

على التكاثر في بيئة عشوائية

J. Math. Biol. 67 (2013) 1729–1739

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01267142>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
nicolas.bacaer@ird.fr ، بوندي ، فرنسا

Mohamed Khaladi

جامعة القاضي عياض ، قسم الرياضيات ، مراكش ، المغرب

ملخص

لاحظنا دراسة مفهوم التكاثر R_0 ، لمشاكل ديناميات السكان في بيئات عشوائية. للتبسيط ، نفترض أن البيئات المتعاقبة تتبع سلسلة ماركوف. R_0 هو نصف القطر الطيفي لمشغل الجيل التالي. يحدد موقعها بالنسبة إلى 1 دائمًا نمو أو انخفاض عدد السكان في المحاكاة ، على عكس المعلمة الأخرى المقترحة في مقالة حديثة [Hernandez-Suarez C، Rabinovich J، Hernandez K (2012) Theor. Pop. Biol., doi:10.1016/j.tpb.2012.05.004]. يحدد موضع هذه المعلمة الأخيرة فيما يتعلق بـ 1 النمو والانخفاض في توقعات السكان. R_0 يتم حسابه بسهولة في حالة النماذج السكانية العددية بدون أي هيكل. نحن مهتمون بشكل رئيسي بنماذج الوقت المنفصلة ولكن يتم ذكر نماذج الوقت المستمر أيضًا.

1 المقدمة

في هذه المقالة ، نعتبر النماذج السكانية للنموذج

$$p(t+1) = X(t)p(t), \quad X(t) = A(t) + B(t), \quad t = 0, 1, \dots$$

مع $p(0)$ معطى في \mathbb{R}^m . المتجه $p(t)$ يمثل المكونات المختلفة للسكان. $A(t)$ و $B(t)$ هي مصفوفات مربعة بحجم m مع المعاملات $0 \leq$ لجميع t . $A(t)$ مصفوفة ولادة. $B(t)$ مصفوفة للبقاء. لتبسيط ، نفترض أن المصفوفات $(A(t), B(t))$ يتم اختيارهم من قائمة محدودة من البيئات $(A^{(k)}, B^{(k)})_{1 \leq k \leq K}$. تتبع البيئة من النوع i بيئة من النوع j ($1 \leq i, j \leq K$) مع احتمال $M_{i,j}$. مع احتمال μ_i ، $(A(0), B(0))$ من النوع i . نفترض أن المصفوفة $M = (M_{i,j})$ من سلسلة ماركوف هذه لا يمكن اختزاله. لمصفوفات البقاء معنى بيولوجي إذا

$$\sum_i B_{i,j}^{(k)} \leq 1, \quad \forall j, \quad \forall k.$$

نفترض أيضًا:

- $\exists \kappa, \quad \|B^{(\kappa)}\|_1 = \max_j \sum_i B_{i,j}^{(\kappa)} < 1$ (H1) •
- (H2) المصفوفات $A^{(k)} + B^{(k)}$ هي "ergodic" (كاسويل ، 2001).

على سبيل المثال ، المصفوفات البدائية ذات مصفوفة ورود الشائعة هي ergodic. يمكن إضعاف بعض هذه الافتراضات.

يوجد أدب واسع يتعلق بمثل هذه النماذج من السكان في بيئة عشوائية (Lewontin و Cohen ، 1969 ؛ Tuljapurkar ، 1990). نحدد

$$|p(t)| = \sum_i p_i(t) \quad \bullet$$
$$\|\cdot\| \text{ معيار مصفوفة.} \quad \bullet$$

مع الافتراضات المذكورة أعلاه ،

$$r = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\log |p(t)|)/t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\log \|X(t-1)X(t-2) \cdots X(0)\|)/t. \quad (1)$$

يكاد يكون هذا الحد موجودًا تقريبًا وهو مستقل عن الحالة الأولية والتسلسل الخاص للبيانات المختارة عشوائيًا وفقًا لسلسلة ماركوف (Tuljapurkar، 1990، p. 26). للإشارة إلى اعتماد معدل النمو r على المصفوفات، نكتب $r = r(A, B)$. إذا كان متجه السكان على سبيل المثال عدديًا وإذا كانت البيانات مستقلة وموزعة بشكل متماثل، فعندئذٍ

$$M_{i,j} = m_j \quad \forall i, j,$$

و

$$r(A, B) = \sum_k m_k \log(A^{(k)} + B^{(k)}) \quad (2)$$

(Haccou وآخرون، 2005، §2.9.2).

قام باكير وجبرناوي (2006) بتعميم الفكرة الكلاسيكية للتكاثر، والتي تسمى أيضًا معدل التكاثر، في حالة البيانات الدورية. R_0 هو معدل نمو مقارب بالجيل (Bacaër و Ait Dads، 2011 و Thieme (2009، §5.1) درس (2012). Inaba (2012) حالة البيانات الحتمية في وقت مستمر ولكن ليس دوريًا. في مقال حديث، اقترح (Hernandez-Suarez et al.، 2012) تكييف التكاثر مع النماذج ذات البيانات العشوائية. ومع ذلك، يبدو أن مفهوم R_0 مقارنة بـ 1 لا تقرر دائمًا ما إذا كان عدد السكان يزيد أو ينقص في النهاية (سيتم عرض مثال مضاد أدناه). في هذه المقالة، نفسر كيف R_0 يجب حسابها لإعطاء العتبة الصحيحة: هذا هو الحل الوحيد للمعادلة

$$r(A/R_0, B) = 0. \quad (3)$$

بعبارة أخرى، R_0 هو الرقم الذي يجب أن تقسم به جميع معدلات المواليد حتى يصل السكان إلى الوضع الحرج حيث لا يحدث نمو أسي أو انحلال أسي. مثل هذا الوصف R_0 تم تسليط الضوء على البيانات الثابتة بواسطة (Li and Schneider، 2002، Theorem 3.1) وللبيانات الدورية في وقت مستمر أو منفصل بواسطة (Bacaër، 2007، §3.4) و (Bacaër، 2009، section 4).

في القسم 2، يتم تعريف قابلية التكاثر على أنها نصف القطر الطيفي "المشغل الجيل التالي" وفقًا لمصطلحات (ديكمان وهيستريبك، 2000). وفقًا للمقترح 1، $R_0 > 1$ إذا فقط إذا $r > 0$. يوضح الاقتراح 2 أنه يمكن حساب الاستنساخ باستخدام المعادلة (3). صيغة التكاثر التي تم الحصول عليها للبيانات الدورية بواسطة (Bacaër، 2009) هي حالة خاصة من نهج هذه المقالة. يوضح القسم 3 أن المعلمة التي قدمها مؤخرًا (Hernandez-Suarez et al.، 2012) تحدد نمو أو انخفاض توقعات السكان. يركز القسم 4 على الحالة العددية، التي يتم حساب التكاثر لها بسهولة. يتم عرض أمثلة عددية في القسم 5. يناقش القسم 6 بإيجاز نماذج الوقت المستمر للارتباط بمقال حديث (Artalejo et al.، 2012). يشرح الاستنتاج الفرق بين قابليتنا للتكاثر وتلك الخاصة بـ (Hernandez-Suarez et al.، 2012). هناك نفس الاختلاف بين توقع معدل النمو ومعدل النمو للتوقعات. كان هذا الاختلاف موضوع الكثير من النقاش (Lewontin و Cohen، 1969 و Tuljapurkar، 1990).

2. تعريف وخصائص R_0

كما هو الحال في الحالة الدورية (Baca andr و Ait Dads، 2011 و (2012)، فإننا نقسم السكان إلى أجيال. $q(n, t)$ هو ناقل السكان الذي ينتمي إلى الجيل n في الوقت t : لجميع $t \geq 0$ و $n \geq 0$ ،

$$\begin{aligned} q(0, 0) &= p(0), & q(0, t+1) &= B(t)q(0, t) \\ q(n+1, 0) &= 0, & q(n+1, t+1) &= A(t)q(n, t) + B(t)q(n+1, t). \end{aligned} \quad (4)$$

لاحظ أن الصفر في الجانب الأيمن من المعادلة $q(n+1, 0) = 0$ هو متجه الصفر \mathbb{R}^m . مع

$$p(t) = \sum_{n \geq 0} q(n, t)$$

نملك

$$p(t+1) = (A(t) + B(t))p(t) \quad \forall t \geq 0.$$

نحدد

$$L = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m) = \left\{ (x(0), x(1), \dots); \quad x(t) \in \mathbb{R}^m \quad \forall t \geq 0, \quad \|x\| = \sum_{t \geq 0} \sum_{i=1}^m |x_i(t)| < +\infty \right\}.$$

ثم L هو مساحة Banach مع هذا المعيار. لاحظ أن (4) مكتوب أيضًا

$$q(n+1, 0) = 0, \quad -B(t)q(n+1, t) + q(n+1, t+1) = A(t)q(n, t). \quad (5)$$

أعرض عوامل التشغيل $\mathcal{I} : L \rightarrow L$ وعامل الهوية $\mathcal{B} : L \rightarrow L$ ، $\mathcal{A} : L \rightarrow L$ مع

$$\begin{aligned} \forall x \in L, \quad \forall t \geq 0, \quad (\mathcal{A}x)(0) = 0, \quad (\mathcal{A}x)(t+1) = A(t)x(t), \\ (\mathcal{B}x)(0) = 0, \quad (\mathcal{B}x)(t+1) = B(t)x(t), \\ (\mathcal{I}x)(t) = x(t). \end{aligned}$$

لأن $A(t)$ و $B(t)$ يتم اختيارهم من بين مجموعة محدودة من المصفوفات، فمن الواضح أن $\mathcal{A}x \in L$ و $\mathcal{B}x \in L$ إذا $x \in L$. علاوة على ذلك، \mathcal{A} و \mathcal{B} هي عوامل خطية محدودة.

ليما 1. نصف القطر الطيفي $\rho(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ يساوي $e^{r(A, B)}$.

دليل. نحدد $\mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. نملك $\forall x \in L, \forall \tau \geq 1$.

$$(\mathcal{X}^\tau x)(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau - 1,$$

$$(\mathcal{X}^\tau x)(t) = X(t-1)X(t-2) \cdots X(t-\tau)x(t-\tau), \quad t \geq \tau.$$

مع (1) وصيغة الشعاع الطيفي لدينا

$$\rho(\mathcal{X}) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|\mathcal{X}^\tau\|^{1/\tau} = e^{r(A, B)}.$$

$\|\cdot\|$ هو معيار المشغل المرتبط بمعيار المتجه.

ليما 2. $r(0, B) < 0$: يفرض السكان إذا لم تكن هناك ولادات.

دليل. نملك $\forall k, \|B^{(k)}\|_1 \leq 1$ و $\|B^{(k)}\|_1 < 1$. البيئية κ يظهر (إذا $t \rightarrow +\infty$ في جزء موجب π_κ من شروط المعادلة (1)، لأن سلسلة ماركوف غير قابلة للاختزال. لكن $\|\cdot\|_1$ هو معيار الضرب الفرعي. لذا نحصل $r(0, B) \leq \pi_\kappa \log \|B^{(\kappa)}\|_1 < 0$.

لأن $r(0, B) < 0$ يظهر ليما 1 ذلك $\rho(\mathcal{B}) < 1$. وبالتالي $\mathcal{I} - \mathcal{B}$ غير قابل للانعكاس: إذا $y = (\mathcal{I} - \mathcal{B})x$ ، نملك

$$x = (\mathcal{I} - \mathcal{B})^{-1}y = y + \mathcal{B}y + \mathcal{B}^2y + \cdots,$$

ذلك بالقول

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^t B(t-1)B(t-2) \cdots B(\tau)y(\tau), \quad \forall t \geq 0.$$

مع $q_n = (q(n, t))_{t \geq 0}$ ، المعادلة (5) تعادل

$$(\mathcal{I} - \mathcal{B})q_{n+1} = \mathcal{A}q_n,$$

ذلك بالقول

$$q_{n+1} = (\mathcal{I} - \mathcal{B})^{-1} \mathcal{A}q_n.$$

لأن $q_0 \in L$ ، نملك $\forall n \geq 1, q_n \in L$. نحدد $g_n = \mathcal{A}q_n$. بهذه الطريقة، $g_n(t+1) = A(t)q(n, t)$ هو متجه الولادات بسبب الجيل n بين الأوقات t و $t+1$. نصل إلى الاستنتاج التالي:

$$g_{n+1} = \mathcal{A}q_{n+1} = \mathcal{A}(\mathcal{I} - \mathcal{B})^{-1}g_n.$$

بشكل أوضح، لدينا $g_{n+1}(0) = 0$ ومعادلة التجديد للولادات

$$g_{n+1}(t+1) = \sum_{\tau=0}^t A(t)B(t-1)B(t-2) \cdots B(\tau)g_n(\tau), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (6)$$

التعريف 1. R_0 هو نصف القطر الطيفي لمشغل الجيل التالي $\mathcal{A}(\mathcal{I} - \mathcal{B})^{-1}$.

لاحظ التشابه بين التعريف 1 والعرض R_0 للنماذج الزمنية المستمرة في البيئات غير المتجانسة مؤقتاً (Thieme، 2009، §5.1) و (Inaba، 2012). نحن نكتب $R_0(A, B)$ للتأكيد على الاعتماد على سلسلة المصفوفات.

الافتراض 1.

- $r(A, B) > 0$ إذا $R_0(A, B) > 1$
- $r(A, B) = 0$ إذا $R_0(A, B) = 1$
- $r(A, B) < 0$ إذا $R_0(A, B) < 1$

دليل. وفقاً لـ (Thieme، 2009، Theorem 3.10)، $R_0(A, B) - 1$ له نفس علامة $\rho(A + B) - 1$. ولكن يقول ليما 1 $\rho(A, B) = e^{r(A, B)}$. لذلك لديه نفس علامة $R_0(A, B) - 1$.

الافتراض 2. لنفترض ذلك $R_0(A, B) > 0$. $R_0(A, B)$ هو الحل الفريد للمعادلة $r(A/R, B) = 0$ مع $R \in (0, +\infty)$.

دليل. نظراً لأن التكاثر يعتمد بشكل خطي على مجموعة معدلات المواليد، فقد قمنا بذلك

$$R_0(A/R_0(A, B), B) = 1.$$

مع الافتراض 1، لدينا

$$r(A/R_0(A, B), B) = 0.$$

إذن المعادلة $r(A/R, B) = 0$ لديه حل واحد على الأقل. مع (1)،

$$R \mapsto r(A/R, B), \quad R \in (0, +\infty)$$

هي وظيفة متناقصة. من خلال أخذ ضعف المشتق فيما يتعلق بـ R ، يمكننا أن نرى ذلك بسهولة

$$R \mapsto A_{i,j}(t)/R + B_{i,j}(t) \quad \forall (i, j)$$

دالة إما صفر متطابقة أو محدبة السجل. هذه النقطة تم استخدامها بالفعل من قبل (Bacaër and Ait Dads، 2012، Appendix C). وفقاً لـ (Cohen، 1980، theorem 1)، $R \mapsto r(A/R, B)$ هي دالة محدبة. إذن المعادلة $r(A/R, B) = 0$ يمكن أن يكون لها حل واحد فقط. في الواقع، إذا كان هناك حلان متميزان R_1 و R_2 مع $R_1 < R_2$ ، وظيفة متناقصة ومحدبة $R \mapsto r(A/R, B)$ ستكون ثابتة 0 ليس فقط بين هاتين القيمتين ولكن لـ $R \geq R_1$. هذه الوظيفة $[0, +\infty[$ في \mathbb{R} هو محدب. كما أنها مستمرة. إذا لدينا $r(A/R, B) \rightarrow r(0, B) < 0$ إذا $R \rightarrow +\infty$. وهكذا وصلنا إلى تناقض.

ملاحظة 1. يوضح الافتراض 2 أنه بشكل عام حساب R_0 صعب مثل حساب r ، ويتطلب وقتاً أطول في الحساب لأنه يجب استخدام طريقة الانقسام.

ملاحظة 2. لبيئات دورية بالترتيب $(1, 2, \dots, K)$ وقد أظهر (باكير، 2009) ذلك R_0 كان نصف قطرها الطيفي

$$\left(\begin{array}{cccc} A^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A^{(K)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} -B^{(1)} & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -B^{(2)} & I & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & I \\ I & \dots & 0 & 0 & -B^{(K)} \end{array} \right)^{-1}. \quad (7)$$

أصر باكير وأيت دادس (2012، الافتراض 3) على أن هذا R_0 هو الحل الوحيد للمعادلة

$$\rho \left(\left(\frac{A^{(K)}}{R} + B^{(K)} \right) \dots \left(\frac{A^{(1)}}{R} + B^{(1)} \right) \right) = 1.$$

مع المعادلة (1)، فإن الجانب الأيسر أعلاه يساوي بشكل واضح $e^{r(A/R, B)}$. لذلك يمكننا أن نستنتج من الافتراض 2 ذلك R_0 في (باقر، 2009) مطابق لـ R_0 التعريف 1 في حالة معينة من البيئات الدورية ($M_{i,j} = 1$ إذا $j = i + 1$ و $1 \leq i \leq K - 1$ ، $M_{K,1} = 1$ و $M_{i,j} = 0$ وإلا). يمكننا تقديم R_0 في بيئة دورية مثل نصف قطرها الطيفي

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & A^{(K)} \\ A^{(1)} & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A^{(K-1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & -B^{(K)} \\ -B^{(1)} & I & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -B^{(K-1)} & I \end{pmatrix}^{-1} \quad (8)$$

التي يمكننا رؤيتها بسهولة تساوي نصف القطر الطيفي لـ (7) (Hernandez-Suarez et al.، 2012، section 5). وفقاً لـ (Bacaër and Ait Dads، 2012)، فإن نصف القطر الطيفي هذا يساوي نصف القطر الطيفي لـ $A(I - B)^{-1}$ (كوشينغ وزو، 1994؛ كاسويل، 2001) عندما تكون البيئة ثابتة، مع $A^{(k)} = A$ و $B^{(k)} = B \forall k$.

الافتراض 3. تعريف R_0 أعلاه مستقلة عن تسلسل عشوائي معين $(A(t), B(t))_{t \geq 0}$ ، الذي يتبع سلسلة ماركوف. وبالتالي R_0 يمكن أن يطلق عليها استنساخ النموذج.

دليل. نختار سلسلتين من البيئات التي تتبع سلسلة ماركوف، $(A(t), B(t))$ و $(A'(t), B'(t))$. النسخ المقابلة هي $R_0(A, B)$ و $R_0(A', B')$. نريد أن نظهر ذلك $R_0(A, B) = R_0(A', B')$ مع الافتراض 2، لدينا $r(A/R_0(A, B), B) = 0$ و $r(A'/R_0(A', B'), B') = 0$ لكن معدلات النمو مستقلة عن التسلسل الخاص للبيئات (Tuljapurkar، 1990). إذا لدينا

$$0 = r(A/R_0(A, B), B) = r(A'/R_0(A, B), B').$$

$R_0(A, B) = R_0(A', B')$ هي حلول $r(A'/R, B') = 0$ وفقاً للافتراض 2، $R_0(A, B) = R_0(A', B')$.

3. معلمة أخرى

مقال حديث، (Hernandez-Suarez et al.، 2012) يقترح تعريف التكاثر على أنه نصف القطر الطيفي للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} M_{1,1}A^{(1)} & \dots & M_{K,1}A^{(K)} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{1,K}A^{(1)} & \dots & M_{K,K}A^{(K)} \end{pmatrix} \left[I - \begin{pmatrix} M_{1,1}B^{(1)} & \dots & M_{K,1}B^{(K)} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{1,K}B^{(1)} & \dots & M_{K,K}B^{(K)} \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (9)$$

I هي مصفوفة الهوية ذات الحجم المناسب. نلاحظ هذا الشعاع الطيفي R_* لتجنب أي لبس.

في الأدب عن بيئات ماركوف، من المعروف أن

$$\log \mu = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{E}[|p(t)|]}{t} \quad (10)$$

يوجد $(|\cdot|)$ يشير إلى مجموع المكونات). علاوة على ذلك،

- μ هو نصف قطر الطيف $D(M' \otimes I)$ ،
- D هي مصفوفة كتلة قطرية $(D = \text{diag}(A^{(1)} + B^{(1)}, \dots, A^{(K)} + B^{(K)})$ ،
- M' هي المصفوفة المنقولة لـ M
- I هي مصفوفة الهوية.

يطلق على (Tuljapurkar (1990، ص 45) هذه الصيغة Bharucha.

افتراض.

- $\log \mu > 0$ إذا $R_* > 1$
- $\log \mu = 0$ إذا $R_* = 1$
- $\log \mu < 0$ إذا $R_* < 1$

دليل. نملك

$$D(M' \otimes I) = \begin{pmatrix} M_{1,1}(A^{(1)} + B^{(1)}) & \cdots & M_{K,1}(A^{(K)} + B^{(K)}) \\ \vdots & & \vdots \\ M_{1,K}(A^{(1)} + B^{(1)}) & \cdots & M_{K,K}(A^{(K)} + B^{(K)}) \end{pmatrix}.$$

هذه المصفوفة تساوي $A^* + B^*$ مع

$$A^* = \begin{pmatrix} M_{1,1}A^{(1)} & \cdots & M_{K,1}A^{(K)} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{1,K}A^{(1)} & \cdots & M_{K,K}A^{(K)} \end{pmatrix},$$

و B^* ويعرف بنفس الطريقة عن طريق استبدال A بواسطة B . وفقاً لـ (Thieme, 2009, Theorem 3.10) ، $\rho(A^* + B^*) - 1$ و $\rho(A^*(I - B^*)^{-1}) - 1$ لها نفس العلامة. لكن $\mu = \rho(A^* + B^*)$ و $R_* = \rho(A^*(I - B^*)^{-1})$.

ملاحظة 3. في بيئة دورية لدينا $R_0 = R_*$ كما يتبين من مقارنة المصفوفات (8) و (9).

4. الحالة العددية

إذا كانت مصفوفات الولادة والبقاء $A(t)$ و $B(t)$ هي عددية وإذا كانت البيئات مستقلة وموزعة بشكل متماثل ، فإن المعادلة (2) والمقترح 2 يوضحان ذلك

$$\sum_{k=1}^K m_k \log \left(\frac{A^{(k)}}{R_0} + B^{(k)} \right) = 0,$$

أو ما يعادلها

$$\prod_{k=1}^K \left(\frac{A^{(k)}}{R_0} + B^{(k)} \right)^{m_k} = 1.$$

دعونا الآن ننظر في الحالة الأكثر عمومية لاعتماد ماركوف بين البيئات المتعاقبة. $M = (M_{i,j})$ مصفوفة احتمالات الانتقال. بما أن السلسلة غير قابلة للاختزال ، فلنكن التوزيع الثابت للوقت الذي يقضيه في البيئات المختلفة:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i M_{i,j} \quad \forall j, \quad \sum_j \pi_j = 1.$$

(Haccou وآخرون ، 2005 ، §2.9.2) يشير إلى أن معدل النمو هو

$$r(A, B) = \sum_k \pi_k \log(A^{(k)} + B^{(k)})$$

لإثبات ، ببساطة لاحظ ذلك

$$\log p(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \log X(\tau) + \log p(0).$$

مع $t \rightarrow +\infty$ ، عدد المصطلحات يساوي $\log(A^{(k)} + B^{(k)})$ في المجموع فوق τ $t + o(t)$. لذا فإن الاقتراح 2 يوضح ذلك R_0 هو حل

$$\prod_{k=1}^K \left(\frac{A^{(k)}}{R_0} + B^{(k)} \right)^{\pi_k} = 1. \quad (11)$$

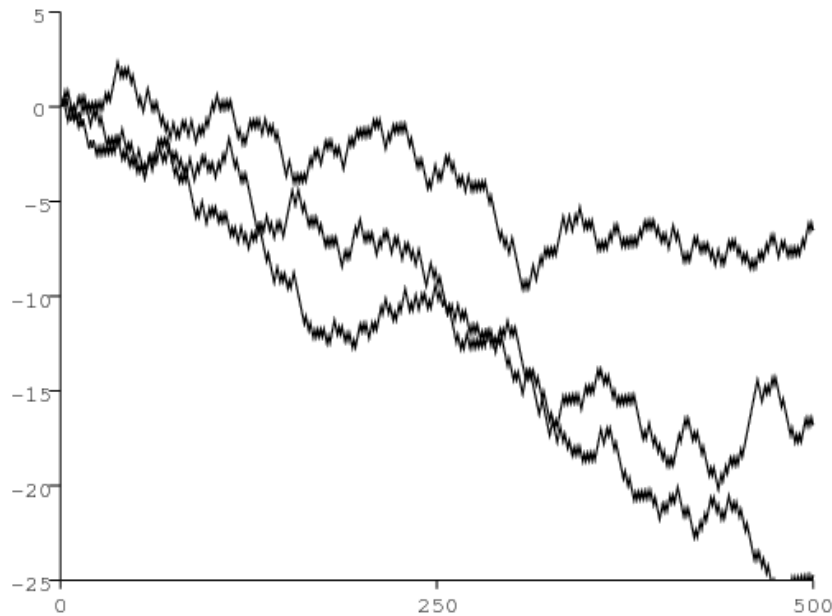
لذلك ، نحن نحسب بسهولة R_0 ، على سبيل المثال مع طريقة الانقسام.

5. أمثلة

كمثال أول ، ضع في اعتبارك عددًا قياسيًّا ($m = 1$) ونفترض أن هناك بيئتان ($K = 2$):

$$A^{(1)} = 1, B^{(1)} = 0,5, A^{(2)} = 0,1, B^{(2)} = 0,58, M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

التوزيع الثابت $(\pi_1, \pi_2) = (6/13, 7/13)$. المعادلة (11) تعطي $R_0 \simeq 0,949 < 1$: من شبه المؤكد أن السكان سينقرضون. على سبيل المثال ، المعادلة (9) تعطي $R_* \simeq 1,050 > 1$. العديد من المحاكاة لهذا النموذج بدءًا من $p(0) = 1$ يوضح هذا. يشير الشكل 1 إلى أن العملية في الواقع دون حرج. يتم اختيار قيم المعلمات بدقة بحيث $R_0 < 1$ و $R_* > 1$. ومع ذلك ، يبدو أنه في العديد من الحالات الأخرى ، توجد المعلمتان على نفس الجانب من 1 وتختلفان قليلاً جدًا ، وغالبًا ما يكون الفرق أقل من 1٪. على الرغم من أن هذا الاختلاف قد يبدو غير ذي أهمية بيولوجيًا ، إلا أنه يظل مهمًا لإثبات نتائج العتبة رياضيًا.



شكل 1. $\log p(t)$ من ناحية t . هنا $R_0 < 1$ في حين $R_* > 1$.

كمثال ثاني ، ضع في اعتبارك نموذجًا بنوعين وبيئتين:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,7 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

لاحظ أن المصفوفات $A^{(k)} + B^{(k)}$ مع $k = 1, 2$ هي مصفوفات ليزلي وأن البيئات مستقلة وموزعة بشكل متماثل. تعطي الصيغة (9) $R_* = 1,01 > 1$. مع $p(0) = (1, 1)'$ ، نقدر معدل النمو r مع الصيغة

$$\frac{1}{t} \log(|p(t)|/|p(0)|)$$

مع $t = 5000$. يتم تكرار العملية 1000 مرة. نجد أن متوسط معدل النمو $-0,1021$ مع وجود خطأ قياسي في $0,0074$. هذا يشير إلى $r < 0$ وبالتالي $R_0 < 1$. لتقدير قابلية التكاثر عدديًا ، نستخدم الاقتراح 2: نقسم $A^{(k)}$ مع $k = 1, 2$ بواسطة R ونقدر معدل النمو الجديد. مع $R = 0,84$ ، نجد $r \simeq 0,0135$ مع وجود خطأ قياسي في $0,0072$ ، مما يوحي بذلك $r > 0$. مع $R = 0,88$ ، نجد $r \simeq -0,0168$ مع وجود خطأ قياسي في $0,0071$ ، مما يوحي بذلك $r < 0$. لذلك يبدو ذلك $0,84 < R_0 < 0,88$.

بالنسبة للمثال نفسه ، يمكننا أيضًا استخدام تعريف قابلية التكرار بشكل مباشر على أنه نصف قطر طيفي للعامل

$$\Omega = A(I - B)^{-1}.$$

لاحظ مع ذلك أن هذا العامل لا يحتوي على قيمة eigen غير صفرية ، كما هو الحال في الوقت المستمر الذي تمت دراسته بواسطة (Inaba، 2012، lemma 9). لكن يمكننا أن نحسب g_n ل n كبيرة وتقدير التكاثر مع $\sqrt[n]{\|g_n\|/\|g_0\|}$. في مثالنا ، لاحظ ذلك $g_0(t) = 0 \forall t \geq 3$ و $B^{(k)}B^{(k')} = 0 \forall k, k' = 1, 2$ تظهر معادلة التجديد (6) أنه إذا $g_n(t) = 0 \forall t \geq \tau$ ، ثم $g_{n+1}(t) = 0 \forall t \geq \tau + 2$ اذا لدينا $g_n(t) = 0 \forall t \geq 2n + 3$ ، يكفي اعتبار عامل التشغيل Ω في الفضاء الفرعي ذي البعد المحدود $\ell^1(\{0, 1, \dots, 2n + 2\}, \mathbb{R}^2)$ مع $n = 1000$ ، اخترنا 10 سلاسل عشوائية من البيانات. تم العثور على تقديرات التكاثر بمتوسط 0.86 وخطأ قياسي 0.015 ، بالاتفاق مع التقدير الذي تم الحصول عليه بالفعل.

6. نماذج مع وقت مستمر

دعونا نرسم نظرية مماثلة للنماذج الخطية من السكان في وقت مستمر في بيئة عشوائية ergodic. لنأخذ على سبيل المثال نموذجًا

$$\frac{dp}{dt} = (A(t) - B(t))p(t), \quad (12)$$

- $p(t)$ هو ناقل ،
- $A(t)$ هي مصفوفة مربعة بحجم m مع معاملات موجبة أو صفرية ،
- $-B(t)$ هي مصفوفة من نفس الحجم مع معاملات موجبة أو صفرية خارج القطر.

نفترض أن تبسط

- $(A(t), B(t))$ ينتمي إلى قائمة محدودة من البيانات $((A^{(k)}, B^{(k)}))_{1 \leq k \leq K}$
- تتبع التبديل بين البيانات سلسلة ماركوف المستمرة غير المتجانسة (Ge et al. ، 2006). احتمالية التواجد في الحالة k في الوقت t ، الذي تمت ملاحظته $\Pi_k(t)$ ، هو حل

$$\frac{d\Pi}{dt} = Q(t)\Pi.$$

$Q(t)$ هي مصفوفة دورية غير قابلة للاختزال من الفترة T ، مع معاملات موجبة أو صفرية خارج القطر ، متصلة بالقطع ، وما إلى ذلك $Q_{jj}(t) = -\sum_{i \neq j} Q_{ij}(t)$.

المصفوفة $Q(t)$ دورية لأن العديد من السكان يعانون من مزيج من التأثيرات الموسمية والعشوائية. بالنسبة للنماذج المنفصلة ، يمكن دمج هذا الخليط في مصفوفة الانتقال M في القسم 1. $\lambda_1(A, B)$ هو أكبر أس ل Lyapunov من (12) (Arnold and Wihstutz ، 1986). نحن نفترض ذلك $\lambda_1(0, B) < 0$: السكان يتقاربون إلى صفر بدون ولادات.

يمكن تعريف الاستنساخ بأنه نصف القطر الطيفي لعامل التجديد \mathcal{K} على الفضاء $L^1((0, \infty), \mathbb{R}^m)$ معطى بواسطة

$$(\mathcal{K}u)(t) = \int_0^t K(t, x)u(t - x) dx,$$

حيث تُعطى النواة $K(t, x) = A(t)C(t, x)$ و $C(t, x)$ هي مصفوفة البقاء بين الأوقات t و $t - x$:

$$C(t, x) = Z(t), \quad \frac{dZ}{ds} = -B(s)Z(s) \quad (t - x < s < t), \quad Z(t - x) = I$$

(مصفوفة الهوية). في الواقع ، نعلم من (Bacaër and Ait Dads، 2011، lemma 2) أن ناقلات المواليد لكل وحدة زمنية بسبب الجيل n ترضي علاقة التكرار التي تنطوي على هذا العامل الخطي ، والذي يشبه المعادلة (6). للاطلاع على مناقشة العلاقة بين نصف القطر الطيفي لهذا المشغل وقابلية التكاثر ولكن للنماذج القطعية ، انظر (Inaba، 2012، section 4). في الحالة $R_0 > 0$ ، يمكن أن تتصف إمكانية التكرار مرة أخرى بحقيقة ذلك $\lambda_1(A/R_0, B) = 0$ ، كما في الاقتراح 2. الشعاع الطيفي R_0 من \mathcal{K} يكاد يكون مستقلاً بالتأكيد عن التسلسل العشوائي الخاص بالبيانات ، كما هو الحال في الاقتراح 3.

إذا كان السكان $p(t)$ هو عددي ، لدينا

$$\lambda_1(A, B) = \langle A \rangle - \langle B \rangle,$$

أين على سبيل المثال

$$\langle A \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(s) ds.$$

إذا لدينا

$$R_0 = \frac{\langle A \rangle}{\langle B \rangle}$$

كما في عمل (Cordova-Lepe et al., 2012) لنموذج ذو معاملات دورية تقريبياً. لمتجه الخط $v = (1 \ 1 \dots 1)$ ، نملك $dv/dt = 0 = vQ(t)$. يمكننا أن نبين ، وفقاً لـ (Perthame, 2007, §6.3.2) ، أنه يوجد حل دوري واحد للفترة T وإيجابي $u(t)$ من

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad \sum_i u_i(t) = 1.$$

يوضح قانون الأعداد الكبيرة لسلاسل ماركوف ذلك

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_k u_k(s) A^{(k)} ds.$$

إذا لدينا

$$R_0 = \frac{\int_0^T \sum_k u_k(s) A^{(k)} ds}{\int_0^T \sum_k u_k(s) B^{(k)} ds}.$$

إذا كانت المصفوفة $Q(t)$ لا تعتمد على r ، ثم هناك ناقل واحد u بحيث

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1.$$

إذا لدينا

$$R_0 = \frac{\sum_k u_k A^{(k)}}{\sum_k u_k B^{(k)}}.$$

هذه الصيغة لـ R_0 هي نفس تلك الموجودة في (Artalejo et al., 2012, §4.1) لـ " R_0^{ARA} "

7. الخاتمة

الفرق بين R_0 من هذه المقالة و " R_0 " (لاحظ هنا R_*) في (Hernandez-Suarez et al., 2012) يشبه الفارق بين معدل النمو العشوائي " (1) من ناحية ، والذي يساوي أيضاً توقع معدل النمو السكاني

$$r = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\frac{\log |p(t)|}{t} \right],$$

من ناحية أخرى ، معدل نمو التوقع السكاني (10) (Lewontin and Cohen, 1969؛ Tuljapurkar, 1990). هذا هو موقف r بالنسبة للصفر أو موقف R_0 مقارنة بـ 1 ، التي تقرر ما إذا كان السكان دون الدرجة أو فوق الدرجة في المحاكاة. ومع ذلك $\log \mu$ و R_* أسهل بكثير في الحساب في بيئات ماركوف للمجموعات المنظمة (غير العددية): يتم الحصول عليها من خلال الأشعة الطيفية للمصفوفات البسيطة.

شكر

نود أن نشكر سيلفي ميليار ، أودو ديكمان ، وخاصة كارلوس هيرانديز سواريز على تحفيز اهتمامنا بالبيانات العشوائية.

المراجع البيولوجية

- Arnold L, Wihstutz V (1986) Lyapunov exponents : a survey.
In : Arnold L, Wihstutz V (eds) Lyapunov Exponents.
Lecture Notes in Mathematics, Vol 1186, Springer, Berlin, p. 1–26
- Artalejo JR, Economou A, Lopez–Herrero MJ (2012)
Stochastic epidemic models with random environment :
quasi–stationarity, extinction and final size. *J Math Biol*, doi : 10.1007/s00285–012–0570–5
- Bacaër N (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0
for vector–borne diseases with a periodic vector population. *B Math Biol* 69 : 1067–1091
- Bacaër N (2009) Periodic matrix population models :
growth rate, basic reproduction number and entropy. *B Math Biol* 71 : 1781–1792
- Bacaër N, Ait Dads EH (2011)
Genealogy with seasonality, the basic reproduction number, and the influenza pandemic.
J Math Biol 62 : 741–762
- Bacaër N, Ait Dads EH (2012) On the biological interpretation of a definition
for the parameter R_0 in periodic population models. *J Math Biol* 65 : 601–621
- Bacaër N, Guernaoui S (2006)
The epidemic threshold of vector–borne diseases with seasonality. *J Math Biol* 53 : 421–436
- Caswell H (2001) Matrix Population Models :
Construction, Analysis, and Interpretation, 2nd edn. Sinauer Associates, Sunderland
- Cohen JE (1980) Convexity properties of products of random nonnegative matrices.
Proc Nat Acad Sci USA 77 : 3749–3752
- Cordova–Lepe F, Robledo G, Pinto M, Gonzalez–Olivares E (2012)
Modeling pulse infectious events irrupting into a controlled context : a SIS disease with almost 1
Appl Math Model 36 : 1323–1337
- Cushing JM, Zhou Y (1994)
The net reproductive value and stability in structured population models.
Natur Res Model 8 : 1–37
- Diekmann O, Heesterbeek JAP (2000) Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases.
Wiley, Chichester
- Ge H, Jiang DQ, Qian M (2006)
Reversibility and entropy production of inhomogeneous Markov chains.
J Appl Probab 43 : 1028–1043
- Haccou P, Jagers P, Vatutin VA (2005) Branching Processes :
Variation, Growth, and Extinction of Populations. Cambridge University Press
- Hernandez–Suarez C, Rabinovich J, Hernandez K (2012)
The long–run distribution of births across environments under environmental stochasticity
and its use in the calculation of unconditional life–history parameters.
Theor Pop Biol, doi : 10.1016/j.tpb.2012.05.004
- Inaba H (2012)
On a new perspective of the basic reproduction number in heterogeneous environments.
J Math Biol 65 : 309–348
- Lewontin RC, Cohen D (1969) On population growth in a randomly varying environment.
Proc Nat Acad Sci USA 62 : 1056–1060
- Li CK, Schneider H (2002) Applications of Perron–Frobenius theory to population dynamics.
J Math Biol 44 : 450–462
- Perthame B (2007) Transport Equations in Biology. Birkhäuser, Basel
- Thieme HR (2009) Spectral bound and reproduction number
for infinite–dimensional population structure and time heterogeneity.
SIAM J Appl Math 70 : 188–211
- Tuljapurkar S (1990) Population dynamics in variable environments. Springer, New York.