



**HAL**  
open science

# Algorithmes quantiques, cycles hamiltoniens et la k-coloration des graphes

M Sghiar

► **To cite this version:**

M Sghiar. Algorithmes quantiques, cycles hamiltoniens et la k-coloration des graphes. 2016. hal-01276862v1

**HAL Id: hal-01276862**

**<https://hal.science/hal-01276862v1>**

Preprint submitted on 20 Feb 2016 (v1), last revised 4 Apr 2016 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Algorithmes quantiques, cycles hamiltoniens et la k-coloration des graphes**

20 Février 2016

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com

Présenté au journal :

Pioneer Scientific Publisher

Pioneer Research House

Varanasi 221002, India

E-mail : pioneer@pspchv.com

Website : <http://www.pspchv.com>

**Abstract** : I will prove the existence of the Feynman quantum algorithm, polynomial and of the order  $\mathcal{O}(n^3)$  which inform us about the presence of the Hamiltonian cycles in a graph with cardinality  $n$  and in this case allows us to find them completely. And I will also prove the existence of the Pauli quantum algorithm with the order  $\mathcal{O}(n^3)$  which enable us to know whether the  $k$ -coloring graph is possible and make us this coloration if it is possible.

**Résumé** : Je démontre l'existence d'un algorithme quantique de Feynman, polynomiale de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^3)$  et permettant de nous renseigner sur la présence des cycles hamiltoniens dans un graphe de cardinal  $n$  et en l'occurrence les trouver complètement. Et je démontre aussi l'existence d'un algorithme quantique de Pauli de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^3)$ , nous permettant de savoir si la  $k$ -coloration du graphe est possible et de nous faire cette coloration le cas échéant.

**Keywords** : Graph, hamiltonien, cycle hamiltonien, P=NP, voyageur de commerce, k-coloration des graphes, Algorithme, Algorithme quantique, Théorie de la complexité.

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>Idée fondamentale</b>	<b>6</b>
<b>1 Le problème des cycles hamiltoniens</b>	<b>7</b>
1.1 Distribution Divine de l'énergie . . . . .	7
1.2 Matrice de Feynman et algorithme quantique . . . . .	7
1.3 Exemples . . . . .	11
1.4 Généralisation de l'algorithme quantique . . . . .	12
1.5 Résolution du problème du voyageur de commerce . . . . .	12
<b>2 Problème de la k-coloration d'un graphe</b>	<b>14</b>
2.1 Le lien du problème de la k-coloration d'un graphe avec la mécanique quantique . . . . .	14
2.2 Distribution quantique de l'énergie . . . . .	14
2.3 Matrice de Pauli et algorithme quantique . . . . .	15
2.4 Résolution du problème de la k-coloration des graphes . . . . .	17
<b>3 Conclusion</b>	<b>18</b>
<b>Références</b>	<b>19</b>

## Introduction

En théorie des graphes, un graphe non orienté  $G = (V, E)$  est défini par la donnée d'un ensemble  $V$  de sommets et d'un ensemble  $E$  d'arêtes, chaque arête étant une paire de sommets (par exemple, si  $x$  et  $y$  sont des sommets, la paire  $x, y$  - notée  $xy$  - peut être une arête du graphe  $G$ ). Si  $x, y$  est une arête du graphe  $G$  : On notera  $G(x,y)=1$  sinon  $G(x, y)=0$ .

**Par convention, dans cet article, on considère que  $G(x,x)=1$  pour tout sommet  $x$  de  $E$ .**

Un graphe hamiltonien est un graphe possédant au moins un cycle passant par tous les sommets une fois et une seule. Un tel cycle élémentaire est alors appelé cycle hamiltonien.

Plusieurs travaux ont été faits sur les graphes pour permettre de s'assurer qu'un graphe est hamiltonien. je cite par exemple Gabriel Andrew Dirac [1] et Oystein Ore [5] et Lajos Posa [6]

S'inspirant du théorème de Ore, John Adrian Bondy et Vaclav Chvatal ont trouvé en 1976 [4] une méthode pour déterminer si un graphe est hamiltonien.

Le problème du chemin hamiltonien consiste à :

- Trouver une chaîne hamiltonienne ou un cycle hamiltonien dans un graphe non orienté donné.
- Ou à trouver un chemin hamiltonien ou un circuit hamiltonien dans un graphe orienté donné.

Tous ces problèmes sont NP-complets [2] et [3] : c'est-à-dire qu'on sait vérifier une éventuelle solution dans un temps polynomial en fonction du nombre  $n$  de sommets, mais que ce problème est au moins aussi difficile que d'autres problèmes NP-complets, ce qui veut dire que l'on ne saura probablement pas trouver cette solution dans un temps polynomial dans le cas général. Le problème de décision associé est de tester si un cycle ou une chaîne hamiltonienne

existe.

Le problème du voyageur de commerce - qui est considéré comme un NP-complet- revient à chercher un cycle hamiltonien dans un graphe dont les arêtes sont pondérées, en ajoutant une contrainte : le poids de ce cycle doit être minimal.

En m'inspirant de la circulation sanguine et des niveaux d'énergie des particules dans l'atome, le but de cet article est de donner un algorithme quantique, polynomiale de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^3)$  et capable de nous renseigner sur la présence des cycles hamiltoniens dans un graphe (de cardinalité  $n$ ) et en l'occurrence les trouver complètement.

Et je démontre aussi l'existence d'un algorithme quantique de Pauli de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^3)$ , nous permettant de savoir si la  $k$ -coloration du graphe est possible et de nous faire cette coloration le cas échéant.

Fortunately that this graph is  
Hamiltonian



FIGURE 1 – Un graphe hamiltonien : Coeur + artères

## Idées fondamentales

Je considère les arrêtes d'un graphe non orienté comme des chemins partiels, et les sommets de ce graphe comme des globules rouges qui peuvent changer de places en empruntant les dit-chemins.

Le point de départ d'une particule est considéré comme le cœur du corps humain. Au départ cette particule aura une quantité d'énergie qui va la perdre au fur et à mesure de son parcours dans le cycle hamiltonien pour revenir se ressourcer d' énergie.

A vrai dire les globules rouges perdent leur énergie en la donnant aux autres qui sont voisines et en même temps elles vont en recevoir. Et c'est cette idée qu'on va exploiter pour écrire un algorithme quantique de Feynman pour trouver tout les chemins Hamiltoniens s'ils existent.

Et pour résoudre le problème de la k-coloration des graphes, il m'a fallu penser au spectre de lumière des atomes, aux niveaux d'énergies des particules, et à l'énergie de couleur des particules tels que les quarks et les gluons....

Je vous laisse découvrir cette belle comparaison entre ses sauts des particules en mécanique, et l'algorithme de pauli qui permet la coloration du graphe dans les cas possibles.

Bonne lecture.

# 1 Le problème des cycles hamiltoniens

## 1.1 Distribution Divine de l'énergie

Définition :

Soit  $G$  un graphe sur un ensemble  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Avec  $G(x_i, x_j) = \epsilon_{i,j}$  où  $\epsilon_{i,j} = 1$  ou  $0$ .

Une distribution  $\mathcal{D}$  est dite divine si toute particule  $x_i$  d'énergie  $E_i$  transmet une énergie  $E_i - 1$  à toute particule  $x_j$  vérifiant  $G(x_i, x_j) = 1$ .

On note  $S(x_j) = x_i$  ou  $S(j) = i$  (ie :  $x_i$  est la source d'énergie pour  $x_j$ ).

## 1.2 Matrice de Feynman et algorithme quantique

On part d'un point quelconque  $x_k$ .

On pose  $E_{x_k} = n$ .

**Plaçons les points  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  sur un cercle. Pour fixer les idées et bien comprendre et tester mes techniques, je vous recommande de voir la figure 2. Et en faisant le tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, d'écrire les vecteurs (et matrices) de Feynman dans les compartiments de la figure.**

On applique  $D(x_k)|G$  pour distribuer l'énergie aux autres particules.

Si maintenant  $G(x_k, x_j) = 1$ , alors la particule qui se trouve au point  $x_k$  peut prendre le chemin  $\{x_k, x_j\}$  et dans ce cas l'énergie  $E(x_j) = E(x_k) - 1$  (perte de l'énergie de la particule).

Posons  $\mathcal{F}(x_k)$  le vecteur de Feynman définie au point  $x_k$  par :

$$\mathcal{F}(x_k) = \begin{pmatrix} E_{x_k} \\ k \end{pmatrix}$$

Qui veut dire tout simplement que la particule  $x_k$  est au point  $k$  et a  $E_{x_k}$  pour énergie en ce point.



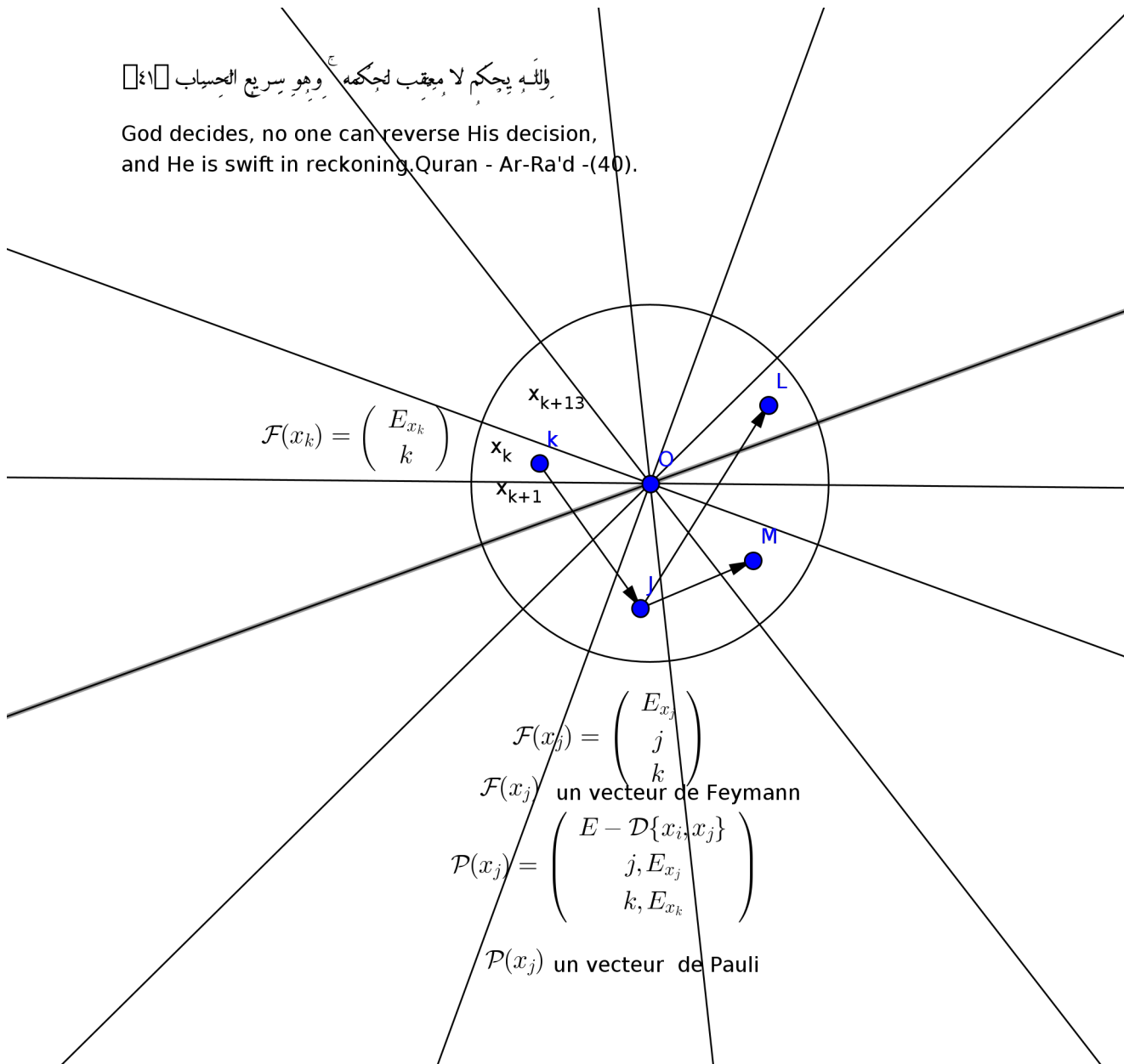


FIGURE 2 – Action des matrices de Feynman et de Pauli sur les particules

Le passage de la particule  $x_k$  à  $x_j$ , symbolisé par :  $x_k \rightsquigarrow x_j$  peut être considéré comme du à l'action d'un vecteur de Feynman au point  $x_j$  et définit par :

$$\mathcal{F}(x_j) = \begin{pmatrix} E_{x_j} \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

Qui veut dire que la particule  $x_j$  est au point  $j$  et a  $E_{x_j}$  pour énergie en ce point et qu'elle est provenu du point  $k$  ( $S(j) = k$ ). Autrement dit le vecteur de Feynman nous renseigne sur l'énergie de la particule et sur les positions qu'elle a prise le long de son chemin.

On peut noter :  $x_j = \mathcal{F}_{i,j}x_i$  ou  $x_j = \mathcal{F}x_i$

On va voir comment la matrice stationnaire de Feynman va nous permettre de trouver tous les cycles Hamiltoniens dans le graphe des particules.

Voici donc comment procéder :

Quand la particule  $x_k$  est au point  $k$  son vecteur de Feynman est :

$$\mathcal{F}(x_k) = \begin{pmatrix} E_{x_k} \\ k \end{pmatrix}$$

On note dans l'ordre (mod  $n$ ) les points  $x_k^1, \dots, x_k^{l_k}$  tels que  $G(x_k, x_k^{l_i}) = 1$ .

où  $l_i \in \{1, \dots, l_k\}$

On détermine les vecteurs de Feynman  $\mathcal{F}(x_k^{l_i})$ .

On incrémente maintenant  $k$  pour passer à  $k+1$  (mod  $n$ ). Et on réitère le procédé précédent.

On voit que à chaque réitération le vecteur de Feynman augmente de nombre de lignes et que à chaque position  $i$  peuvent cohabiter plusieurs vecteurs de Feynman de même nombre de lignes (Ceci est du au fait que la transition  $x_k \rightsquigarrow x_j$  peut s'effectuer de plusieurs façons selon le choix des chemins) :

autrement dit à chaque position  $i$  le vecteur de Feynman se transforme en une matrice  $\mathcal{M}(r_i, s_i)$ . Avec  $\mathcal{M}$  ayant au plus  $n + 1$  lignes et  $n$  colonnes.

Et vu que l'énergie va diminuer au fur et à mesure de l'incrément de  $k$ ; il existera un plus petit entier  $n_k$  tel que  $\mathcal{F}^{n_k}(x_k)$  est une matrice dont la première ligne (ligne des énergies) a toutes ses coefficients nuls.

Notons  $(\mathcal{F}^{n_k}(x_k))^*$  la matrice  $\mathcal{F}^{n_k}(x_k)$  dont on a ôté la première ligne des énergies nulles et qu'on appelle la matrice stationnaire de Feynman.

On a donc les résultats suivants :

**Théorème 1.2.1** *Soit  $G$  un graphe sur un ensemble  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Avec  $G(x_i, x_j) = \epsilon_{i,j}$  où  $\epsilon_{i,j} = 1$  ou  $0$ .*

*Si  $(\mathcal{F}^{n_k}(x_k))^*$  est la matrice stationnaire de Feynman, alors les cycles hamiltoniens du graphe  $G$  sont les colonnes des  $(\mathcal{F}^{n_k}(x_k))^*$  à  $n$  éléments distincts.*

**Corollaire 1.2.1 (Algorithme quantique)** .

*L'algorithme quantique est un  $\mathcal{O}(n^3)$  et permet de savoir si le graphe est hamiltonien et dans l'occurrence il permet de trouver tout les cycles hamiltoniens.*

Preuve :

Quand  $k=1$ , on construit toutes les matrices d'ordre 2 : On a donc au plus  $1 \times (n - 1)$  constructions possibles.

Quand  $k=2$ , on construit toutes les matrices d'ordre 3 : On a donc au plus  $2 \times (n - 1)$  constructions possibles.

A la  $k^{\text{ième}}$  incrément, on construit toutes les matrices d'ordre  $k + 1$  : on a donc au plus  $k \times (n - 1)$  constructions possibles.

On a donc au plus :  $\sum_{k=1}^{n-1} k \times (n - 1) = \frac{(n-1)^2 \times n}{2}$  opérations à effectuer.

On y rajoute au plus  $n^3$  opérations pour compter les cardinaux des colonnes des matrices construites pour voir s'il y a des cycles hamiltoniens.

On a donc au total au plus  $\frac{(n-1)^2 \times n}{2} + n^3$ . Et le résultat s'en déduit.

### 1.3 Exemples

1- Soit G le graphe suivant à quatre éléments :

$$G(0, 1) = G(1, 3) = G(3, 2) = G(2, 0) = 1 \text{ et } G(0, 3) = G(1, 2) = 0.$$

En appliquant l'Algorithme quantique ci-dessus et en octroyant à la particule au point 0 l'énergie 4 on trouve :

$$\mathcal{F}^{n_0}(0)^* = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

On y voit que la deuxième colonne est un cycle Hamiltonien.

2- Soit G le graphe suivant à cinq éléments :

$$G(0, 1) = G(0, 4) = G(1, 2) = G(3, 4) = 0 \text{ et } G(0, 2) = G(0, 3) = G(1, 3) = G(1, 4) = G(2, 3) = G(2, 4) = 1$$

En appliquant l'Algorithme quantique ci-dessus et en octroyant l'énergie 5 à la particule au point 2 on trouve :

$$\mathcal{F}^{n_2}(2)^* = \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}$$

On y voit que la deuxième colonne est un cycle Hamiltonien.

3- Soit G le graphe suivant à quatre éléments :

$$G(0, 1) = G(1, 3) = G(1, 2) = 1 \text{ et } G(0, 3) = G(3, 2) = G(0, 2) = 0.$$

En appliquant l'Algorithme quantique ci-dessus et en octroyant à la particule au point 0 l'énergie 4 on trouve :

$$\mathcal{F}^{n_0}(0)^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce graphe n'est pas hamiltonien car dans la matrice stationnaire  $\mathcal{F}^{n_0}(0)^*$  aucune colonne n'a quatre éléments distincts.

## 1.4 Généralisation de l'algorithme quantique

Si  $G$  un graphe sur un ensemble  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Si  $G(x_i, x_j) = \mu_{i,j} \times \epsilon_{i,j}$  où  $\mu_{i,j} \in \mathbb{R}^*$ . ( $\mu$  est considéré comme une mesure), alors  $G$  est dit un graphe pondéré.

En généralisant les matrices de Feynman pour les graphes pondérés, on peut de la même manière appliquer l'algorithme quantique.

## 1.5 Résolution du problème du voyageur de commerce

**Théorème 1.5.1** *Soit  $G$  un graphe sur un ensemble  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Avec  $G(x_i, x_j) = \mu_{i,j}$  où  $\mu_{i,j} \in \mathbb{R}$ .*

*Les cycles hamiltoniens  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  du graphe  $G$  tels que  $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_{i,i+1} = S$  sont les colonnes des  $(\mathcal{F}^{n_k}(x_k))^*$  à  $n$  éléments distincts  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  tels que  $\sum_{i=0}^{n-1} \mu_{i,i+1} = S$ .*

**Corollaire 1.5.1 (Algorithme quantique généralisé)** *L'algorithme quantique généralisé est un  $\mathcal{O}(n^3)$  et permet de savoir si le graphe est hamiltonien et en l'occurrence il permet de trouver tout les cycles hamiltoniens.*

Preuve : analogue à celle du corollaire [1.2.1](#) .

**Corollaire 1.5.2 (Problème du voyageur de commerce)** *Le problème du voyageur de commerce est résoluble par l'algorithme quantique généralisé qui est de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^3)$ .*

## 2 Problème de la k-coloration d'un graphe

La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Deux problèmes algorithmiques de coloration sont les suivants :

1. Problème de décision : étant donné  $G$ , un graphe, et  $k$  un entier, existe-t-il une coloration valide de  $G$  utilisant  $k$  couleurs ?
- 2- Problème d'optimisation : étant donné  $G$ , quel est son nombre chromatique ( le plus petit entier  $k$ ) ?

### 2.1 Le lien du problème de la k-coloration d'un graphe avec la mécanique quantique

Les  $k$  couleurs  $E_1, \dots, E_k$  dans le problème de la k-coloration d'un graphe  $G$  seront assimilés à des valeurs d'énergie de couleurs que peuvent prendre les particules.

$\{E_1, \dots, E_k\}$  est appelé spectre d'énergie de l'atome ou du graphe  $G$ .

Deux particules  $x_i$  et  $x_j$  sont dites libres ou indépendantes si  $G(x_i, x_j) = 0$  et sont dites liées si  $G(x_i, x_j) = 1$ .

Inspiré du principe d'exclusion de Pauli (issu du modèle ondulatoire de l'électron) qui interdit à deux électrons au sein d'un atome d'avoir le même quadruplet de nombres quantiques, on interdit à deux particules liées d'avoir la même énergie de couleur.

Rappel : Par convention on considère que  $G(x_i, x_i) = 1, \forall i$ .

### 2.2 Distribution quantique de l'énergie

Définition :

Soit  $G$  un graphe sur un ensemble  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Avec  $G(x_i, x_j) = \epsilon_{i,j}$  où  $\epsilon_{i,j} = 1$  ou  $0$ .

Une distribution  $\mathcal{D}$  est dite quantique sur un ensemble  $F$  si deux particules quelconques et liées de  $F$  ne peuvent pas avoir la même énergie de couleur.

Posons  $\mathcal{D}(F) = \text{card}\{E_{x_i}; x_i \in F\}$  où  $E_{x_i}$  est l'énergie de couleur de  $x_i$ .

### 2.3 Matrice de Pauli et algorithme quantique

Soit  $G$  un graphe sur un ensemble  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Avec  $G(x_i, x_j) = \epsilon_{i,j}$  où  $\epsilon_{i,j} = 1$  ou  $0$ .

Supposons que au départ on a  $l$  couleurs  $E_{n-l+1}, \dots, E_n$  ( $l \leq n$ ).

Posons  $S_p = \{E_{n-l+1}, \dots, E_n\}$  le spectre de couleur. Et complétons le spectre  $S_p$  par un spectre  $S_c = \{E_1, \dots, E_n\}$ .

Et posons  $E = l$  (Énergie spectrale de l'atome  $G$ ).

On part d'un point quelconque  $x_k$ .

On pose  $E_{x_k} = E_n$ . (c'est l'énergie de départ de la particule)

**Plaçons les points  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  sur un cercle. Pour fixer les idées et bien comprendre et tester mes techniques, je vous recommande de voir la figure 2. Et en faisant le tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, d'écrire les vecteurs (et matrices) de Pauli dans les compartiments de la figure.**

Si maintenant  $G(x_k, x_j) = 1$ , alors la particule qui se trouve au point  $x_k$  peut prendre le chemin  $\{x_k, x_j\}$  et donnons à  $x_j$  l'énergie  $E(x_j)$  de  $S_c$  de sorte que  $\mathcal{D}\{x_k, x_j\}$  soit **quantique et maximale**. On a donc  $E(x_j) = E_n - 1$

Posons  $\mathcal{P}(x_k)$  le vecteur de Pauli défini au point  $x_k$  par :

$$\mathcal{P}(x_k) = \begin{pmatrix} E - \text{card}\{E_{x_k}\} \\ k, E_{x_k} \end{pmatrix}$$



Qui veut dire tout simplement que la particule  $x_k$  est au point k, a  $E_{x_k}$  pour énergie en ce point, et qu'il reste  $E - \text{card}\{E_{x_k}\}$  comme énergie de couleur. Le passage de la particule  $x_k$  à  $x_j$ , symbolisé par :  $x_k \rightsquigarrow x_j$  peut être considéré comme du à l'action d'un vecteur de Pauli au point  $x_j$  et définit par :

$$\mathcal{P}(x_j) = \begin{pmatrix} E - D\{x_k, x_j\} \\ j, E_{x_j} \\ k, E_{x_k} \end{pmatrix}$$

Qui veut dire que la particule  $x_j$  est au point j et a  $E_{x_j}$  pour énergie en ce point et qu'elle est provenu du point k ( $S(j) = k$ ) et qu'il reste  $E - D\{x_k, x_j\}$  comme énergie spectrale. Autrement dit le vecteur de Pauli nous renseigne sur l'énergie de la particule et sur les positions qu'elle a prise le long de son chemin et sur l'énergie spectrale restante.

On peut noter :  $x_j = \mathcal{P}_{i,j}x_i$  ou  $x_j = \mathcal{P}x_i$

On va voir comment la matrice de Pauli va nous permettre de décider si les particules dans l'atome peuvent avoir des énergies de couleur de telle sorte que la distribution sus l'ensemble des particules soit quantique.

Voici donc comment procéder :

Quand la particule  $x_k$  est au point k son vecteur de Pauli est :

$$\mathcal{P}(x_k) = \begin{pmatrix} E - \text{card}\{E_{x_k}\} \\ k, E_{x_k} \end{pmatrix}$$

On note dans l'ordre (mod n) les points  $x_k^1, \dots, x_k^{l_k}$  tels que  $G(x_k, x_k^{l_i}) = 1$ .

où  $l_i \in \{1, \dots, l_k\}$

On détermine les vecteurs de Pauli  $\mathcal{P}(x_k^{l_i})$ .

On incrémente maintenant k pour passer à k+1 (mod n). Et on réitère le procédé précédent.

On voit que à chaque réitération le vecteur de Pauli augmente de nombre de lignes et que à chaque position  $i$  peuvent cohabiter plusieurs vecteurs de Pauli de même nombre de lignes (Ceci est du au fait que la transition  $x_k \rightsquigarrow x_j$  peut s'effectuer de plusieurs façons selon le choix des chemins) : autrement dit à chaque position  $i$  le vecteur de Pauli se transforme en une matrice  $\mathcal{M}(r_i, s_i)$ . Avec  $\mathcal{M}$  ayant au plus  $n + 1$  lignes et  $n$  colonnes.

Notons  $\mathcal{P}^{n_k}(x_k)$  cette matrice de Pauli, et notons :  $\mathcal{R}(\mathcal{P}^{n_k}(x_k))$  le minimum des énergies de la première ligne de la matrice  $\mathcal{P}^{n_k}(x_k)$  :

Vu que l'énergie spectrale restante  $\mathcal{R}(\mathcal{P}^{n_k}(x_k))$  va diminuer (mais pas strictement) au fur et à mesure de l'incrément de  $k$  ;

Alors on a les résultats suivants :

## 2.4 Résolution du problème de la $k$ -coloration des graphes

**Théorème 2.4.1** *Soit  $G$  un graphe sur un ensemble  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Avec  $G(x_i, x_j) = \epsilon_{i,j}$  où  $\epsilon_{i,j} = 1$  ou  $0$ . Et soit  $l$  un entier  $1 \leq l \leq n$ .*

*Si  $\mathcal{P}^{n_k}(x_k)$  est la matrice de Pauli, alors à un moment donné :*

*1- Soit l'énergie restante  $\mathcal{R}(\mathcal{P}^{n_k}(x_k))$  est négative : cela veut dire qu'on ne peut pas colorer les  $n$  particules avec  $l$  couleurs de telle façon que la distribution soit quantique. Et le programme doit s'arrêter.*

*2- Soit l'énergie restante  $\mathcal{R}(\mathcal{P}^{n_k}(x_k))$  est strictement positif avec  $\mathcal{P}^{n_k}(x_k)$  ayant au moins  $n$  éléments distincts : Dans ce cas on peut colorer les  $n$  particules avec  $l$  couleurs de telle façon que la distribution soit quantique.*

*3 - Soit l'énergie  $\mathcal{R}(\mathcal{P}^{n_k}(x_k))$  s'annule avec  $\mathcal{P}^{n_k}(x_k)$  ayant au moins  $n$  éléments distincts : Dans ce cas on peut colorer les  $n$  particules avec  $l$  couleurs de telle façon que la distribution soit quantique, et que  $l$  est le nombre chromatique.*

**Corollaire 2.4.1 (Algorithme quantique de Pauli)** *Soit  $G$  un graphe sur*

un ensemble  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Avec  $G(x_i, x_j) = \epsilon_{i,j}$  où  $\epsilon_{i,j} = 1$  ou  $0$ .

L'algorithme quantique de Pauli est un  $\mathcal{O}(n^3)$  et permet de savoir si le graphe est colorable avec  $k$  couleurs et en  $l'$  occurrence il permet d'effectuer cette coloration .

Preuve : Analogue à celle du corollaire 1.2.1 en tenant compte des opérations de test avant d'attribuer une couleur à toute particule responsable de l'augmentation de la taille du vecteur colonne des matrices.

Ces derniers tests sont au plus au nombre de  $n^3$ . Et le résultat s'en déduit.

### 3 Conclusion

Avoir assimilé les sommets d'un graphe à des particules ayant de l'énergie m'était utile pour trouver les deux algorithmes de Feynman et de Pauli, car en épuisant toute l'énergie des particules, les deux algorithmes vont sûrement finir par s'arrêter -comme toute particule sans énergie-, après nous avoir renseigné sur l'existence ou non des cycles hamiltoniens et sur la possibilité de la k-coloration du graphe. Dans les cas positifs, les deux programmes nous afficheront tout les cycles hamiltoniens et la coloration escomptée.

Ayant montré l'existence d'un algorithme polynomiale pour résoudre les problèmes du voyageur de commerce et le problème de la k-coloration, il s'avère claire qu'on a bel et bien  $P = NP$ .

J'en étais sûr dès le départ : Car pour moi,  $P \neq NP$  est contraire à la puissance Divine : "God decides, no one can reverse His decision, and He is swift in reckoning" .Quran - Ar-Ra'd -(40). Voir figure 2.

## Références

- [1] Gabriel Andrew Dirac. Some theorems on abstract graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 2 :69–81, 1952.
- [2] Michael R. Garey et David S. Johnson. *A Guide to the Theory of NP-Completeness*. ISBN 0-7167-1045-5. Computers and Intractability, W. H. Freeman, 1979.
- [3] Chuzo Iwamoto et Godfried Toussaint. Finding hamiltonian circuits in arrangements of jordan curves is np-complete. *Information Processing Letters*, 52 :183–189, 1994.
- [4] John Adrian Bondy et Vaclav Chvatal. A method in graph theory. *Discrete Math.*, page 111–135, 1976.
- [5] Oystein Ore. A note on hamiltonian circuits. *American Mathematical Monthly*, page 55, 1960.
- [6] Lajos Posa. A theorem concerning hamilton lines. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.*, 7 :225–226, 1962.

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com

9 Allée capitaine J.B. Bossu, 21240, Talant.

Tel : (France) 0033669753590