



HAL
open science

L'étude des propriétés projectives des figures par Poncelet : une modernité explicitement ancrée dans la tradition

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. L'étude des propriétés projectives des figures par Poncelet : une modernité explicitement ancrée dans la tradition. Christian Gilain; Alexandre Guilbaud. Sciences mathématiques 1750-1850 – Continuités et ruptures, CNRS Editions, pp.381-402, 2015, 978-2-271-08295-4. hal-01266538

HAL Id: hal-01266538

<https://hal.science/hal-01266538v1>

Submitted on 2 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'étude des propriétés projectives des figures par Poncelet : une modernité explicitement ancrée dans la tradition

Philippe NABONNAND

Le *Traité des propriétés projectives des figures* de Jean-Victor Poncelet paraît en 1822¹. De nombreux commentateurs ont, à juste titre, souligné l'importance et le caractère novateur du point de vue présenté dans cet ouvrage pour le champ de la géométrie, en particulier l'utilisation systématique de la notion de projection pour aborder les questions géométriques². Pour autant, la conception générale de la géométrie, la plupart des formes de démonstration – même les plus novatrices – et les discours de justification mobilisés par Poncelet s'inscrivent dans la continuité des travaux de ses prédécesseurs. Le titre même de son ouvrage traduit la tension qui caractérise ses travaux géométriques entre, d'une part, une revendication affichée d'innovation et, d'autre part, un ancrage dans la tradition de la géométrie pure. En effet, en identifiant la géométrie à l'étude des figures, Poncelet adopte sans restriction une approche classique mais dans le même temps, en annonçant qu'il se focalise sur les propriétés projectives des figures, il revendique le point de vue le plus moderne, celui inauguré entre autres par Gaspard Monge et Charles-Julien Brianchon. L'objectif de cet article est de montrer comment Poncelet, tout en justifiant l'introduction de nouvelles méthodes en géométrie pure, reprend en même temps les conceptions les plus traditionnelles de cette discipline.

Dans la première partie, le programme de recherche en géométrie de

1. Une seconde édition du *Traité des propriétés projectives des figures* paraît en deux tomes [Poncelet 1865-1866]. Le premier tome est une réédition légèrement modifiée de l'ouvrage de 1822 ; le second réunit des articles publiés dans le *Journal de Crelle*. Dans la suite, cet ouvrage sera souvent désigné simplement par *Traité*.

2. Sur le contenu des travaux géométriques de Poncelet, voir, notamment, [Belhoste 1998 ; Gray 2007 ; Friedelmeyer 2010 ; Nabonnand 2010, 2011, à paraître].

Poncelet est mis en perspective à partir des questions de tradition et de nouveauté. Dans la deuxième partie, l'exposé liminaire de la théorie des coniques dans la première section du *Traité des propriétés projectives des figures* sera analysé de manière à faire apparaître les intentions pédagogiques et rhétoriques de Poncelet. En effet, si une présentation des éléments de la théorie des coniques est indispensable pour établir les principes de projection, les premiers chapitres du *Traité* ont aussi pour objectif d'illustrer à partir de résultats bien connus l'efficacité du point de vue projectif, d'en montrer la pertinence et d'accoutumer le lecteur aux nouvelles méthodes prônées par Poncelet. Ainsi, cet exposé des premières notions de la théorie des coniques est aussi l'occasion d'une utilisation d'abord implicite puis commentée du principe de continuité. La troisième partie suivra l'argumentation en faveur de l'adoption du principe de continuité développée par Poncelet dans un texte de philosophie mathématique « dont la rédaction définitive date de l'hiver de 1818 à 1819 » [Poncelet 1818, p. 296]. Un des principaux arguments avancés par l'auteur consiste à montrer qu'on utilise déjà puis longtemps un tel principe dans d'autres disciplines, en particulier en algèbre et en géométrie analytique. Poncelet prend donc soin d'inscrire le principe de continuité dans une tradition mathématique qui dépasse le champ de la géométrie et touche aux conditions de possibilité, pour la pratique mathématique, d'atteindre un certain niveau de généralité.

I. Le programme de recherche de Poncelet en géométrie

L'ambition affirmée de Poncelet est de renouveler les approches synthétiques de la géométrie en rompant avec la pratique traditionnelle d'une géométrie pure qui a tendance, à ses yeux, à n'étudier que des problèmes attachés à une seule figure. Tout en vantant la généralité des techniques mises en œuvre dans le cadre de la géométrie analytique, comprise comme application de l'algèbre à la géométrie, Poncelet déplore le manque de méthode de la « géométrie des Anciens », entendue comme la géométrie de tradition euclidienne. Selon lui, la généralité de point de vue de la géométrie analytique ne réside pas tant dans les moyens algébriques qu'elle utilise que dans sa capacité à s'abstraire de la considération des grandeurs absolues et à raisonner avec des « grandeurs indéterminées ». L'utilisation des formules algébriques en géométrie analytique permet

d'envisager en un seul geste tout un ensemble de figures et l'analyse des problèmes par le biais de l'algèbre permet de raisonner sur cet ensemble en ne considérant pourtant qu'une figure particulière. Le propos de Poncelet est de doter la géométrie pure d'une méthode analogue.

Son idée consiste donc à mettre en place des stratégies qui, partant d'une démonstration établie dans un cas particulier et conforme aux canons de rigueur de la géométrie pure traditionnelle, permettraient d'étendre le résultat à une classe entière de figures. La première est d'admettre un principe dit de continuité ou de « permanence des relations mathématiques de la grandeur figurée » [Poncelet 1818, p. 319] qui permet d'assurer, pour un ensemble de figures corrélatives³, la validité d'une propriété montrée dans un cas particulier par-delà les changements de configuration, les passages à l'infini ou la perte de réalité de certains éléments. Une propriété démontrée pour l'une des figures corrélatives (dite *figure primitive*) pourra être considérée, grâce au principe de continuité, comme valide pour l'ensemble des figures corrélatives. La seconde stratégie consiste à formuler le corpus déjà établi de la géométrie, ainsi que les nouvelles questions, en termes de propriétés projectives, c'est-à-dire de propriétés qui se conservent par projection centrale. Dans le *Traité*, une fois les premiers éléments de la géométrie exposés en ces termes, Poncelet établit une série de principes de projection permettant de passer d'une configuration à une autre qui lui est projective.

Comme la plupart des mathématiciens, Poncelet pose des questions motivées par des travaux antérieurs, mais n'hésite pas, contrairement à nombre de ses contemporains, à citer les résultats sur lesquels il s'appuie, les auteurs qu'il a lus, par rapport auxquels il se positionne, ainsi que les travaux dont il s'inspire. Les approches par la géométrie pure de l'étude des coniques s'ancrent dans une tradition des mathématiques grecques pratiquée et enseignée au long des siècles. Poncelet cite à plusieurs reprises les livres des *Coniques* d'Apollonius, la *Collection mathématique*

3. Poncelet reprend la notion et le terme de corrélation à Lazare Carnot [1801, 1803]. Deux figures sont corrélatives si l'une est obtenue à partir de l'autre en modifiant par un « mouvement progressif et continu » [Poncelet 1818, p. 300] les positions relatives des éléments qui la composent. La corrélation est *directe* si elle ne modifie pas qualitativement la figure (mêmes éléments – éventuellement rejetés à l'infini – disposés de la même manière), *indirecte* si les positions relatives des éléments constituant la figure sont modifiés (mêmes éléments pouvant être disposés dans un ordre différent), et *idéale* lorsque des éléments réels deviennent imaginaires ou réciproquement.

de Pappus et de nombreux autres tant pour montrer qu'il retrouve les principaux résultats de la tradition grecque, que pour célébrer la rigueur de ces traités. Pour autant, il tient aussi à se démarquer du manque de méthode et de généralité de « cette Géométrie ancienne, de cette Géométrie cultivée par Euclide, Archimède, Apollonius, et plus récemment par les Viète, les Fermat, les Grégoire de St.-Vincent, les Halley, les Viviani, les R. Simson, etc. [...] qui, mettant en œuvre une multitude de relations et de lignes auxiliaires, a une marche à la fois embarrassée et incertaine » [Poncelet 1822, p. xxviii]. Parallèlement, le « système de Descartes » est souvent invoqué pour affirmer la généralité de cette nouvelle approche des questions géométriques :

« Descartes n'avait certainement pas entrevu la fécondité et la portée de sa méthode, qui, dans les derniers temps, entre les mains d'Euler, de Clairaut, mais surtout de Lagrange et de Monge, est devenue un instrument général de démonstration et de découvertes, une langue géométrique pour ainsi dire universelle ; avantage qu'elle doit non-seulement à la simplicité de son algorithme et de ses notations, mais surtout à son système métrique de représentation des éléments droits ou courbes des figures, par la projection, véritable transformation linéaire ou rectiligne de ces derniers éléments, qui n'altère pas le degré, les affections et les propriétés essentielles des lignes, et ne sort point, en apparence, des voies de l'Algèbre pure, justement ici nommée *Analyse indéterminée*⁴. » [Poncelet 1815b, p. 252]

Tout en posant la « fécondité et la portée » de la géométrie analytique comme horizon de la géométrie pure, Poncelet introduit le cadre à partir duquel il va justifier son point de vue projectif : une des clés de la richesse de l'approche par l'algèbre réside dans le fait que les projections implicitement utilisées pour définir les coordonnées et en changer n'affectent pas la forme des équations.

Pour le mathématicien, les temps sont venus de reprendre le chantier de la géométrie pure. Les récents travaux de Gaspard Monge⁵, Charles

4. Dans toutes les citations, les caractères en italique figurent dans l'original, sauf indication contraire explicite.

5. La référence à Monge a un double objectif. Poncelet doit non seulement montrer que son projet mathématique s'inscrit dans une série de travaux inspirés entre autres par la *Géométrie descriptive* [Monge 1799], mais aussi expliquer pourquoi celui qu'il présente comme son mentor a formé des générations d'étudiants à la géométrie analytique dans ses cours à l'École de Mézières et à l'École polytechnique. La raison en

Dupin ou Charles-Julien Brianchon⁶ « ont prouvé que la Géométrie descriptive [...] peut se suffire à elle-même, et atteindre à toute la hauteur des conceptions de l'Analyse algébrique » [Poncelet 1822, p. xvii-xviii]. En même temps qu'il revendique la présentation d'une théorie d'ensemble intégrant les derniers développements en géométrie pure (théorie des transversales de Lazare Carnot, géométrie pure à trois dimensions de Monge et Dupin, théorie des polaires et des projections de Brianchon), Poncelet s'attache à montrer que les méthodes qu'il propose ont déjà été utilisées ou au moins esquissées par des prédécesseurs plus anciens. L'utilisation de la doctrine des projections est ainsi présentée comme une pratique sinon commune, au moins courante ; de ce point de vue, l'accumulation de références est loin d'être innocente :

« Un grand nombre de géomètres distingués, à la tête desquels il faut placer l'illustre Monge, ont senti toute l'importance des ressources que pouvait offrir la doctrine des projections pour la recherche et la démonstration des propriétés générales des figures. Pascal, De Lahire, Lambert, et plus récemment encore M. Carnot, dans son *Essai sur la Théorie des transversales*, MM. Gergonne, Servois, Ferriot, Durrande, etc., dans les *Annales de Mathématiques*, MM. Hachette, Roche, Chasles, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, ont successivement fait usage, avec plus ou moins de restriction, de considérations semblables pour étendre le résultat des premières conceptions géométriques. » [Ibid., p. xxxiv]

Quelques lignes plus loin, en évoquant les travaux de Brianchon, Poncelet cite aussi le *Journal de l'École polytechnique*. S'il juge nécessaire de multiplier les noms de mathématiciens pour montrer que la « doctrine des projections » est loin d'être une innovation, il ne trouve pas inutile de faire voir que celle-ci traverse l'offre éditoriale de journaux français publiant des mathématiques en 1822. Il y a là un effet de la rupture dans la représentation des formes de la circulation mathématique provoquée par la diversification de l'offre éditoriale mathématique au début du XIX^e siècle⁷.

est, selon lui, qu'« à cette époque, la science était tout entière à créer, et les principes, jusqu'alors suivis et reçus dans la *Stéréotomie*, étaient beaucoup trop restreints pour servir de base à la nouvelle Géométrie » [Poncelet 1822, p. xvii].

6. [Brianchon 1806, 1810, 1817 ; Dupin 1813].

7. Sur l'offre éditoriale de journaux français au début du XIX^e siècle, voir [Verdier 2009].

De même que la théorie des polaires, le point de vue projectif adopté par Poncelet est présenté comme repris de Brianchon⁸ ; l'introduction en géométrie du principe de continuité est attribuée à Monge⁹. Dans la même veine, Poncelet établit une analogie entre l'utilisation de l'analyse infinitésimale (en particulier par Monge) et le recours au principe de continuité : on doit pouvoir étendre les considérations géométriques aux éléments de l'infini et de l'imaginaire comme on le fait déjà dans le domaine infinitésimal¹⁰. Poncelet présente donc les principales innovations méthodologiques de la fin du XVIII^e siècle et du début du XIX^e siècle comme relevant d'une même épistémologie de la généralisation obtenue par continuité.

Sa revendication à l'innovation concerne essentiellement le caractère systématique et général de son approche. Poncelet montre que sa démarche consiste à reprendre nombre de problèmes, de résultats et de théories anciens et plus contemporains en les organisant autour d'énoncés généraux. Les méthodes et les outils qu'il propose assurent à la nouvelle théorie le même caractère de généralité que la géométrie analytique sans perdre les bénéfices de la rigueur attribuée traditionnellement à la « géométrie des Anciens ». En ce sens, ses références des travaux antérieurs (du XVIII^e siècle et d'avant) servent à la fois à cerner le corpus à partir duquel il va développer sa théorie, et à spécifier et justifier son point de vue à partir de diverses traditions actives au début du XIX^e siècle.

II. L'introduction de la théorie des coniques dans le *Traité des propriétés projectives des figures* (1822)

Poncelet consacre une grande partie de la première section de son *Traité* à exposer les principes généraux de son approche de la géométrie en se concentrant sur la théorie des coniques¹¹. Il y explique en préambule qu'il exposera d'abord rapidement, pour aider son lecteur, « les notions préliminaires concernant la projection ou perspective des figures

8. [Poncelet 1822, p. xxxiv, xlv-xlv].

9. [Poncelet 1818, p. 309-310].

10. [Poncelet 1822, p. xxv].

11. Une première version de la première partie du *Traité* était intitulée « Essai sur les propriétés projectives des sections coniques » [Poncelet 1820].

en général »¹² pour les appliquer à « certaines lignes particulières »¹³, à savoir les lignes droites et les coniques. L'intention du mathématicien est pédagogique en ce sens que ce mode de présentation lui permet de relier des propriétés bien connues avec « les considérations nouvelles »¹⁴ qu'il souhaite promouvoir. En procédant ainsi, Poncelet espère non seulement rendre son exposé plus accessible, mais aussi montrer les « avantages »¹⁵ et la simplicité de son point de vue.

La notion de projection centrale sur laquelle se fonde celle de propriété projective est immédiatement illustrée par un renvoi à la définition classique des coniques comme section d'un cône à base circulaire, ou encore, en reprenant le vocabulaire des projections, comme la « *projection* d'un cercle ». Poncelet ne change donc pas de définition, il modifie simplement le vocabulaire et embauche les coniques au service de sa présentation. Celles-ci sont immédiatement utilisées dans le premier exemple de propriété projective, celle de la conservation du degré des courbes par les projections centrales : puisque « la circonférence du cercle ne peut être coupée en plus de deux points par une droite arbitraire tracée dans son plan »¹⁶, les coniques en tant que projections d'un cercle sont elles-mêmes de degré 2.

La théorie des coniques est de nouveau convoquée afin d'illustrer la richesse de la classe des propriétés que Poncelet se propose d'étudier. En effet, s'il est aisé de reconnaître les propriétés « graphiques » ou « de disposition »¹⁷ comme des propriétés conservées par projection, il est par contre plus difficile de reconnaître celles qui sont projectives parmi les propriétés métriques des figures. Or, caractériser les propriétés projectives est crucial pour l'approche de Poncelet et l'incapacité dans laquelle il est de déterminer si une propriété géométrique est ou n'est pas projective entache sérieusement ses développements :

« Si donc une figure d'espèce particulière jouissait de certaines propriétés mé-

12. [Poncelet 1822, p. 1].

13. [*Ibid.*].

14. [*Ibid.*, p. 2].

15. Le mot « avantages » est utilisé maintes fois par Poncelet tant pour expliquer ceux de la géométrie analytique ou de la géométrie descriptive que pour argumenter en faveur de sa méthode des projections.

16. [*Ibid.*, p. 4].

17. [*Ibid.*, p. 5].

triques, on ne pourrait affirmer *à priori*, et sans examen préalable, ni que ces propriétés subsistent, ni qu'elles cessent de subsister dans les diverses projections de la figure primitive. Or on sent toutefois l'importance qu'il y aurait à pouvoir reconnaître, à l'avance, si telle ou telle relation examinée est ou n'est pas projective de sa nature ; car il en résulterait qu'ayant démontré cette relation pour une figure particulière, on pourrait de suite l'étendre à toutes les projections possibles de cette figure. » [Poncelet 1822, p. 5]

À défaut de réussir à déterminer l'ensemble des propriétés projectives¹⁸, Poncelet tente d'en caractériser une sous-classe importante dont il montre qu'elle apparaît naturellement et qu'elle est présente dans les travaux antérieurs. Sa définition utilise un critère opératoire [*Ibid.*, sect. 1, chap. 1, art. 11] dont il ne donne pas d'interprétation géométrique¹⁹. Le savant insiste en revanche sur le fait que cette définition permet de rendre compte des propriétés liées à la dualité ou à des généralisations en géométrie sphérique²⁰ et de retrouver des théories classiques comme celle des points, des faisceaux harmoniques, ou la théorie des transversales de Carnot. Des premiers mathématiciens grecs aux derniers développements de Carnot et Brianchon, affirme-t-il, les géomètres se sont occupés de propriétés relevant de son critère. Pour finir de convaincre le lecteur de la pertinence de son approche, il se propose

18. Poncelet tient à préciser que ni la « méthode trigonométrique » ni « l'Analyse des coordonnées » ne donnent non plus des résultats satisfaisants [*Ibid.*, p. 6].

19. Si l'on considère deux droites AA' et BB' se coupant en S , un résultat classique de géométrie élémentaire permet d'affirmer que

$$\frac{\text{Surf}(SAB)}{SA \cdot SB} = \frac{\text{Surf}(SA'B')}{SA' \cdot SB'} = m.$$

Une propriété projective au sens de Poncelet est une propriété qui peut se réduire à une relation entre les facteurs m . Par exemple, si l'on considère quatre points A, B, C, D alignés et que l'on note m, m', m'', m''' les facteurs correspondant respectivement aux triangles SAC, SAD, SBC et SBD , le birapport des quatre points A, B, C, D peut s'écrire sous la forme

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{m}{m'} : \frac{m''}{m'''}$$

Cette formule exprime l'égalité entre le birapport des quatre points A, B, C, D et celui des quatre droites SA, SB, SC, SD .

20. Carnot insiste de la même manière pour montrer que les relations de sa théorie des transversales peuvent se généraliser en géométrie sphérique [Carnot 1806, p. 94].

d'exposer la théorie classique des coniques à partir de ses principes :

« Avant de terminer ce sujet, nous donnerons dès-à-présent, une idée de la facilité avec laquelle les principes qui précèdent peuvent conduire aux diverses propriétés connues des sections coniques, d'autant plus que presque toutes ces propriétés nous seront indispensables pour ce que nous aurons à dire dans les chapitres suivans. » [Poncelet 1822, p. 17]

En quelques pages virtuoses, Poncelet établit toutes les propriétés des diamètres, des centres, des axes, des directions conjuguées, sans oublier les « équations » des coniques établies par Apollonius (appelées « symptômes » de ces courbes²¹).

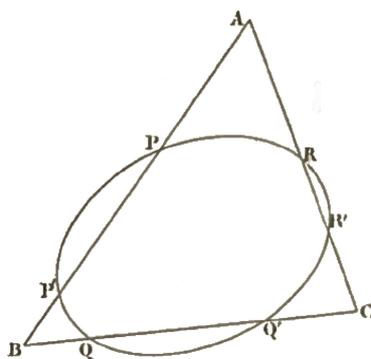


Figure 1 – [Poncelet 1822, planche I, fig. 3]

Partant de la propriété élémentaire de la puissance d'un point par rapport à un cercle, Poncelet établit par projection²² que les points P et P' , Q et Q' , R et R' en lesquels les côtés AB , BC , CA d'un triangle ABC (Figure 1) coupent respectivement une conique vérifient la relation²³

$$(1) \quad AP \cdot AP' \cdot BQ \cdot BQ' \cdot CR \cdot CR' = BP \cdot BP' \cdot CQ \cdot CQ' \cdot AR \cdot AR'.$$

21. Voir [Zeuthen 1919] et [Apollonius *Coniques*].

22. [Poncelet 1822, p. 18]. Il explique que cette propriété vérifie les critères de sa définition des propriétés projectives.

23. Dans ce qui suit, une notation telle que AB (en italique) désignera la longueur du segment AB . La notation AB (en romain) désignera soit le segment délimité par les points A et B , soit la droite définie par ces deux points, soit la direction de cette droite. Sauf exception, lorsque le contexte le permettra, l'élément désigné par AB sera toujours indiqué.

En utilisant le principe de continuité, de façon implicite, et la propriété établie antérieurement selon laquelle « deux distances ou grandeurs infinies [qui] ne diffèrent entre elles que d'une quantité finie et donnée » ont un rapport égal à 1 et peuvent donc « être regardées comme rigoureusement égales entre elles »²⁴, Poncelet envisage le cas particulier où deux côtés sont parallèles (Figure 2). Considérant le cas où le sommet A est à l'infini, il retrouve une « propriété très-anciennement connue des sections coniques » [*Ibid.*, p. 18]

$$(2) \quad \frac{BP \cdot BP'}{BQ \cdot BQ'} = \frac{CR \cdot CR'}{CQ \cdot CQ'}$$

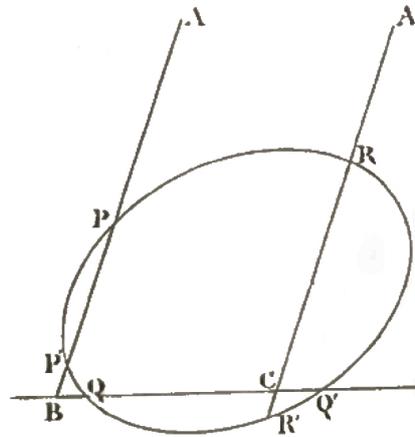


Figure 2 – [Poncelet 1822, planche I, fig. 4]

Poncelet glisse ainsi d'une propriété relevant de la théorie des transversales à une propriété de la théorie des coniques ; le vocabulaire évolue en même temps, puisque l'on passe de considérations sur les côtés d'un triangle à l'examen de propriétés des sécantes parallèles d'une conique.

Toujours grâce au recours à des considérations implicites de continuité, Poncelet traite le cas où le triangle est circonscrit à la conique (c'est-à-dire où les points P et P' , Q et Q' , R et R' sont respectivement confondus) et retombe sur une formule obtenue par Carnot

$$(3) \quad AP \cdot BQ \cdot CR = BP \cdot CQ \cdot AR.$$

24. [*Ibid.*, p. 15].

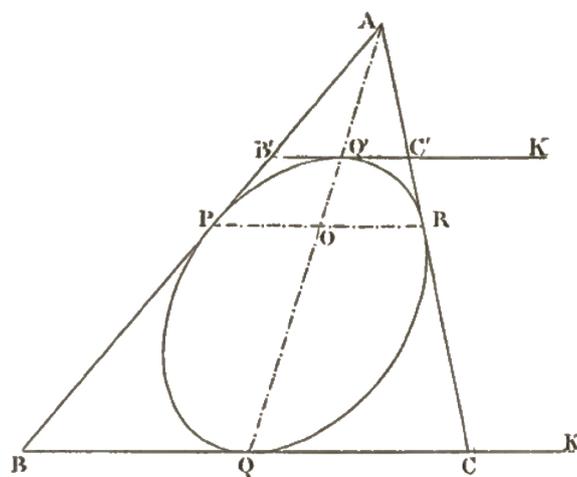


Figure 3 – [Poncelet 1822, planche I, fig. 5]

De l'étude du cas où le côté BC est parallèle à la corde PR (Figure 3), il déduit un résultat fondamental pour les théories des coniques et de la polarité : « *les cordes parallèles des sections coniques ont leurs milieux, et les points de concours des tangentes qui correspondent à leurs extrémités respectives, distribués sur une même droite appelée diamètre*²⁵ » [Ibid., p. 19].

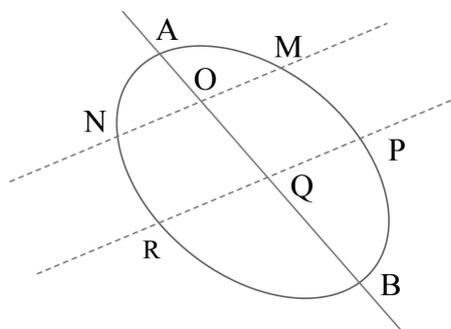


Figure 4

Soient deux cordes parallèles MN et PR d'une conique (Figure 4), leur diamètre conjugué AB passera par leurs milieux respectifs O et Q

²⁵. La direction de ce diamètre est dite conjuguée à celle des cordes parallèles. Deux diamètres ayant des directions conjuguées sont dits conjugués.

et la formule (2) devient

$$\frac{OM^2}{OA.OB} = \frac{PQ^2}{QA.QB},$$

permettant ainsi à Poncelet d'introduire le coefficient²⁶ p qui intervient dans l'« équation » des coniques :

« $OM^2 = p.OA.OB$, p étant une quantité constante qui ne varie qu'avec la direction du diamètre AB, et représente évidemment, dans le cas de l'*ellipse* et de l'*hyperbole*, le rapport inverse du carré de ce diamètre à celui qui lui est conjugué²⁷ » [*Ibid.*, p. 20].

Grâce aux propriétés projectives des figures (en particulier celles inhérentes à la définition des sections coniques) et à l'utilisation implicite du principe de continuité pour étudier des cas limites simples, Poncelet familiarise progressivement le lecteur à ses méthodes et ses outils dans le cadre d'un corpus de propositions classiques et bien connues. Il établit, dans le même temps, les propositions fondamentales nécessaires à la poursuite de son exposé.

Poncelet explique notamment que la projection d'une section conique quelconque et d'un triangle sur un plan arbitraire vérifie la formule (1) – puisque cette propriété est projective. La projection d'une conique peut ainsi être décrite par une équation du même type que celle qui décrivait la conique originelle : il s'agit donc également d'une conique²⁸. Poncelet considère alors deux coniques qui sont sections d'un cône dont la base est elle-même une conique²⁹. Ces deux coniques ont soit une sécante réelle commune, soit une sécante commune idéale³⁰, à savoir la droite d'intersection des deux plans ; si AB et A'B' sont des diamètres homologues

26. Dans la suite de l'article, bien que dépendant de la direction choisie, p sera désigné comme le coefficient de la conique.

27. Poncelet utilise de nouveau un argument de continuité pour justifier une formule analogue dans le cas de la parabole (en considérant que le centre de la courbe « passe à l'infini »).

28. Démontrer en géométrie pure qu'une section plane d'un cône dont la base est une conique est une conique forme l'un des problèmes cruciaux de la théorie des coniques.

29. [*Ibid.*, p. 37 et suiv.].

30. Poncelet introduit la notion de sécante idéale pour pouvoir décrire en une seule expression la situation où une droite coupe réellement une conique et celle où la droite ne la coupe pas. Dans ce dernier cas, les points d'intersection et la corde définie par

dans la projection induite par le cône, on obtient l'égalité

$$(4) \quad p.OA.OB = p'.OA'.OB',$$

puisque les deux coniques ont une corde (réelle ou idéale) commune.

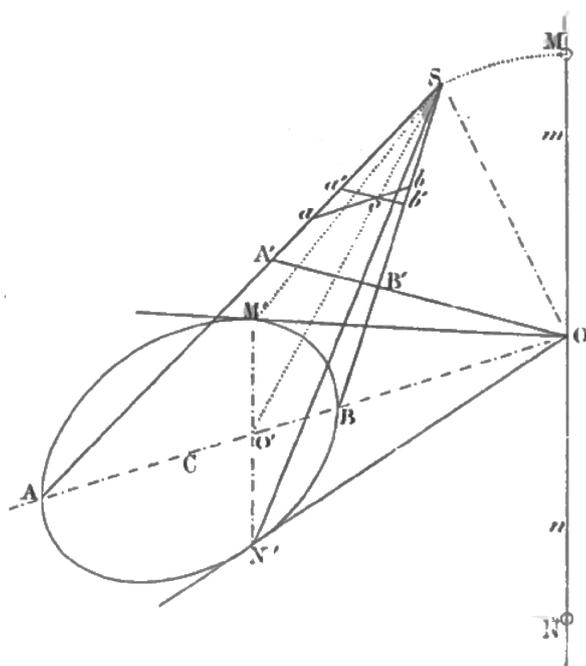


Figure 5 – mn est la sécante idéale commune aux deux coniques. Le point O est le milieu de la corde imaginaire commune aux deux coniques. AB est le diamètre de la première conique conjugué à la direction de mn, A'B' celui de la seconde conique (non dessinée) homologue à AB et conjugué à la direction de la sécante idéale mn [Poncelet 1822, planche I, fig. 9]

ces points deviennent imaginaires. Cette corde imaginaire a un point réel, son milieu O qui correspond, en vertu du principe de continuité, au point d'intersection de la sécante idéale et du diamètre conjugué à la direction de la sécante idéale. Une sécante idéale mn à une conique peut être vue comme la polaire d'un point intérieur O' à la conique. Il passe par ce point une corde dont les extrémités sont les points de contact des tangentes à la conique issue de O. Le support de cette corde est la polaire du point O et est parallèle à la sécante idéale. Les deux points M et N de la sécante idéale vérifiant la relation $OM^2 = ON^2 = p.OA.OB$ définissent la corde idéale MN portée par la sécante idéale mn (Figure 5).

Poncelet s'intéresse ensuite au cas où l'une des sections planes passe par le sommet S du cône. Il considère, pour ce faire, que le plan Smn coupe le cône le long d'une « section infiniment petite »³¹. Si MN est la corde idéale (voir note 30) portée par la sécante idéale mn, on obtient, en étendant la validité de la formule précédente à ce cas limite,

$$OM^2 = p.OA.OB = p'.OS^2,$$

où p' est le coefficient des sections coniques obtenues en intersectant le cône avec des plans parallèles à Smn. Poncelet précise que si le plan Smn est parallèle à celui d'une section circulaire du cône, alors « SO sera évidemment perpendiculaire à³² mn, et p' égal à l'unité³³, de sorte que l'on aura $OM = OS$ » [*Ibid.*, p. 39].

Poncelet utilise ici des notions mathématiques récentes (les éléments géométriques infiniment petits) dont l'introduction, qui caractérise la nouvelle géométrie infinitésimale développée en particulier par Monge à la fin du siècle précédent (application de l'analyse à la géométrie), n'a pas fait l'objet de controverse particulière. En présentant les méthodes ayant recours aux éléments infinitésimaux comme une application particulière du principe de continuité, et en les utilisant sans précaution particulière dans son exposé des principes élémentaires de la théorie des coniques, le mathématicien accoutume le lecteur familiarisé aux méthodes de la géométrie pure à l'utilisation de nouveaux outils décalés par rapport à cette tradition³⁴.

III. L'établissement de principes de projection

Poncelet se trouve alors en mesure d'établir un nouveau type d'énoncés, à savoir une série de principes de projection qui affirment qu'une configuration est réductible à une autre par projection. La démonstration du premier principe, selon lequel « *une figure plane quelconque, où*

31. [*Ibid.*, p. 39].

32. SO joint le centre d'un cercle et le milieu d'une corde. On peut ajouter que les deux directions sont conjuguées par rapport au cercle infinitésimal. Poncelet utilise ici implicitement le principe de continuité.

33. Le coefficient d'un cercle est égal à 1.

34. Brianchon utilise à plusieurs reprises (sans l'expliciter) une propriété de continuité en géométrie pour justifier l'extension à un cas limite de théorèmes montrés dans le cas général : voir, par exemple, [Brianchon 1806, prop. VII; 1817, prop. XV].

entre une certaine droite et une section conique, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la droite est passée entièrement à l'infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle »³⁵, est l'occasion de mettre en œuvre les premiers éléments de la théorie des coniques qu'il vient d'exposer et d'approfondir la discussion autour du principe de continuité. Énoncée sous cette forme générale, cette propriété ne se prête guère à une démonstration ; aussi, Poncelet la reformule sous la forme d'un problème assorti d'une figure :

« Étant données une section conique (C), fig. 9³⁶, et une droite MN située, à volonté, sur son plan, trouver un centre et un plan de projection tels, que la droite donnée MN soit projetée à l'infini sur ce plan, et que la section conique y soit en même temps représentée par un cercle. » [Poncelet 1822, p. 54]

Les conditions du problème imposent que le plan défini par S , le centre de projection recherché, et la droite MN soit parallèle au plan de projection – puisqu'il est demandé que la droite MN soit projetée à l'infini. Pour la même raison, la droite MN ne doit pas intersecter la conique, autrement dit, en utilisant les dénominations de Poncelet, être une « sécante idéale de cette courbe ». Par définition des cordes idéales et des coniques supplémentaires, si on appelle AB le diamètre conjugué à la direction MN et MN la corde idéale de (C) portée par la droite MN , le point d'intersection O de la droite AB et de la droite MN est aussi le milieu de la corde idéale MN . Notant p le coefficient de la conique (C), on a

$$OM^2 = p.OA.OB.$$

Lorsque l'on coupe un cône par deux plans passant par la droite MN , la corde (idéale ou réelle) MN est commune aux deux coniques ainsi définies et l'on obtient

$$OM^2 = p.OA.OB = p'.OA'.OB',$$

c'est-à-dire la formule (4), où p' est le coefficient de la seconde conique et $A'B'$ le diamètre conjugué à la direction MN . À la limite, si un des plans sécants passe par S , on a, par continuité, comme on l'a vu plus haut,

$$OM^2 = p.OA.OB = p'.OS^2.$$

35. [Poncelet 1822, p. 54].

36. Il s'agit de la figure 5 dans notre texte, déjà utilisée par Poncelet pour étendre infinitésimalement un résultat classique de théorie des coniques.

Le plan SMN étant parallèle à un plan qui intersecte le cône le long d'un cercle (le plan de projection), il vient $OM = OS$ et MOS est un angle droit puisque les directions OS et MN sont conjuguées par rapport au cercle infinitésimal situé en S . La démonstration donnée peut sembler rapide ; pour autant, Poncelet avait déjà distillé l'ensemble des arguments nécessaires tout au long de sa présentation des éléments de la théorie des coniques. Le résultat est d'abord énoncé sous la forme d'un théorème ne concernant que la configuration dans laquelle la droite MN ne rencontre pas la conique :

« Le centre auxiliaire de projection doit se trouver sur une circonférence de cercle, décrite du milieu de la corde idéale qui répond à la droite donnée, comme centre, avec un rayon égal à la moitié de cette corde, et dans un plan qui lui soit perpendiculaire. » [Poncelet 1822, p. 55]

Il y a loin de l'énoncé de ce théorème à celui du principe général de projection annoncé dans la mesure où la corde doit être idéale et où le principe n'est pas démontré rigoureusement dans les cas où la droite coupe (réellement) la conique. Après avoir suggéré un certain nombre de pistes permettant de traiter les cas où le principe cesse d'être vrai « d'une manière absolue et géométrique »³⁷, Poncelet affirme sans ambages que les projections qu'il envisage sont « possibles et réelles » dans certains cas, et deviennent « impossibles ou imaginaires » dans d'autres situations. « Ainsi », écrit-il, « les propriétés examinées ne seront démontrées, d'une manière rigoureuse et absolue, que pour les premières de ces positions, et elles cesseront de l'être pour les autres. » [*Ibid.*, p. 67]. Néanmoins, quoique certains éléments géométriques sont devenus imaginaires, les figures restent liées entre elles puisque l'« on peut regarder, à volonté, les unes comme provenant des autres par le mouvement progressif et continu de certaines parties de cette figure, sans violer la liaison et les lois primitivement établies entre elles » [*Ibid.*]. Moyennant quelques modifications formelles dans les figures, les propriétés de l'une s'appliquent donc à l'autre dans des cas « qu'il est toujours facile de reconnaître à l'avance, à la simple inspection de la figure » [*Ibid.*]. Ici réside l'essence du principe de continuité dont Poncelet rappelle qu'il a déjà été mis en application dans le cours de cette première section de son *Traité*, « dans des circonstances où son application devenait conforme aux idées

37. [*Ibid.*, p. 67].

reçues » [*Ibid.*]. Poncelet ne revendique que l'acceptation explicite du principe de continuité en géométrie pure. L'essentiel de son argumentation consiste, comme on va le voir, à expliquer que ce principe est déjà implicitement utilisé par nombre de mathématiciens du XVIII^e siècle en algèbre, en géométrie analytique et *a fortiori* en géométrie infinitésimale. Son application constitue d'après lui l'une des clés du succès des nouvelles mathématiques pratiquées au siècle dernier.

IV. La justification du principe de continuité

Poncelet évoque dès 1815 le principe de continuité dans un commentaire à la suite de l'exposé d'une démonstration de Maclaurin. Il est alors présenté comme un principe intuitif, facilitant les démonstrations de la théorie générale des transversales [Poncelet 1815a, p. 148]. La même année, Poncelet consacre un essai à la loi des signes de position [1815b] dans lequel il discute les arguments avancés sur cette question par Carnot dans sa *Géométrie de position* [Carnot 1803]. L'« hypothèse de la continuité » y est admise « sans la discuter, ni l'approfondir à l'avance », de la même manière que les règles du calcul algébrique, « fondées sur le rapprochement, l'analogie logique des idées ou des résultats antérieurement acquis »³⁸. Un paragraphe consacré à des « réflexions générales sur le principe de continuité »³⁹ justifie la généralisation à tous les spectres de figures corrélatives d'une « permanence ou *continuité* des relations métriques » constatée sur des situations simples. L'usage du terme de continuité provient de la définition de la notion de corrélation, reprise de Carnot, comme déplacement continu des éléments d'une figure dite « primitive ». Le principe de continuité, tel que Poncelet l'entend dans ce texte, apparaît comme une généralisation aux éléments d'une figure de la loi de continuité notamment invoquée par Lacroix [1803, p. 19], Monge [1807, p. 6-7, 11] ou Dupin [1813, p. 171, 179], auteurs chez lesquels cette loi ne concerne que la continuité des quantités décrites par des formules algébriques associées à une courbe envisagée comme le mouvement continu d'un point.

Dans ce même mémoire de 1815, Poncelet cherche, à partir de la loi des signes de position, et moyennant quelques changements de signe, à

38. [Poncelet 1815b, p. 168].

39. [*Ibid.*, p. 203].

étendre la signification de la loi de continuité à l'admission d'une stabilité de la forme algébrique des formules décrivant les propriétés d'un spectre de figures corrélatives⁴⁰ :

« Quand une fois on a trouvé toutes les solutions algébriques d'un problème de Géométrie pour la position actuelle des données, on étend sans peine ces solutions à toutes les situations possibles des mêmes données, en ayant égard à la continuité et à la règle des signes [...] » [Poncelet 1815b, p. 233-234]

L'argumentation de Poncelet consiste dès lors à montrer qu'une application imprudente de l'algèbre à des questions de géométrie peut introduire des solutions « étrangères à la question » proposée, et que la mise en équation d'un problème de géométrie « suppose, de la part du géomètre, une grande habitude du calcul et du raisonnement géométrique » [*Ibid.*, p. 292]. S'il se montre critique vis-à-vis de la géométrie « des anciens », dont il doute qu'« avec le secours seul de cette géométrie, on puisse jamais parvenir à quelque chose de bien général » [1817, p. 142], Poncelet refuse néanmoins d'admettre que le point de vue analytique en géométrie soit toujours supérieur à celui de la géométrie rationnelle⁴¹. Il défend l'idée d'une modernité en géométrie pure incarnée par la géométrie infinitésimale ou la stéréométrie, et plaide, à l'instar de Dupin⁴², pour une cohabitation raisonnée des deux approches :

« En considérant ainsi l'analyse et la géométrie dans leurs rapports, ces deux sciences s'éclaireront mutuellement, et chacune d'elles s'accroîtra de tous les progrès de l'autre. [...] Ne rejetons donc aucun de ces moyens pour procéder à la recherche de la vérité; jugeons-les utiles l'un et l'autre, et cherchons dans chaque cas le plus avantageux ». [Dupin 1813, p. 238]

Dès 1818, le projet, poursuivi dans le *Traité*, de généraliser le langage et les conceptions de la géométrie⁴³ est certainement mieux cerné et prend de l'ampleur. Au cours de l'hiver 1818-1819, Poncelet termine la rédaction d'un essai consacré à la justification de l'adoption en géométrie pure d'un principe de continuité [1818]. En 1820, il dépose à l'Académie

40. [Poncelet 1815b, p. 277-278].

41. Poncelet désigne sous l'expression « géométrie rationnelle » la géométrie qui refuse l'usage des coordonnées et du calcul algébrique.

42. Poncelet réfère à ce passage dans son article de « philosophie mathématique » publié dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* [Poncelet 1817, p. 143].

43. [Poncelet 1820, p. 366].

des sciences un mémoire consacré à l'étude des propriétés projectives des coniques [Poncelet 1820]. Malgré l'accueil mitigé de l'Académie, ce dernier servira de première version du *Traité*. Le principe de continuité dont Poncelet fait abondamment usage dans le mémoire déposé ne trouve notamment aucune grâce auprès d'Augustin-Louis Cauchy, qui n'y voit au mieux qu'« *une forte induction, à l'aide de laquelle on étend des théorèmes établis, d'abord à la faveur de certaines restrictions, aux cas où ces mêmes restrictions n'existent plus* » [Cauchy 1820, p. 73]⁴⁴. Si Cauchy reconnaît qu'appliqué aux courbes du second degré, ce principe ne conduit pas à des erreurs, il souligne (avec raison) que sa généralisation à des questions de degré supérieur, ou à d'autres domaines des mathématiques, pourrait faire « tomber quelque fois dans des erreurs manifestes ».

À partir de 1818, Poncelet voit donc dans l'adoption du principe de continuité la possibilité d'étudier dans un cadre général les propriétés descriptives et métriques d'ensembles de figures corrélatives, non seulement lorsque l'ordonnancement de leurs parties se trouve modifié, mais aussi lorsque des éléments partent à l'infini ou deviennent imaginaires. Comme on l'a vu au § 1, Poncelet pense que la faculté de la géométrie analytique à s'attaquer à des problèmes généraux tient moins aux algorithmes algébriques qu'à la capacité de traiter des problèmes indéterminés grâce à la traduction algébrique des hypothèses du problème par des équations. Le mathématicien, dont l'argument central dans son essai sur le principe de continuité [Poncelet 1818] est de montrer qu'il est admis en géométrie analytique, distingue deux moments dans l'histoire de l'application de l'algèbre à la géométrie. Une première période, à laquelle il associe le nom de Viète, correspond aux débuts de l'utilisation de procédures algébriques en géométrie, conduisant à une géométrie, désignée « sous le nom d'*Analyse déterminée* », qui ne fait alors que compléter les résultats obtenus en géométrie pure en permettant d'interpréter numéri-

44. On peut remarquer que Cauchy, au nom de la rigueur, utilise le même vocabulaire pour refuser le principe de continuité de Poncelet en géométrie que dans sa critique de l'usage en analyse de « raisons tirées de la généralité de l'algèbre ». « Les raisons de cette espèce », écrit-il dans l'introduction de son cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, « quoique assez communément admises, sur-tout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux quantités imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. » [Cauchy 1821, p. ii-iii]

quement « les résultats sur la figure » [*Ibid.*, p. 299]. La seconde période est celle où les techniques de mise en équation des problèmes se mettent en place et se développent :

« Mais la Géométrie analytique a reçu, dès le temps de Descartes, une extension beaucoup plus grande sous le nom d'*Analyse indéterminée* ; par elle on est parvenu, non-seulement à soumettre les rapports métriques au calcul, mais encore à peindre les formes et la disposition même des objets de la Géométrie : c'est cette analyse, qu'on nomme aussi *méthode des coordonnées*, qu'ont cultivée avec tant de succès les Euler, les Monge, les Lagrange, etc. ; ses avantages sur la première sont aujourd'hui bien connus, et ne forment le sujet d'aucun doute. » [*Ibid.*, p. 299-300]

En faisant ce rappel historique⁴⁵, Poncelet poursuit deux objectifs. Le premier vise à écarter toutes les discussions autour de l'application de l'algèbre à la géométrie (introduction de nouvelles solutions, oubli de solutions, problèmes pour affecter un signe à une quantité, etc.) en les renvoyant à des questions déterminées : en d'autres termes, la supériorité de la géométrie analytique sur la géométrie des Anciens ne doit pas être entachée du moindre doute. Le second objectif consiste à montrer que l'algèbre n'a véritablement révélé son potentiel qu'à partir du moment où elle a été mise au service de la mise en équation des problèmes. D'ailleurs, la procédure de mise en équation des problèmes géométriques n'est pas justifiée géométriquement et nécessite déjà d'admettre le « *principe de la continuité ou permanence des relations mathématiques de la grandeur figurée* »⁴⁶ :

« Or, ne l'oublions pas, [raisonner sur des équations en faisant abstraction des figures] ce n'est point là une conséquence rigoureuse de vérités géométriques antérieurement établies, mais bien un simple rapprochement, une vérification à posteriori, de laquelle on ne pourrait déduire aucune conséquence nouvelle, indiscutable et applicable à tous les cas possibles ; à moins d'admettre qu'il soit permis de conclure du particulier au général par voie d'analogie, ou d'adopter ouvertement le principe de continuité [...]. » [Poncelet 1815b, p. 253]

Même la fécondité des méthodes de la *Géométrie descriptive* de Monge

45. Poncelet reprend ici le point de vue partagé par les autres mathématiciens de l'époque sur l'histoire de l'application de l'algèbre à la géométrie. Voir par exemple la préface de [Lacroix 1803].

46. [Poncelet 1818, p. 319].

est présentée comme redevable de l'adoption du principe de continuité en géométrie analytique ; car c'est bien en s'appuyant tacitement, selon Poncelet, sur la capacité de l'analyse à appliquer une relation démontrée sur une figure à toutes situations possibles, que Monge justifie l'extension de certains énoncés⁴⁷.

Poncelet associe l'admission d'un principe de continuité à la possibilité de raisonner de manière indéterminée, c'est-à-dire en faisant abstraction d'une figure ou d'un système particulier. S'ouvre ainsi la possibilité d'envisager des « formes extraordinaires », des « êtres de raison » comme les éléments à l'infini, les éléments imaginaires ou les éléments infinitésimaux⁴⁸ et de raisonner « d'une manière purement *implicite* ». Lagrange qui définit l'objet de l'algèbre comme l'étude d'un « système d'opérations »⁴⁹, les Anciens qui en pratiquant l'« analyse » admettaient « dans le discours et la conception, des grandeurs indéterminées ou implicites »⁵⁰, Carnot et son principe de la corrélation des figures, « le *Calcul*

47. [Poncelet 1818, p. 312-313]. Poncelet appuie son argument sur les développements de Monge concernant les plans tangents aux surfaces passant par des points donnés [Monge 1799, p. 44-50]. Il dépasse cependant certainement quelque peu les intentions de Monge qui, même s'il revendique pour la géométrie descriptive « des méthodes générales pour construire tout ce qui résulte de la forme et de la position respective des corps » [*Ibid.*, p. 16] défend plutôt l'idée de tirer partie des avantages de chaque approche plutôt que celle consistant à leur chercher des principes communs : « Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la géométrie descriptive à l'algèbre ; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en analyse ; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en géométrie.

Il serait à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble : la géométrie descriptive porteroit dans les opérations analytiques les plus compliquées, l'évidence qui est son caractère ; et, à son tour, l'analyse porteroit dans la géométrie la généralité qui lui est propre. » [*Ibid.*].

48. Poncelet signale que l'adoption des éléments infiniment petits par Monge et ses disciples entre autres est aussi justifiée par l'adoption d'un principe de continuité : « En effet, dans ces recherches [basées sur la considération des *infiniment petits* et des *infiniment grands*], on commence toujours par rapporter le système à un autre qu'on suppose lui être corrélatif, et dans lequel toutes les quantités sont d'une grandeur absolue et finie ; on examine alors les propriétés soit métriques, soit descriptives de ce dernier système, et l'on en étend immédiatement la signification à la limite, c'est-à-dire au système particulier qu'il s'agissait d'examiner [...] » [*Ibid.*, p. 313-314].

49. [Lagrange 1808, p. vi].

50. [Poncelet 1818, p. 333-334].

infinitésimal, la *Théorie des limites*, la *Théorie générale des équations*, et tous les écrits de nos jours, où l'on s'attache à une certaine généralité dans les conceptions »⁵¹ sont tous appelés comme « témoins » en faveur de l'admission d'un principe de continuité. En convoquant ainsi la plupart des théories qui constituent le corps des mathématiques du début du XIX^e siècle, Poncelet ne défend pas seulement l'idée que ces théories à forte valeur symbolique à l'époque dans le champ mathématique ont dû admettre un principe de continuité pour mettre en place leurs méthodes respectives de raisonnement implicite. Il cherche également à montrer que l'adoption d'un tel principe en géométrie pure n'est pas plus illicite que dans d'autres théories où son utilisation a précédé les « considérations métaphysiques des quantités négatives, infinies, imaginaires » [Poncelet 1818, p. 332]. L'admission d'un principe de continuité a signé pour ces théories l'entrée dans une nouvelle ère en autorisant le raisonnement « purement *implicite* »⁵² sur des grandeurs indéterminées, et il n'y a donc aucune raison de ne pas en faire autant en géométrie. Poncelet prétend même être plus prudent que ses prédécesseurs en rappelant de manière récurrente que le principe de continuité qu'il propose d'admettre en géométrie pure « ne [se] prononce nullement sur la nature et l'existence absolue des objets ou des grandeurs que ces relations concernent » [*Ibid.*, p. 338].

Conclusion

Poncelet situe son programme de recherche en « géométrie rationnelle » par rapport à trois traditions de travaux mathématiques des siècles passés. Le domaine mathématique qu'il investit, la géométrie pure, l'amène d'abord à s'appuyer sur la tradition euclidienne et sur les travaux plus récents en théorie des coniques de la tradition newtonienne (Newton, Cotes, Maclaurin...). S'il critique les méthodes qu'il attribue à la géométrie pure « des Anciens », il n'écarte pas pour autant cette tradition, d'une part parce qu'elle garantit la rigueur des démonstrations (une généralisation qui utilise le principe de continuité s'appuie en dernière instance sur une démonstration établie dans le cadre de la géométrie pure) et, d'autre part, parce que le corpus des théorèmes de cette géomé-

51. [Poncelet 1822, p. xxiii].

52. [Poncelet 1818, p. 330].

trie constitue le terrain d'expérience des nouvelles méthodes. Le projet de Poncelet se veut aussi une synthèse des travaux et des méthodes développées depuis le XVIII^e siècle, qu'il s'agisse de l'utilisation d'éléments imaginaires, infinitésimaux, de la théorie des transversales, de la géométrie dans l'espace et de la théorie des projections, ou encore de la théorie des pôles et polaires. Il reprend donc aussi cet ensemble de travaux récents pour montrer que ses méthodes permettent, entre autres, de réunir les résultats obtenus en géométrie par Carnot, par Monge et son école, ou par Brianchon. En même temps, les références à ces travaux sont souvent autant d'exemples d'utilisation du principe de continuité et donc autant d'arguments pour justifier l'introduction d'un tel principe en géométrie. Enfin, s'il analyse longuement les avantages de la géométrie analytique, Poncelet ne cite toutefois que très peu de mathématiciens pratiquant ce type de géométrie. En vantant cette géométrie et ses méthodes, Poncelet met en place son principal argument pour défendre l'intérêt des propriétés projectives et l'utilisation du principe de continuité en géométrie rationnelle : la géométrie des coordonnées utilise déjà un principe de continuité en considérant que la forme des formules algébriques utilisées pour décrire une situation géométrique reste inchangée par projection.

Les travaux préparatoires et le *Traité* lui-même font appel à de nombreux travaux antérieurs. Ces références permettent au lecteur de cerner le cadre mathématique revendiqué par Poncelet, tout en se familiarisant avec de nouvelles méthodes. S'il plaide pour adopter de nouveaux points de vue en géométrie pure, Poncelet ne remet en cause ni le modèle de la géométrie, ni celui plus général des mathématiques, hérités de ses prédécesseurs. Bien au contraire, il considère que son programme de recherche contribue à inscrire la géométrie pure dans une modernité mathématique apparue au cours du XVIII^e et au début du XIX^e siècle.

BIBLIOGRAPHIE

- [Apollonius Coniques] Apollonius de Perge, *Coniques*, t. 1, R. Rashed, M. Decorps-Foulquier, M. Federspiel (éd.), Berlin : Walter de Gruyter, 2008.
- [Belhoste 1998] Bruno Belhoste, « De l'École polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet », *Bulletin de la SABIX*, 19 (1998), p. 9-29.
- [Bioesmat-Martagon 2010] Lise Bioesmat-Martagon, *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*, Nancy : Presses universitaires de Nancy, 2010.

- [Bioesmat-Martagon à paraître] L. Bioesmat-Martagon, *Éléments de biographie des espaces géométriques*, Nancy : Presses universitaires de Nancy – Éditions universitaires de Lorraine, à paraître.
- [Brianchon 1806] Charles-Julien Brianchon, « Sur les surfaces courbes du second degré », *Journal de l'École polytechnique*, t. VI, 13^e cahier (1806), p. 297-311.
- [Brianchon 1810] C.-J. Brianchon, « Solution de plusieurs problèmes de géométrie », *Journal de l'École polytechnique*, t. IV, 10^e cahier (1810), p. 1-15.
- [Brianchon 1817] C.-J. Brianchon, *Mémoire sur les lignes du second ordre*, Paris : Bachelier, 1817.
- [Carnot 1801] Lazare Carnot, *De la corrélation des figures de géométrie*, Paris : J. B. M. Duprat, 1801.
- [Carnot 1803] L. Carnot, *Géométrie de position*, Paris : J. B. M. Duprat, 1803.
- [Carnot 1806] L. Carnot, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace ; suivi d'un Essai sur la théorie des transversales*, Paris : Courcier, 1806.
- [Cauchy 1820] « Géométrie des courbes. Rapport à l'académie royale des sciences sur un mémoire relatif aux propriétés projectives des sections coniques par M. Poncelet, capitaine du génie », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 11 (1820-1821), p. 69-83.
- [Cauchy 1821], *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. I^{re} Partie, Analyse algébrique*, Paris : Imprimerie royale, 1821.
- [Dupin 1813] Charles Dupin, *Développements de géométrie avec des Applications à la stabilité des Vaisseaux, aux Déblais et Remblais, au Défilement, à l'Optique, etc. pour faire suite à la géométrie descriptive et à la géométrie analytique de M. Monge*, Paris : V^{ve} Courcier, 1813.
- [Flament & Nabonnand 2011] Dominique Flament et Philippe Nabonnand, *Justifier en mathématiques*, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 2011.
- [Friedelmeyer 2010] Jean-Pierre Friedelmeyer, « L'impulsion originelle de Poncelet dans l'invention de la géométrie projective », dans [Bioesmat-Martagon 2010], p. 55-158.
- [Gray 2007] Jeremy J. Gray, *Worlds Out of Nothing*, London : Springer, 2007.
- [Lacroix 1803] Sylvestre-François Lacroix, *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*, 3^e éd., Paris : Courcier, 1803.
- [Lagrange 1808] Joseph-Louis Lagrange, *Traité de la résolution des équations de tous les degrés*, Paris : Courcier, 1808.
- [Monge 1799] Gaspard Monge, *Géométrie descriptive*, Paris : Baudouin, an VII.
- [Monge 1807] G. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie, à l'usage de l'École impériale polytechnique*, Paris : Bernard, 1807.
- [Nabonnand 2010] Philippe Nabonnand, « Deux droites coplanaires sont sécantes », dans [Bioesmat-Martagon 2010], p. 159-195.
- [Nabonnand 2011] P. Nabonnand, « L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles », dans [Flament & Nabonnand 2011], p. 17-45.

- [Nabonnand à paraître] P. Nabonnand, « Utiliser des éléments imaginaires en géométrie : Carnot, Poncelet, von Staudt et Chasles », dans [Bioesmat-Martagon à paraître].
- [Poncelet 1815a] Jean-Victor Poncelet, « Méthode des transversales appliquée à la recherche et à la démonstration des propriétés des lignes et surfaces géométriques », dans [Poncelet 1864], p. 67-166.
- [Poncelet 1815b] J.-V. Poncelet, « Sur la loi des signes de position en géométrie, la loi et le principe de continuité », dans [Poncelet 1864], p. 167-295.
- [Poncelet 1817] J.-V. Poncelet, « Philosophie mathématique. Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie ; suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 8 (1817-1818), p. 141-155.
- [Poncelet 1818] J.-V. Poncelet, « Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques », dans [Poncelet 1864], p. 296-364.
- [Poncelet 1820] J.-V. Poncelet, « Essai sur les propriétés projectives des sections coniques », dans [Poncelet 1864], p. 365-454.
- [Poncelet 1822] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.
- [Poncelet 1864] J.-V. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864.
- [Poncelet 1865-66] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, 2^e éd., Paris : Gauthiers-Villars, t. 1, 1865 ; t. 2, 1866.
- [Verdier 2009] Norbert Verdier, « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIX^e siècle en Europe », *Philosophia Scientiae*, 13 (2009), p. 97-126.
- [Zeuthen 1919] Hieronymus Georg Zeuthen, *Sur l'origine de l'algèbre*, Copenhague : Bianco Lunos Bogtrykkeri, 1919.