



HAL
open science

Un résultat d'homogénéisation pour une équation de Hamilton-Jacobi périodique sur un réseau hétérogène

Ariela Briani, Guy Barles, Emmanuel Chasseigne, Nicoletta Tchou

► **To cite this version:**

Ariela Briani, Guy Barles, Emmanuel Chasseigne, Nicoletta Tchou. Un résultat d'homogénéisation pour une équation de Hamilton-Jacobi périodique sur un réseau hétérogène. 5th Annual International Conference on Partial Differential Equations EDP-NORMANDIE 2015, Oct 2015, Le Havre, France. hal-01272724

HAL Id: hal-01272724

<https://hal.science/hal-01272724>

Submitted on 12 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un résultat d'homogénéisation pour une équation de Hamilton-Jacobi périodique sur un réseau hétérogène

Ariela BRIANI

LMPT, Université François Rabelais, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France
ariela.briani@lmpt.univ-tours.fr

Guy BARLES

LMPT, Université François Rabelais, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France
Guy.Barles@lmpt.univ-tours.fr

Emmanuel CHASSEIGNE

LMPT, Université François Rabelais, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France
Emmanuel.Chasseigne@lmpt.univ-tours.fr

Nicoletta TCHOU

IRMAR, Université de Rennes 1, Rennes, France.
nicoletta.tchou@univ-rennes1.fr

Résumé

On considère ici, dans le cas simple de \mathbb{R}^N partagé en deux ouverts complémentaires périodiques Ω_1 et Ω_2 , le problème d'homogénéiser les équations de type Hamilton-Jacobi suivantes :

$$\lambda u_\varepsilon(x) + H_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x)) = 0 \quad \text{dans } \varepsilon\Omega_1 ,$$

$$\lambda u_\varepsilon(x) + H_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x)) = 0 \quad \text{dans } \varepsilon\Omega_2 ,$$

$$\min\{\lambda u_\varepsilon(x) + H_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x)), \lambda u_\varepsilon(x) + H_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x))\} \leq 0 \quad \text{sur } \varepsilon\mathcal{H} ,$$

et

$$\max\{\lambda u_\varepsilon(x) + H_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x)), \lambda u_\varepsilon(x) + H_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x))\} \geq 0 \quad \text{sur } \varepsilon\mathcal{H} ,$$

où $\mathcal{H} = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$, ε est un petit paramètre destiné à tendre vers 0 et les hamiltoniens H_i sont : ($i = 1, 2$)

$$H_i(x, y, p) := \sup_{\alpha_i \in A_i} \{-b_i(x, y, \alpha_i) \cdot p - l_i(x, y, \alpha_i)\} , \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^N , y \in \overline{\Omega}_i , p \in \mathbb{R}^N .$$

On suppose $b_i(x, y, \alpha_i)$ et $l_i(x, y, \alpha_i)$ limitées, régulières et \mathbb{Z}^N -périodiques en y , (pour tous x et α_i). Pour ce problème dans [5, 6] nous avons montré que l'on peut définir plusieurs solutions (et donc fonctions valeurs), selon le type de trajectoires qu'on accepte pour le problème de contrôle optimal correspondant.

Ici on décrit le comportement asymptotique de solutions minimale et maximale U_ε^- et U_ε^+ et on étudie le problème d'homogénéisation dans les deux cas. C'est important de remarquer que si pour traiter U_ε^- on peut utiliser des méthodes style EDP à la Lions-Papanicolau-Varadhan, dans le cas de U_ε^+ il faut s'appuyer sur sa caractérisation contrôle optimal. Ces résultats sont contenus dans [7].

Abstract. In order to describe the homogenization problems we address, we consider a partition of $\mathbb{R}^N = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{H}$ where Ω_1, Ω_2 are open subsets of \mathbb{R}^N , $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ and $\mathcal{H} = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$. We assume that the Ω_i 's are \mathbb{Z}^N -periodic, i.e.

$x + z \in \Omega_i$ for all $x \in \Omega_i$ and $z \in \mathbb{Z}^N$. The homogenization problem can be written, from a PDE point of view, as

$$\lambda u_\varepsilon(x) + H_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x)) = 0 \quad \text{in } \varepsilon\Omega_1,$$

$$\lambda u_\varepsilon(x) + H_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x)) = 0 \quad \text{in } \varepsilon\Omega_2,$$

$$\min\{\lambda u_\varepsilon + H_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon), \lambda u_\varepsilon + H_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon)\} \leq 0 \quad \text{on } \varepsilon\mathcal{H},$$

and

$$\max\{\lambda u_\varepsilon + H_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon), \lambda u_\varepsilon + H_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon)\} \geq 0 \quad \text{on } \varepsilon\mathcal{H},$$

where ε is a small positive parameter which is devoted to tend to 0, the actualization factor λ is positive and H_1, H_2 are classical Hamiltonians of deterministic control problems, which are of the form ($i = 1, 2$)

$$H_i(x, y, p) := \sup_{\alpha_i \in A_i} \{-b_i(x, y, \alpha_i) \cdot p - l_i(x, y, \alpha_i)\}, \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^N, y \in \overline{\Omega}_i, p \in \mathbb{R}^N.$$

The functions b_i and l_i satisfy the most classical regularity and boundedness assumptions and $b_i(x, y, \alpha_i)$ and $l_i(x, y, \alpha_i)$ are \mathbb{Z}^N -periodic in y , for any x and α_i . For this problem we proved in [5, 6] that we can define different solutions (and then value functions) depending on the kind of trajectories we accept for the corresponding optimal control problem. Here, we want to describe the asymptotic behavior as $\varepsilon \rightarrow 0$ of the maximal solution U_ε^+ and the minimal solution U_ε^- .

The results in [5, 6] imply that U_ε^- can be characterized through pdes, by adding a suitable subsolution condition on \mathcal{H} , while this is not the case anymore for U_ε^+ which is just the maximal subsolution. The consequence for our study is immediate : while for U_ε^- we can follow and adapt the classical pde arguments of Lions, Papanicolaou & Varadhan [15], this is not the case anymore for U_ε^+ where even if we follow closely the pde ideas, we have to perform all the argument on the control formulas.

Mots-clés. Homogénéisation, contrôle optimale, équations de Bellman, solutions de viscosité.

1. INTRODUCTION

On considère une partition de $\mathbb{R}^N = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{H}$ où Ω_1, Ω_2 sont des ouverts de \mathbb{R}^N , $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\mathcal{H} = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$ est une hypersurface régulière ($W^{2,\infty}$). On suppose les Ω_i \mathbb{Z}^N -périodiques, i.e. $x + z \in \Omega_i$ pour tous $x \in \Omega_i$ et $z \in \mathbb{Z}^N$.

Notre but est de résoudre un problème d'homogénéisation pour les EDP suivantes :

$$(1) \quad \lambda u_\varepsilon(x) + H_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x)) = 0 \quad \text{dans } \varepsilon\Omega_1,$$

$$\lambda u_\varepsilon(x) + H_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon(x)) = 0 \quad \text{dans } \varepsilon\Omega_2,$$

où ε est un petit paramètre destiné à tendre vers 0, $\lambda > 0$ et les hamiltoniens H_i sont donnés par ($i = 1, 2$)

$$(2) \quad H_i(x, y, p) := \sup_{\alpha_i \in A_i} \{-b_i(x, y, \alpha_i) \cdot p - l_i(x, y, \alpha_i)\} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^N, y \in \overline{\Omega}_i, p \in \mathbb{R}^N.$$

On supposera que les fonctions b_i et l_i sont bornées et régulières et que $b_i(x, y, \alpha_i)$ et $l_i(x, y, \alpha_i)$ sont \mathbb{Z}^N -périodiques en y , pour tout x et α_i .

Les équations (1) doivent être complétées par des conditions sur l'hypersurface \mathcal{H}^1 et cela était le but des travaux [4, 5, 6]. Malheureusement les inégalités classiques de H. Ishii

$$(3) \quad \min\{\lambda u_\varepsilon + H_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon), \lambda u_\varepsilon + H_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon)\} \leq 0 \quad \text{sur } \varepsilon\mathcal{H},$$

et

$$(4) \quad \max\{\lambda u_\varepsilon + H_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon), \lambda u_\varepsilon + H_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, Du_\varepsilon)\} \geq 0 \quad \text{sur } \varepsilon\mathcal{H},$$

ne sont pas suffisantes et le problème (1)-(3)-(4) a une solution maximale U_ε^+ et une solution minimale U_ε^- que l'on peut décrire en term de problèmes de contrôle. On décrira les problèmes de contrôle pour U_ε^+ et U_ε^- dans la section 3, ici on remarque seulement que U_ε^+ est construite avec des stratégies qu'on appellera *régulières* et U_ε^- est construite avec toutes les stratégies possibles, en particulière aussi avec des stratégies dites *singulières* qui sont exclues dans le cas de U_ε^+ .

Notre but est de décrire le comportement asymptotique pour $\varepsilon \rightarrow 0$ des solutions maximale et minimale U_ε^+ et U_ε^- .

Les résultats de [5, 6] impliquent que l'on peut caractériser la fonction U_ε^- par des EDP en rajoutant une condition de sous-solution sur \mathcal{H} . Par contre la fonction U_ε^+ ne peut être caractérisée que comme la sous-solution maximale de (1)-(3)-(4). En conséquence, pour résoudre le problème d'homogénéisation pour U_ε^- on peut appliquer les arguments classiques à la Lions, Papanicolaou & Varadhan [15] et Alvarez & Bardi [2, 3]. Cela n'est plus possible dans le cas de U_ε^+ : même en suivant les idées de l'approche EDP on doit appliquer les arguments à la formule de contrôle optimal. Pour résoudre des difficultés techniques dans la preuve de la convergence de U_ε^+ on construit une approximation du problème dans la cellule : les mêmes idées dans un contexte différent sont utilisées dans Barles, Da Lio, Lions & Souganidis [8]. Notre travail est en relation avec les papier suivants qui décrivent de problèmes sur des réseaux : [1, 10, 11, 12].

Dans la section 2 on rappelle les résultats sur les edp (1)-(3)-(4), dans la Section 3 on décrit les problème de contrôle pour U_ε^+ et U_ε^- et on donne la définition précise de stratégie régulière et singulière. Les résultats d'homogénéisation pour U_ε^- et U_ε^+ seront décrits respectivement dans les sections 4 et 5. Pour toutes les preuves on renvoie a [7].

2. LA NOTION DE SOLUTION DE VISCOSITÉ DANS UN RÉSEAU HÉTÉROGÈNE

Dans cette section on donne la définition de solution de viscosité pour les problèmes (1)-(3)-(4). Pour une introduction et tous les détails on renvoie à [5, 6].

Ici, on considère une partition de $\mathbb{R}^N = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{H}$ où Ω_1, Ω_2 sont des ouverts de \mathbb{R}^N , $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\mathcal{H} = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$ est une hypersurface régulière ($W^{2,\infty}$). Pour $y \in \mathcal{H}$ on note $T_y\mathcal{H}$ l'espace tangent à \mathcal{H} en y et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_y\mathcal{H}}$ le produit scalaire dans cet espace tangent.

On considère une fonction générique $\mathbf{G} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ qui peut être définie différamment sur Ω_1, Ω_2 et \mathcal{H} par

$$\mathbf{G}(x, y, p) := \begin{cases} G_1(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_1, \\ G_{\mathcal{H}}(x, y, p) & \text{si } y \in \mathcal{H} \text{ et } p \in T_y\mathcal{H}, \\ G_2(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_2. \end{cases}$$

On définit aussi

$$G(x, y, p) := \begin{cases} G_1(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_1, \\ G_2(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_2. \end{cases}$$

1. On supposera que \mathcal{H} c'est une $W^{2,\infty}$ -hypersurface.

Dans le but d'être consistant avec le problème d'homogénéisation on supposera toujours que les G_i soient définis dans tout \mathbb{R}^N . On commence par rappeler la définition de solution de viscosité pour un hamiltonien discontinu G introduite par H. Ishii dans [13].

Soient $\rho \geq 0$ et $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, une fonction u est une solution de viscosité du problème

$$(5) \quad \rho u(y) + G(x, y, Du(y)) = f(x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

si elle vérifie la définition suivante.

Definition 2.1. On dit que une fonction scs et bornée u est une sous-solution de (5) si elle vérifie au sens de viscosité :

$$(6) \quad \rho u(y) + G_1(x, y, Du(y)) \leq f(x, y) \text{ si } y \in \Omega_1, \rho u(y) + G_2(x, y, Du(y)) \leq f(x, y) \text{ si } y \in \Omega_2,$$

$$(7) \quad \rho u(y) + \min\{G_1(x, y, Du(y)), G_2(x, y, Du(y))\} \leq f(x, y) \text{ si } y \in \mathcal{H}.$$

On dit que une fonction sci v est une sursolution de (5) si elle vérifie au sens de viscosité :

$$(8) \quad \rho u(y) + G_1(x, y, Du(y)) \geq f(x, y) \text{ si } y \in \Omega_1, \rho u(y) + G_2(x, y, Du(y)) \geq f(x, y) \text{ si } y \in \Omega_2,$$

$$(9) \quad \rho u(y) + \max\{G_1(x, y, Du(y)), G_2(x, y, Du(y))\} \geq f(x, y) \text{ si } y \in \mathcal{H}.$$

On dit que une fonction bornée et continue w est une solution de (5) si elle est sous et sursolution.

On donne maintenant la définition de sous-solution pour l'hamiltonien tangentiel sur \mathcal{H} .

Definition 2.2. Une fonction scs $u : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est une sous-solution de viscosité de

$$\rho u(y) + G_{\mathcal{H}}(x, y, D_{\mathcal{H}}u(y)) = f(x, y) \text{ sur } \mathcal{H}$$

si, $\forall \phi \in C^1(\mathbb{R}^N)$ et y point de maximum de $z \mapsto u(z) - \phi(z)$ sur \mathcal{H} , on a

$$\rho u(y) + G_{\mathcal{H}}(x, y, D_{\mathcal{H}}\phi(y)) \leq f(x, y),$$

où $D_{\mathcal{H}}\phi(y)$ est le gradient de la restriction de ϕ à \mathcal{H} au point y (qui appartient à $T_y\mathcal{H}$).

On peut donc définir maintenant une solution de problème dans tout l'espace :

$$(10) \quad \rho u(y) + \mathbf{G}(x, y, Du(y)) = f(x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

Definition 2.3. On dit que une fonction scs et bornée est une sous-solution de (10) si elle vérifie (6), (7) et

$$\rho u(y) + G_{\mathcal{H}}(x, y, D_{\mathcal{H}}u(y)) \leq f(x, y) \text{ dans le sens de la Définition 2.2, si } y \in \mathcal{H}.$$

On dit que une fonction sci est une sursolution de (10) si elle vérifie (8) et (9).

On dit que une fonction bornée et continue est une solution de (10) si elle est sous et sursolution.

On considère maintenant en particulier des hamiltoniens de la forme (2) et on donne nos hypothèses détaillées.

[H0] Pour $i = 1, 2$, A_i est un espace métrique compact et $b_i : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times A_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction continue et bornée. En particulier, il existe $M_b > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i$, $i = 1, 2$, on a

$$|b_i(x, y, \alpha_i)| \leq M_b.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i$ la fonction $b_i(x, \cdot, \alpha_i)$ est \mathbb{Z}^N -périodique. Il existe $L_i \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x, z \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i$ on a

$$|b_i(x, y, \alpha_i) - b_i(z, y, \alpha_i)| \leq L_i |x - z| ,$$

et il existe $\bar{L}_i \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $y, w \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i$ on a

$$|b_i(x, y, \alpha_i) - b_i(x, w, \alpha_i)| \leq \bar{L}_i |y - w| .$$

[H1] Pour $i = 1, 2$, $l_i : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times A_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction continue et bornée. En particulier, il existe $M_i > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i$, $i = 1, 2$, on a

$$|l_i(x, y, \alpha_i)| \leq M_i .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\alpha_i \in A_i$, la fonction $l_i(x, \cdot, \alpha_i)$ est \mathbb{Z}^N -périodique.

Il existe un module de continuité $\omega_i(\cdot)$ tel que pour tout $x, z \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i$

$$|l_i(x, y, \alpha_i) - l_i(z, y, \alpha_i)| \leq \omega_i(x - z) ,$$

et il existe $\bar{L}_{i,l} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $y, w \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i$ on a

$$|l_i(x, y, \alpha_i) - l_i(x, w, \alpha_i)| \leq \bar{L}_{i,l} |y - w| .$$

[H2] Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ et $i = 1, 2$ les ensembles $\cup_{\alpha_i \in A_i} (b_i(x, y, \alpha_i), l_i(x, y, \alpha_i))$, sont fermés et convexes. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $i = 1, 2$, $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathcal{H}$ on a

$$\mathbf{B}_i(x, y) \supset \{|z| \leq \delta\} \quad \text{où} \quad \mathbf{B}_i(x, y) := \{b_i(x, y, \alpha_i) : \alpha_i \in A_i\} .$$

Afin de définir les hamiltoniens sur l'hyperplan \mathcal{H} on pose

$$A := \{a = (\alpha_1, \alpha_2, \mu); \alpha_i \in A_i, \mu \in [0, 1]\}$$

et on définit pour $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathcal{H}$ et $a = (\alpha_1, \alpha_2, \mu) \in A$

$$b_{\mathcal{H}}(x, y, a) := \mu b_1(x, y, \alpha_1) + (1 - \mu) b_2(x, y, \alpha_2) ,$$

et

$$l_{\mathcal{H}}(x, y, a) := \mu l_1(x, y, \alpha_1) + (1 - \mu) l_2(x, y, \alpha_2) .$$

L'ensemble de contrôles tangentiels est donné par

$$A_0(x, y) := \{a \in A : b_{\mathcal{H}}(x, y, a) \cdot \mathbf{n}_1(y) = 0\}$$

où $\mathbf{n}_i(y)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à Ω_i en y . Le sous ensemble $A_0(x, y)$ des contrôles tangentiels *réguliers* est donné par

$$A_0^{\text{reg}}(x, y) := \{a \in A_0(x, y) : b_i(x, y, \alpha_i) \cdot \mathbf{n}_i(y) \geq 0\} .$$

On définit donc les hamiltoniens tangentiels suivants :

$$H_T(x, y, p) := \sup_{a \in A_0(x, y)} \{- \langle b_{\mathcal{H}}(x, y, a), p \rangle_{T_y \mathcal{H}} - l_{\mathcal{H}}(x, y, a)\} ,$$

$$H_T^{\text{reg}}(x, y, p) := \sup_{a \in A_0^{\text{reg}}(x, y)} \{- \langle b_{\mathcal{H}}(x, y, a), p \rangle_{T_y \mathcal{H}} - l_{\mathcal{H}}(x, y, a)\} ,$$

où $p \in T_y \mathcal{H}$ et $b_{\mathcal{H}}(x, y, a)$ est identifié avec sa projection orthogonale sur $T_y \mathcal{H}$.

Si H_1 dans Ω_1 et H_2 dans Ω_2 sont les hamiltoniens définis dans (2) on peut donner la définition globale suivante :

$$\mathbf{H}^-(x, y, p) := \begin{cases} H_1(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_1 , \\ H_T(x, y, p) & \text{si } y \in \mathcal{H} \text{ et } p \in T_y \mathcal{H} , \\ H_2(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_2 . \end{cases}$$

$$\mathbf{H}^+(x, y, p) := \begin{cases} H_1(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_1 , \\ H_T^{\text{reg}}(x, y, p) & \text{si } y \in \mathcal{H} \text{ et } p \in T_y \mathcal{H} , \\ H_2(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_2 . \end{cases}$$

$$H(x, y, p) := \begin{cases} H_1(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_1, \\ H_2(x, y, p) & \text{si } y \in \Omega_2. \end{cases}$$

Finalement, nous pouvons définir précisément les équations que nous voulons homogénéiser :

$$(11) \quad \lambda v(x) + \mathbf{H}_\varepsilon^+(x, \frac{x}{\varepsilon}, Dv(x)) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

$$(12) \quad \lambda v(x) + \mathbf{H}_\varepsilon^-(x, \frac{x}{\varepsilon}, Dv(x)) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

$$(13) \quad \lambda v(x) + H_\varepsilon(x, \frac{x}{\varepsilon}, Dv(x)) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

où $\lambda > 0$, $\mathbf{H}_\varepsilon^+(x, y, p)$ est associée à H_1 sur $\varepsilon\Omega_1$, H_2 sur $\varepsilon\Omega_2$ et H_T^{reg} sur $\varepsilon\mathcal{H}$, $\mathbf{H}_\varepsilon^-(x, y, p)$ est associée à H_1 sur $\varepsilon\Omega_1$, H_2 sur $\varepsilon\Omega_2$ et H_T sur $\varepsilon\mathcal{H}$, $H_\varepsilon(x, y, p)$ est associée à H_1 sur $\varepsilon\Omega_1$ et H_2 sur $\varepsilon\Omega_2$ (pour simplicité dans la suite on oubliera la dépendance en ε .)

3. LE PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMALE À ε -FIXÉ

Dans cette section nous allons définir précisément le problème de contrôle optimal à horizon infini dont les fonctions valeurs sont "solutions" des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (11) où (12).

Pour définir les trajectoires nous avons besoin de définir les solutions d'une équation différentielle ordinaire avec une dynamique discontinue. En suivant Filippov [9] nous allons utiliser l'approche inclusion différentielles.

Soit $\varepsilon > 0$. Les trajectoires $X_{x_0}^\varepsilon(\cdot) = (X_{x_0,1}^\varepsilon, X_{x_0,2}^\varepsilon, \dots, X_{x_0,N}^\varepsilon)(\cdot)$ sont des fonctions Lipschitz continues solutions de l'inclusion différentielle suivante :

$$(14) \quad \dot{X}_{x_0}^\varepsilon(t) \in \mathcal{B}\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) \text{ pour presque tout } t \in (0, +\infty); \quad X_{x_0}^\varepsilon(0) = x_0$$

où, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{B}(x, y) := \begin{cases} \mathbf{B}_1(x, y) & \text{si } y \in \Omega_1 \\ \mathbf{B}_2(x, y) & \text{si } y \in \Omega_2 \\ \overline{\text{co}}(\mathbf{B}_1(x, y) \cup \mathbf{B}_2(x, y)) & \text{si } y \in \mathcal{H} \end{cases},$$

$\overline{\text{co}}(E)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ et on rappelle que les $\mathbf{B}_i(x, y)$ sont définis dans [H2].

On note A l'ensemble $A := A_1 \times A_2 \times [0, 1]$ et on pose $\mathcal{A} := L^\infty(0, +\infty; A)$.

Nous avons le résultat suivant :

Theorem 3.1. [6, Théorème 2.1]

On suppose [H0], [H1] et [H2]. Soit $\varepsilon > 0$, alors

(i) *pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$, il existe une fonction Lipschitz $X_{x_0}^\varepsilon : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^N$ solution de l'inclusion différentielle (14).*

(ii) *Pour toutes solutions $X_{x_0}^\varepsilon(\cdot)$ de (14), il existe un contrôle $a(\cdot) = (\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathcal{A}$ tel que*

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{X}_{x_0}^\varepsilon(t) &= b_1\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon(t)}{\varepsilon}, \alpha_1(t)\right) \mathbf{1}_{\{t: X_{x_0}^\varepsilon(t) \in \varepsilon\Omega_1\}} + b_2\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon(t)}{\varepsilon}, \alpha_2(t)\right) \mathbf{1}_{\{t: X_{x_0}^\varepsilon(t) \in \varepsilon\Omega_2\}} \\ &+ b_{\mathcal{H}}\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon(t)}{\varepsilon}, a(t)\right) \mathbf{1}_{\{t: X_{x_0}^\varepsilon(t) \in \varepsilon\mathcal{H}\}}, \end{aligned}$$

(où $\mathbf{1}_I(\cdot)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble I et pour simplicité on ne note pas la dépendance en ε dans le contrôle $a = a^\varepsilon$.)

(iii) De plus,

$$b_{\mathcal{H}}\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), a(t)\right) \cdot \mathbf{n}_1\left(\frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t)\right) = 0 \quad \text{p.p. dans } \{X_{x_0}^\varepsilon(t) \in \varepsilon\mathcal{H}\}.$$

On pose

$$\mathcal{E}_1 := \{t : X_{x_0}^\varepsilon(t) \in \varepsilon\Omega_1\}, \quad \mathcal{E}_2 := \{t : X_{x_0}^\varepsilon(t) \in \varepsilon\Omega_2\}, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{H}} := \{t : X_{x_0}^\varepsilon(t) \in \varepsilon\mathcal{H}\}.$$

Nous remarquons que dans le Théorème 3.1, une solution $X_{x_0}^\varepsilon(\cdot)$ peut être associée à plusieurs contrôles $a(\cdot)$. Pour bien définir les ensembles des contrôles admissibles, pour tout $\varepsilon > 0$, nous définissons l'ensemble $\mathcal{T}_{x_0}^\varepsilon$ des trajectoires admissibles en partant de x_0

$$\mathcal{T}_{x_0}^\varepsilon := \{(X_{x_0}^\varepsilon(\cdot), a(\cdot)) \in \text{Lip}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^N) \times \mathcal{A} \text{ tel que (15) est vérifiée et } X_{x_0}^\varepsilon(0) = x_0\}.$$

Parmi les dynamiques qui restent sur \mathcal{H} nous voulons distinguer celles qui y restent "en tirant de deux côtés", dites singulière et celles qui y restent "en poussant de deux cotés" dites régulières. Plus précisément une dynamique $b_{\mathcal{H}}(x, \frac{x}{\varepsilon}, a)$ est dite *régulière* sur $\varepsilon\mathcal{H}$ si $b_i(x, \frac{x}{\varepsilon}, \alpha_1) \cdot \mathbf{n}_i(\frac{x}{\varepsilon}) \geq 0$ et *singulière* si $b_i(x, \frac{x}{\varepsilon}, \alpha_1) \cdot \mathbf{n}_i(\frac{x}{\varepsilon}) < 0$. On définit donc l'ensemble des trajectoires régulières en partant de x_0

$$\mathcal{T}_{x_0}^{\text{reg}, \varepsilon} := \{(X_{x_0}^\varepsilon(\cdot), a(\cdot)) \in \mathcal{T}_{x_0}^\varepsilon \text{ telle que, pour presque tout } t \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}},$$

$$b_{\mathcal{H}}\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), a(t)\right) \text{ est régulière}\}.$$

On veut minimiser un cout de type horizon infini où l'on paye respectivement l_i si la trajectoire est dans $\varepsilon\Omega_i$, $i = 1, 2$ et $l_{\mathcal{H}}$ si elle vit sur $\varepsilon\mathcal{H}$. Plus précisément le cout d'une trajectoire $(X_{x_0}^\varepsilon(\cdot), a) \in \mathcal{T}_{x_0}^\varepsilon$ sera donc donné par

$$J(x_0; (X_{x_0}^\varepsilon, a)) := \int_0^{+\infty} l\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), a(t)\right) e^{-\lambda t} dt$$

où la lagrangien est donnée par

$$\begin{aligned} l\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), a(t)\right) &:= l_1\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), \alpha_1(t)\right) \mathbf{1}_{\mathcal{E}_1}(t) + l_2\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), \alpha_2(t)\right) \mathbf{1}_{\mathcal{E}_2}(t) \\ &+ l_{\mathcal{H}}\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), a(t)\right) \mathbf{1}_{\mathcal{E}_{\mathcal{H}}}(t). \end{aligned}$$

Pour simplicité on pose aussi

$$\begin{aligned} b\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), a(t)\right) &:= b_1\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), \alpha_1(t)\right) \mathbf{1}_{\mathcal{E}_1}(t) + b_2\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), \alpha_2(t)\right) \mathbf{1}_{\mathcal{E}_2}(t) \\ &+ b_{\mathcal{H}}\left(X_{x_0}^\varepsilon(t), \frac{X_{x_0}^\varepsilon}{\varepsilon}(t), a(t)\right) \mathbf{1}_{\mathcal{E}_{\mathcal{H}}}(t). \end{aligned}$$

Pour chaque donnée initiale x_0 , on peut donc définir les **fonctions valeurs** suivantes :

$$U_\varepsilon^-(x_0) := \inf_{(X_{x_0}^\varepsilon, a) \in \mathcal{T}_{x_0}^\varepsilon} J(x_0; (X_{x_0}^\varepsilon, a)) \quad \text{et} \quad U_\varepsilon^+(x_0) := \inf_{(X_{x_0}^\varepsilon, a) \in \mathcal{T}_{x_0}^{\text{reg}, \varepsilon}} J(x_0; (X_{x_0}^\varepsilon, a)).$$

L'hypothèse de contrôlabilité [H2] permet de prouver que les deux fonctions valeurs sont uniformément Lipschitz.

Theorem 3.2. [7, Théorème 3.2]

On suppose [H0], [H1], et [H2]. Alors, les fonction valeurs U_ε^- et U_ε^+ sont bornées et Lipschitz-continues de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} . Leurs normes $W^{1, \infty}$ sont aussi uniformément bornées par rapport à ε .

Dans [6] on prouve que U_ε^- et U_ε^+ vérifient toutes les deux un principe de programmation dynamique et donc qu'elles sont solutions de viscosité toutes les deux de (13). De plus U_ε^- est solution de viscosité de (12) et U_ε^+ de (11). (Voir Théorèmes 3.4 et 3.5.)

De plus, on prouve que U_ε^- et U_ε^+ sont respectivement la solution minimale et maximale de (13) et un résultat de comparaison qui nous sera très utile dans les preuves de convergence :

Theorem 3.3. [6, Théorème 3.5]

On suppose [H0], [H1] et [H2].

(i) U_ε^- est la solution et la sursolution minimale de (13).

(ii) U_ε^+ est la solution et la sous-solution maximale de (13).

(iii) Soit u une sous-solution bornée et Lipschitz continue de (12) et v une sur-solution sci et bornée de (12). Alors $u \leq v$ dans \mathbb{R}^N .

(iv) Soient $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^N$ fixés. Soit u une sous-solution bornée et Lipschitz continue et v une sur-solution sci de (12) pour tout $x \in B(\xi, R)$.

$$\text{Si } u \leq v \text{ sur } \partial B(\xi, R) \quad \text{alors} \quad u \leq v \text{ dans } B(\xi, R).$$

(v) Soient $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^N$ fixés. Soit u une sous-solution bornée et Lipschitz continue de (13) pour tout $x \in B(\xi, R)$.

$$\text{Si } u \leq U_\varepsilon^+ \text{ sur } \partial B(\xi, R) \quad \text{alors} \quad u \leq U_\varepsilon^+ \text{ dans } B(\xi, R).$$

4. LE RÉSULTAT D'HOMOGENÉISATION POUR U_ε^-

Le résultat de comparaison forte Théorème 3.3(iv) nous permet de déduire le résultat de homogénéisation pour la fonction U_ε^- en suivant la technique classique à la Lions-Papanicolau et Varadan, [15]. On définit donc le problème dans la cellule standard dans le théorème suivant.

Theorem 4.1. [7, Théorème 4.1]

On suppose [H0], [H1] et [H2]. Pour tout $x, p \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique constante $C = \bar{H}^-(x, p)$ telle que le problème dans la cellule

$$\mathbf{H}^-(x, y, Dv(y) + p) = C \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

admette une unique solution de viscosité V^- Lipschitz continue et \mathbb{Z}^N -périodique.

La preuve de ce théorème se fait classiquement en introduisant le ρ -**problème** : soit $\rho > 0$, pour tout $p \in \mathbb{R}^N$ et $x \in \mathbb{R}^N$ (x et p sont des variables gelées) on note V_ρ^- la solution de

$$(16) \quad \rho u(y) + \mathbf{H}^-(x, y, Du(y) + p) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

On prouve après qu'il existe une unique solution de (16) qui peut être caractérisée comme fonction valeur d'un problème de contrôle optimale. (Voir Section 4.2 dans [7].)

Une fois le problème dans la cellule défini on peut prouver que la fonction \mathbf{H}^- définie sur \mathbb{R}^N vérifie les hypothèses classiques qui permettent d'obtenir un résultat de comparaison pour l'équation limite

$$\lambda w(x) + \bar{H}^-(x, Dw(x)) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

et donc d'obtenir le résultat d'homogénéisation suivant.

Theorem 4.2. [7, Théorème 4.5]

On suppose [H0], [H1] et [H2]. Soit $\bar{H}^- : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans le Théorème 4.1. La suite $(U_\varepsilon^-)_{\varepsilon > 0}$ converge localement uniformément dans \mathbb{R}^N à une fonction U^- unique solution de viscosité de

$$\lambda U^-(x) + \bar{H}^-(x, DU^-) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N.$$

5. LE RÉSULTAT D'HOMOGENÉISATION POUR U_ε^+

Dans le cas de U_ε^+ nous ne pouvons caractériser cette fonction que comme la solution maximal de (1)-(3)-(4). Pour prouver l'homogénéisation nous allons donc suivre les argument edp mais en travaillant directement sur la formulation contrôle. Le problème dans la cellule prend donc la forme suivante.

Theorem 5.1. [7, Théorème 5.1]

On suppose [H0], [H1] et [H2]. Pour tout $x, p \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique constante $\bar{H}^+(x, p) \in \mathbb{R}$ telle que il existe une fonction V^+ Lipschitz continue et périodique qui vérifie, pour tout $\tau \geq 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}^N$

$$V^+(y_0) = \inf_{(Y_{y_0}, a) \in \mathcal{T}_{y_0}^{\text{reg}}} \left\{ \int_0^\tau (\tilde{l}(x, p, Y_{y_0}(t), a(t)) + \bar{H}^+(x, p)) dt + V^+(Y_{y_0}(\tau)) \right\}$$

où \tilde{l} est définie par

$$\tilde{l}(x, p, Y_{y_0}(t), a(t)) = l(x, Y_{y_0}(t), a(t)) + b(x, Y_{y_0}(t), a(t)) \cdot p.$$

De plus V^+ est une solution de viscosité de

$$\mathbf{H}^+(x, y, DV^+ + p) = \bar{H}^+(x, p) \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^N$ nous avons

$$(17) \quad \bar{H}^+(x, p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(- \inf_{(Y_{y_0}, a) \in \mathcal{T}_{y_0}^{\text{reg}}} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{l}(x, p, Y_{y_0}(t), a(t)) dt \right\} \right).$$

Grâce à la formule (17) nous pouvons prouver que la fonction $\bar{H}^+(x, p)$ vérifie aussi les propriétés nécessaires pour avoir un résultat de comparaison pour l'équation limite

$$\lambda u(x) + \bar{H}^+(x, Du(x)) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

L'énoncé du résultat d'homogénéisation est donc similaire au cas de U_ε^- :

Theorem 5.2. [7, Théorème 5.5]

On suppose [H0], [H1] et [H2]. Soit $\bar{H}^+ : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans le théorème 5.1. La suite $(U_\varepsilon^+)_{\varepsilon > 0}$ converge localement uniformément dans \mathbb{R}^N à une fonction continue U^+ , unique solution de viscosité de

$$\lambda u(x) + \bar{H}^+(x, Du(x)) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

On remarque ici que cette preuve a une difficulté technique supplémentaire assez importante. La dépendance en x dans la dynamique b et dans le cout l (qui sont discontinus!) ne permet pas une estimation "de la distance entre U_ε^+ et U^+ " directement sur les formules de représentation contrôle. Nous introduisons donc une approximation du problème dans la cellule en construisant une suite de problèmes de contrôles avec la trajectoire constante par rapport à la première variable. Pour les détails de cette construction on renvoie le lecteur à la partie 3 de la preuve du Théorème 5.5 dans [7].

RÉFÉRENCES

- [1] Y. Achdou, F. Camilli, A. Cutri, N. Tchou, Hamilton-Jacobi equations constrained on networks, Nonlinear Differential Equations and Applications. NoDea-Springer, march 2012, DOI 10.1007/s00030-012-0158-1.
- [2] O. Alvarez, M. Bardi, Viscosity solutions methods for singular perturbations in deterministic and stochastic control. SIAM J. Control Optim. 40 (2001/02), no. 4, 1159-1188.

- [3] *O. Alvarez, M. Bardi*, Singular perturbations of nonlinear degenerate parabolic PDEs : a general convergence result. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 170 (2003), no. 1, 17-61.
- [4] *G. Barles, E. Chasseigne*, (Almost) Everything You Always Wanted to Know About Deterministic Control Problems, *Stratified Domains Networks and heterogenous media* 10 (2015), à paraître.
- [5] *G. Barles, A. Briani, E. Chasseigne*, A Bellman approach for two-domains optimal control problems in R^N , *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 19 (2013), no. 3, 710–739.
- [6] *G. Barles, A. Briani, E. Chasseigne*, A Bellman approach for regional optimal control problems in R^N . *SIAM J. Control Optim.* 52 (2014), no. 3, 1712–1744.
- [7] *G. Barles, A. Briani, E. Chasseigne, N. Tchou*, Homogenization Results for a Deterministic Multi-domains Periodic Control Problem, *Asymptotic Analysis* 95 (2015), à paraître.
- [8] *G. Barles, F. Da Lio, P.L. Lions, P. E. Souganidis*, Ergodic problems and periodic homogenization for fully nonlinear equations in half-space type domains with Neumann boundary conditions. *Indiana Univ. Math. J.* 57 (2008), no. 5, 2355–2375.
- [9] *A.F. Filippov*, Differential equations with discontinuous right-hand side. *Matematicheskii Sbornik*, 51 (1960), pp. 99–128. American Mathematical Society Translations, Vol. 42 (1964), pp. 199–231 English translation Series 2.
- [10] *N. Forcadel, Z. Rao*, Singular perturbation of optimal control problems on multi-domains. Preprint, HAL : hal-00812846, 2013.
- [11] *C. Imbert, R. Monneau*, Flux-limited solutions for quasi-convex Hamilton-Jacobi equations on networks, Preprint, HAL-00832545, 2014.
- [12] *C. Imbert, R. Monneau*, Quasi-convex Hamilton-Jacobi equations posed on junctions : the multi-dimensional case. Preprint, HAL-01073954, 2014.
- [13] *H. Ishii*, Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets, *Bull. Faculty Sci. Eng. Chuo Univ.* 28, (1985), 33-77.
- [14] *H. Ishii*, A Short Introduction to Viscosity Solutions and the Large Time Behavior of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, in "Hamilton-Jacobi equations : approximations, numerical analysis and applications". *Lecture Notes in Mathematics* 2074.(2011) Springer-Verlag, 111-250.
- [15] *P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S Varadhan*, Homogeneization of Hamilton Jacobi Equation. Unpublished, circa 1998.