HAL open science

Du théorème de décomposition a la pureté locale

Dung Tráng Lê, Fouad Elzein

To cite this version:

Dung Tráng Lê, Fouad Elzein. Du théorème de décomposition a la pureté locale. Comptes Rendus. Mathématique, 2014, 352, pp.1051 - 1055. hal-01271002

HAL Id: hal-01271002

https://hal.science/hal-01271002

Submitted on 8 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Du théorème de décomposition à la pureté locale

Fouad El Zein [a], Dũng Tráng Lê [b]

[a] *Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris, France*

[b] *Université d'Aix-Marseille LATP, UMR-CNRS 7353 39, rue Joliot-Curie F-13453 Marseille Cedex 13, France*

Note présentée par Claire Voisin

Résumé

Une nouvelle démonstration du théorème de décomposition est donnée en établissant une relation avec une version du théorème de pureté locale de Deligne et Gabber adaptée aux variétés algébriques complexes. Une réduction au cas d'un morphisme fibré par des diviseurs à croisements normaux relatifs sur les strates d'une stratification est établie.

Abstract

Perverse filtration and Hodge theory. A new proof of the decomposition theorem is established using a relation with a version of the local purity theorem of Deligne and Gabber adapted to complex algebraic varieties. A reduction to the case of a fibred morphism by relative normal crossing divisors on the strata of a stratification is established.

1. Introduction

Soit $f : X \to V$ un morphisme projectif de variétés algébriques complexes, $\tilde{\mathcal{L}}$ une variation de structures de Hodge (VSH) polarisée sur un ouvert Ω lisse de X, $j : \Omega \to X$, $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}}[m]$ vu comme un complexe de faisceaux égal à $\tilde{\mathcal{L}}$ en degré $-m$ où m est la dimension de X et nul en tout autre degré. L'extension intermédiaire de $\mathcal{L}$ ([1], prop. (2.1.11) p. 60, (2.2.7) p. 69) est notée $j_{!*}\mathcal{L}$.

Le théorème de décomposition dans [1] établit, dans le cas géométrique, un isomorphisme dans la catégorie dérivée $D^b_c(V, \mathbb{Q})$ du complexe image directe :

$$Rf_* j_{!*}\mathcal{L} \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^p\mathcal{H}^i(Rf_* j_{!*}\mathcal{L})[-i]$$

en une somme directe de ses cohomologies perverses. D'autre part, chaque terme à droite, se décompose naturellement cette fois en une somme directe d'extensions intermédiaires ([1], théorèmes (4.3.1) p. 112, (5.4.10) p. 144, (6.2.5) p. 163, (6.2.10) p. 165). Ce théorème a été établi d'abord pour les schémas X de type fini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$, pour des faisceaux purs dans la sous-catégorie abélienne des faisceaux pervers de la catégorie $D^b_c(X, \mathbb{Q}_l)$ dérivée des $\mathbb{Q}_l$-faiceaux constructibles pour $l \neq p$ [1].

Les énoncés se transposent en caractéristique 0 selon le dictionnaire établi par Deligne ([5], sections 3 et 9) ; ce qui est fait dans ([1], 6.2) où l'on découvre une technique qui permet de déduire des résultats comportant des énoncés géométriques en caractéristique 0 à partir du cas correspondant en caractéristique $p > 0$.

Email addresses: `fouad.elzein@imj-prg.fr` (Fouad El Zein), `ledt@ictp.it` (Dũng Tráng Lê).

L' énoncé correspond aussi à un théorème de décomposition pour une VSH polarisée, qui se démontre à l'aide de la théorie de Hodge des D-modules différentiels [11]. C'est ce résultat que l'on cherche à obtenir par une démonstration directe évitant l'imposant développement de la notion de module de Hodge qui, bien qu'intéressant en soi, revient au final à une VSH polarisée.

Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une désingularisation, la démonstration pour f se déduit facilement de celles pour π et $f \circ \pi$ ce qui nous ramène au cas où X est lisse. En fait, un résultat essentiel permet de se ramener au cas où $f : X \to V$ est une fibration en DCN sur les strates, au sens donné plus bas (2.1) et (2). Ainsi, on peut utiliser les résultats de [8] assurant *la compatibilité de la filtration perverse avec la SHM* sur la cohomologie d'une extension intermédiaire sur ouvert Ω qui est à la fois complémentaire d'un diviseur à croisements normaux (DCN) dans X et inverse par f d'un ouvert sur V, ce qui explique la relative simplicité de la nouvelle démonstration que l'on se propose de donner. Les deux notions de base sont les suivantes :

1) La construction d'une structure de Hodge mixte (SHM) sur la cohomologie du complémentaire d'un diviseur DCN dans X, établie à l'aide d'un complexe logarithmique ([8], [2] 8.3.3, théorème 8.3.14).

2) La notion de filtration perverse ${}^p\tau$ sur l'image directe $K := Rf_* j_{!*}\mathcal{L}$ ([1] prop. 1.3.3 p. 29) construite dans la catégorie dérivée $D^b_c(V, \mathbb{Q})$ des faisceaux à cohomologie constructible.

Complexes logarithmiques. On va énoncer le théorème de pureté locale (ou semi pureté) en un point v de la base V, ou au voisinage de la fibre $X_v := f^{-1}(v)$. On se ramène à considérer une VSH polarisée $\mathcal{L}$ sur l'ouvert $\Omega := X - Y$ complémentaire d'un diviseur à croisements normaux Y dans une variété complexe lisse X. Soient Z et T deux DCN dans X tel que $Z \cup Y$ soit aussi un sous-DCN de T et soit $j_Z : X - Z \to X$.

(*)Il existe un complexe bifiltré $(IC(X, \mathcal{L})(*Z), W, F)$, construit comme sous-complexe du complexe logarithmique $(\Omega^*_X(LogT) \otimes \mathcal{L}_X, W, F)$, et quasi-isomorphe à $Rj_{Z*}j^*_Z j_{!*}\mathcal{L}$ ([8] définition 2.3, [2] section 8.3.3, théorèmes 8.3.14, 8.3.25, cor. 8.3.36). C'est un complexe de Hodge mixte (CHM) si X est Kählérienne ou projective indépendant de T.

Nous utiliserons dans cette note des complexes logarithmiques à coefficients déduits d'un tel complexe, soit : $i^!_Z j_{!*}\mathcal{L}$, par dualité $i^*_Z j_{!*}\mathcal{L}$ et finalement $i^*_Z Rj_{Z*}j^*_Z j_{!*}\mathcal{L}$. Ce sont des CHM dans le cas d'une fibre Z d'un morphisme projectif, ne dépendant que du voisinage de Z dans X.

Si H est un hyperplan qui rencontre T transversalement tel que $T' := T \cup H$ soit un DCN, l'isomorphisme de Thom-Gysin est se réalise comme un morphisme d'un complexe bifiltré logarithmique sur X le long de T' avec un complexe bifiltré logarithmique sur H le long de $T \cap H$; de même pour le sous-complexe bifiltré $(IC(X, \mathcal{L})(*Z), W, F)$ logarithmique le long de Z ci-dessus et d'un complexe $(IC(H, \mathcal{L})(*(Z \cap H)), W, F)$ logarithmique le long de $Z \cap H$.

(**) On réfère à ces complexes en tant que complexes logarithmiques bifiltrés.

Voisinage tubulaire. Soit $f : X \to V$ un morphisme projectif dans une variété algébrique V. Si $Z := f^{-1}W$ est l'image réciproque d'une sous-variété W de V, la *filtration perverse* ${}^p\tau$ définie sur $K := Rf_*R(j_Z)_*j^*_Z j_{!*}\mathcal{L}$ détermine pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ une filtration perverse ${}^p\tau$ sur la cohomologie $\mathbb{H}^k(X - Z, j_{!*}\mathcal{L})$ compatible avec la SHM [8].

Dans le cas local, on considère une boule B_v de centre v dans V. Soient $X_v := f^{-1}(v)$ et $X_{B_v} := f^{-1}(B_v)$ les images inverses dans X, $X^*_{B_v} := X_{B_v} - X_v$, $j_{X_v} : X - X_v \to X$ et $i_{X_v} : X_v \to X$ et on suppose de plus X_v et $X_v \cup Y$ des DCN dans X. Alors, l'énoncé est le suivant ([8], théorème (3.3)) :

Proposition 1 *L'hypercohomologie de $i^*_{X_v} Rj_{X_v*}j^*_{X_v}(j_{!*}\mathcal{L})$ est égale à $\mathbb{H}^r(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})$ pour toute boule B_v de rayon assez petit, sur laquelle le complexe logarithmique bifiltré $IC(X_{B_v}, \mathcal{L})(*X_v)$ ([8], définition (2.7)) définit une SHM compatible avec la filtration perverse.*

L'interprétation de la pureté locale [7] se traduit alors par l'énoncé principal suivant qui sera déduit en un point v à partir de la décomposition en dehors de ce point. On peut supposer le point dans la strate de dimension zéro. On se réduit à ce cas en un point v d'une strate S_l en raisonnant sur une section normale à S_l en v.

Théorème 1.1 *Avec les notations de la proposition, soit a le poids de la VSH polarisée décalée $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}}[m]$. Si la restriction de $Rf_*j_{!*}\mathcal{L}$ à une boule épointée $B^*_v := B_v - \{v\}$ de rayon assez petit satisfait le théorème de décomposition, alors la SHM sur l'hypercohomologie de $i^*_{X_v} Rj_{X_v*}j^*_{X_v}(j_{!*}\mathcal{L})$ égale à celle de $X^*_{B_v}$ induit sur les espaces ci-dessous des SHM de poids w satisfaisant les inégalités suivantes :*

(i) $w > a + r$ sur ${}^p\tau_{\leq r}\mathbb{H}^r(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})$,

(ii) Dualement, $w \leq a + r$ sur $\mathbb{H}^r(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})/{}^p\tau_{\leq r}\mathbb{H}^r(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})$.

Ce sont des conditions dites de pureté locale au point v de V ou de semi-pureté sur X en X_v. Notre but

est d'établir ces conditions sur les poids de la SHM induite sur le gradué par rapport à ${}^p\tau$. Les SHM sont toutes réalisées ici comme sous-quotient de SHM définie en haut sur des ouverts de X lisse. Les principaux arguments de la preuve sont les suivants :

1) L'hypothèse de décomposition en dehors du point v, donne des isomorphismes :

$$Gr_i^{{}^p\tau}\mathbb{H}^r(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^{r-i}(B^*_v, {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*j_{!*}\mathcal{L})) = \mathbb{H}^r(B^*_v, Gr_i^{{}^p\tau}(Rf_*j_{!*}\mathcal{L})) \tag{1}$$

qui traduisent la dégénérescense de la suite spectrale de Leray perverse en dehors de v, ce qui permet d'exploiter les résultats d'Artin de type Lefschetz en bas sur V ([1], theorem 4.1.1).

2) L'utilisation de la polarisation de la cohomologie d'intersection ([10], theorem 6.4.2 ii p 400) simplifie considérablement le cas crucial dans [7].

Le théorème 1.1 est le pas d'induction d'une récurrence simultanée sur la dimension des strates et la dimension de X à l'aide d'une réduction à une section hyperplane générale sur X, qui donnera une preuve du théorème de décomposition.

La *récurrence* débute par le résultat de Deligne sur l'ouvert U de la grande strate lisse de V sur lequel la restriction de f est lisse et propre [6]. Nous assumons par récurrence la décomposition sur le complémentaire de la réunion des strates d'une dimension l et nous en déduisons un théorème de pureté locale en un point d'une strate adjacente de dimension $< l$, ce qui permet de prolonger la décomposition aux strates adjacentes. Dans une note ultérieure, nous déduisons la décomposition au point v à partir de la pureté locale en v et par conséquent les deux résultats démontrent le théorème de décomposition.

2. Réduction à une fibration topologique par DCN sur les strates et preuve du théorème

Le morphisme $f : X \to V$ sera toujours dans cette note une fibration par des DCN sur les strates au sens suivant :

Définition 2.1 (fibration topologique par DCN sur les strates d'une stratification) *i) Un morphisme $f : X \to V$ est une fibration topologique par DCN sur les strates d'une stratification $\mathcal{S} = (S_\alpha)$ de Thom-Whitney de V si X est lisse et si les espaces $V_l = \cup_{\dim S_\alpha \leq l} S_\alpha$ satisfont les propriétés suivantes :*

1) L'espace X est lisse, et les sous-espaces $X_{V_i} := f^{-1}(V_i)$ sont vides ou des sous-DCN emboités dans X.

2) (T) La restriction de f à $X_S := f^{-1}(S)$ au-dessus de chaque strate S de $\mathcal{S}$ est une fibration topologique : $f_| : X_S \to S$.

3) Pour tout point $v \in V_i - V_{i-1}$, donc lisse dans V_i, soit $\mathcal{N}_v$ une section normale en v à V_i en position générale, alors $f^{-1}(\mathcal{N}_v)$ est lisse dans X et intersecte le diviseur à croisements normaux X_{V_i} transversalement.

ii) La fibration est adaptée à un sous-espace Y dans X, ou à un système local $\mathcal{L}$ défini sur le complémentaire de Y dans X, si, de plus, Y est un DCN et, pour tout $1 \leq i \leq n$, la réunion des sous-espaces $X_{V_i} \cup Y$ sont des DCN relatifs sur les strates de V.

On déduit des deux assertions i) 2) et 3) que $X_{V_i} \cap f^{-1}(\mathcal{N}_v) = f^{-1}(v)$ est un DCN dans $f^{-1}(\mathcal{N}_v)$. Nous dirons pour simplifier, que $X_{V_i - V_{i-1}} := f^{-1}(V_i - V_{i-1})$ est un DCN relatif (éventuellement vide), ou que le morphisme f (resp. la stratification $\mathcal{S}$) est admissible.

Il existe une stratification de Thom-Whitney sous-jacente aux données de la fibration telle que les opérations cohomologiques classiques sur $\mathcal{L}$ induisent des systèmes locaux sur les strates.

Réduction au cas d'une strate de dimension zéro. C'est la notion de DCN relatif qui permet de ramener l'étude du problème en un point v d'une strate quelconque S au cas d'un point v d'une strate de dimension zéro dans la section transversale $\mathcal{N}_v$ à S en v.

Proposition 2 *Soient $f : X \to V$ un morphisme projectif et Y un sous-espace analytique fermé strict contenant les singularités de X, alors il existe un diagramme $X \overset{\pi'}{\leftarrow} X' \overset{f'}{\to} V$ où X' est une variété nonsingulière, π' et $f' := f \circ \pi'$ sont des fibrations par DCN sur les strates, adaptées à $Y' := \pi'^{-1}(Y)$.*

De plus, π' est une modification de X : il existe un ouvert $\Omega \subset f(X) \subset V$ dense dans l'image de f, tel que π' induise un isomorphisme de $f^{-1}(\Omega) - (f^{-1}(\Omega) \cap Y) \simeq f'^{-1}(\Omega) - (f'^{-1}(\Omega) \cap Y')$, et que $f'^{-1}(\Omega) \cap Y'$ soit un DCN relatif (dit horizontal, éventuellement vide).

Preuve du théorème (1.1) Par hypothèse on suppose la décomposition au-dessus de $V - v$ satisfaite, ce qui se traduit par l'isomorphisme : $Gr_i^{{}^p\tau}\mathbb{H}^r(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^{r-i}(B^*_v, {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*j_{!*}\mathcal{L}))$.

En supposant X_v un DCN, on sait construire une SHM sur le terme de gauche. Pour la commodité de l'argumentation on raisonne sur le terme de droite, puis on interprète le résultat à gauche, autrement dit, par abus de notation on transporte la SHM sur le terme de droite (on ne sait pas encore que cette structure est canonique ; ce sera un résultat ultérieur). Alors on peut exploiter le théorème d'annulation d'Artin du type section hyperplane de Lefschetz à coefficients dans ${}^pD_c^{\leq 0}(V)$ ([1], theorem 4.1.1), soit sur un ouvert de Stein, soit sur un ouvert affine en bas dans V.

Dans la suite pour simplifier les notations nous posons $K = Rf_*j_{!*}\mathcal{L}$, alors il faut prouver que le poids w de cette SHM satisfait les inégalités :

$$w > a+i+j \text{ sur } \mathbb{H}^j(B_v^*, {}^p\mathcal{H}^i(K)) \text{ si } j \geq 0, \text{et } w \leq a+i+j \text{ sur } \mathbb{H}^j(B_v^*, {}^p\mathcal{H}^i(K)) \text{ si } j \ \leq -1 \qquad (2)$$

Les deux cas cités sont duaux. La preuve pour $j > 0$ s'obtient par une récurrence simple sur la dimension appliquée à une section hyperplane générale de V, l'application du théorème d'Artin-Lefschetz ([1], theorem 4.1.1) et le morphisme de Gysin.

La preuve pour $j > 0$ (resp. pour $j = 0$ et $w \geq a+i$) est locale en v et similaire à [7].

Le cas crucial sur V projective : $w < a+i$ et $j = -1$.

La preuve dans [7] n'est pas complètement locale au point v, elle utilise la théorie des cycles proches et s'adapte au cas transcendant. Nous allons donner une preuve plus simple qui utilise la structure globale sur X et qui diffère par l'utilisation de la polarisation de la cohomologie d'Intersection ([10], theorem 6.4.2 ii p 400).

Ayant supposé le théorème (1.1) établi pour $j > 0$ et par dualité pour $j < -1$, pour $j = 0$ si $w \geq a+i+j$ et par dualité pour $j = -1$ si $w \leq a+i$, il reste à l'établir pour $w < a+i$ et $j = -1$, c-à-d il faut démontrer pour tout $r \in \mathbb{Z}$, l'annulation des termes : $Gr^W_{a+r}Gr_r^{{}^p\tau}\mathbb{H}^{r-1}(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{-1}(B_v^*, {}^p\mathcal{H}^r(K))$.

La preuve se fait en plusieurs étapes et utilise l'idée que la cohomologie de $B_v - v$ s'inscrit dans deux suites exactes issues des triangles :

$i_v^*Rk_{v!}k_v^*j_{!*}\mathcal{L} \to i_v^*j_{!*}\mathcal{L} \to i_v^*Rk_{v*}k_v^*j_{!*}\mathcal{L}, \quad Rk_v^!j_{!*}\mathcal{L} \to i_v^*j_{!*}\mathcal{L} \to i_v^*Rk_{v*}k_v^*j_{!*}\mathcal{L}$

ce qui permet de réaliser la cohomologie de $X^*_{B_v} = X_{B_v} - X_v$ à l'aide de l'un des deux cônes mixtes : $R\Gamma_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \to R\Gamma(X_v, j_{!*}\mathcal{L}), \quad R\Gamma_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \to R\Gamma(X^*, j_{!*}\mathcal{L})$ où $X^* = X - X_v$.

On peut comparer les deux à l'aide du cône mixte formé par les termes à gauche du diagramme : $R\Gamma_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \oplus R\Gamma_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \to R\Gamma(X, j_{!*}\mathcal{L})$.

On introduit d'abord deux morphismes ∂_X et α_X et on en déduit des morphismes injectifs sur des espaces gradués convenables.

Lemme 2.2 *Le morphisme de connexion suivant est injectif :*

$Gr^W_{a+r}Gr_r^{{}^p\tau}\mathbb{H}^{r-1}(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\partial_X}{\to} Gr^W_{a+r}Gr_r^{{}^p\tau}\mathbb{H}^r_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L})$.

Maintenant, on considère la suite exacte longue : $\mathbb{H}^{r-1}(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{H}^r_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\alpha_X}{\to} \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$

Lemme 2.3 *Le morphisme suivant induit par α_X est injectif :*
$Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\alpha_X}{\to} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$.

Pour démontrer $Gr^W_{a+r}Gr_r^{{}^p\tau}\mathbb{H}^{r-1}(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L}) = 0$, une difficulté provient du fait que ∂_X intervient modulo $Gr_r^{{}^p\tau}$ alors que l'on est sans hypothèse sur la filtration ${}^p\tau$ en v pour utiliser α_X sur le gradué de ${}^p\tau$ (avec abus, on désigne par le même symbole l'action de ∂_X sur le groupe gradué modulo ${}^p\tau$ ou non). En fait, on considère plutôt le morphisme composé $\gamma := \alpha_X \circ \partial_X$ suivant :

$$Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\partial_X}{\to} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_c(X^*, j_{!*}\mathcal{L}) \overset{\alpha_X}{\to} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L}), \quad \gamma := \alpha_X \circ \partial_X$$

et on démontre que toute classe $\overline{u} \in Gr^W_{a+r}Gr_r^{{}^p\tau}\mathbb{H}^{r-1}(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})$ peut se relever en un élément $u \in {}^p\tau_{\leq r}Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})$, de telle façon que son image $\gamma(u)$ soit nulle dans $Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L}) \simeq \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$. De la relation $\alpha_X(\partial_X(u)) = 0$, on déduit par le lemmme (2.3) que $\partial_X(u) = 0$, puis $\partial_X(\overline{u}) = \mathrm{cl}(\partial_X(u)) = 0$ et finalement par le lemmme (2.2) on a : $\overline{u} = 0$.

Lemme 2.4 (Lemme principal) *Soit $\gamma := \alpha_X \circ \partial_X$. Toute classe :*

$$\overline{u} \in Gr_r^{{}^p\tau}Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})$$

est représentée par un élément $u \in {}^p\tau_{\leq r}Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L})$ d'image $\gamma(u)$ nulle dans $\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$

Corollaire 2.5 $Gr_r^{{}^p\tau}Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(X^*_{B_v}, j_{!*}\mathcal{L}) = 0$.

L'idée est de choisir u tel que l'élément $\gamma(u)$ soit primitif, afin d'utiliser la polarisation sur $\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$ ([10], theorem 6.4.2 ii) pour déduire que $\gamma(u)$ est nul.

La preuve se subdivise en plusieurs étapes.

Soit H une section hyperplane générale de X transverse à toutes les strates de Y. On pose $H_v := X_v \cap H$,

$B_{H_v} := H \cap X_{B_v}$, et on considère les immersions $j' : (H - H \cap Y) \to H$, $k' : (f(H) - \{v\}) \to f(H)$, la restriction $j_{!*}\mathcal{L}_{|H}$ de $j_{!*}\mathcal{L}$ à H muni d'un isomorphisme canonique $\rho : j_{!*}\mathcal{L}_{|H} \xrightarrow{\sim} j_{!*}\mathcal{L}_{|H}$ car H est transversale aux strates.

Lemme 2.6 *Soient $j_H : (X - H) \to X$ et $(\mathcal{L}_{(X-H)})_! := (j_H)_! j_H^* j_{!*}\mathcal{L}$, alors on peut représenter $\overline{u}$ par un élément $u \in {}^p\tau_{\leq r} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(X_{B_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ égal à l'image d'un élément*
$u! \in {}^p\tau_{\leq r} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^{r-1}(X_{B_v} - X_v, (\mathcal{L}_{(X-H)})_!)$.
La preuve utilise que le terme $G^W_{a+r} Gr_r^{p_\tau}\mathbb{H}^{r-1}(B_{H_v} - H_v, j_{!*}\mathcal{L})$ s'annule par hypothèse de récurrence sur la pureté sur H.

Preuve du lemme principal.
1) L'élément $\gamma(u)$ *est primitif.* En effet l'élément $u \in G^W_{a+r}\, {}^p\tau_{\leq r}\mathbb{H}^{r-1}(X_{B_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ défini comme image de $u! \in G^W_{a+r}\, {}^p\tau_{\leq r}\mathbb{H}^{r-1}(X_{B_v} - X_v, (\mathcal{L}_{(X-H)})_!)$ est l'élément annoncé dans le lemme, puisque sa classe est $\overline{u}$ et de plus sa restriction $\rho(\gamma(u)) \in G^W_{a+r}\mathbb{H}^r(H, j_{!*}\mathcal{L}) = \mathbb{H}^r(H, j_{!*}\mathcal{L})$ à H s'annule, et par conséquent $\gamma(u) \in \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$ est un élément primitif.
2) $\gamma(u)$ *est nul.* Les morphismes : $\mathbb{H}^{r-1}(X_{B_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{\partial_X} \mathbb{H}^r_c(X - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{\alpha_X} \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$ et
$\mathbb{H}^{r-1}(X_{B_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{\partial} \mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{A} \mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$ forment un diagramme commutatif : $\alpha_X \circ \partial_X = A \circ \partial$, ce qui réalise $\gamma(u) = \alpha_X \circ \partial_X(u) = A \circ \partial(u)$, comme l'image d'un élément $\partial(u) \in Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$, et on considère le morphisme composé $I = A^* \circ A$:
$I : Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{A} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{A^*} Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r(X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ et son dual $I = A^* \circ A$:
$I : Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{A} Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \xrightarrow{A^*} Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}(X_v, j_{!*}\mathcal{L})$
Soit η le cup-produit avec la classe d'une section hyperplane de X, alors la polarisation Q sur la partie primitive de $\mathbb{H}^r(X, j_{!*}\mathcal{L})$ est définie, à l'aide du produit de dualité de Poincaré P et de l'opérateur C de Weil, par la formule : $Q(v, b) := P(Cv, \eta^r(\overline{b}))$. On a aussi le produit non-dégénéré défini par dualité :

$$P_v : Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L}) \otimes Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}(X_v, j_{!*}\mathcal{L}) \to \mathbb{C}.$$

La dualité entre A et A^* est définie pour tout $b \in Gr^W_{a+r}\mathbb{H}^r_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ et tout $c \in Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ par la formule : $P(Ab, c) = P_v(b, A^*c)$.
A l'élément $u \in {}^p\tau_{\leq -r} Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r-1}(X_{B_v} - X_v, j_{!*}\mathcal{L})$ correspond une image par le morphisme de connexion $\partial u := u' \in Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$ tel que $\gamma(u) = A(u')$. Soit C l'opérateur de Weil défini par la SH sur $Gr^W_{a-r}\mathbb{H}^{-r}_{X_v}(X, j_{!*}\mathcal{L})$, alors :

$$P(C.Au', \eta^r A\overline{u'}) = P_v(Cu', A^* \circ A(\eta^r \overline{u'})) = P(C.u', \eta^r I(\overline{u'})).$$

Or : $I(u') = A^* \circ A \circ \partial(u) = A^* \circ \alpha_X \circ \partial_X(u) = 0$ car $A^* \circ \alpha_X = 0$; on en déduit $P(C.Au', \eta^r A\overline{u'}) = 0$, donc $Au' = 0$ par polarisation, ce qui termine la preuve.

Références

[1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, Deligne : Faisceaux Pervers, *Analyse et Topologie sur les espaces singuliers Vol.I, Astérisque* 100 (1982).

[2] E. Cattani, F. El Zein, P. A. Griffiths, D. T. Lê : Hodge theory, *Princeton University Press*, (2014).

[3] E. Cattani, A. Kaplan, W. Schmid : L^2 and intersection cohomologies, *Inv. Math.*, 87 (1987), p 217-252.

[4] M.A. de Cataldo, L. Migliorini : The perverse filtration and the Lefschetz hyperplane theorem, arXiv :0805.4634, *Annals of Math.*, 171, No. 3, (2010), p 2089-2113.

[5] P. Deligne : Théorie de Hodge I, *Actes, Congrès intern. math.*, Tome 1, (1970), p 425-430.

[6] P. Deligne : Théorèmes de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. IHES*, 35 (1968), p107-126.

[7] P. Deligne, O. Gabber : Théorème de pureté d'après Gabber, *Note written by Deligne and distributed at IHES* (1981).

[8] F. El Zein, X. Ye : Filtration perverse et théorie de Hodge, *C.R.Acad.Sci. Paris, Ser. I*, à paraître.

[9] M. Kashiwara : A study of variation of mixed Hodge structure, *Publ. RIMS, Kyoto univ.* 22 (1986), p 991-1024.

[10] M. Kashiwara, T. Kawai : Poincaré lemma for a variation of Hodge structure, *Publ. RIMS, Kyoto univ.* 23 (1987), p 345-407.

[11] M. Saito : Modules de Hodge polarisables, *Publ. RIMS, Kyoto univ.*, 24 (1988), 849-995. (2) Mixed Hodge Modules. 26 (1990), p 221-333.