x)+1}\}} f d\mu \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_\lambda(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} \alpha_n = \int_{E \cap \{f < \lambda_{[x]_\lambda+1}\}} f d\mu,$$

où $E(x)$ est la partie entière de x et $[x]_\lambda = \sup \{n : \lambda_n \leq x\}$. Si on note σ_c l'abscisse de convergence, σ_a l'abscisse de convergence absolue, σ_h l'abscisse d'holomorphie de $\mathcal{D}_\lambda f$, d'après le théorème de **Landau** si $\sigma_c \in \mathbb{R}$, on a $\sigma_c = \sigma_a = \sigma_h$ car la série est à termes positifs. Soit

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\mathcal{A}(n))}{\lambda_n},$$

pour $\int_E f d\mu = +\infty$, $L \geq 0$. Si $L > 0$ alors $\sigma_c = L$, si $L = 0$ alors $\sigma_c \leq 0$ et pour $\operatorname{Re}(z) > \sup\{0, \sigma_c\}$, $\mathcal{D}_\lambda f$ est donnée par

$$\mathcal{D}_\lambda f(z) = z \int_0^{+\infty} \mathcal{A}_\lambda(x) \exp(-zx) dx = z \mathcal{L}(\mathcal{A}_\lambda)(z)$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\lambda)$ désigne la transformée de Laplace de la fonction causale \mathcal{A}_λ . Si $\mu(E) < +\infty$ alors $\mathcal{A}(n)$ est majoré par

$$\mathcal{A}(n) = \int_{E \cap \{f < \lambda_{n+1}\}} f d\mu \leq \lambda_{n+1} \mu(E),$$

$$\frac{\log(\mathcal{A}(n))}{\lambda_n} \leq \frac{\log(\lambda_{n+1})}{\lambda_n} + \frac{\log(\mu(E))}{\lambda_n}$$

et

$$L \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\lambda_{n+1})}{\lambda_n}.$$

En particulier, si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} < +\infty \tag{5.1}$$

alors $L = 0$ et $\sigma_c \leq 0$. Sous l'hypothèse 5.1, si $\sigma_c \in \mathbb{R}$ alors σ_c est un point singulier de $\mathcal{D}_\lambda f$, il n'y a pas d'extension analytique de $\mathcal{D}_\lambda f$ en 0 si $\sigma_c = 0$. Si $\sigma_c < 0$, $\mathcal{D}_\lambda f(z)$ est holomorphe sur $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$, l'extension analytique en 0 est $\mathcal{D}_\lambda f(0)$. Dans le cas général, pour $L > 0$, $\mathcal{D}_\lambda f$ admet une extension analytique en 0 sous certaines hypothèses. Soit

$$\mathcal{D}_\lambda F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \exp(-\nu_n z), \quad \nu_n = \exp(\lambda_n),$$

cette série de Dirichlet converge pour $\operatorname{Re}(z) > 0$ si $\sigma_c < +\infty$, le théorème de Hardy-Fekete [1], affirme que si $\mathcal{D}_\lambda F(z)$ admet une extension méromorphe en 0 alors $\mathcal{D}_\lambda f(z)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, dont les pôles éventuels sont des pôles simples situés en $1, 2, \dots, q$ où q est l'ordre

du pôle 0 de $\mathcal{D}_\lambda F$. En particulier, $\mathcal{D}_\lambda f$ admet une extension analytique en 0 qui permet de définir la régularisation de Dirichet d'ordre λ de l'intégrale divergente $\int_E f d\mu$ pour une fonction f mesurable positive.

Remark 4. *Soit*

$$\mathcal{D}_\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\lambda_n} \text{ et } \mathcal{G}_\lambda = \liminf_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

alors $\mathcal{D}_\lambda = 0$, $\mathcal{G}_\lambda > 0$ et $\sigma_c \in \mathbb{R}$, tous les points de la droite $\text{Re}(z) = \sigma_c$ sont singuliers, en particulier si $\sigma_c > 0$, $\mathcal{D}_\lambda f$ n'a pas d'extension analytique en 0. Pour $\mathcal{D}_\lambda \in \mathbb{R}, \sigma_c \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{G}_\lambda > 0$, tout segment de longueur $\frac{2\pi}{\mathcal{G}_\lambda}$ de la droite $\text{Re}(z) = \sigma_c$ contient un point singulier.

Proposition 4. *Si λ est une sous-suite de η , on a*

$$\sup \{0, \sigma_c(\lambda)\} \geq \sup \{0, \sigma_c(\eta)\}.$$

Proof. Soient λ et η deux suites strictement croissantes de réels positifs telles que $\lambda_1 = \eta_1 = 0$ avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = +\infty,$$

si λ est une sous-suite de η , il existe une application $\phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\phi(1) = 1$, $\lambda_n = \eta_{\phi(n)}$ avec $n \leq \phi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$\alpha_n = \int_{E \cap \{\lambda_n \leq f < \lambda_{n+1}\}} f d\mu \text{ et } \beta_n = \int_{E \cap \{\eta_n \leq f < \eta_{n+1}\}} f d\mu, n \geq 0$$

alors

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_{E \cap \{\eta_{\phi(n)} \leq f < \eta_{\phi(n+1)}\}} f d\mu \\ &= \sum_{k=0}^{\phi(n+1) - \phi(n) - 1} \int_{E \cap \{\eta_{\phi(n)+k} \leq f < \eta_{\phi(n)+k+1}\}} f d\mu \\ &= \sum_{k=0}^{\phi(n+1) - \phi(n) - 1} \beta_{\phi(n)+k}, \end{aligned}$$

les séries sont à termes positifs, donc $\sigma_c(\lambda) = \sigma_a(\lambda)$ et $\sigma_c(\eta) = \sigma_a(\eta)$, on a pour $\text{Re}(z) \geq 0$

$$\begin{aligned} \alpha_n \exp(-\lambda_n \text{Re}(z)) &= \sum_{k=0}^{\phi(n+1) - \phi(n) - 1} \beta_{\phi(n)+k} \exp(-\eta_{\phi(n)+k} \text{Re}(z)) \\ &\geq \sum_{k=0}^{\phi(n+1) - \phi(n) - 1} \beta_{\phi(n)+k} \exp(-\eta_{\phi(n)+k} \text{Re}(z)) \end{aligned}$$

et $\sup \{0, \sigma_c(\lambda)\} \geq \sup \{0, \sigma_c(\eta)\}$ car pour $\operatorname{Re}(z) > \sup \{0, \sigma_c(\lambda)\}$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \exp(-\eta_n \operatorname{Re}(z)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\phi(n+1)-\phi(n)-1} \beta_{\phi(n)+k} \exp(-\eta_{\phi(n)+k} \operatorname{Re}(z)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \exp(-\lambda_n \operatorname{Re}(z)) < +\infty. \end{aligned}$$

□

Remark 5. Si on pose $\sigma = \sup \{0, \inf \{\sigma_c(\eta)\}\}$ où $\eta = \{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ parcourt l'ensemble des suites strictement croissantes de réels positifs tels que $\eta_1 = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = +\infty,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite η pour laquelle $\mathcal{D}_\eta f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \exp(-\eta_n z)$ converge pour $\operatorname{Re}(z) > \sigma_\varepsilon$,

$$\sigma_\varepsilon = \sigma + \varepsilon.$$

6. RÉGULARISATION DES SÉRIES ENTIÈRES

Definition 7. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence 1, on pose

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_{n-1}}{n^{z+1}}$$

la série de Dirichlet associée à f . L'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est régularisable si et seulement si $\widehat{f}(z)$ a un prolongement analytique L en 0 et sa régularisation est L .

La motivation de cette définition est donnée par l'approche formelle suivante, si les symboles \int , \sum et les symboles \sum , \lim sont permutable alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_{n-1}}{n} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_{n-1}}{n^{z+1}}, \end{aligned}$$

on retombe sur les calculs d'intégration classique. Par exemple, soit $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ donne par changement de variable $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ a pour développement en série entière $\frac{1}{(1-x)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ et

$$\widehat{f}_2(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = -\zeta(z)$$

est prolongeable en 0 et vaut $-\zeta(0) = \frac{1}{2}$. Un autre exemple, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ s'écrit $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^3}$ et on a

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n$$

et $\beta_{n-1} = (n+1)n$,

$$\widehat{f}_3(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^z} = \zeta(z-1) + \zeta(z)$$

On a $\widehat{f}_3(0) = \zeta(-1) + \zeta(0) = -\frac{1}{12} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{12}$, la régularisation de $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ est $-\frac{7}{12}$. De manière générale, pour $\alpha > 1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ est régularisable si $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha}$ est régularisable par développement en série, on a

$$\widehat{f}_\alpha(z) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{n!n^z},$$

qui a pour prolongement analytique, si il existe

$$\widehat{f}_\alpha(0) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{n!},$$

remarquons que dans le cas $\alpha = 1$, on ne peut pas régulariser par une série car

$$\widehat{f}_1(z) = \zeta(z+1)$$

n'a pas de prolongement analytique en 0, pour cette intégrale il faut définir d'autres procédés de régularisation.

7. LA β -RÉGULARISATION

On rappelle que la régularisation d'une mesure μ est une extension $\mathcal{R} = (\mathcal{E}_R, \mathcal{L}_R)$ de $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ où \mathcal{E} est formé des classes de fonctions mesurables \tilde{f} qui sont μ -intégrables au sens de Lebesgue, $\mathcal{L}(\tilde{f}) = \int_\Omega f d\mu$, \mathcal{E}_R est un sous-espace vectoriel de \mathcal{F} contenant \mathcal{E} et \mathcal{L}_R est une forme linéaire sur \mathcal{E}_R pour laquelle $\mathcal{L}_R|_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}$. On dit que deux régularisations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont compatibles si et seulement si

$$\mathcal{L}_{R_1}|_{\mathcal{E}_{R_1} \cap \mathcal{E}_{R_2}} = \mathcal{L}_{R_2}|_{\mathcal{E}_{R_1} \cap \mathcal{E}_{R_2}},$$

et $\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2$ si $\mathcal{E}_{R_1} \subset \mathcal{E}_{R_2}$, \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 compatibles. La régularisation \mathcal{R} est maximale si la condition

$$\mathcal{R} \preceq \mathcal{R}' \implies \mathcal{R} = \mathcal{R}'$$

le but de la régularisation d'une mesure μ est de décrire toutes les régularisations maximales pour cette mesure. On se restreint à \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue et on identifie les classes \tilde{f} à leurs représentants f . Dans ce qui suit, on veut construire une renormalisation de la mesure de Lebesgue qui permet de régulariser les intégrales du type

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \geq 1.$$

On définit un procédé de régularisation dit β -régularisation qui n'est pas compatible avec le procédé de régularisation des séries entières. Cette β -régularisation

a la propriété de régulariser l'intégrale divergente d'une fonction mesurable positive par un nombre positif contrairement au procédé de régularisation par séries entières.

Definition 8. Soit $\beta > 1$, une suite $\{\lambda_n\}$ est une β -suite si et seulement si

$$\lambda_0 = 0, \forall n > 1 \lambda_n > 0 \text{ et } \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = 1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Lemma 1. Une β -suite est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$.

Definition 9. La β -régularisation d'une fonction positive mesurable f est le prolongement analytique en 0 de la série de Dirichlet

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n^z},$$

où

$$\alpha_n = \int_{I \cap \{\lambda_{n-1} \leq f < \lambda_n\}} f dx,$$

$\{\lambda_n\}$ est une β -suite fixée et I est un intervalle borné.

Cette définition est motivée par la régularisation de $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Les coefficients α_n s'écrivent

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{dx}{x} = \log \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{\beta}}} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{kn^{\frac{k}{\beta}}}, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

La série de Dirichlet associée à $f(x) = \frac{1}{x}$ est pour $\text{Re}(z) > 1$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n^z} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{z+\frac{k}{\beta}}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta \left(z + \frac{k}{\beta} \right)}{k}, \end{aligned}$$

si $\beta \notin \mathbb{N}^*$ cette fonction admet un prolongement analytique en 0, ce prolongement est

$$\widehat{f}(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta \left(\frac{k}{\beta} \right)}{k}$$

qui est une série alternée qui vérifie les critères de convergence des séries alternées.

Pour $k > \beta$, la suite $\left\{ \frac{\zeta \left(\frac{k}{\beta} \right)}{k} \right\}_{k > \beta}$ est une suite décroissante avec

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\zeta \left(\frac{k}{\beta} \right)}{k} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k - \beta} = 0.$$

Theorem 4. *La β -régularisation de $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, pour $\beta \notin \mathbb{N}^*$, est*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta\left(\frac{k}{\beta}\right)}{k}.$$

On peut régulariser $\int_0^a \frac{dx}{x^2-a^2}$ qui peut s'écrire en utilisant la linéarité de la régularisation

$$-\frac{1}{2a} \int_0^a \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int_0^a \frac{dx}{x+a},$$

$$\frac{1}{2a} \int_0^a \frac{dx}{a-x} = \frac{1}{2a} \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

qui a pour β -régularisation

$$\frac{1}{2a} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta\left(\frac{k}{\beta}\right)}{k}$$

et la β -régularisation de $\int_0^a \frac{dx}{x^2-a^2}$ est

$$\frac{1}{2a} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta\left(\frac{k}{\beta}\right)}{k} - \log(a) \right).$$

8. ZÊTA-RÉGULARISATION

Definition 10. *Soit f une fonction mesurable positive, μ une mesure sur Ω . On note \mathcal{S}_f , l'ensemble des suites strictement croissantes telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$, $\lambda_1 = 0$ et pour lesquelles la série de Dirichlet*

$$\widehat{f}_\lambda(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^z}$$

admet un prolongement analytique en 0 positif, la suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^}$ est définie par*

$$\alpha_n = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\lambda_n \leq f < \lambda_{n+1}\}} f d\mu.$$

La fonction f est zêta-régularisable pour μ si et seulement si $\mathcal{S}_f \neq \emptyset$, la régularisation est donnée

$$\int_{\Omega} f d^Z \mu = \inf \left\{ \int_{\Omega} f d^\lambda \mu : \lambda \in \mathcal{S}_f \right\}$$

où $\int_{\Omega} f d^\lambda \mu$ est la valeur du prolongement analytique de \widehat{f}_λ en 0.

On rappelle que

$$\lambda_n \mu(E) \leq \alpha_n \leq \lambda_{n+1} \mu(E)$$

si $\mu(E) < +\infty$

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\mathcal{A}(n))}{\log(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\lambda_{n+1})}{\log(n)},$$

$L > 0$ alors $\sigma_c = L$, $L = 0$ alors $\sigma_c \leq 0$ et pour z tel que $x = \operatorname{Re}(z) > \max\{0, \sigma_c\}$, $\widehat{f}_\lambda(z)$ s'écrit

$$\begin{aligned}\widehat{f}_\lambda(x) &= x \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}} \left(\int_{E \cap \{f < \lambda_{E(t)+1}\}} f d\mu \right) dt \\ &= x \int_{E \times [1, +\infty[} \frac{\mathbf{1}_{\{f < \lambda_{E(t)+1}\}} f}{t^{1+x}} d\mu dt \\ &= x \int_E \left(\int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\{f < \lambda_{E(t)+1}\}} f}{t^{1+x}} dt \right) d\mu,\end{aligned}$$

par le théorème de Fubini appliqué aux fonctions mesurables positives, on a

$$\begin{aligned}\widehat{f}_\lambda(x) &\leq x \mu(E) \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k+1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{1+x}} dt \\ &= \mu(E) \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k+1} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right).\end{aligned}$$

Pour $x > \max\{1, \sigma_c\}$

$$\widehat{f}_\lambda(x) \leq \mu(E) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{k^x},$$

en particulier, pour la suite $\lambda = \{\lambda_k\}$ dont les termes sont les sommes partielles de la fonction ζ en p ,

$$\lambda_1 = 0 \text{ et pour } k \geq 1, \lambda_{k+1} = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m^\alpha} \text{ avec } \alpha \leq 1 \quad (8.1)$$

on a

$$\widehat{f}_\lambda(x) \leq \mu(E) \zeta(x + \alpha).$$

La fonction ζ_α définie par

$$\zeta_\alpha(z) = \zeta(z + \alpha)$$

a pour abscisse de convergence $c_{\zeta_\alpha} = 1 - \alpha$ et dans l'hypothèse 8.1, on a

$$\widehat{f}_{\lambda_\alpha}(x) \leq \mu(E) \zeta(x + \alpha)$$

pour tout $\alpha \leq 1$ et $x > \max\{1, \sigma_c\}$.

Theorem 5. *La zêta-régularisation est une régularisation de la mesure μ .*

Proof. Si $f \geq 0$ et f est une fonction Lebesgue intégrable pour la mesure μ alors pour toute suite $\{\lambda_n\} \in \mathcal{S}_f$, la série de terme général positif $\alpha_n = \int_\Omega \mathbf{1}_{\{\lambda_n \leq f < \lambda_{n+1}\}} f d\mu$ est convergente, de somme $\int_\Omega f d\mu$ par le théorème de convergence monotone de Lebesgue. La série de Dirichlet $\widehat{f}_\lambda(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^z}$ a un prolongement analytique en 0 qui a pour valeur $\int_\Omega f d\mu < +\infty$ et

$$\int_\Omega f d^z \mu = \int_\Omega f d\mu.$$

On vérifie la linéarité

$$\int_\Omega f d^z \mu + \int_\Omega g d^z \mu = \int_\Omega (f + g) d^z \mu \quad (8.2)$$

pour f, g mesurables positives telles que $\mathcal{S}_f \neq \emptyset$ et $\mathcal{S}_g \neq \emptyset$. Si $\lambda \in \mathcal{S}_f$ et $\nu \in \mathcal{S}_g$ alors la suite σ , définie par les éléments de $\lambda \cup \nu$ vérifiant $\sigma_n < \sigma_{n+1}$ pour lesquels il n'existe aucun élément $\theta \in \mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g$ vérifiant $\sigma_n < \theta < \sigma_{n+1}$, est une suite de \mathcal{S}_{f+g} . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda \in \mathcal{S}_f, \nu \in \mathcal{S}_g$ et $\gamma \in \mathcal{S}_{f+g}$ telles que

$$\int_{\Omega} f d^{\mathcal{Z}} \mu \leq \int_{\Omega} f d^{\lambda} \mu \leq \int_{\Omega} f d^{\mathcal{Z}} \mu + \varepsilon, \quad \int_{\Omega} g d^{\mathcal{Z}} \mu \leq \int_{\Omega} g d^{\nu} \mu \leq \int_{\Omega} g d^{\mathcal{Z}} \mu + \varepsilon,$$

$$\int_{\Omega} (f+g) d^{\mathcal{Z}} \mu \leq \int_{\Omega} (f+g) d^{\sigma} \mu \leq \int_{\Omega} (f+g) d^{\mathcal{Z}} \mu + \varepsilon$$

et

$$\int_{\Omega} (f+g) d^{\mathcal{Z}} \mu \leq \int_{\Omega} f d^{\mathcal{Z}} \mu + \int_{\Omega} g d^{\mathcal{Z}} \mu \leq \int_{\Omega} (f+g) d^{\mathcal{Z}} \mu + \varepsilon.$$

Soit γ la suite formée par les éléments de $\lambda \cup \nu \cup \sigma$ muni de l'ordre induit par \mathbb{R} , $\gamma_n < \gamma_{n+1}$ si il n'existe aucun élément $\theta \in \lambda \cup \nu \cup \sigma$ tel que $\gamma_n < \theta < \gamma_{n+1}$. Pour cette suite on a

$$\int_{\Omega} f d^{\mathcal{Z}} \mu \leq \int_{\Omega} f d^{\gamma} \mu \leq \int_{\Omega} f d^{\mathcal{Z}} \mu + \varepsilon$$

$$\int_{\Omega} g d^{\mathcal{Z}} \mu \leq \int_{\Omega} g d^{\gamma} \mu \leq \int_{\Omega} g d^{\mathcal{Z}} \mu + \varepsilon$$

et

$$\int_{\Omega} (f+g) d^{\mathcal{Z}} \mu \leq \int_{\Omega} (f+g) d^{\gamma} \mu \leq \int_{\Omega} (f+g) d^{\mathcal{Z}} \mu + \varepsilon.$$

La suite λ est une sous-suite de γ , $\lambda_n = \gamma_{\phi(n)}$ pour une fonction ϕ croissante pour laquelle $n \leq \phi(n)$, pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{k=0}^{\phi(n+1)-\phi(n)-1} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\gamma_{\phi(n)+k} \leq f < \gamma_{\phi(n)+k+1}\}} f d\mu \\ &= \sum_{k=0}^{\phi(n+1)-\phi(n)-1} \beta_{\gamma_{\phi(n)+k+1}} = \sum_{k=1}^{\phi(n+1)-\phi(n)} \beta_{\gamma_{\phi(n)+k}}, \\ \frac{\alpha_n}{n^x} &\geq \sum_{k=1}^{\phi(n+1)-\phi(n)} \frac{\beta_{\gamma_{\phi(n)+k}}}{(\phi(n)+k)^x}, \quad \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n^x} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\phi(n+1)-\phi(n)} \frac{\beta_{\gamma_{\phi(n)+k}}}{(\phi(n)+k)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n^x}$$

car les termes sont positifs et

$$\int_{\Omega} f d^{\lambda} \mu \geq \int_{\Omega} f d^{\gamma} \mu,$$

pour g l'inégalité est encore vérifiée

$$\int_{\Omega} f d^{\lambda} \mu \geq \int_{\Omega} f d^{\gamma} \mu \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} g^{\nu} d^{\lambda} \mu \geq \int_{\Omega} g d^{\gamma} \mu. \quad (8.3)$$

De

$$\int_{\Omega} (f+g) d^{\gamma} \mu = \int_{\Omega} f d^{\gamma} \mu + \int_{\Omega} g d^{\gamma} \mu,$$

et en utilisant les inéquations 8.3, on a

$$-2\varepsilon \leq \int_{\Omega} f d^{\mathbb{Z}}\mu + \int_{\Omega} g d^{\mathbb{Z}}\mu - \int_{\Omega} (f+g) d^{\mathbb{Z}}\mu \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation 8.2 est vérifiée. Pour f mesurable à valeurs dans \mathbb{R} , f est zêta-renormalisable si f^+ et f^- sont zêta-renormalisables et $\int_{\Omega} f d^{\mathbb{Z}}\mu = \int_{\Omega} f^+ d^{\mathbb{Z}}\mu - \int_{\Omega} f^- d^{\mathbb{Z}}\mu$. L'espace de toutes les fonctions zêta-renormalisables forme un sous-espace $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$ contenant \mathcal{E} et la forme linéaire

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(f) = \int_{\Omega} f d^{\mathbb{Z}}\mu$$

est une extension de l'intégrale de Lebesgue $\mathcal{L}(f) = \int_{\Omega} f d\mu$ pour $f \in \mathcal{E}$. \square

Corollary 1. *L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ est zêta-régularisable et*

$$\int_0^1 \frac{d^{\mathbb{Z}}x}{x} \leq \frac{\log(2)}{2}.$$

On s'intéresse à la zêta-régularisation des intégrales $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$ pour $\alpha > 1$. Si $f_{\alpha}(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $x > 0$ alors \mathcal{S}_f contient la suite λ définie par $\lambda_n = n^{\alpha}$,

$$\alpha_n = \frac{\alpha n^{\alpha-1}}{\alpha-1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} - 1 \right)$$

si $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ alors

$$\alpha_n = \frac{\alpha n^{\alpha-1}}{\alpha-1} \sum_{k=1}^{k=\alpha-1} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{k!n^k}$$

et pour $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{\lambda}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^z} = \frac{\alpha}{\alpha-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{k=\alpha-1} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{k!n^{z+k-\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \sum_{k=1}^{k=\alpha-1} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{k!} \zeta(z+k-\alpha+1) \end{aligned}$$

qui a un prolongement analytique en 0 qui est

$$\widehat{f}_{\lambda}(0) = \frac{\alpha}{\alpha-1} \sum_{k=1}^{k=\alpha-1} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{k!} \zeta(k-\alpha+1)$$

car $k-\alpha+1 \leq 0$. Si $\alpha \notin \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\alpha > 1$, pour $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{\lambda}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^z} = \frac{\alpha}{\alpha-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{k!n^{z+k-\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{k!} \zeta(z+k-\alpha+1) \end{aligned}$$

qui a pour prolongement analytique en 0

$$\widehat{f}_{\lambda}(0) = \frac{\alpha}{\alpha-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{k!} \zeta(k-\alpha+1),$$

toutes les intégrales $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ sont zêta-régularisables pour $\alpha \geq 1$.

9. RÉGULARISATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE MESURE μ

Pour un entier $k \geq 1$, le volume de la boule de rayon r , de dimension k est

$$\mathbf{V}_r(k) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}} r^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)},$$

on note,

$$\mathbf{V}_r(z) = \frac{\pi^{\frac{z}{2}} r^z}{\Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)}$$

l'extension analytique associée à la suite $\{\mathbf{V}_r(k)\}$. Soit E un ensemble mesurable de Ω , de mesure finie $\mu(E)$, on pose

$$\eta_1(k) = \mathbf{E} \left(\frac{\mu(E)}{\mathbf{V}_1(k)} \right),$$

où $\mathbf{E}(x)$ désigne la partie entière de x et

$$\eta_2(k) = \mathbf{E} \left(\frac{\mu(E) - \eta_1(k) \mathbf{V}_1(k)}{\mathbf{V}_{\frac{1}{2}}(k)} \right),$$

par récurrence

$$\eta_n(k) = \mathbf{E} \left(\frac{\mu(E) - \eta_1(k) \mathbf{V}_1(k) - \eta_2(k) \mathbf{V}_{\frac{1}{2}}(k) - \cdots - \eta_{n-1}(k) \mathbf{V}_{\frac{1}{n-1}}(k)}{\mathbf{V}_{\frac{1}{n}}(k)} \right).$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(k) \mathbf{V}_{\frac{1}{n}}(k)$, est une série convergente qui converge vers $\mu(E)$,

$$0 \leq \mu(E) - \sum_{n=1}^N \eta_n(k) \mathbf{V}_{\frac{1}{n}}(k) < \mathbf{V}_{\frac{1}{N}}(k),$$

cette série a une représentation analytique

$$\mu_+^z(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(k) \mathbf{V}_{\frac{1}{n}}(z) = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\eta_n(k)}{n^z} \quad (9.1)$$

où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\eta_n(k)}{n^z}$ est la série de Dirichlet de coefficients $\{\eta_n(k)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Remark 6. Dans l'extension analytique 9.1, on n'étend pas analytiquement les coefficients $\eta_n(k)$, on peut donner une extension de $\eta_n(k)$ de la forme

$$\eta_n(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_n(k) \frac{\zeta(2(k-z)) \zeta(2(z-k))}{\zeta(0)^2},$$

où ζ est l'extension analytique de la fonction zêta sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, l'extension 9.1 peut s'écrire

$$\mu_+^z(E) = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\eta_n(z)}{n^z},$$

la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\eta_n(z)}{n^z}$ n'est plus une série de Dirichlet et l'extension $\eta_n(z)$ n'est pas unique.

On a

$$0 \leq \frac{\mu(E) - \sum_{n=1}^N \eta_n(k) \mathbf{V}_{\frac{1}{n}}(k)}{\mathbf{V}_{\frac{1}{N+1}}(k)} < \frac{\mathbf{V}_{\frac{1}{N}}(k)}{\mathbf{V}_{\frac{1}{N+1}}(k)} = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k,$$

en particulier, $\eta_N \leq \mathbb{E}\left(\left(1 + \frac{1}{N}\right)^k\right)$ et pour $N > \frac{1}{-1 + \sqrt[k]{2}}$ alors $\eta_N(k) = 0$ ou $\eta_N(k) = 1$. On peut ainsi décomposer la série de Dirichlet $\mu_+^z(E)$ en deux parties

$$\mu_+^z(E) = \sum_{n=1}^{\mathbb{E}\left(\frac{1}{-1 + \sqrt[k]{2}}\right)} \eta_n(k) \mathbf{V}_{\frac{1}{n}}(z) + \sum_{n=\mathbb{E}\left(\frac{1}{-1 + \sqrt[k]{2}}\right)+1}^{+\infty} \eta_{k,n}(k) \mathbf{V}_{\frac{1}{n}}(z),$$

le premier terme de la somme est la partie principale, le second est la partie résiduelle. Pour tout $x > 1$,

$$\sum_{n=\mathbb{E}\left(\frac{1}{-1 + \sqrt[k]{2}}\right)+1}^{+\infty} \eta_n(k) \mathbf{V}_{\frac{1}{n}}(x) \leq \zeta(x)$$

l'abscisse de convergence σ_c de $\mu_+^z(E)$ vérifie $\sigma_c \leq 1$.

Remark 7. Les coefficients $\eta_n(k)$ dépendent de $\mu(E)$ et des k -boules, on dit que $\mu_+^z(E)$ est une extension analytique géométrique de dimension k de $\mu(E)$.

Definition 11. Soit $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ une fonction étagée, l'intégrale géométrique de dimension k sur E est définie par

$$\int_E s d^z \mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_+^z(E \cap E_i).$$

Remark 8. Cette définition nous fait perdre le caractère linéaire de la régularisation, on est amené à définir la régularisation de l'intégrale d'une fonction mesurable par une autre approche que le passage à la limite des intégrales des fonctions étagées.

On veut définir

$$\int_E f d^z \mu \text{ pour } \mu(E) < +\infty, f \geq 0 \text{ et mesurable,}$$

on remarque que $\int_E f d\mu = \mu \otimes \lambda(E_f)$ où

$$E_f = \{(\omega, x) : \omega \in \Omega, 0 \leq x \leq f(\omega)\}$$

et $\mu \otimes \lambda$ est la mesure produit de μ et de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Pour $\int_E f d\mu < +\infty$, on pose

$$\int_E f d^z \mu = (\mu \otimes \lambda)_+^z(E_f)$$

et pour $\int_E f d\mu = +\infty$, si

$$E_{f,n} = \{(\omega, x) : \omega \in \Omega, 0 \leq x \leq \inf\{f(\omega), n\}\},$$

alors $\mu(E_{f,n}) < +\infty$ et

$$\int_E f d^z \mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu \otimes \lambda)_+^z(E_{f,n}).$$

La série de Dirichlet $(\mu \otimes \lambda)_+^z(E_{f,n})$ converge en $z = k$, son indice de convergence $\sigma_c \leq k$ et les coefficients de cette série $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour lesquels

$$(\mu \otimes \lambda)_+^z(E_{f,n}) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{m,n}}{m^z}$$

sont des entiers positifs ou nuls. On peut permuter le signe \lim et \sum pour $x > k$ dans

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{m,n}}{m^x} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{m,n}}{m^x} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_m}{m^x} \leq +\infty,$$

si la série de Dirichlet $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_m}{m^z}$ a pour indice de convergence $\sigma_c = k$ alors si k est un pôle d'ordre $p \geq 1$, on définit la régularisée k -dimensionnelle

$$\mathcal{R} \left(\int_E f d\mu \right) = \phi(k)$$

où

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha_m}{m^z} = \frac{A_p}{(z-k)^p} + \frac{A_{p-1}}{(z-k)^{p-1}} + \dots + \frac{A_1}{z-k} + \phi(z).$$

Cette définition dépend du choix de $\{E_{f,n}\}$, peut-on définir une notion de régularisation intrinsèque? De 9.1, on définit la série de Dirichlet alternée

$$\mu_-^z(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n \mathbf{V}_{\frac{1}{n}}(z) = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma(\frac{z}{2} + 1)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \eta_n}{n^z},$$

alors si $E \subset F$ on a pour tous les $x > \sigma$, $\mu_-^x(E) \leq \mu_-^x(F)$ où σ est le plus grand des indices de convergence de $\mu_-^z(E)$ et $\mu_-^z(F)$. Si $\{\lambda_n\}$ est une suite strictement croissante telle que $\lambda_0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$,

$$E_{f,\lambda_n} = \{(\omega, x) : \omega \in \Omega, 0 \leq x \leq \inf\{f(\omega), \lambda_n\}\}$$

et

$$E_{f,E(\lambda_n)} \subset E_{f,\lambda_n} \subset E_{f,E(\lambda_n)+1},$$

$$\mu_-^x(E_{f,E(\lambda_n)}) \leq \mu_-^x(E_{f,\lambda_n}) \leq \mu_-^x(E_{f,E(\lambda_n)+1}).$$

On en déduit que la série de Dirichlet alternée est indépendante du choix de la suite $\{\lambda_n\}$, elle ne dépend que de la suite $\mu_-^z(E_{f,n})$. Dans le domaine de convergence on a

$$\mu_+^z(E) = \mu_-^z(E^+) + \mu_-^z(E^-) \text{ et } \mu_-^z(E) = \mu_-^z(E^+) - \mu_-^z(E^-)$$

où

$$\mu_-^z(E^+) = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma(\frac{z}{2} + 1)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\eta_{2n}}{(2n)^z} \text{ et } \mu_-^z(E^-) = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma(\frac{z}{2} + 1)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\eta_{2n+1}}{(2n+1)^z}.$$

Les espaces E^+ et E^- sont des espaces mesurables fictifs qui ne sont définis que par leur mesure k -dimensionnelle. Pour ces espaces on a

$$\mu_-^z(E^+) = \mu_+^z(E^+), \mu_-^z(E^+) = 0 \text{ et } \mu_-^z(E^-) = \mu_+^z(E^-), \mu_+^z(E^-) = 0$$

et si $E \subset F$, pour $x > \sigma$

$$\mu_-^x(E^+) \leq \mu_-^x(F^+), \mu_-^x(F^-) \leq \mu_-^x(E^-).$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^x \left(E_{f, \lambda_n}^+ \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^x \left(E_{f, n}^+ \right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^x \left(E_{f, \lambda_n}^- \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^x \left(E_{f, n}^- \right)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_+^x \left(E_{f, \lambda_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_+^x \left(E_{f, n} \right),$$

la régularisée $\mathcal{R} \int_E f d\mu$ est indépendante du choix de la suite $\{\lambda_n\}$.

On peut généraliser ce procédé en prenant un volume k -dimensionnel de la forme $\mathbf{V}(r, k)$, d'une forme géométrique donnée, tel que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \mathbf{V}(r, k) = 0,$$

il existe une extension analytique $\mathcal{V}(r, z)$, $r \geq 0$, telle que

$$\mathcal{V}(r, k) = \mathbf{V}(r, k), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Comme précédemment, on peut définir la série

$$\mu_+^z(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(k) \mathcal{V}\left(\frac{1}{n}, z\right),$$

en particulier si $\mathcal{V}(r, z) = r^z$, la série s'écrit simplement

$$\mu_{k,+}^z(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\eta_n(k)}{n^z}$$

qui est la série de Dirichlet dont la forme géométrique est le cube de dimension k , de côté r , et les coefficients $\eta_n(k)$ vérifient encore, pour $n > \frac{1}{-1 + \sqrt[k]{2}}$, $\eta_n(k) = 0$ ou $\eta_n(k) = 1$.

10. RÉGULARISATION DIMENSIONNELLE

La régularisation dimensionnelle est la donnée d'une application linéaire \mathcal{L}_μ

$$\mathcal{L}_\mu : \mathcal{M}_\Omega \rightarrow \mathcal{A}$$

de l'ensemble des fonctions mesurables \mathcal{M}_Ω dans l'ensemble des fonctions analytiques \mathcal{A} telle que si f est une fonction mesurable positive

$$\mathcal{L}_\mu(f)(0) = \int_\Omega f d\mu \leq +\infty. \quad (10.1)$$

Remark 9. On peut imposer à \mathcal{L}_μ la conservation des règles d'intégration comme le théorème de Fubini-Tonelli pour les fonctions mesurables positives

$$\mathcal{L}_{\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n} = \mathcal{L}_{\mu_1} \otimes \mathcal{L}_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\mu_n}$$

et le théorème de changement de variable, si ϕ est une fonction mesurable

$$\phi : \Omega \rightarrow \Lambda, \quad \mathcal{L}_{\phi_\# \mu} = \mathcal{L}_\mu \circ \mathcal{T}_\phi \quad (10.2)$$

où $\mathcal{T}_\phi(f) = f \circ \phi$, $\phi_\# \mu$ est la mesure image de μ par ϕ et $f \geq 0$ [8]. Si $\dim \Omega = n$, l'équation 10.1, s'écrit

$$\mathcal{L}_\mu(f)(n) = \int_\Omega f d\mu$$

par translation, on se ramène en 0.

Notation 2. $\mathcal{L}_\mu(f)(z) = \int_\Omega f d^z \mu$.

Definition 12. Si 0 est un pôle d'ordre n , la régularisée de $\int_{\Omega} f d\mu$ est $\varphi(0)$, où

$$\mathcal{L}_{\mu}(f)(z) = \frac{A_n}{z^n} + \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{z} + \varphi(z).$$

Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue λ , on peut définir pour une boule B_r de rayon r ,

$$\mathcal{L}_{\lambda}(\mathbf{1}_{B_r})(z) = \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}} r^{z+n}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2} + 1\right)}$$

en utilisant le changement de variable 10.2. La régularisation dimensionnelle se ramène à une application

$$\mathcal{L} : \mathcal{M}_{\Omega} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

telle que pour tout $f \in \mathcal{M}_{\Omega}$ l'application $z \rightarrow \mathcal{L}(f, z)$ est méromorphe sur un ouvert contenant 0 et l'application $f \rightarrow \mathcal{L}(f, z)$ est une forme linéaire de \mathcal{M}_{Ω} . Dans ce qui suit \mathcal{M}_{Ω} est l'ensemble des fonctions boréliennes et Ω est un espace d'Hausdorff localement compact.

Definition 13. La forme linéaire $\mathcal{L} : \mathcal{M}_{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \text{ pour tout } \omega \in \Omega \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f_n) = \mathcal{L}(f),$$

où $f_n, f \in \mathcal{M}_{\Omega}$.

Theorem 6. Si $f \rightarrow \operatorname{Re} \mathcal{L}(f, z)$ et $f \rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{L}(f, z)$ sont des formes linéaires positives, continues sur \mathcal{M}_{Ω} et pour tout $z = x + iy \in U \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} \mathcal{L}(f, x + iy)}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{Im} \mathcal{L}(f, x + iy)}{\partial y} \\ \text{et } \frac{\partial \operatorname{Re} \mathcal{L}(f, x + iy)}{\partial y} &= - \frac{\partial \operatorname{Im} \mathcal{L}(f, x + iy)}{\partial x} \end{aligned} \quad (10.3)$$

alors \mathcal{L} est une régularisation dimensionnelle.

Proof. La preuve s'appuie sur le théorème de représentation de Riesz-Markov-Kakutani [7] appliqué aux fonctionnelles linéaires positives $f \rightarrow \operatorname{Re} \mathcal{L}(f, z)$ et $f \rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{L}(f, z)$. On construit pour chaque z des mesures de Borel régulières telles que

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}(f, z) = \int_{\Omega} f d^z \alpha \text{ et } \operatorname{Im} \mathcal{L}(f, z) = \int_{\Omega} f d^z \beta$$

pour toute fonction f continue à support compact. La mesure complexe associée est définie par

$$\mathcal{L}(f, z) = \int_{\Omega} f d^z \alpha + i \int_{\Omega} f d^z \beta = \int_{\Omega} f d^z \mu, f \in \mathcal{C}_c(\Omega). \quad (10.4)$$

A l'aide de la continuité de $\operatorname{Re} \mathcal{L}$ et $\operatorname{Im} \mathcal{L}$, pour chaque z le théorème de Lusin appliqué aux fonctions boréliennes de support de mesure finie, permet d'étendre l'équation 10.4 à ces fonctions. Le théorème de convergence croissante de Lebesgue permet d'étendre 10.4 aux fonctions boréliennes positives car Ω est un espace d'Hausdorff localement compact et pour chaque z la mesure est régulière. Pour toute fonction borélienne f , l'équation 10.4 est encore vraie par continuité de $f \rightarrow \mathcal{L}(f, z)$. L'analyticité est donnée par les formules de Cauchy-Riemann 10.3, \mathcal{L} est une régularisation dimensionnelle de $d\mu = d^0 \mu$. \square

Remark 10. *Si on n'impose pas de condition de continuité, on définit l'extension*

$$\tilde{\mathcal{L}}(f, z) = \int_{\Omega} f d^z \mu, f \in \mathcal{M}_{\Omega}$$

$\tilde{\mathcal{L}}$ est la régularisation dimensionnelle associée à \mathcal{L} si la propriété d'analyticité est conservée. Une extension de cette forme est unique car les mesures $d^z \mu$ sont uniques pour tout $z \in U \setminus \{0\}$.

11. RÉGULARISATION DE HAUSDORFF

Dans ce qui suit Ω est un espace métrique et $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne de Ω . Soit μ une mesure positive sur une tribu \mathcal{M} de Ω qui vérifie la condition de Vitali [6]. On définit la proto-mesure, pour $s > 0$

$$\mu_s(E) = \mu(E)^s$$

et on pose pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mu_{s,\epsilon}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_s(E_i) : \{E_i\} \text{ est une suite de } \mathcal{M}^{\epsilon} \text{ recouvrant } A \right\}$$

où $\mathcal{M}^{\epsilon} = \{E \in \mathcal{M} : \text{diam}(E) < \epsilon\}$. La mesure extérieure $\widetilde{\mu}_s$ définie par

$$\widetilde{\mu}_s(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_{s,\epsilon}(A) = \sup_{\epsilon > 0} \mu_{s,\epsilon}(A)$$

est borélienne par le théorème de Carathéodory et la restriction $d^s \mu = \widetilde{\mu}_s|_{\mathcal{B}(\Omega)}$ est une mesure sur $\mathcal{B}(\Omega)$.

Definition 14. *La mesure $d^s \mu$ est la mesure s -dimensionnelle associée à $d\mu$.*

Pour une fonction mesurable borélienne f , on associe la fonction \widehat{f} définie par $\widehat{f}(s) = \int_{\Omega} f d^s \mu$. Si \widehat{f} a une extension méromorphe F pour laquelle F a un pôle d'ordre n en 1,

$$F(z) = \frac{a_n}{(z-1)^n} + \dots + \frac{a_1}{z-1} + G(z)$$

on définit la régularisée de $\int_{\Omega} f d\mu$ par

$$\mathcal{R} \int_{\Omega} f d\mu = G(1).$$

Theorem 7. *Si $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\Omega)$, alors $\mathcal{R} \int_{\Omega} f d\mu$ est une régularisation de $\int_{\Omega} f d\mu$.*

Proof. Pour $s = 1$ et $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\Omega)$, on a $d\mu = d^1 \mu$ et si $f \in L^1(\mu)$

$$\mathcal{R} \int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

□

On suppose que $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré σ -fini, on définit l'intégrale de Cavalieri d'ordre s pour une fonction mesurable positive f par

$$\mathcal{I}_s(f, \mu) = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})^s dt, s > 0.$$

Lemma 2. *Pour $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\Omega)$ et f est une fonction borélienne positive alors*

$$\int_{\Omega} f d^s \mu = \mathcal{I}_s(f, \mu), \forall s > 0.$$

Proof. C'est le théorème de Cavalieri pour la mesure $d^s \mu$ sur $\mathcal{B}(\Omega)$. \square

L'application

$$z \rightarrow \phi(z) = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})^z dt, \quad z \in U \subset \mathbb{C}$$

s'écrit formellement en série entière

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\log(\mu(\{f > t\}))^n}{n!} dt \right) z^n$$

dont le rayon de convergence R vérifie

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\log(\mu(\{f > t\}))^n}{n!} dt \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Remark 11. Si $\int_{\Omega} f d\mu < +\infty$, pour une fonction borélienne f positive, alors $R \leq 1$. On rappelle que si ϕ a une extension méromorphe $\hat{\phi}$ en $z = 1$ alors la régularisée $\mathcal{R} \int_{\Omega} f d\mu$ est $\hat{\phi}(1)$ où $\hat{\phi}$ est la partie holomorphe de l'extension.

Theorem 8. Si R existe et $R > 0$ alors pour $0 < s < R$, $\int_{\Omega} f d^s \mu < +\infty$ et pour $s > R$, $\int_{\Omega} f d^s \mu = +\infty$ pour une fonction borélienne f positive.

On suppose que $R = 0$. La fonction $\varphi(t) = \mu(\{f > t\})$ est une fonction décroissante, soit $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) \leq +\infty$. Si $L > 0$ alors $\mathcal{I}_s(f, \mu) = +\infty$, $\forall s > 0$, il n'y a pas d'extension analytique. Si $L = 0$, soit t_0 tel que $\varphi(t) \leq 1$ si $t \geq t_0$ et $\varphi(t) > 1$ si $t < t_0$. Si $s_1 \geq s_2$ alors $\varphi(t)^{s_1} \geq \varphi(t)^{s_2}$ pour $t \in]0, t_0[$ et $\varphi(t)^{s_1} \leq \varphi(t)^{s_2}$ pour $t \in]t_0, +\infty[$

$$\int_0^{t_0} \varphi(t)^{s_1} dt \leq \int_0^{t_0} \varphi(t)^{s_2} dt \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t)^{s_2} dt \leq \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t)^{s_1} dt,$$

s'il existe $\alpha > 0$ pour lequel $\int_0^{t_0} \varphi(t)^\alpha dt < +\infty$ alors pour tout $0 < s \leq \alpha$, $\int_0^{t_0} \varphi(t)^s dt < +\infty$ et s'il existe $\beta > 0$ tel que $\int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t)^\beta dt < +\infty$ alors pour tout $s \geq \beta$, $\int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t)^s dt < +\infty$.

Definition 15. L'intégrale $\int_{\Omega} f d\mu$ est régularisable par le procédé de régularisation de Hausdorff, si $\beta > \alpha$ et si les fonctions

$$s \rightarrow \int_0^{t_0} \varphi(t)^s dt \quad \text{et} \quad s \rightarrow \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t)^s dt$$

admettent un prolongement méromorphe au point 1, la régularisation $\mathcal{R} \int_{\Omega} f d\mu$ est la somme des valeurs en 1 des parties holomorphes de ces prolongements.

Remark 12. Les intégrales de la forme $\mathbf{I}_{k,n} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\|x\|^k}$ ne sont pas régularisables par le procédé de régularisation de Hausdorff car $\beta = \alpha = \frac{k}{n}$.

On peut définir la régularisation de Hausdorff avec des proto-mesures de la forme

$$E \rightarrow \phi(\mu(E)), \quad E \in \mathcal{M}$$

et ϕ est une application strictement croissante de $[0; +\infty[$ à valeurs dans $[0; +\infty[$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$ et $\phi(0) = 0$ qui admet une extension méromorphe sur \mathbb{C} . Pour la mesure $d^\phi \mu$ définie sur les boréliens par la proto-mesure $\phi \circ \mu$ on a

$\int_{\Omega} f d\phi \mu = \int_0^{+\infty} \phi \circ \mu (\{f > t\}) dt$. Que doit vérifier ϕ pour que les intégrales $\mathbf{I}_{k,n}$ soient régularisables par régularisation de Hausdorff?. Pour $\mathbf{I}_{k,n}$,

$$\varphi(t) = \mathbf{K}t^{-\frac{n}{k}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

et

$$\mathbf{I}_{k,n} = \frac{k}{n} \mathbf{K}^{\frac{k}{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\phi(u)}{u^{1+\frac{k}{n}}} du,$$

pour $s_1 \leq s_2$, $\int_0^1 \frac{\phi(u)}{u^{1+s_1}} du \geq \int_0^1 \frac{\phi(u)}{u^{1+s_2}} du$ et si α est tel que $\int_0^1 \frac{\phi(u)}{u^{1+\alpha}} du < +\infty$ alors pour tout $s \geq \alpha$, $\int_0^1 \frac{\phi(u)}{u^{1+s}} du < +\infty$. Si β est tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\phi(u)}{u^{1+\beta}} du < +\infty$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{\phi(u)}{u^{1+s}} du < +\infty$ pour $s \leq \beta$. Dans les hypothèses $\alpha < \beta$ et si ces deux applications ont une extension méromorphe en $\frac{k}{n}$, la régularisée de Hausdorff de $\mathbf{I}_{k,n}$ est la somme des parties holomorphes en $\frac{k}{n}$ de ces extensions.

Remark 13. *La régularisation de Hausdorff utilise un procédé de régularisation par décomposition. Si on a une intégrale dépendant d'un paramètre $s \rightarrow \int_0^{+\infty} \phi(t, s) dt$, supposons qu'il existe $t_0 > 0$ pour lequel $\phi(t, s_1) \leq \phi(t, s_2)$ si $s_2 \geq s_1$, $t \geq t_0$ et $\phi(t, s_1) \geq \phi(t, s_2)$ si $s_2 \geq s_1$, $t \leq t_0$. Si il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_0^{t_0} \phi(t, \alpha) dt < +\infty$ alors pour $s \geq \alpha$, $\int_0^{t_0} \phi(t, s) dt < +\infty$ et si il existe $\beta > 0$ tel que $\int_{t_0}^{+\infty} \phi(t, \beta) dt < +\infty$ alors pour $s \leq \beta$, $\int_{t_0}^{+\infty} \phi(t, s) dt < +\infty$. Si les applications*

$$s \rightarrow \int_0^{t_0} \phi(t, s) dt \quad \text{et} \quad s \rightarrow \int_{t_0}^{+\infty} \phi(t, s) dt$$

admettent des extensions méromorphes en un point γ , même si l'ordre du pôle γ n'est pas le même pour les deux extensions, la régularisée de $\int_0^{+\infty} \phi(t, \gamma) dt$ est donnée par la somme des parties holomorphes en γ de ces extensions.

12. LA RÉGULARISATION DIMENSIONNELLE EN PHYSIQUE

Dans ce qui suit, on voudrait renormaliser les intégrales de Feynman en donnant un sens géométrique à cette renormalisation. L'idée est de regarder les graphes de Feynman comme des parties locales du graphe quantique [4]. On plonge l'univers Ω dans une variété Λ de grande dimension $2n$, $n \geq 4$. On munit Λ , d'une métrique riemannienne et d'une structure presque réelle J [3]. Tout champ local X de Λ se décompose de façon unique sous la forme

$$X = X^+ + X^-, \quad \text{où } JX^+ = X^+ \text{ et } JX^- = -X^-$$

on peut complexifier les champs de Λ , par transformation de Wick en posant

$$\tilde{X} = X^+ + iX^-, \quad \text{si } X = X^+ + X^-.$$

Si l'univers Ω admet un plongement Lorentzien dans Λ , c'est-à-dire, un C^∞ -plongement qui vérifie

$$\phi : \Omega \rightarrow \Lambda, \quad \dim T\phi(T\Omega)^+ = 3 \text{ et } \dim T\phi(T\Omega)^- = 1,$$

on définit une pseudo-métrique riemannienne h induite par g de telle sorte que h soit de signature $(3, 1)$. La transformation qui fait passer de la métrique riemannienne $g|_{\Omega}$ à la métrique Lorentzienne h est une rotation de Wick. La pseudo-mesure μ sur $\Gamma(T\Omega)$ est définie par la métrique riemannienne $g = g|_{\Omega}$. Les notations sont celles de [4], le fibré considéré est le fibré tangent $T\Omega$ et $\mathcal{T}\Omega$ est le fibré dual. La

métrique riemannienne fixée, g est une section de $\mathcal{Q}(T\Omega)$ définie positive. Cette métrique induit un isomorphisme de dualité de $T\Omega$ dans $\mathcal{T}\Omega$, défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &: \Gamma(T\Omega) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}\Omega), \\ \mathcal{D}(X)(\omega) &= X_{\mathcal{D}}(\omega) : E_{\omega}(\zeta) \rightarrow \mathbb{R}, \\ X_{\mathcal{D}}(\omega)(u) &= g(\omega)(X(\omega), u). \end{aligned}$$

Soit \mathbf{Q} la section des formes quadratiques de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$ définie par

$$\mathbf{Q}(\omega)(X_{\mathcal{D}}(\omega)) = g(\omega)(X(\omega), X(\omega)), X(\omega) = \mathcal{D}^{-1}(X_{\mathcal{D}})(\omega),$$

sur chaque fibre $\mathcal{D}T_{\omega}\Omega$, la forme bilinéaire $\mathbf{Q}(\omega)$ induit, en dimension finie sur la fibre, une mesure gaussienne $\tilde{\mu}(\omega)$. Si \mathbf{Q} est stable la section $\tilde{\mu}$ ainsi définie est la mesure image sur chaque fibre, d'une pseudo-mesure μ sur l'espace des champs $\Gamma(T\Omega)$. L'univers Ω est une variété de dimension $k \geq 4$, un graphe de Feynman à m pattes externes, de moments $X_1, \dots, X_m \in \Gamma(T\Omega)$ et ayant $n - m$ boucles, $n > m$, a pour amplitude [5]

$$\mathcal{I}_{\phi}(k) = \int_{\Gamma(T\Omega)^{n-m}} \phi(X_1, \dots, X_n) d\mu(X_{m+1}) \cdots d\mu(X_n)$$

où la fonction scalaire ϕ s'écrit

$$\phi(X) = \frac{Q(X)}{\prod_j (l_j(X)^2 + m_j^2)},$$

l_j sont des sections de $\mathcal{T}\Omega^n$, $m_j > 0$ sont les masses internes, données par l'ordre d'irrégularité du graphe quantique aux sommets, Q est un polynôme et μ est la pseudo-mesure définie sur $\Gamma(T\Omega)$ induite par la section stable \mathbf{Q} . Les graphes de Feynman sont des parties finies du graphe quantique [4], les masses internes sont décrites par les irrégularités aux sommets de ce graphe. On peut écrire \mathcal{I}_{ϕ} sous la forme

$$\mathcal{I}_{\phi}(k) = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \exp(-t \cdot m^2) \psi(t, \mathcal{P}, k) (\det L(t))^{-\frac{k}{2}} dt,$$

où $L(t)$ est la restriction de la forme bilinéaire $\sum_{j=1}^n t_j l_j(X)^2$ à $\mathcal{D}T\Omega^{n-m}$ et \mathcal{P} est la matrice des produits scalaires des moments externes $\mathcal{P} = (g(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq m}$, ψ est une fonction polynomiale qui dépend de Q , $t \cdot m^2$ est le produit scalaire dans \mathbb{R}^n de t avec $m^2 = (m_1^2, \dots, m_n^2)$ et $k = \dim \Omega$. On pose $z = k$, pour $\text{Re}(z) \ll 0$, $\mathcal{I}_{\phi}(z)$ existe et a une extension méromorphe dans \mathbb{C} , notée $\widetilde{\mathcal{I}}_{\phi}(z)$. Si on pose $\widetilde{\mathcal{I}}_{\phi}(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \alpha_s (z - k)^s$, la régularisée est

$$\mathcal{R}\mathcal{I}_{\phi} = \alpha_0 \text{ et le contre-terme } \sum_{s=-\infty}^{s=-1} \alpha_s (z - k)^s.$$

13. CONCLUSION

Pourquoi le choix de la régularisation dimensionnelle, à priori, en dehors des propriétés énoncées en introduction, rien ne justifie ce choix. Dans les théories physiques interviennent des infinis, ces infinis sont éliminés par un procédé de renormalisation qui n'a aucun sens physique. Comment peut-on y remédier? Une des approches possibles serait de faire intervenir la géométrie fractale. L'idée est de décrire l'univers comme une variété fractale, l'univers n'est plus lisse mais très

irréguliers. Localement, si cet univers est de dimension topologique 2, on peut le représenter comme une feuille de papier froissée et non plus comme une feuille lisse. Certains auteurs se sont essayés à cette modélisation, la difficulté est que l'on perd toutes les structures différentiables et donc, on ne peut plus modéliser à l'aide de la théorie des équations différentielles partielles. Pour remédier à cette situation, on peut défroisser la feuille pour faire apparaître une structure lisse sous-jacente. L'univers froissé a une dimension topologique 4 et une dimension fractale $4 + \varepsilon$, pour une métrique donnée. L'univers défroissé est une variété de dimension 4.

Une autre approche consiste à utiliser la régularisation de Hausdorff pour la mesure $d\mu$ définie par la métrique riemannienne g . L'interprétation physique de la régularisation dimensionnelle demeure sans réponse. Le fait qu'en physique émergent des infinis semble très mystérieux. Il doit y avoir une interprétation physique à l'existence de ces infinis. Les questions restent ouvertes.....

REFERENCES

- [1] G. H. Hardy and M. Riesz, "The General Theory of Dirichlet's Series", coll. « Cambridge Tracts in Mathematics », 1915
- [2] G. 't Hooft and M.Veltman, "Regularization and renormalization of gauge fields". Nucl. Phys. B44: 189-213, 1972, in Current Contents Vol. 15, No. 16 (1984) 16.
- [3] J. L. Jonot, "Structures complexes et presque réelles en physique, une application à la complexification des dimensions" [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. <hal-01137579v2>
- [4] J.L.Jonot, "Intégrale de Feynmann et C^α -Structures en Physique"[Rapport de recherche] Académie de versailles. 2015. <hal-01232637>
- [5] R. Meyer, "Dimensionnal Regularization"uni-math.gwdg.de/rameyer/download/Hesselberg2002.pdf
- [6] M. Troyanov, "Mesures et Intégration"sma.epfl.ch/~troyanov/Papers/MesureIntegration.pdf
- [7] W. Rudin, "Real and Complex Analysis" Second Edition MacGraw-Hill, 1978
- [8] C. Villani, "Intégration et Analyse de Fourier" cedricvillani. org/wp-content/uploads/2013
E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr