



HAL
open science

Dans le secret des urnes

Pierre-Yves Louis

► **To cite this version:**

| Pierre-Yves Louis. Dans le secret des urnes. 2014. hal-01277056

HAL Id: hal-01277056

<https://hal.science/hal-01277056>

Submitted on 22 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Dans le secret des urnes

Plus connues pour les élections et pour les loteries, les urnes sont aussi des modèles fondamentaux de la théorie mathématique des probabilités. Ces modèles trouvent des applications dans des domaines aussi différents que l'économie, la médecine ou la biologie.

Le modèle d'urne dite de Polya, en référence au mathématicien d'origine hongroise, G. Polya, désigne l'évolution au fur et à mesure des manipulations d'une urne opaque contenant initialement deux boules : une rouge et une verte.

On commence par tirer à l'aveugle, au hasard, une boule hors de l'urne. Ayant observé sa couleur, on remet cette boule dans l'urne et on ajoute une nouvelle boule de cette même couleur. Initialement, à $t=0$, l'état de l'urne correspond aux proportions $(1/2, 1/2)$. A $t=1$, l'état de l'urne est $(1/3, 2/3)$ ou bien $(2/3, 1/3)$ en fonction du résultat du premier tirage effectué, et la transition vers l'un de ces états s'effectue avec une probabilité $1/2$. Lorsque l'on répète cette règle en repartant du dernier résultat obtenu, t fois de suite, le nombre total de boules augmente comme $t+2$, mais qu'en est-il de la proportion, par exemple des boules rouges qui caractérise la composition de l'urne. En répétant successivement l'opération de base, la *proportion-limite en temps* est un nombre *aléatoire* qui dépend de l'historique des tirages. La théorie des probabilités permet de démontrer qu'en réalisant différents historiques un grand nombre de fois, on obtient des proportions-limites qui suivent une statistique uniforme entre 0 et 1

distribuées uniformément entre 0 et 1. C'est-à-dire que toutes les valeurs entre 0 et 1 ont les mêmes chances d'être atteintes.

Une variante consiste à faire évoluer en parallèle N urnes, de manière indépendante. On obtient alors un échantillon de N valeurs réparties uniformément entre 0 et 1. L'évolution, au cours des tirages, de la proportion d'une couleur est un exemple d'une suite aléatoire de valeurs réelles. On parle également de trajectoire à temps discret, puisque les tirages sont considérés comme étant réalisés de manière régulière et distincte. L'évolution temporelle de la proportion des boules d'une couleur donnée est un exemple de réalisation d'une suite aléatoire. L'ensemble des probabilités avec lesquelles ces suites sont obtenues est appelé processus stochastique. L'étude de ces objets est centrale dans la théorie des probabilités ainsi qu'en statistique où il s'agit par exemple d'établir des modèles pour des séries chronologiques de données.

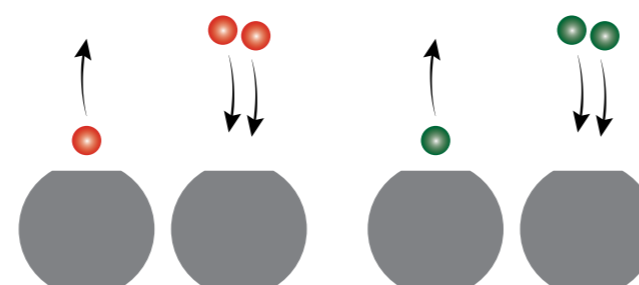
De nombreuses applications.

Lors d'une élection, le réceptacle dans laquelle les citoyens déposent leur bulletin est également une urne. Son remplissage pourrait être modélisé par un mécanisme analogue au précédent : on ne consulte

pas l'état de l'urne, c'est à dire que l'on ne prélève pas de bulletin dans l'urne avant de voter, et on ajoute son bulletin qui change alors la composition de l'urne.

« ...comme un modèle économique...de l'affrontement entre deux standards... »

À la différence, cet objet mathématique de l'urne de Polya permet, en faisant un tirage aléatoire préalable au vote, de modéliser un effet de renforcement : la couleur qui a été tirée le plus souvent entre le début et un instant T (après T tirages) est favorisée pour le nouveau tirage, proportion-



À chaque couleur de boule tirée au sort, on rajoute à celle-ci une boule de la même couleur dans l'urne.



« Afin de renforcer l'efficacité des soins pour les futurs participants... : on ne replace une boule dans l'urne que si le patient a tiré bénéfique du traitement reçu. »

nellement au nombre de fois où elle a été tirée. Ces modèles aléatoires trouvent de nombreuses applications concrètes. L'urne de Polya peut être ainsi utilisée comme un modèle économique de l'évolution au cours du temps de l'affrontement entre deux standards : les boules représentent des clients et la couleur associée désigne le standard qui a été adopté par ce client. Un nouveau client, symbolisé dans ce modèle, par la boule qui va être ajoutée, aura tendance à adopter plus facilement le standard déjà choisi par une majorité de clients qui l'ont précédé.

De nombreuses généralisations sont également considérées dans le cadre des essais cliniques en double aveugle où la couleur correspond à l'attribution à un nouveau patient d'un groupe de traitement (principe actif contre placebo). Afin de renforcer l'efficacité des soins pour les futurs participants, une variante de la règle de tirage est considérée : on ne replace une boule dans l'urne que si le patient a tiré bénéfique du traitement (inconnu) reçu. Le procédé d'attribution d'un groupe de traitement aura ainsi tendance à favoriser le traitement le plus favorable aux patients. L'urne de Polya apparaît également dans des travaux récents pour modéliser la croissance d'un tissu biologique en développement, dans le cadre de la pathologie Hirschsprung.

Une généralisation surprenante

Une autre variante de l'urne de Polya consiste à replacer, lorsque l'on tire une boule rouge, la boule tirée avec x boules rouges et y boules vertes et inversement x vertes et y rouges lorsqu'une boule verte est tirée. La proportion-limite n'est alors plus aléatoire, mais déterministe : la proportion de boules d'une couleur après un grand nombre de tirage s'approche de $1/2$! Et ceci se produit à chaque nouvelle

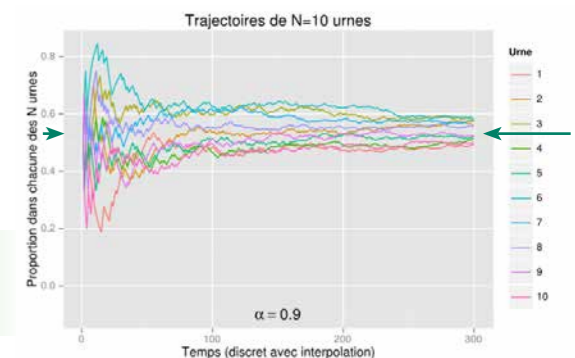
réalisation de l'ensemble du processus, qui est pourtant aléatoire. Très surprenant, par exemple, lorsque $x=1000$ et $y=1$, procédé qui renforce pourtant très nettement la couleur tirée. Ainsi l'aléa des premiers tirages est dans cette variante estompé au profit d'un équilibre induit par la symétrie du procédé. Si l'on se convainc que cela n'est pas surprenant, c'est alors le résultat de l'urne de Polya classique (proportion limite aléatoire) qui apparaît inattendu.

Sous l'effet d'une interaction de groupe

On s'intéresse maintenant à une autre généralisation. On considère un ensemble N d'urnes. La règle d'évolution est d'effectuer simultanément un tirage dans chacune des N urnes. Ces N tirages sont faits de manière indépendante : on lance N pièces de monnaie biaisées avec probabilité α de tomber sur pile et $1-\alpha$ de tomber sur face. Lorsque « face » est obtenue on utilise pour l'urne considérée le procédé usuel qui consiste à rajouter une boule de la même couleur que celle de la boule tirée dans cette urne. Lorsque le côté « pile » est observé, on rajoute une boule avec une probabilité qui est la proportion globale à cet instant des boules de cette couleur dans l'ensemble des N urnes. Lorsque $\alpha=0$, on retrouve N urnes de Polya classiques dont les évolutions sont indépendantes. On obtient pour les proportions-limites N valeurs statistiquement indépendantes et réparties uniformément entre 0 et 1.

Qu'advient-il alors pour l'ensemble des N proportions limite lorsque $\alpha>0$? Dans le cadre d'une collaboration de recherche, l'Université de Padoue, l'Université de l'Aquila et le Laboratoire Mathématiques et Applications (LMA UMR7348 CNRS/Univer-

La proportion de boules d'une couleur après un grand nombre de tirage s'approche dans toutes les urnes, de la même valeur (aléatoire) !



sité de Poitiers) ont établi, que pour tout $\alpha, \alpha>0$, les proportions-limites de chacune des N urnes convergent toutes vers une même valeur aléatoire. Ceci met en évidence un phénomène de synchronisation. Chaque urne évolue librement selon un processus qui individuellement à une tendance statistique à se renforcer. Néanmoins, la prise en compte dans la règle de manipulation pour chaque urne, même avec une probabilité α très faible, de l'état de l'ensemble des autres urnes du groupe modifie le comportement limite : toutes les urnes vont adopter la même proportion limite.

La nécessité d'une preuve mathématique

Des simulations par ordinateur permettent certes de deviner, d'intuire, le résultat lorsque α a une valeur proche de 1. Il est cependant beaucoup plus difficile d'établir si ce phénomène de synchronisation aura lieu lorsque α a une valeur très faible. Lorsque $\alpha<1/2$, il est prouvé que le temps nécessaire pour observer la synchronisation est typiquement très long. Différentes généralisations sont en cours d'étude.

Au-delà de la loterie et des élections, l'urne est un objet fondamental de pensée mathématique. Différents modèles d'évolution aléatoire peuvent être formulés. Différentes variantes existent, naturellement motivées par des applications concrètes. Cependant, l'intuition mathématique ainsi que l'expérimentation informatique peuvent être mises en défaut. Les urnes de Polya n'ont donc pas fini de livrer tous leurs secrets.

Pierre-Yves LOUIS < LMA
 pierre-yves.louis@math.univ-poitiers.fr
<http://rech-math.sp2mi.univ-poitiers.fr/>