

ランダム環境での再現性について

J. Math. Biol. 67 (2013) 1729–1739
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01267142>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement、ボンディ、フランス
nicolas.bacaer@ird.fr

Mohamed Khaladi

Cadi Ayyad大学、数学科、マラケシュ、モロッコ

まとめ

私たちは再現性の概念を研究し、 R_0 、ランダムな環境における人口動態の問題のため。簡単にするために、連続する環境がマルコフ連鎖に従うと仮定します。 R_0 次世代オペレーターのスペクトル半径です。1に関するその位置は、シミュレーションでの人口の増加または減少を常に決定します。これは、最近の記事で示唆されている別のパラメーターとは対照的です[Hernandez-Suarez C、Rabinovich J、Hernandez K (2012) Theor. Pop. Biol., doi:10.1016/j.tpb.2012.05.004]。1に関するこの最後のパラメーターの位置は、人口の期待の増加と減少を決定します。 R_0 構造のないスカラー母集団モデルの場合、簡単に計算されます。私たちは主に離散時間モデルに関心がありますが、連続時間モデルについても触れています。

1.はじめに

この記事では、次の形式の人口モデルを検討します。

$$p(t+1) = X(t)p(t), \quad X(t) = A(t) + B(t), \quad t = 0, 1, \dots$$

と $p(0)$ 与えられた \mathbb{R}^m 。ベクトル $p(t)$ 母集団のさまざまなコンポーネントを表します。 $A(t)$ と $B(t)$ すべての t に対して係数 ≥ 0 のサイズ m の正方行列です。 $A(t)$ 出生行列です。 $B(t)$ 生存行列です。簡単にするために、行列が $(A(t), B(t))$ 環境の有限リストから選択されます $(A^{(k)}, B^{(k)})_{1 \leq k \leq K}$ 。タイプ i 環境の後にタイプ j 環境が続きます $(1 \leq i, j \leq K)$ 確率で $M_{i,j}$ 。確率で μ_i 、 $(A(0), B(0))$ タイプです i 。行列は $M = (M_{i,j})$ このマルコフ連鎖の既約です。生存行列は生物学的意味を持っています

$$\sum_i B_{i,j}^{(k)} \leq 1, \quad \forall j, \quad \forall k.$$

また、次のことも想定しています。

- (H1) $\exists \kappa, \quad \|B^{(\kappa)}\|_1 = \max_j \sum_i B_{i,j}^{(\kappa)} < 1$
- (H2) 行列 $A^{(k)} + B^{(k)}$ 「エルゴディック」である (Caswell、2001)。

たとえば、共通の発生行列を持つプリミティブ行列はエルゴードです。これらの仮定のいくつかは弱められる可能性があります。

ランダムな環境でのそのような人口モデルに関する大規模な文献があります (LewontinおよびCohen、1969年; Tuljapurkar、1990年)。私たちは定義します

- $|p(t)| = \sum_i p_i(t)$
- $\|\cdot\|$ マトリックス標準。

上記の仮定で、

$$r = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\log |p(t)|) / t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\log \|X(t-1)X(t-2) \cdots X(0)\|) / t. \quad (1)$$

この制限はほぼ確実に存在し、初期条件や、マルコフ連鎖に沿ってランダムに選択された特定の環境シーケンスとは無関係です (Tuljapurkar, 1990, p. 26)。成長率 r の行列への依存性をマークするには、次のように書きます。

$r = r(A, B)$ 。たとえば、母集団ベクトルがスカラーであり、環境が独立して同一に分布している場合、

$$M_{i,j} = m_j \quad \forall i, j,$$

と

$$r(A, B) = \sum_k m_k \log(A^{(k)} + B^{(k)}) \quad (2)$$

(Haccou et al.、2005、§2.9.2)。

Bacaër and Guernaoui (2006) は、周期的環境の場合の、再現率とも呼ばれる再現性の古典的な概念を一般化しました。 R_0 世代別の漸近的な成長率です (Bacaër と Ait Dads, 2011年と2012年)。Thieme (2009, §5.1) と Inaba (2012) は、継続的時間ではあるが周期的ではない決定論的環境のケースを研究しました。最近の記事 (Hernandez-Suarez et al.、2012) では、ランダム環境のモデルに再現性を適応させることを提案しています。しかし、彼らの位置は $R_0 > 1$ と比較しても、人口が最終的に増加するか減少するかは常に判断されるわけではありません (反例を以下に示します)。この記事では、 R_0 正しいしきい値を与えるように計算する必要があります。これが方程式の唯一の解です

$$r(A/R_0, B) = 0. \quad (3)$$

つまり、 R_0 指数関数的な増加も指数関数的な減衰も発生しない臨界状態に人口をもたらすために、すべての出生率を分割する必要がある数です。そのような特徴付け R_0 (Li and Schneider, 2002, Theorem 3.1) によって一定の環境で強調され、(Baca, r, 2007, §3.4) および (Bacaër, 2009, セクション4) によって連続または離散時間の周期的環境で強調されました。

セクション2では、再現性は (Diekmann and Heesterbeek, 2000) の用語に従って、「次世代オペレーター」のスペクトル半径として定義されます。命題1によると、 $R_0 > 1$ もしそうなら $r > 0$ 。命題2は、再現性が式 (3) を使用して計算できることを示しています。(Bacaër, 2009) によって周期的な環境で得られる再現性の式は、この記事のアプローチの特定のケースです。セクション3は、(Hernandez-Suarez et al.、2012) によって最近導入されたパラメーターが、人口の期待の増加または減少を決定することを示しています。セクション4では、再現性を簡単に計算できるスカラーのケースに焦点を当てます。数値例はセクション5に示されています。セクション6は、最近の記事 (Artalejo et al.、2012) にリンクするための連続時間モデルについて簡単に説明しています。結論は、再現性と (Hernandez-Suarez et al.、2012) の違いを説明しています。成長率の期待と期待の成長率には同じ違いがあります。この違いは多くの議論の対象となっています (Lewontin and Cohen, 1969; Tuljapurkar, 1990)。

2.の定義とプロパティ R_0

定期的なケース (Bacaër と Ait Dads, 2011および2012) と同様に、人口を世代に分割します。 $q(n, t)$ 時間 t の世代 n に属する人口ベクトルです。 $t \geq 0$ と $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} q(0, 0) &= p(0), & q(0, t+1) &= B(t)q(0, t) \\ q(n+1, 0) &= 0, & q(n+1, t+1) &= A(t)q(n, t) + B(t)q(n+1, t). \end{aligned} \quad (4)$$

方程式の右辺のゼロに注意してください $q(n+1, 0) = 0$ のゼロベクトルです \mathbb{R}^m 。もし

$$p(t) = \sum_{n \geq 0} q(n, t)$$

そう

$$p(t+1) = (A(t) + B(t))p(t) \quad \forall t \geq 0.$$

私たちは定義します

$$L = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}^m) = \left\{ (x(0), x(1), \dots); \quad x(t) \in \mathbb{R}^m \quad \forall t \geq 0, \quad \|x\| = \sum_{t \geq 0} \sum_{i=1}^m |x_i(t)| < +\infty \right\}.$$

次に、 L はこの基準を持つBanach空間です。(4) も書かれていることに注意してください

$$q(n+1, 0) = 0, \quad -B(t)q(n+1, t) + q(n+1, t+1) = A(t)q(n, t). \quad (5)$$

オペレーターを紹介する $\mathcal{A}: L \rightarrow L$ 、 $\mathcal{B}: L \rightarrow L$ とアイデンティティ演算子 $\mathcal{I}: L \rightarrow L$ すべてのために $x \in L$ と $t \geq 0$ 、

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}x)(0) &= 0, & (\mathcal{A}x)(t+1) &= A(t)x(t), \\ (\mathcal{B}x)(0) &= 0, & (\mathcal{B}x)(t+1) &= B(t)x(t), \\ (\mathcal{I}x)(t) &= x(t). \end{aligned}$$

なぜなら $A(t)$ と $B(t)$ 有限の行列のセットから選択されていることは明らかです $\mathcal{A}x \in L$ と $\mathcal{B}x \in L$ もし $x \in L$ 。また、 \mathcal{A} と \mathcal{B} 有界線形演算子です。

補題1. スペクトル半径 $\rho(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ 等しい $e^{r(A, B)}$ 。

証明. 私たちは定義します $\mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ 。すべてのために $x \in L$ と $\tau \geq 1$ 、私たちは持っています

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}^\tau x)(t) &= 0, & 0 \leq t \leq \tau - 1, \\ (\mathcal{X}^\tau x)(t) &= X(t-1)X(t-2) \cdots X(t-\tau)x(t-\tau), & t \geq \tau. \end{aligned}$$

(1) とスペクトル半径の式を見れば、

$$\rho(\mathcal{X}) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|\mathcal{X}^\tau\|^{1/\tau} = e^{r(A, B)},$$

どこに $\|\cdot\|$ ベクトル標準に関連付けられた演算子標準です。

補題2. $r(0, B) < 0$: 出生がない場合、人口は消滅します。

証明. 私たちは持っています $\|B^{(k)}\|_1 \leq 1$ すべてのために k と $\|B^{(\kappa)}\|_1 < 1$ 。環境 κ 表示されます ($t \rightarrow +\infty$) 正の割合で $\pi_\kappa T$ マルコフ連鎖が既約であるため、式 (1) の。でも $\|\cdot\|_1$ は、乗法の標準です。だから私たちは $r(0, B) \leq \pi_\kappa \log \|B^{(\kappa)}\|_1 < 0$ 。

なぜなら $r(0, B) < 0$ 、補題1は、 $\rho(B) < 1$ 。だから $\mathcal{I} - B$ 反転可能です: $y = (\mathcal{I} - B)x$ 、その後

$$x = (\mathcal{I} - B)^{-1}y = y + By + B^2y + \cdots,$$

つまり

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^t B(t-1)B(t-2) \cdots B(\tau)y(\tau)$$

のために $t \geq 0$ 。もし $q_n = (q(n, t))_{t \geq 0}$ の場合、方程式 (5) は

$$(\mathcal{I} - B)q_{n+1} = Aq_n,$$

つまり

$$q_{n+1} = (\mathcal{I} - B)^{-1}Aq_n.$$

なぜなら $q_0 \in L$ 、私たちは持っています $q_n \in L$ のために $n \geq 1$ 。私たちは定義します $g_n = Aq_n$ 。このように、 $g_n(t+1) = A(t)q(n, t)$ 世代による出産のベクトルです n その間 t と $t+1$ 。次の結論に達しました。

$$g_{n+1} = Aq_{n+1} = A(\mathcal{I} - B)^{-1}g_n.$$

より明確には、 $g_{n+1}(0) = 0$ と出生の更新方程式

$$g_{n+1}(t+1) = \sum_{\tau=0}^t A(t)B(t-1)B(t-2) \cdots B(\tau)g_n(\tau) \quad (6)$$

のために $t \geq 0$ と $n \geq 0$ 。

定義1. R_0 次世代オペレーターのスペクトル半径 $\rho(\mathcal{A} - \mathcal{B})^{-1}$ 。

定義1と表示の類似性に注意してください R_0 (Thieme, 2009, §5.1) および (Inaba, 2012) の時間的に異質な環境における連続時間モデルの場合。書く $R_0(A, B)$ 一連の行列への依存を強調します。

命題1.

- $R_0(A, B) > 1$ もし $r(A, B) > 0$,
- $R_0(A, B) = 1$ もし $r(A, B) = 0$,
- $R_0(A, B) < 1$ もし $r(A, B) < 0$ 。

証明. (Thieme, 2009, Theorem 3.10) によれば、 $R_0(A, B) - 1$ と同じ符号を持っています $\rho(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - 1$ 。しかし、補題1は言う $\rho(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = e^{r(A, B)}$ 。だから $R_0(A, B) - 1$ と同じ符号を持っています $r(A, B)$ 。

命題2 と仮定 $R_0(A, B) > 0$ 。だから $R_0(A, B)$ 方程式のユニークな解です $r(A/R, B) = 0$ のために $R \in (0, +\infty)$ 。

証明. 再現性は一連の出生率に線形に依存するため、

$$R_0(A/R_0(A, B), B) = 1.$$

命題1では、

$$r(A/R_0(A, B), B) = 0.$$

だから方程式 $r(A/R, B) = 0$ 少なくとも1つのソリューションがあります。(1) で、

$$R \mapsto r(A/R, B), \quad R \in (0, +\infty)$$

減少関数です。 R に関する導関数を2倍にすることで、次のことが簡単にわかります。

$$R \mapsto A_{i,j}(t)/R + B_{i,j}(t) \quad \forall (i, j)$$

完全にゼロまたは対数凸の関数です。この点はすでに使用されています (BacaërおよびAit Dads, 2012, 付録C)。

(コーエン, 1980, 定理1) によれば、 $R \mapsto r(A/R, B)$ 凸関数です。だから方程式 $r(A/R, B) = 0$ 1つのソリューションしか持てません。実際、2つの異なるソリューションがあった場合 R_1 と R_2 と $R_1 < R_2$ 、減少および凸関数 $R \mapsto r(A/R, B)$ これら2つの値の間だけでなく、 $R \geq R_1$ 。この機能 $]0, +\infty[$ で \mathbb{R} 凸状です。また、継続的です。だから $r(A/R, B) \rightarrow r(0, B) < 0$ もし $R \rightarrow +\infty$ 。このようにして矛盾に達した。

備考1. 命題2は、一般に R_0 は r を計算するのと同じくらい難しく、二分法を使用する必要があるため、計算時間が長くなります。

注2. 定期的な環境の場合 $(1, 2, \dots, K)$ 、(Bacaër, 2009) は、 R_0 のスペクトル半径でした

$$\left(\begin{array}{cccc} A^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A^{(K)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} -B^{(1)} & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -B^{(2)} & I & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & I \\ I & \cdots & 0 & 0 & -B^{(K)} \end{array} \right)^{-1}. \quad (7)$$

BacaërとAit Dads (2012, 命題3) は、これは R_0 方程式の唯一の解です

$$\rho\left(\left(\frac{A^{(K)}}{R} + B^{(K)}\right) \cdots \left(\frac{A^{(1)}}{R} + B^{(1)}\right)\right) = 1.$$

式 (1) を使用すると、上の左側は目に見えて次のようになります。 $e^{r(A/R, B)}$ 。したがって、命題2から、 R_0

(Bacaër, 2009) は、 R_0 周期的環境の特定のケースにおける定義1の ($M_{i,j} = 1$ もし $j = i + 1$ と $1 \leq i \leq K - 1$ 、 $M_{K,1} = 1$ 、および $M_{i,j} = 0$ それ以外の場合)。プレゼントできます R_0 のスペクトル半径のような周期的環境では

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A^{(K)} \\ A^{(1)} & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A^{(K-1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & -B^{(K)} \\ -B^{(1)} & I & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -B^{(K-1)} & I \end{pmatrix}^{-1} \quad (8)$$

簡単に確認できるのは、(7) のスペクトル半径に等しい (Hernandez-Suarez et al.、2012、セクション5)。

(Bacaërand Ait Dads、2012) によれば、このスペクトル半径は $A(I - B)^{-1}$ (Cushing and Zhou、1994; Caswell、2001) 環境が一定の場合、 $A^{(k)} = A$ と $B^{(k)} = B$ すべての k に対して。

命題3. の定義 R_0 上記は特定のランダムなシーケンスとは無関係です $(A(t), B(t))_{t \geq 0}$ 、これはマルコフ連鎖に従います。だから R_0 モデルの再現性と言えます。

証明. ある $(A(t), B(t))$ と $(A'(t), B'(t))$ マルコフ連鎖に従う環境の2つのシーケンス。対応する再現性は $R_0(A, B)$ と $R_0(A', B')$ 。それを示したい $R_0(A, B) = R_0(A', B')$ 。命題2では、 $r(A/R_0(A, B), B) = 0$ と $r(A'/R_0(A', B'), B') = 0$ 。しかし、成長率は環境の特定のシーケンスとは無関係です (Tuljapurkar、1990)。だから

$$0 = r(A/R_0(A, B), B) = r(A'/R_0(A, B), B').$$

$R_0(A, B)$ と $R_0(A', B')$ の解決策です $r(A'/R, B') = 0$ 。命題2によれば、 $R_0(A, B) = R_0(A', B')$ 。

3.別のパラメーター

最近の記事 (Hernandez-Suarez et al.、2012) は、再現性をマトリックスのスペクトル半径として定義することを提案しています

$$\begin{pmatrix} M_{1,1}A^{(1)} & \cdots & M_{K,1}A^{(K)} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{1,K}A^{(1)} & \cdots & M_{K,K}A^{(K)} \end{pmatrix} \left[I - \begin{pmatrix} M_{1,1}B^{(1)} & \cdots & M_{K,1}B^{(K)} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{1,K}B^{(1)} & \cdots & M_{K,K}B^{(K)} \end{pmatrix} \right]^{-1}, \quad (9)$$

どこに I は、適切なサイズの単位行列です。このスペクトル半径に注意してください R_* 混乱を避けるために。

マルコフ環境に関する文献では、

$$\log \mu = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{E}[|p(t)|]}{t} \quad (10)$$

存在する ($|\cdot|$ コンポーネントの合計を示します)。さらに、 μ は $D(M' \otimes I)$ 、どこ

- D 対角ブロック行列です $D = \text{diag}(A^{(1)} + B^{(1)}, \dots, A^{(K)} + B^{(K)})$ 、
- M' M の転置行列
- I 単位行列です。

Tuljapurkar (1990、p. 45) はこれをバルチャ式と呼んでいます。

提案。

- $R_* > 1$ もし $\log \mu > 0$
- $R_* = 1$ もし $\log \mu = 0$
- $R_* < 1$ もし $\log \mu < 0$ 。

証明. 私たちは持っています

$$D(M' \otimes I) = \begin{pmatrix} M_{1,1}(A^{(1)} + B^{(1)}) & \cdots & M_{K,1}(A^{(K)} + B^{(K)}) \\ \vdots & & \vdots \\ M_{1,K}(A^{(1)} + B^{(1)}) & \cdots & M_{K,K}(A^{(K)} + B^{(K)}) \end{pmatrix}.$$

この行列は $A^* + B^*$ 、どこ

$$A^* = \begin{pmatrix} M_{1,1}A^{(1)} & \cdots & M_{K,1}A^{(K)} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{1,K}A^{(1)} & \cdots & M_{K,K}A^{(K)} \end{pmatrix},$$

と B^* 置き換えることによって、同様に定義されている A をすることによって B 。 (Thieme, 2009, Theorem 3.10) によれば、 $\rho(A^* + B^*) - 1$ と $\rho(A^*(I - B^*)^{-1}) - 1$ 同じ記号を持っています。でも $\mu = \rho(A^* + B^*)$ と $R_* = \rho(A^*(I - B^*)^{-1})$ 。

注3. 定期的な環境では、 $R_0 = R_*$ 、行列 (8) と (9) を比較するとわかるように。

4. スカラーケース

もし $A(t)$ と $B(t)$ がスカラーであり、環境が独立しており、同一に分布している場合、方程式 (2) と命題2は、

$$\sum_{k=1}^K m_k \log \left(\frac{A^{(k)}}{R_0} + B^{(k)} \right) = 0,$$

または同等

$$\prod_{k=1}^K \left(\frac{A^{(k)}}{R_0} + B^{(k)} \right)^{m_k} = 1.$$

次に、連続する環境間のマルコフ依存のより一般的なケースを考えてみましょう。覚えて $M = (M_{i,j})$ 遷移確率の行列です。連鎖は既約なので、 π をさまざまな環境で費やした時間の定常分布とします。

$$\pi_j = \sum_i \pi_i M_{i,j} \quad \forall j, \quad \sum_j \pi_j = 1.$$

(Haccou et al.、2005、§2.9.2) は、成長率が

$$r(A, B) = \sum_k \pi_k \log(A^{(k)} + B^{(k)})$$

証明のために、単にそれに注意してください

$$\log p(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \log X(\tau) + \log p(0).$$

もし $t \rightarrow +\infty$ 、等しい項の数 $\log(A^{(k)} + B^{(k)})$ τ の合計は $\pi_k t + o(t)$ 。命題2は R_0 の解決策です

$$\prod_{k=1}^K \left(\frac{A^{(k)}}{R_0} + B^{(k)} \right)^{\pi_k} = 1. \quad (11)$$

したがって、 R_0 二分法などで簡単に計算できます。

5. 例

最初の例として、スカラー母集団 ($m = 1$) と2つの環境があるとして ($K = 2$) :

$$A^{(1)} = 1, B^{(1)} = 0,5, A^{(2)} = 0,1, B^{(2)} = 0,58, M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

定常分布は $(\pi_1, \pi_2) = (6/13, 7/13)$ 。式 (11) は $R_0 \simeq 0,949 < 1$: 人口はほぼ確実に消えます。そのような例では、方程式 (9) は $R_* \simeq 1,050 > 1$ 。から始まるこのモデルのいくつかのシミュレーション $p(0) = 1$ これを説明します。図1は、プロセスが実際に垂臨界であることを示しています。パラメータ値は正確に選択されるため、 $R_0 < 1$ と $R_* > 1$ 。ただし、他の多くの場合、2つのパラメータは1の同じ側にあり、ほんのわずかしきか違いがなく思われま

す。その違いは、多くの場合1%未満です。そのような違いは生物学的に重要ではないように見えるかもしれませんが、閾値の結果を数学的に実証するためには依然として重要です。

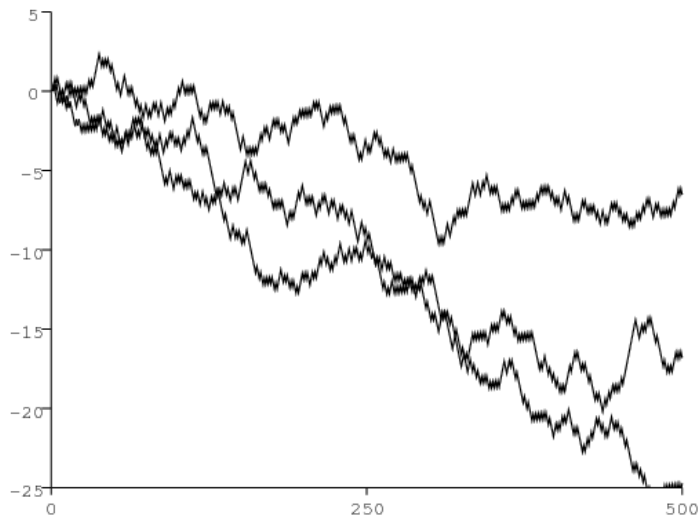


図1。 $\log p(t)$ に応じて t 。ここに $R_0 < 1$ ながら $R_* > 1$ 。

2番目の例として、2つのタイプと2つの環境を持つモデルを考えます。

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,7 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

行列に注意してください $A^{(k)} + B^{(k)}$ のために $k = 1, 2$ はレスリー行列であり、環境は独立しており、同一に分散されています。式 (9) は $R_* = 1,01 > 1$ 。もし $p(0) = (11)'$ 、式で成長率 r を推定すると

$$\frac{1}{t} \log(|p(t)|/|p(0)|)$$

が 5000 を、もう一つは1000倍のプロセスを反復した場合、平均成長率であることが判明しました $-0,1021$ 標準エラー $0,0074$ 。これは $r < 0$ を示唆しているため、 $R_0 < 1$ 。再現性を数値的に推定するには、命題2を使用します。 $A^{(k)}$ のために $k = 1, 2$ R によって、新しい成長率を推定します。と $R = 0,84$ 、見つけます $r \simeq 0,0135$ 標準エラー $0,0072$ 、それは示唆しています $r > 0$ 。と $R = 0,88$ 、見つけます $r \simeq -0,0168$ 標準エラー $0,0071$ 、それは示唆しています $r < 0$ 。だからそれは $0,84 < R_0 < 0,88$ 。

同じ例で、再現性の定義を演算子のスペクトル半径として直接使用することもできます。

$$\Omega = \mathcal{A}(\mathcal{I} - \mathcal{B})^{-1}.$$

ただし、(Inaba, 2012, lemma 9) によって調査された連続時間の場合のように、この演算子にはゼロ以外の固有値がないことに注意してください。でも計算できます g_n 以下のための N 大として再現性を見積もります $\sqrt[n]{\|g_n\|/\|g_0\|}$ 。この例では、 $B^{(k)}B^{(k')} = 0$ すべてのために $k, k' = 1, 2$ と $g_0(t) = 0$ すべてのために $t \geq 3$ 。更新方程式 (6) は、 $g_n(t) = 0$ すべてのために $t \geq \tau$ 、その後 $g_{n+1}(t) = 0$ すべてのために $t \geq \tau + 2$ 。だから $g_n(t) = 0$ すべてのために $t \geq 2n + 3$ 。計算するには g_n なので、演算子を検討してください Ω 有限次元の部分空間 $\ell^1(\{0, 1, \dots, 2n + 2\}, \mathbb{R}^2)$ 。では、 $N = 1000$ 、我々は環境の10のランダムな配列を選択しました。再現性の推定値は、すでに得られた推定値と一致して、平均0.86および標準誤差0.015で見つかりました。

6.連続時間のあるモデル

エルゴードのランダム環境における連続時間の人口の線形モデルについて、同様の理論をスケッチしましょう。モデルを例にとってみましょう

$$\frac{dp}{dt} = (A(t) - B(t))p(t), \quad (12)$$

どこに

- $p(t)$ ベクトルです
- $A(t)$ 正またはゼロの係数を持つサイズ m の正方行列です。
- $-B(t)$ 対角の外側に正またはゼロの係数をもつ同じサイズの行列です。

簡略化するとします

- $(A(t), B(t))$ 環境の有限リストに属している $((A^{(k)}, B^{(k)}))_{1 \leq k \leq K}$
- 環境間の切り替えは、不均一な連続時間のマルコフ連鎖に従います (Ge et al., 2006)。注目される、時刻 t で状態 k になる確率 $\Pi_k(t)$ 、の解決策です

$$\frac{d\Pi}{dt} = Q(t)\Pi,$$

どこに $Q(t)$ は、対角線の外側に正またはゼロの係数を持ち、部分ごとに連続し、次のような、既約行列 T -periodic です。 $Q_{jj}(t) = -\sum_{i \neq j} Q_{ij}(t)$ 。

マトリックス $Q(t)$ 多くの集団が季節的な影響とランダムな影響の混合を経験するため、周期的です。離散時間モデルの場合、このような混合はセクション1の遷移行列 M に組み込むことができます。 $\lambda_1(A, B)$ リアプノフの (12) の最大の指数です (Arnold and Wihstutz, 1986)。私たちは $\lambda_1(0, B) < 0$: 人口は出生なしで0に収束します。

再現性は、更新演算子のスペクトル半径として定義できます \mathcal{K} に $L^1((0, \infty), \mathbb{R}^m)$ によって与えられた

$$(\mathcal{K}u)(t) = \int_0^t K(t, x)u(t-x) dx,$$

ここで、核は $K(t, x) = A(t)C(t, x)$ と $C(t, x)$ 時間間の生存行列 $t-x$ そして t :

$$C(t, x) = Z(t), \quad \frac{dZ}{ds} = -B(s)Z(s) \quad (t-x < s < t), \quad Z(t-x) = I$$

(単位行列)。実際、(Bacaer and Ait Dads, 2011, lemma 2) から、世代 n に起因する時間単位あたりの出産のベクトルは、この線形演算子を含む反復関係を満たすことがわかります。(6)。この演算子のスペクトル半径と再現性の間のリンクの説明については、決定論的モデルについては、(Inaba, 2012, セクション4) を参照してください。もし $R_0 > 0$ 再現性は、 $\lambda_1(A/R_0, B) = 0$ 、命題2のように。スペクトル半径 R_0 の \mathcal{K} 命題3のように、環境の特定のランダムなシーケンスからほぼ確実に独立しています。

もし $p(t)$ はスカラー母集団なので、

$$\lambda_1(A, B) = \langle A \rangle - \langle B \rangle,$$

たとえば

$$\langle A \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(s) ds.$$

だから

$$R_0 = \frac{\langle A \rangle}{\langle B \rangle}$$

ほぼ周期的な係数を持つモデルの (Cordova-Lepe et al., 2012) の作業と同様です。行ベクトルの場合 $v = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$ 、私たちは持っています $dv/dt = 0 = vQ(t)$ 。(Perthame, 2007, §6.3.2) によれば、正の T 周期解が1つあることを示すことができます。 $u(t)$ の

$$\frac{du}{dt} = Q(t)u(t), \quad \sum_i u_i(t) = 1.$$

マルコフ連鎖の多数の法則は、

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_k u_k(s) A^{(k)} ds.$$

だから

$$R_0 = \frac{\int_0^T \sum_k u_k(s) A^{(k)} ds}{\int_0^T \sum_k u_k(s) B^{(k)} ds}.$$

もし $Q(t)$ t に依存しない場合、次のような単一のベクトル u があります。

$$Qu = 0, \quad \sum_i u_i = 1.$$

だから

$$R_0 = \frac{\sum_k u_k A^{(k)}}{\sum_k u_k B^{(k)}}.$$

この式 R_0 「Artalejo et al.、2012、§4.1」と同じです。 R_0^{ARA} 」

7.まとめ

の違い R_0 この記事と「 R_0 「(ここに記載 R_*) (Hernandez-Suarez et al.、2012) は、一方では「確率的」成長率 (1) との違いに似ています。これは、人口成長率の期待値にも等しくなります。

$$r = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\frac{\log |p(t)|}{t} \right],$$

一方、人口期待の増加率 (10) (Lewontin and Cohen、1969; Tuljapurkar、1990)。これは、0に対する r の位置、または R_0 1と比較して、シミュレーションで母集団が亜臨界であるか超臨界であるかを決定します。しかし $\log \mu$ と R_* 構造化された(非スカラー)母集団のマルコフ環境では、計算がはるかに簡単です。単純な行列のスペクトル光線によって与えられます。

謝辞

ランダム環境への関心を刺激してくれた Sylvie Méléard、Odo Diekmann、特に Carlos Hernandez-Suarez に感謝します。

参考文献

- Arnold L, Wihstutz V (1986) Lyapunov exponents : a survey. In : Arnold L, Wihstutz V (eds) Lyapunov Exponents. Lecture Notes in Mathematics, Vol 1186, Springer, Berlin, p. 1–26
- Artalejo JR, Economou A, Lopez-Herrero MJ (2012) Stochastic epidemic models with random environment : quasi-stationarity, extinction and final size. J Math Biol, doi : 10.1007/s00285-012-0570-5
- Bacaër N (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population. B Math Biol 69 : 1067–1091
- Bacaër N (2009) Periodic matrix population models : growth rate, basic reproduction number and entropy. B Math Biol 71 : 1781–1792
- Bacaër N, Ait Dads EH (2011) Genealogy with seasonality, the basic reproduction number, and the influenza pandemic. J Math Biol 62 : 741–762
- Bacaër N, Ait Dads EH (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter R_0 in periodic population models. J Math Biol 65 : 601–621
- Bacaër N, Guernaoui S (2006) The epidemic threshold of vector-borne diseases with seasonality. J Math Biol 53 : 421–436
- Caswell H (2001) Matrix Population Models : Construction, Analysis, and Interpretation, 2nd edn. Sinauer Associates, Sunderland

- Cohen JE (1980) Convexity properties of products of random nonnegative matrices. Proc Nat Acad Sci USA 77 : 3749–3752
- Cordova–Lepe F, Robledo G, Pinto M, Gonzalez– Olivares E (2012) Modeling pulse infectious events irrupting into a controlled context : a SIS disease with almost periodic parameters. Appl Math Model 36 : 1323–1337
- Cushing JM, Zhou Y (1994) The net reproductive value and stability in structured population models. Natur Res Model 8 : 1–37
- Diekmann O, Heesterbeek JAP (2000) Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases. Wiley, Chichester
- Ge H, Jiang DQ, Qian M (2006) Reversibility and entropy production of inhomogeneous Markov chains. J Appl Probab 43 : 1028–1043
- Haccou P, Jagers P, Vatutin VA (2005) Branching Processes : Variation, Growth, and Extinction of Populations. Cambridge University Press
- Hernandez– Suarez C, Rabinovich J, Hernandez K (2012) The long–run distribution of births across environments under environmental stochasticity and its use in the calculation of unconditional life–history parameters. Theor Pop Biol, doi : 10.1016/j. tpb.2012.05.004
- Inaba H (2012) On a new perspective of the basic reproduction number in heterogeneous environments. J Math Biol 65 : 309–348
- Lewontin RC, Cohen D (1969) On population growth in a randomly varying environment. Proc Nat Acad Sci USA 62 : 1056–1060
- Li CK, Schneider H (2002) Applications of Perron– Frobenius theory to population dynamics. J Math Biol 44 : 450–462
- Perthame B (2007) Transport Equations in Biology. Birkhäuser, Basel
- Thieme HR (2009) Spectral bound and reproduction number for infinite– dimensional population structure and time heterogeneity. SIAM J Appl Math 70 : 188–211
- Tuljapurkar S (1990) Population dynamics in variable environments. Springer, New York.