

حول احتمال الانقراض في بيئة دورية

J. Math. Biol. 68 (2014) 533-548

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
nicolas.bacaer@ird.fr

El Hadi Ait Dads

جامعة القاضي عياض ، قسم الرياضيات ، مراكش ، المغرب

ملخص

بالنسبة للعمليات المتفرعة بعدة أنواع في بيئة دورية ، نوضح أن احتمال الانقراض يساوي 1 إذا فقط إذا كانت التكاثر أقل من أو تساوي 1. يستخدم العرض التوضيحي نتائج على السلوك المقارب للأنظمة التعاونية المعادلات التفاضلية. في علم الأوبئة ، يمكن استخدام احتمال الانقراض كمقياس دوري لمخاطر الوباء. كمثال ، ندرس نموذجًا خطيًا لوباء SEIR وبيانات عن وباء الحصبة في فرنسا. كما تتم مناقشة نماذج الوقت السرية مع التطبيقات المحتملة في بيولوجيا الحفظ.

1 المقدمة

درس كيندال (1948) عمليات الولادة والموت من نوع واحد في بيئة متغيرة. نحدد

- $a(t)$: الخصوبة
- $b(t)$: الوفيات في الوقت t .

بدءا من فرد في ذلك الوقت t_0 ، احتمال الانقراض

$$\omega = 1 - \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(s) \exp\left[\int_{t_0}^s (b(u) - a(u)) du\right] ds}, \quad (1)$$

ما إذا كان التكامل في المقام محدودًا أو لا نهائيًا. في الحالة $a(t+T) = a(t)$ و $b(t+T) = b(t)$ ، $\omega = 1$ إذا فقط إذا

$$\int_0^T a(t) dt \leq \int_0^T b(t) dt.$$

بعبارة أخرى، $\omega < 1$ و ω هي دالة دورية لـ t_0 (بول ، 1983 ، ص 235). توقع حجم السكان هو الحل

$$\frac{dI}{dt} = (a(t) - b(t)) I(t).$$

إن عمليات الولادة والوفاة لعدة أنواع في بيئة ثابتة معروفة جيدًا (Athreya and Ney، 1972 ، الفصل الخامس). بالنسبة للبيئات الدورية ، درس كلاين وماكدونالد (1980) توقع وتباين مجموعات سكانية من أنواع مختلفة ولكن ليس احتمال الانقراض. انظر أيضًا (Parham and Michael، 2011). نظام معادلات التوقعات من الشكل

$$\frac{dI}{dt} = (A(t) - B(t)) I(t),$$

- المتجه $I(t)$ هو ناقل التوقعات لأنواع مختلفة
- $A(t)$ هي مصفوفة خصوبة ذات معاملات موجبة أو صفرية
- $-B(t)$ هي مصفوفة تعاونية تحتوي على النفوق ومعدلات التحويل بين الأنواع المختلفة.

درس (Nerman و Jagers 1985) العمليات المتفرعة للوقت المتواصل في بيئة دورية مع وفيات وخصوبة تعتمد على العمر ، ولكن لنوع واحد فقط. تم صياغة العتبة من حيث المعلمة Malthusian.

بعد كتاب أندرسون ومايو (1991) ، يستخدم العديد من المصممين قابلية إعادة الإنتاج لوصف عتبة النماذج السكانية وخاصة النماذج الوبائية. قام باكير وجيرناوي (2006 ، القسم 5) بتعديل تعريف قابلية التكاثر على أنه نصف القطر الطيفي لمشغل الجيل التالي من (Diekmann and Heesterbeek 2000) مع حالة النماذج الدورية. كما أظهروا ذلك

$$R_0 = \frac{\int_0^T a(t) dt}{\int_0^T b(t) dt}$$

لنماذج من نوع واحد على النحو الوارد أعلاه. وهكذا أعاد باكير (2007 ، الفقرة 5.2) إعادة صياغة خاصية العتبة للعمليات الخطية للولادة والموت إلى نوع واحد في بيئة دورية على النحو التالي: $\omega = 1$ إذا $R_0 \leq 1$ ، في حين $\omega < 1$ إذا $R_0 > 1$.

بالنسبة للسكان مع عدة أنواع درسها كلاين وماكدونالد (1980) ، R_0 يمكن تعريفه على أنه نصف القطر الطيفي للمشغل المتكامل

$$u(t) \mapsto A(t) \int_0^\infty C(t, t-x) u(t-x) dx$$

على مساحة من الوظائف المستمرة الدورية لفترة T . هنا

$$C(t, t-x) = Z(t)Z(t-x)^{-1}, \quad \frac{dZ}{dt} = -B(t)Z(t), \quad Z(0) = \mathbb{I}$$

(مصروفة الهويية). لخص آلن ولاهودني (2012) مؤخرًا الروابط بين التكاثر واحتمال الانقراض لعمليات الولادة والوفاة من عدة أنواع ولكن في بيئة ثابتة.

في هذه المقالة ، نعتبر نفس فئة عملية التفرع إلى عدة أنواع في بيئة دورية مثل كلاين وماكدونالد (1980). نبين أن احتمال الانقراض ω يساوي 1 إذا فقط إذا $R_0 \leq 1$. هذا يمتد النتائج المتعلقة السكان مع نوع واحد في بيئة دورية وتلك المتعلقة السكان مع عدة أنواع في بيئة ثابتة. في دليل القسم 2 ، نرى أن نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية التي تعطي احتمال الانقراض يرتبط ارتباطاً وثيقاً بالنظام الخطي أعلاه لمتجه التوقعات. ثم يستخدم الدليل نتائج تتعلق بالسلوك المقارب للأنظمة التعاونية للمعادلات التفاضلية. كمثال ، نعتبر في القسم 3.1 نموذج وباء SEIR وخطته. يتم احتساب احتمال الانقراض باستخدام بيانات من وباء الحصبة في فرنسا. يناقش القسم 3.2 حالة النماذج الزمنية المنفصلة ، التي تستخدم في بيولوجيا الحفظ لتقدير احتمالية انقراض الأنواع المعاد إدخالها. يقترح القسم 4 استخدام احتمال عدم الانقراض 1 - كمقياس دوري لمخاطر الوباء بالإضافة إلى التقنيات الأخرى التي تم اقتراحها في السنوات الأخيرة.

2. احتمال الانقراض

فكر أولاً في نموذج السكان الخطي القطعي

$$\frac{dI}{dt} = (A(t) - B(t))I(t), \quad (2)$$

- $I = (I_1, \dots, I_m)$
- $A(t) = (A_{kl}(t))$ ، $A_{kl}(t) \geq 0$ ، $A(t)I(t)$ هو عدد الأفراد الجدد الذين يتم إنتاجهم لكل وحدة زمنية ،
- $B(t) = (B_{kl}(t))$ مع

$$B_{kl}(t) = -b_{kl}(t) \quad \forall k \neq \ell, \quad B_{\ell\ell}(t) = b_{\ell\ell}(t) + \sum_{k \neq \ell} b_{k\ell}(t).$$

يمكن أن يكون النظام (2) هو الخطية بالقرب من الحل الخالي من المرض لنموذج الوباء غير الخطي. المتجه $I(t)$ يمثل السكان في الأقسام المصابة المختلفة. المعاملات $b_{\ell\ell}(t)$ هي معدلات خروج. $b_{k\ell}(t)$ هو معدل التحويل بين المقصورات ($k \neq \ell$). نحن نفترض ذلك

$$b_{k\ell}(t) \geq 0, \quad \forall k \quad \forall \ell.$$

$-B(t)$ هي مصفوفة تعاونية: معاملات خارج القطر إيجابية أو صفرية. ومن المفترض

- (H1): معامل واحد على الأقل من المصفوفة $A(t)$ هو إيجابي للغاية لجميع t
- (H2): $M(t) = A(t) - B(t)$ غير قابل للاختزال لجميع t

- (H3): المصفوفات $A(t)$ و $B(t)$ هي وظائف متواصلة متقطعة ، $B(t+T) = B(t)$ ، $A(t+T) = A(t)$ ،
- (H4): $\exists \beta > 0, \forall \ell, \forall t, b_{\ell\ell}(t) \geq \beta$.

تشير الفرضية (H4) إلى أن المضاعف المهيمن لـ Floquet للنظام

$$\frac{dZ}{dt} = -B(t)Z(t), \quad Z(0) = \mathbb{I},$$

أي نصف القطر الطيفي للمصفوفة بمعامل موجبة أو صفرية $Z(T)$ ، أقل من أو يساوي $\exp(-\beta T) < 1$. انظر على سبيل المثال Lemma 1.1 of (Inaba, 1988). يموت السكان إذا $A(t) = 0$ للجميع t . يمكن إضعاف الفرضية (H4) ولكن من الواقعي بيولوجيًا أن يكون هناك وفيات غير صفرية في كل حجرة.

الآن فكر في عملية الولادة والوفاة المتعددة الأنواع المرتبطة بـ (2). $p(t, i_1, \dots, i_m)$ هو احتمال وجودها i_k الناس في المقصورة I_k في الوقت t : $1 \leq k \leq m$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(t, i_1, \dots, i_m) = & \sum_k \left[A_{kk}(i_k - 1) + \sum_{\ell \neq k} A_{k\ell} i_\ell \right] p(t, i_1, \dots, i_k - 1, \dots, i_m) \\ & + \sum_{k \neq \ell} b_{k\ell} (i_\ell + 1) p(t, i_1, \dots, i_k - 1, \dots, i_\ell + 1, \dots, i_m) \\ & + \sum_k b_{k,k} (i_k + 1) p(t, i_1, \dots, i_k + 1, \dots, i_m) \\ & - \sum_{k,\ell} (A_{k\ell} + b_{k\ell}) i_\ell p(t, i_1, \dots, i_m), \end{aligned}$$

حيث تم حذف اعتماد الوقت على المعاملات. يتتبع هذا النظام ما يحدث لفواصل زمني صغير dt . إذا كان النظام على سبيل المثال في الدولة $(i_1, \dots, i_k - 1, \dots, i_m)$ ، فإن احتمال أن يولد شخص من النوع k شخصًا جديدًا من نفس النوع هو $A_{kk}(i_k - 1)dt$. في هذه الحالة، ينتهي النظام في الدولة $(i_1, \dots, i_k, \dots, i_m)$. خذ كشرط أولي

$$p(t_0, i_1, \dots, i_m) = \begin{cases} 1, & (i_1, \dots, i_m) = (I_1(t_0), \dots, I_m(t_0)), \\ 0, & (i_1, \dots, i_m) \neq (I_1(t_0), \dots, I_m(t_0)). \end{cases}$$

الهدف هو حساب احتمال الانقراض

$$\omega = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t, 0, \dots, 0).$$

تذكر أن المعادلة (2) يتم التحقق منها من خلال توقع عدد الأشخاص في الأقسام المختلفة (كلاين وماكدونالد ، 1980).

اقتراح.

- $\omega = 1$ إذا $R_0 \leq 1$
- $\omega < 1$ إذا $R_0 > 1$.

دليل. دالة التوليد

$$g(t, x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1, \dots, i_m \geq 0} p(t, i_1, \dots, i_m) x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$$

هو حل المعادلة

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \sum_{k,\ell} [A_{k\ell}(t)x_\ell - B_{k\ell}(t)](x_k - 1) \frac{\partial g}{\partial x_\ell},$$

مع الشرط الأولي

$$g(t_0, x_1, \dots, x_m) = x_1^{I_1(t_0)} \dots x_m^{I_m(t_0)}. \quad (3)$$

المنحنيات المميزة لهذه المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الدرجة الأولى هي

$$\frac{dX_\ell}{dt} = \sum_k [A_{k\ell}(t)X_\ell - B_{k\ell}(t)](1 - X_k). \quad (4)$$

ثم

$$\frac{d}{dt}[g(t, X_1(t), \dots, X_m(t))] = 0$$

و

$$g(t, X_1(t), \dots, X_m(t)) = g(t_0, X_1(t_0), \dots, X_m(t_0)). \quad (5)$$

نحدد $X^{(\tau)}(t)$ حل النظام (4) مع

$$X^{(\tau)}(\tau) = 0.$$

باستخدام (3) و $t = \tau$ في (5) ، نحصل

$$p(\tau, 0, \dots, 0) = g(\tau, 0, \dots, 0) = (X_1^{(\tau)}(t_0))^{I_1(t_0)} \dots (X_m^{(\tau)}(t_0))^{I_m(t_0)}. \quad (6)$$

لذلك يتم إعطاء احتمال الانقراض من قبل

$$\omega = (\omega_1)^{I_1(t_0)} \dots (\omega_m)^{I_m(t_0)}, \quad \omega_\ell = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} X_\ell^{(\tau)}(t_0).$$

لذلك تأتي المشكلة لدراسة نظام المعادلات التفاضلية (4). نحدد

$$Y_\ell^{(\tau)}(s) = 1 - X_\ell^{(\tau)}(\tau - s). \quad (7)$$

نحصل

$$\frac{dY_\ell^{(\tau)}}{ds}(s) = \sum_k [A_{\ell k}^*(\tau - s)(1 - Y_\ell^{(\tau)}(s)) - B_{\ell k}^*(\tau - s)]Y_k^{(\tau)}(s). \quad (8)$$

A^* و B^* هي المصفوفات المنقولة من A و B . الشرط الأولي هو

$$Y_\ell^{(\tau)}(0) = 1, \quad \forall \ell.$$

الفرضية (H3) تعني ذلك

$$Y_\ell^{(\tau)}(s) = Y_\ell^{(\tau+T)}(s), \quad \forall s, \quad \forall \tau, \quad \forall \ell. \quad (9)$$

لتطبيق نظرية 2.3.4 من (Zhao، 2003) ، دعنا نتحقق من نظائر الفرضيات (A1) - (A4) من نظرية 3.1.2 من هذا المرجع ، باستثناء أن النظام (8) يتطور في مكعب الوحدة $K = [0, 1]^m$ في مكان \mathbb{R}_+^m . أولاً ، النظام (8) يترك K ثابتاً. في الواقع ، إذا $F_\ell(s, Y^{(\tau)}(s))$ هو الجانب الأيمن من (8) ، وإذا $Y \in K$ ،

$$\begin{aligned} Y_\ell = 0 &\Rightarrow F_\ell(s, Y) = \sum_{k \neq \ell} (A_{\ell k}^*(\tau - s) + b_{k\ell}(\tau - s))Y_k \geq 0, \\ Y_\ell = 1 &\Rightarrow F_\ell(s, Y) = -b_{\ell\ell}(\tau - s) - \sum_{k \neq \ell} b_{k\ell}(\tau - s)(1 - Y_k) < 0, \end{aligned} \quad (10)$$

عدم المساواة الصارمة في (10) بسبب (H4). يوضح الاقتراح B.7 لـ (Smith and Waltman، 1995) أنه لأي حالة مبدئية في K في الوقت المناسب s_0 الحل المقابلة من (8) ، ثم يبقى في K . علاوة على ذلك ، وفقاً لـ (10) ،

$$(\exists \ell, \quad Y_\ell(s_0) = 1) \Rightarrow (\forall s > s_0, \quad Y_\ell(s) < 1).$$

النظام (8) متعاون في K :

$$Y \in K \Rightarrow \forall k \neq \ell, \quad \frac{\partial F_\ell}{\partial Y_k}(s, Y) = A_{\ell k}^*(\tau - s)(1 - Y_\ell) + b_{k\ell}(\tau - s) \geq 0.$$

وفقاً لنظرية B.1 (Kamke (Smith and Waltman، 1995، Theorem B.1)، فإن تطبيقات Poincaré للنظام (8) على K رتيبة. نفترض الفرضية (H2) أن المصفوفة اليعقوبية

$$\left(\frac{\partial F_\ell}{\partial Y_k}(s, Y) \right) \quad \forall s, \quad \forall Y \in \widehat{K} = \{Y \in K : Y_\ell < 1 \forall \ell\}$$

غير قابل للاختزال. تشير هذه الخاصية وعدم المساواة الصارمة (10) إلى أن تطبيقات (8) Poincaré في K ، والتي تعرض حل الوقت s_0 حتى الوقت $s_0 + T$ ، هي في الواقع رتيبة للغاية. في الواقع، إذا

$$Y(s_0) \neq Y'(s_0), \quad Y(s_0) \leq Y'(s_0),$$

ذلك بالقول $Y_\ell(s_0) \leq Y'_\ell(s_0)$ للجميع ℓ ، إذن لدينا

$$Y(s_0 + T/2) \leq Y'(s_0 + T/2),$$

تكون النواقل مختلفة وفي الداخل \widehat{K} . باستخدام عدم الانتقائية في \widehat{K} ، نظرية B.3 من (سميث ووالتمان، 1995) تظهر ذلك

$$Y_\ell(s_0 + T) < Y'_\ell(s_0 + T) \quad \forall \ell.$$

النظام (8) متجانس تماماً. في الواقع، لكل شيء $\alpha \in (0, 1)$ و $Y \in K$ مع $Y_\ell > 0$ للجميع ℓ ، نمك

$$F_\ell(s, \alpha Y) = \alpha F_\ell(s, Y) + \alpha(1 - \alpha) \sum_k A_{\ell k}^*(\tau - s) Y_\ell Y_k.$$

وبالتالي، $F_\ell(s, \alpha Y) \geq \alpha F_\ell(s, Y)$ و $F(s, \alpha Y) \neq \alpha F(s, Y)$ حسب الفرضية (H1).

نملك $F(s, 0) = 0$. نحدد الجزء الخطي من $F(s, Y)$ قريب من $Y = 0$

$$f_\ell(s, Y) = (M^*(\tau - s)Y)_\ell, \quad F_\ell(s, Y) = f_\ell(s, Y) - \sum_k A_{\ell k}^*(\tau - s) Y_\ell Y_k.$$

وبالتالي $F_\ell(s, Y) \leq f_\ell(s, Y)$ وبالنظر إلى الفرضية (H1)، إذا $Y_\ell > 0$ للجميع ℓ .

المضاعف المهيمن فلو كيت في النظام $\frac{dY}{ds} = M^*(\tau - s)Y$ هو نفس النظام $\frac{dY}{dt} = M(t)Y$ في الواقع، دعونا نراقب الحلول (مع مصفوفة الهوية كشرط أولي في الوقت 0) $\Phi_1(t)$ ، $\Phi_2(t)$ ، $\Phi_3(t)$ و $\Phi_4(t)$ من

$$\frac{dY}{dt} = M(t)Y, \quad \frac{dY}{dt} = M(\tau + t)Y, \quad \frac{dY}{dt} = -M^*(\tau + t)Y, \quad \frac{dY}{ds} = M^*(\tau - s)Y.$$

النظام الثاني هو نفسه الأول لكنه تأخر في الوقت المناسب. والثالث هو تبديل الثاني. الرابع مطابق للثالث باستثناء أن الوقت معكوس. وبالتالي

$$\Phi_2(T) = \Phi_1(\tau)\Phi_1(T)(\Phi_1(\tau))^{-1}, \quad \Phi_3(T) = ((\Phi_2(T))^*)^{-1}, \quad \Phi_4(T) = (\Phi_3(T))^{-1}$$

(Hsieh and Sibuya، 1999). لذلك، نصف القطر الطيفي ρ_0 من $\Phi_1(T)$ يساوي ذلك $\Phi_4(T)$ ، كما أعلن.

تطبيق النظرية 2.3.4 من (Zhao، 2003). مع $\rho_0 \leq 1$ ، ميزان 0 من النظام (8) عموماً مقارب مستقرة في K . خاصة،

$$Y^{(\tau)}(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0.$$

مع $\rho_0 > 1$ ، يحتوي النظام (8) على حل دوري إيجابي إيجابي للغاية للفترة T ، وهو مستقر عالمياً بشكل مقارب في $K \setminus \{0\}$ ويجذب $Y^{(\tau)}(s)$ إذا $s \rightarrow +\infty$.

مع (6) نرى ذلك

$$X_\ell^{(\tau)}(t_0) = p(\tau, 0, \dots, 0)$$

$$I_\ell(t_0) = 1, \quad I_k(t_0) = 0 \quad \forall k \neq \ell.$$

الوظيفة $\tau \mapsto p(\tau, 0, \dots, 0)$ يتزايد بشكل واضح ، على سبيل المثال بسبب

$$\frac{d}{dt} p(t, 0, \dots, 0) = \sum_k b_{kk} p(t, 0, \dots, 1, \dots, 0) \geq 0.$$

هذه الوظيفة هي أيضاً ≥ 1 ، كونها احتمالية. وبالتالي $X_\ell^{(\tau)}(t_0)$ تتلاقى إلى حد $\omega_\ell \leq 1$ إذا $\tau \rightarrow +\infty$.

دعونا نعود إلى النظام (4) حيث يتم عكس الوقت. نملك $X_\ell^{(\tau)}(t_0) = 1 - Y_\ell^{(\tau)}(\tau - t_0)$. باستخدام (9) ، لدينا كل شيء $\tau > t_0$ وجميع n

$$X_\ell^{(\tau+nT)}(t_0) = 1 - Y_\ell^{(\tau)}(\tau + nT - t_0).$$

مع $n \rightarrow +\infty$ ، نستنتج أن $\omega_\ell = 1$ إذا $\rho_0 \leq 1$ ، في حين $\omega_\ell < 1$ إذا $\rho_0 > 1$.

ولاختتام المظاهرة ، يبقى التذكير بالصلة بين معدل النمو r_0 (حيث $\rho_0 = e^{r_0 T}$) والنسخ R_0 (Baca andr and Guernaoui، 2006؛ Thieme، 2009؛ Bacaër and Ait Dads، 2011) : $r_0 \leq 0$ إذا وفقط إذا $R_0 \leq 1$.

ملاحظة 1. وفقاً للقسم 1 ، فإن قابلية استنساخ النظام (2) هي نصف القطر الطيفي للعامل المتكامل

$$u(t) \mapsto A(t) \int_0^\infty C(t, t-x) u(t-x) dx$$

على مساحة الوظائف الدورية الدورية ، الفترة T ، مع القيم في \mathbb{R}^m . هذا العامل هو الخطية فيما يتعلق $A(t)$. النظام

$$\frac{dJ}{dt} = (A(t)/R_0 - B(t))J(t)$$

لديه قابلية إعادة إنتاج تساوي 1 ، وبعبارة أخرى ، فإن مضاعف فلوكتيت المهيمن يساوي 1. وهذا يعطي طريقة رقمية لحساب التكاثر. تم استخدامه من قبل (Wang and Zhao، 2008) ، §3.4 ، §4.2 ، §5.1) (Bacaër، 2007) للعديد من النماذج الخاصة مثل نماذج SEIR ونماذج الأمراض المتجهة ، ثم تم تعميمها بواسطة (Wang and Zhao، 2008).

ملاحظة 2. بعد أن لاحظت بالفعل دور تبديل النظام (2) ، دعونا نذكر العلاقة بين R_0 وأول مشكلة Sturm-Liouville من الدرجة الأولى. خذ بعين الاعتبار النظام $dV/dt = -B(t)V(t)$ مع الحالة على الحافة $V(0) = V(T)$. بعد (Roseau ، 1997) ، يتم إعطاء وظيفة Green المرتبطة بها من قبل

$$G(t, s) = \begin{cases} Z(t)[I - Z(T)]^{-1}Z(s)^{-1} & , \quad 0 \leq s < t \leq T, \\ Z(t)[I - Z(T)]^{-1}Z(T)Z(s)^{-1} & , \quad 0 \leq t < s \leq T, \end{cases}$$

كما في (Bacaër، 2007، §2). نذكر أن $dZ/dt = -B(t)Z(t)$ و $Z(0) = \mathbb{I}$. حلول لمشكلة القيمة الذاتية التفاضلية

$$\frac{dW}{dt} + B(t)W(t) = \lambda A(t)W(t), \quad W(0) = W(T)$$

يتم توفيرها من خلال حلول مشكلة القيمة الذاتية المتكاملة

$$W(t) = \lambda \int_0^T G(t, s) A(s) W(s) ds.$$

القيمة الذاتية الرئيسية لهذه المشكلة هي $\lambda = 1/R_0$ (راجع باكير وآيت دادس (2012) وثيم (2009)).

3. أمثلة

3.1 نموذج وبائي بسيط للحصبة

ضع في اعتبارك نموذج SEIR الخطي لبدء الوباء:

$$\frac{dE}{dt} = -(b + \mu)E + a(t)(1 - \phi)I \quad (11)$$

$$\frac{dI}{dt} = bE - (c + \mu)I. \quad (12)$$

تمت دراسة هذا النموذج على سبيل المثال من قبل (Dietz 1976).

- E هو عدد الأشخاص المصابين ولكن ليس معدياً
- I هو عدد الأشخاص المعديين
- $1/b$ هو متوسط فترة الكمون
- $1/c$ هي الفترة المعدية المتوسطة
- μ هو الموت
- $a(t)$ هو معدل الاتصال الفعال ، أي منتج معدل الاتصال واحتمال الإرسال. نفترض أنها دالة إيجابية دورية للفترة $T = 1$ سنة ، والتي تشكل موسمية.
- ϕ هو جزء من السكان محصن ، إما عن طريق التطعيم أو عن طريق عدوى سابقة. نملك $0 \leq \phi < 1$.

المعلمات b و c و μ positive إيجابية تماماً.

جميع الافتراضات الواردة في القسم 2 راضية عن

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a(t)(1 - \phi) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b + \mu & 0 \\ -b & c + \mu \end{pmatrix}. \quad (13)$$

نحسب تقريباً احتمالية الانقراض birth لعملية الولادة والوفاة ومع عدة أنواع مرتبطة بـ (13) ، بدءاً من الحالة الأولية بأكملها $(E(t_0), I(t_0)) \neq (0, 0)$. نختار أولاً τ مثل هذا $\tau - t_0$ هو كبير جداً بالمقارنة مع T . نعلم من (6) و (7) و (8) ذلك

$$\omega \simeq p(\tau, 0, 0) = \left(1 - Y_1^{(\tau)}(\tau - t_0)\right)^{E(t_0)} \left(1 - Y_2^{(\tau)}(\tau - t_0)\right)^{I(t_0)}, \quad (14)$$

مع

$$\frac{dY_1^{(\tau)}}{ds}(s) = -(b + \mu)Y_1^{(\tau)}(s) + bY_2^{(\tau)}(s), \quad (15)$$

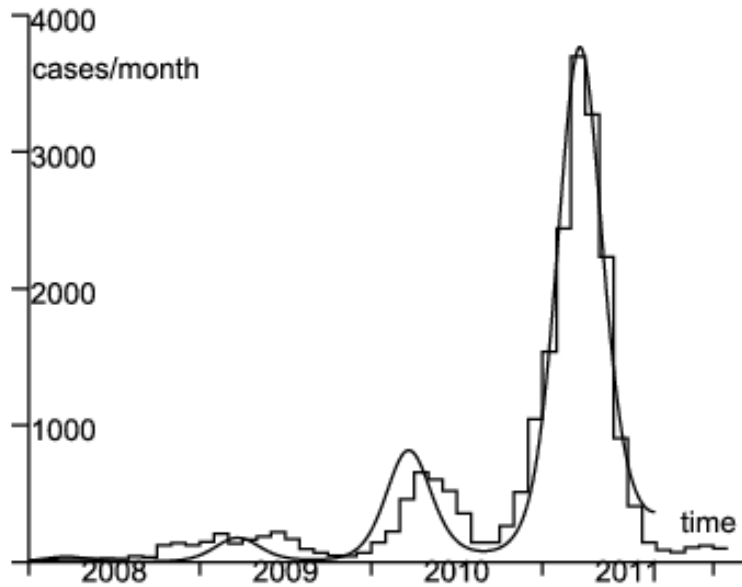
$$\frac{dY_2^{(\tau)}}{ds}(s) = a(\tau - s)(1 - \phi)Y_1^{(\tau)}(s)(1 - Y_2^{(\tau)}(s)) - (c + \mu)Y_2^{(\tau)}(s). \quad (16)$$

إذا $0 < s < \tau - t_0$

$$Y_1^{(\tau)}(0) = 1, \quad Y_2^{(\tau)}(0) = 1.$$

تحسب هذه المعادلات ω . أخيراً ، يجب علينا إعادة استخدام نفس الخوارزمية بقيمة أكبر من τ للتحقق من أن القيمة التقريبية لـ ω مستقلة حقاً عن اختيار τ ، شريطة أن يتم اختيار قيمتها الأولى كبيرة بما يكفي.

كمثال ، ضع في اعتبارك وباء الحصبة الذي ظهر من جديد في فرنسا خلال السنوات 2008-2011 (الشكل 1 ؛ في عامي 2006 و 2007 تم الإبلاغ عن أقل من 50 حالة). في عام 2007 ، وبالنظر إلى تغطية التطعيم ، يقدر أن حوالي 10٪ من الأطفال بعمر سنتين و 7٪ من الأطفال بعمر ست سنوات في فرنسا يمكن أن يصابوا بالحصبة (Parent du Châtelet et al., 2010, p. 4). في 2009-2010 ، كان حوالي 8٪ من السكان الذين تتراوح أعمارهم بين 6 و 29 عاماً عرضة للإصابة (Lepoutre وآخرون ، 2011 ، ص. بالنظر إلى إجمالي عدد سكان فرنسا (65 مليون نسمة) ، يمكن تقدير أن السكان المعرضين للخطر هم أكثر من مليوني شخص. علاوة على ذلك ، فإن العدد التراكمي للحالات المبلغ عنها في الشكل 1 هو حوالي 22000 ، العدد الحقيقي للحالات التي يتم تقديرها في بعض الأماكن ليكون ضعف المبلغ عنها (Parent du Châtelet et al., 2010, p. 3). لذلك ، ربما ظل السكان المعرضون للإصابة مستقرين نسبياً خلال السنوات 2008-2011 ، مما يبرر النموذج الخطي (11) - (12).



الشكل 1. العدد الشهري لحالات الحصبة المبلغ عنها (وظيفة الدرج) من يناير 2008 إلى فبراير 2012 (البيانات من InVS) (Parent du Châtelet et al.، 2010) و (2012،) . ملاءمة أفضل (منحنى سلس) للبيانات من يناير 2008 إلى يوليو 2011.

افترض أن البساطة $a(t) = \bar{a}(1 + \varepsilon \cos(\omega t - \psi))$ مع $\omega = 2\pi/T$ و $T = 1$ عام. هذا التعبير هو بداية تطور سلسلة فورييه للوظيفة الدورية $a(t)$. أشكال أخرى ل $a(t)$ ، مثل وظيفة الدرج (Keeling و Rohani، 2008)، يمكن استخدامها أيضاً. سيكون إجبار الدرج مناسباً بشكل خاص إذا أشارت دراسة طبقية عمرية للحالات إلى الانتقال إلى المدرسة. ومع ذلك، هذا لا يبدو أن هذا هو الحال. أعلى نسبة بين الأطفال تحت سن واحد، الذين لم يلتحقوا بعد بالمدرسة. العمر المتوسط للحالات المبلغ عنها هو 14 عامًا في عام 2010 و 16 عامًا في عام 2011، ولكن معظم الحالات أقل من 30 عامًا (Baudon et al.، 2011). وبالتالي فإن متوسط العمر مرتفع بشكل خاص لمرض مثل الحصبة. يعكس الهيكل العمري للحالات في الواقع الهيكل العمري للسكان المعرضين أكثر من التعليم. الأطفال تحت سن واحد لم يتم تطعيمهم بعد. كما ذكر أعلاه، حوالي 8٪ من الذين تتراوح أعمارهم بين 1 و 30 سنة معرضون؛ فقط 1 إلى 2٪ من أولئك الذين تتراوح أعمارهم بين 30 و 50 عرضة للإصابة (Lepoutre وآخرون، 2011). ويرجع هذا الهيكل الخاص إلى الانخفاض السريع في الإصابة بالحصبة خلال الثمانينيات بعد توصية لقاح الحصبة في عام 1983 ولقاح الحصبة والنكاف والحصبة الألمانية (الحصبة والنكاف والحصبة الألمانية) في عام 1986.

لتقدير المعلمات غير المعروفة، قارنا النموذج القطعي (11) - (12)، الذي يتوافق مع توقع العملية العشوائية المرتبطة ب (13)، مع البيانات بين بداية يناير 2008 ويوليو 2011. التدابير الصحية تم بعد ذلك السيطرة على الوباء. لم يعد من الممكن افتراض أن المعلمات هي نفسها كما كانت من قبل. يمكن رؤية تأثيرها في غياب موجة وبائية في نهاية عام 2011.

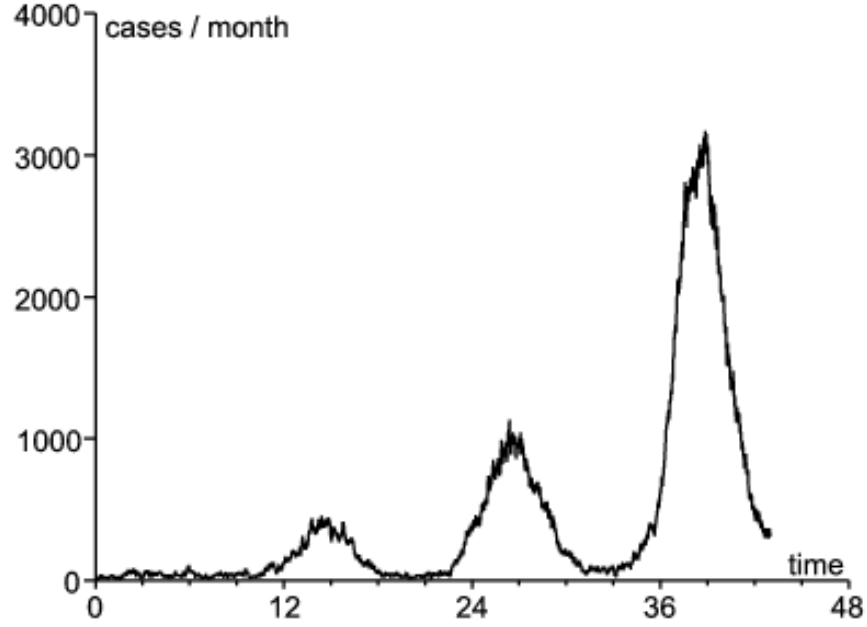
ومن المفترض $1/b = 8$ أيام و $1/c = 5$ الأيام كما في الفقرة 3.2.2.1 من (كيلينغ وروهاني، 2008). وفيات μ لا تذكر، مقارنة ب و ج: نأخذ $1/\mu = 70$ أعوام. ليكن f جزءاً من الحالات التي تم الإبلاغ عنها بالفعل. نحدد حدوث الحالات المبلغ عنها في الشكل 1 مع الوظيفة $f c I(t)$. يكون النظام (11) - (12) خطياً، ويتم أيضاً فحصه بواسطة الوظائف $\vec{E}(t) = f E(t)$ و $\vec{I}(t) = f I(t)$. لذا فإن الهدف هو إيجاد $\vec{E}(t^*)$ ، $\vec{I}(t^*)$ ، ψ ، ε ، والمنتج $\bar{a}(1 - \phi)$ لهذا السبب $\vec{I}(t)$ يناسب البيانات. يتم قياس المسافة إلى البيانات من خلال مجموع القيم المطلقة لاختلافات الوقوع الشهرية. يميل هذا إلى إعطاء وزن أكبر لموجة 2011 بسبب حجمها. على أي حال، فإن أرقام عامي 2008 و 2009 صغيرة وغير منتظمة إلى حد ما، ربما لأن العديد من الأوبئة المحلية نشأت بسبب إدخال حالات من الخارج. لا يمكننا أن نأمل في توافق جيد مع النموذج القطعي لهذا الجزء من المنحنى الوبائي، الذي لم يصل بعد إلى شكله "المستقر" (بمعنى نظرية سكان لوتكا المستقرة). أما بالنسبة لموجة 2010، فقد وصلت ذروتها بعد شهر من موجة 2011. قد يكون هذا التأخير بسبب العشوائية الديموغرافية أو حقيقة أن $a(t)$ ليس دورياً بسبب الاستوكاستك البيئي. مع هذه الملاحظات، نجد ملائمة جيدة نسبياً (على الأقل لموجة 2011)، نظراً لبساطة النموذج، مع

$$\vec{E}(t^*) = 3, \quad \vec{I}(t^*) = 2, \quad \varepsilon = 0,33, \quad \frac{\psi}{2\pi} = -0,07, \quad \bar{a}(1 - \phi) = 6,42/\text{mois} \quad (17)$$

(شكل 1).

باستخدام قيم المعلمات هذه، يمكننا محاكاة عملية الولادة والموت. يبين الشكل 1 فقط توقع عدد الحالات في الشهر. في النسخة العشوائية، يتم إخماد الوباء في العديد من المحاكاة. يوضح الشكل 2 محاكاة حيث لم ينته الوباء وحيث كان حجم الموجات المختلفة من نفس ترتيب البيانات

في الشكل 1 (كانت عشرات المحاكاة ضرورية قبل العثور على مثل هذا المثال).



الشكل 2. عدد الحالات المبلغ عنها $c\bar{I}(t)$ كدالة للوقت (بالأشهر) في محاكاة عملية الولادة والوفاة باستخدام قيم المعلمة (17). الشرط الأولي هو $\bar{E}(t^*) = 3$ و $\bar{I}(t^*) = 2$.

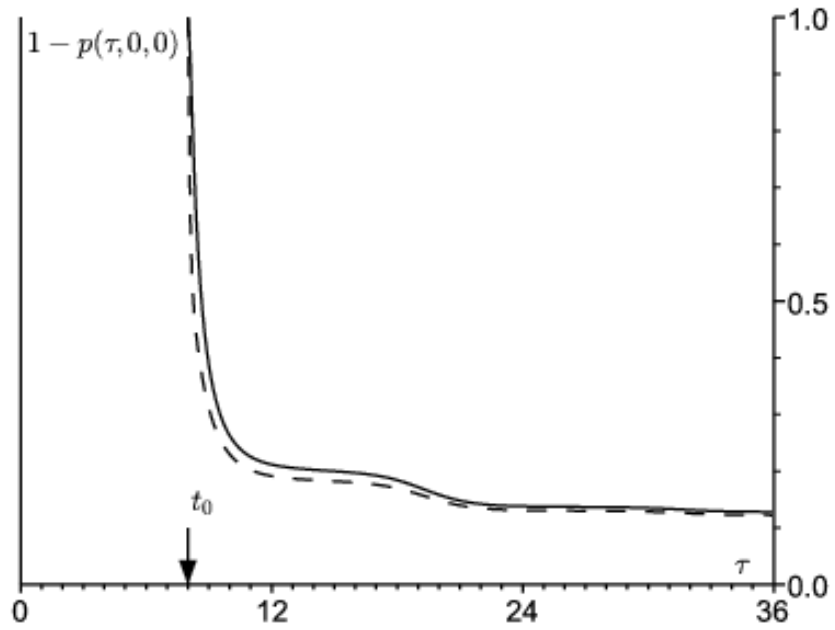
نحافظ على التدوين R_0 في حال $\phi = 0$. وفقاً لـ (Bacaër, 2007, §3.4)، التكاثر R_ϕ يتميز بحقيقة أن النظام الخطي الدوري

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{pmatrix} -(b + \mu) & a(t)(1 - \phi)/R_\phi \\ b & -(c + \mu) \end{pmatrix} J \quad (18)$$

لديه معامل فلوكيت مهيمن يساوي 1. عددنا نحصل عليه $R_\phi \simeq 1,06$. لاحظ أن R_ϕ أعلى بقليل من 1. هذا يرجع إلى أن 90% من إجمالي السكان محميون بالفعل، إما عن طريق التطعيم أو عن طريق عدوى سابقة.

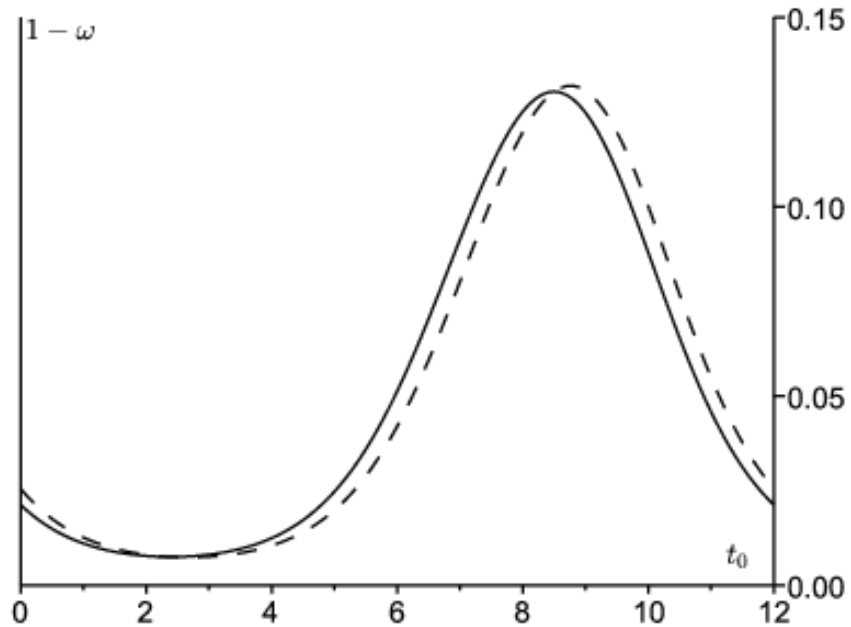
كما نلاحظ أن النظام (18) مع $a(t)$ يمكن تحويل الجيوب الأنفية إلى معادلة ماتيو التفاضلية للفيزياء الرياضية، كما هو الحال في النموذج السكاني الذي درسه (Mingari Scarpello و Ritelli 2008).

باستخدام المعادلات (14) - (16)، يمكننا حساب الاحتمال $1 - p(\tau, 0, 0)$ أن العملية لم تتوقف في الوقت τ ($\tau \geq t_0$). نبدأ إما من شخص في المقصورة E ، أو من شخص في المقصورة I (الشكل 3). كما هو متوقع، $1 - p(\tau, 0, 0)$ تتقارب إلى حد $\omega - 1$ إذا $\tau \rightarrow +\infty$. وفقاً للشكل 3، من المرجح أن يحدث الانقراض في السنة الأولى بعد التاريخ الأولي.



الشكل 3. الاحتمال $1 - p(\tau, 0, 0)$ أن العملية لا تتوقف في الوقت τ (في الأشهر ، $\tau \geq t_0$ ، بدءًا من شخص في المقصورة E (خط متصل) أو من شخص في المقصورة I (خط منقط) في الوقت المناسب t_0 . هنا t_0 يتوافق مع بداية سبتمبر.

باختيار large كبير بما فيه الكفاية وبتكرار الحسابات لقيم مختلفة لـ t_0 ، نحصل على الشكل 4 لاحتمال $1 - \omega$ أن العملية لن تخرج. نبدأ إما من شخص في المقصورة E ، أو من شخص في المقصورة I . هذا الاحتمال هو الأعلى في سبتمبر. ربما يكون هذا هو الوقت من العام الذي ينبغي فيه لمسؤولي الصحة أن يولوا أكبر قدر من الاهتمام لأوبئة الحصبة المحلية للعمل بأسرع وقت ممكن قبل أن يتسببوا في وباء كبير. في أوقات أخرى من السنة ، من المرجح أن تزول الأوبئة من تلقاء نفسها ، حتى لو $R_\phi > 1$.



الشكل 4. احتمالية أن العملية لن تموت ، $1 - \omega$ كدالة t_0 (من يناير إلى ديسمبر). نبدأ من شخص في المقصورة E (خط كامل) أو من شخص في المقصورة I (خط منقط) في الوقت المناسب t_0 .

لاحظ أن ذروة حدوث موجة 2011 حدثت في مارس 2011 (الشكل 1). تشير تقديرات ψ إلى أن معدل الاتصال الفعال $a(t)$ وصلت ذروتها في ديسمبر 2010. الجزء السفلي من الحوض الصغير بين موجات 2010 و 2011 هو في أغسطس أو سبتمبر 2010 ، في الموسم عندما يكون تقدير the-1 هو الأعلى. إذا استخدمنا بشكل أساسي موجة 2010 لتعديل المعلمات ، فإن ذروة $\omega-1$ سيتم تعويضها بحوالي شهر واحد فقط. لذا مهما كانت الطريقة ، يبدو أن higher-1 أعلى أو أقل عندما يكون الحد الأدنى للظهور ويبدأ انتعاش الحدوث.

بالطبع ، يجب أن يوضع في الاعتبار أن نموذج SEIR الخطي هذا هو تمثيل مبسط للغاية لديناميكيات انتقال الحصبة. على وجه الخصوص ، لا يأخذ في الاعتبار البنية العمرية ويستخدم تأثير موسمي بسيط للغاية للاتصالات.

3.2 إعادة إدخال الأنواع الحيوانية في بيولوجيا الحفظ

تستخدم مناطق أخرى من بيولوجيا السكان عمليات متفرعة ، ولا سيما بيولوجيا الحفظ (Caswell، 2001). على سبيل المثال ، تخيل أن الأنواع الحيوانية المنقرضة في منطقة معينة يعيد إدخالها من قبل البشر. كم عدد الحيوانات التي يجب إعادة تقديمها حتى يحصل السكان على فرصة جيدة للإصرار؟ مع عملية الولادة والموت لنوع واحد من الحيوانات ، فإن احتمال الانقراض لمجموعة من الحيوانات n هو ω^n حيث ω معطاة بواسطة (1). بمعرفة ω ، يمكننا بالتالي تقدير n مثل ذلك ω^n أقل من مستوى معين من المخاطر. بالطبع ، إعادة الإدخال تكون منطقية فقط في الحالات التي تكون فيها $\omega < 1$ ، والتي ω^n يمكن أن تكون صغيرة باختيار n كبيرة بما يكفي. سؤال آخر يطرح نفسه: في أي وقت من السنة يجب إعادة الحيوانات من أجل تقليل احتمال الانقراض؟ ينشأ نفس السؤال في سياق عمليات الولادة والوفاة متعددة الأنواع في بيئة دورية ، مع إمكانية إضافية للسؤال عن نوع الفرد الذي يجب إعادة تقديمه لتقليل احتمالية الانقراض.

في حين أن نماذج الوقت المستمر تحظى بشعبية كبيرة في علم الأوبئة ، يميل علماء الأحياء الحفظ إلى تفضيل نماذج الوقت المنفصل لمجموعة متنوعة من الأسباب. في بقية هذا القسم الفرعي ، نوضح بإيجاز كيف يتم حساب احتمالات الانقراض في هذا السياق. تبرير للعلاقة بين R_0 واحتمال الانقراض هو في الواقع أبسط بكثير في حالة الوقت المنفصل عنه في الوقت المستمر في القسم 2. وهو يتبع من الطرق المعروفة

- للعمليات متعددة الأنواع في بيئة ثابتة من جهة ،
- للعمليات من نوع واحد في بيئة متغيرة حتمية من ناحية أخرى (Athreya و Ney (1972 ؛ Haccou وآخرون ، 2005).

تأمل نماذج الوقت المنفصل

$$p(t+1) = (A(t) + B(t))p(t).$$

$A(t)$ و $B(t)$ هي مصفوفات مربعة بحجم m ، ذات معاملات موجبة أو صفرية. ومن المفترض

- $A(t+T) = A(t)$ و $B(t+T) = B(t)$ لجميع T (عدد صحيح)
- نصف قطرها الطيفي $B(0)B(1)\dots B(T-1)$ أقل من 1 تمامًا
- $\sum_j B_{ij}(t) \leq 1$ للجميع i .

بالنسبة للنسخة العشوائية المقابلة ، يجب علينا تحديد الاحتمالات $F_{k_1, \dots, k_m}^{(j)}(t)$ أن نوع j فرد k_1 النوع 1 أفراد ، ... ، k_m الأفراد من النوع m ، بين الأوقات t و $t+1$. وظائف $F_{k_1, \dots, k_m}^{(j)}(t)$ وظائف الدورية لفترة T فيما يتعلق r . ثم

$$A_{ij}(t) = \sum_{k_1, \dots, k_m} k_i F_{k_1, \dots, k_m}^{(j)}(t).$$

المعامل $B_{ij}(t)$ يعطي احتمالية انتقال فرد من النوع j إلى النوع i بين t و $t+1$. يتم استبدال فرد من النوع j في الوقت t في الوقت $t+1$ بمجموعة من السكان تكون وظيفتها المولدة

$$g_j(t, x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_{k_1, \dots, k_m} F_{k_1, \dots, k_m}^{(j)}(t) x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} \right) \left(1 + \sum_i B_{ij}(t)(x_i - 1) \right).$$

بين لحظات t_0 و $t_0 + T$ ، يتم استبدال الفرد من النوع j بمجموعة من السكان لها وظيفة توليد $h_j(x_1, \dots, x_m)$ يتم الحصول عليها عن طريق إنشاء وظائف التوليد $g_j(t, x_1, \dots, x_m)$ مع $t = t_0, \dots, t_0 + T - 1$. إذا على سبيل المثال $T = 2$ ،

$$h_j(x_1, \dots, x_m) = g_j(t_0, g_1(t_0 + 1, x_1, \dots, x_m), \dots, g_m(t_0 + 1, x_1, \dots, x_m)).$$

تأمل اللحظات $(t_0 + nT)_{n \geq 0}$. نحن نعلم من نظرية عمليات التفرع إلى عدة أنواع في بيئة ثابتة أن احتمالات الانقراض ω_j بدءًا من فرد من النوع j في ذلك الوقت t_0 هي الحد الأدنى من الحل $[0, 1]^m$ النظام

$$\omega_j = h_j(\omega_1, \dots, \omega_m), \quad 1 \leq j \leq m.$$

نملك

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(t, 1, \dots, 1) = A_{ij}(t) + B_{ij}(t).$$

مصفوفة الوسائل ، أي المصفوفة اليعقوبية في $(1, \dots, 1)$ ، هي

$$\left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(1, \dots, 1) \right)_{i,j} = (A(t_0 + T - 1) + B(t_0 + T - 1)) \cdots (A(t_0) + B(t_0)).$$

نفترض أن مصفوفة الوسائل هذه بدائية وأن وظائف التوليد h_j ليست مفردة ، أي أنه لا يوجد مصفوفة Q مثل ذلك

$$h_j(x_1, \dots, x_m) = \sum_k Q_{jk} x_k, \quad \forall j.$$

تظهر نظرية 2 من أثريا وني (1972 ، ص 186) ذلك $(\omega_1, \dots, \omega_m) = (1, \dots, 1)$ إذا وفقط إذا كان نصف القطر الطيفي لمصفوفة الوسائل هذه أقل من أو يساوي 1. هذا يعادل $R_0 \leq 1$ و

- R_0 هو نصف قطر الطيف AB^{-1} ،
- A هي مصفوفة كتلة قطرية $(A(0), A(1), \dots, A(T-1))$

$$B = \begin{pmatrix} -B(0) & \mathbb{I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -B(1) & \mathbb{I} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \cdots & 0 & 0 & -B(T-1) \end{pmatrix}$$

(Bacaër, 2009؛ Bacaër and Ait Dads, 2012). مع $p_i(t_0)$ أفراد من النوع الأول $(1 \leq i \leq m)$ ، احتمال الانقراض

$$\omega = (\omega_1)^{p_1(t_0)} \cdots (\omega_m)^{p_m(t_0)}.$$

لذا فإن الاستنتاجات مماثلة تمامًا لحالة الوقت المستمر.

كمثال ، ضع في اعتبارك نموذجًا يحتوي على نوع واحد فقط من الحيوانات ، $p(t+1) = (A(t) + B(t))p(t)$ مع $T = 2$. من المفترض أن كل فرد يلد بين الأوقات t و $t+1$ لنسل وفقًا لتوزيع بواسون. المتوسط $A(t)$. ثم

$$g(0, x) = e^{A(0)(x-1)} (1 - B(0) + B(0)x),$$

$$g(1, x) = e^{A(1)(x-1)} (1 - B(1) + B(1)x).$$

إن احتمال الانقراض الذي يبدأ من الفرد في الوقت 0 هو أصغر حل

$$\omega = g(0, g(1, \omega)), \quad \omega \in [0, 1].$$

وبالمثل ، فإن احتمال الانقراض الذي يبدأ من الفرد في الوقت 1 هو أصغر حل

$$\omega = g(1, g(0, \omega)), \quad \omega \in [0, 1].$$

هذان الاحتمالان أقل من 1 إذا

$$(A(1) + B(1))(A(0) + B(0)) > 1.$$

هذا يعادل $R_0 > 1$. R_0 هو نصف قطر الطيف

$$\begin{pmatrix} A(0) & 0 \\ 0 & A(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B(0) & 1 \\ 1 & -B(1) \end{pmatrix}^{-1}.$$

4. الخلاصة

حاولت الدراسات أن توضح كيف يختلف خطر الوباء في الأشهر المختلفة من العام. استخدموا نموذج دوري. حسبوا "النكاثر" $R(t_0)$ ، بافتراض معاملات النموذج المجمدة. رسموا $R(t_0)$ من ناحية t_0 (هارتيمينك وآخرون ، 2009). المشكلة في هذه الطريقة هي $R(t_0)$ قد يكون أقل من 1 طوال الوقت ، بينما يصبح المرض متوطنًا.

يحدد تعريف قابلية التكاثر المستخدم في مقالنا بوضوح ما إذا كان المرض المعدي يمكن أن يكون مستوطنًا (Rebello et al.، 2012) وكيف يتصرف الحجم النهائي في النماذج الوبائية (Bacaër and Gomes، 2009). بالإضافة إلى ذلك ، لديها تفسير بيولوجي بسيط كمعدل نمو مقارب حسب الجيل (Bacaër and Ait Dads، 2011؛ Bacaër and Ait Dads، 2012). ولكن لها عيب واضح في كونها مستقلة عن الوقت. تم اقتراح مؤشر آخر لمخاطر الوباء ، مع العتبة اليمنى والذي هو دوري ، مؤخرًا بواسطة (Cushing and Ackleh، 2011). لكن تفسيره البيولوجي يبدو معقدًا بعض الشيء.

لقد قمنا هنا بحساب مقياس بديل لمخاطر الأوبئة ، واحتمال عدم موت عملية الاتصال المرتبطة بالخطية لنموذج الوباء. خصائصه الرياضية الرئيسية هي ظاهرة العتبة (اقتراح القسم 2). (Bacaër، 2007، §5.2) قد اقترحت بالفعل استخدام هذا الاحتمال للتطبيقات في علم الأوبئة ، ولكن لم تفكر إلا في حالة السكان من نوع واحد ، والذي توجد له صيغة صريحة. تتضمن معظم النماذج الوبائية العديد من الأجزاء المصابة ، على سبيل المثال في حالة الأمراض المنقولة بالناقل. يمكن تحليل خطر الوباء في هذه النماذج بنفس الطريقة العددية كما في الشكل 2.

كما أن احتمالات الانقراض تهم بيولوجيا الحفظ ، ولا سيما إعادة إدخال الأنواع. بالنسبة لبعض الأنواع الحيوانية ، وخاصة الطيور ذات فترة التعشيش المحددة جيدًا ، قد يكون من المستحسن استخدام نماذج مع المواسم لتقييم فرصة إعادة الإدخال الناجحة بشكل صحيح.

المراجع

- Allen LJS, Lahodny GE (2012) Extinction thresholds in deterministic and stochastic epidemic models. *J Biol Dynam* 6 : 590– 611
- Anderson RM, May RM (1991) *Infectious Diseases of Humans : Dynamics and Control*. Oxford University Press, Oxford
- Athreya KB, Ney PE (1972) *Branching Processes*. Springer, Berlin
- Bacaër N (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector– borne diseases with a periodic v *Bull Math Biol* 69 : 1067– 1091
- Bacaër N (2009) Periodic matrix population models : growth rate, basic reproduction number and entropy. *Bull Math Biol* 71 : 1781– 1792
- Bacaër N, Ait Dads E (2011) Genealogy with seasonality, the basic reproduction number, and the influenza pandemic. *J Math Biol* 62 : 741– 762
- Bacaër N, Ait Dads E (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter R_0 in periodic population models. *J Math Biol* 65 : 601– 621
- Bacaër N, Gomes MGM (2009) On the final size of epidemics with seasonality. *Bull Math Biol* 71 : 1954– 1966
- Bacaër N, Guernaoui S (2006) The epidemic threshold of vector– borne diseases with seasonality. *J Math Biol* 53 : 421– 436
- Ball F (1983) The threshold behaviour of epidemic models. *J Appl Prob* 20 : 227– 241
- Baudon C, Parent du Châtelet I, Antona D, Freymuth F, Poujol I, Maine C, Levy– Bruhl D (2011) Caractéristiques de l'épidémie de rougeole démarrée en France depuis 2008 : bilan des déclarations obligatoires pour les cas survenus jusqu'au 30 avril 2011. *Bull Epidemiol Hebd* 33/34 : 353– 358
- Caswell H (2001) *Matrix Population Models : Construction, Analysis, and Interpretation*, 2nd edn. Sinauer Associates, Sunderland
- Cushing JM, Ackleh AS (2011) A net reproductive number for periodic matrix models. *J Biol Dyn* 6 : 166– 188
- Diekmann O, Heesterbeek JAP (2000) *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. Wiley, Chichester
- Dietz K (1976) The incidence of infectious diseases under the influence of seasonal fluctuations. In : Breger J, Bühler W, Repges R, Tautu P (eds) *Mathematical Models in Medicine*. Springer, New York, p. 1– 15
- Haccou P, Jagers P, Vatutin VA (2005) *Branching Processes : Variation, Growth, and Extinction of Populations*. Cambridge University Press, Cambridge

- Hartemink NA, Purse BV, Meiswinkel R, Brown HE, de Koeijer A, Elbers ARW, Boender GJ. Mapping the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases : a case study on bluetongue virus. *Epidemics* 1 : 153–161
- Hsieh PF, Sibuya Y (1999) *Basic Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, New York
- Inaba H (1988) A semigroup approach to the strong ergodic theorem of the multistate stable population process. *Math Pop Stud* 1 : 49–77
- InVS (2012) Epidémie de rougeole en France. Actualisation des données de surveillance au 16 mars 2012. <http://www.invs.sante.fr>
- Jagers P, Nerman O (1985) Branching processes in periodically varying environment. *Ann Probab* 13 : 254–268
- Keeling MJ, Rohani P (2008) *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*. Princeton University Press, Princeton
- Kendall DG (1948) On the generalised 'birth-and-death' process. *Ann Math Statist* 19 : 1–15
- Klein B, Macdonald PDM (1980) The multitype continuous-time Markov branching process in a periodic environment. *Adv Appl Probab* 12 : 81–93
- Lepoutre A, Antona D, Fonteneau L, Baudon C, Halftermeyer-Zhou F, Le Strat Y, Levy-Bru Enquête nationale de séroprévalence des maladies infectieuses 2009–2010, 1ers résultats. *Med Mal Inf* 41(6) Suppl 1, 15–16. <http://www.infectiologie.com/site/medias/JNI/JNI11/CT/JNI2011-Sero-Inf-Lepoutre.pdf>
- Mingari Scarpello G, Ritelli D (2008) Closed form solution of a periodically forced logistic model. *Ann Univ Ferrara* 54 : 85–94
- Parent du Châtelet I, Antona D, Freymuth F, Muscat M, Halftermeyer-Zhou F, Maine C, Flc Spotlight on measles 2010 : update on the ongoing measles outbreak in France, 2008–2010. *Euro Surveill* 15(36) : pii : 19656.
- Parham PE, Michael E (2011) Outbreak properties of epidemic models : the roles of temporal forcing and stochasticity on pathogen invasion dynamics. *J Theor Biol* 271 : 1–9
- Rebelo C, Margheri A, Bacaër N (2012) Persistence in seasonally forced epidemiological models. *J Math Biol* 64 : 933–949
- Roseau M (1997) Équations différentielles. In : *Encyclopédie Universalis* (ed.) Dictionnaire des mathématiques : algèbre, analyse, géométrie. Albin Michel, Paris, p. 222–244
- Smith HL, Waltman P (1995) *The Theory of the Chemostat : Dynamics of Microbial Competition*. Cambridge University Press, Cambridge
- Thieme HR (2009) Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time. *SIAM J Appl Math* 70 : 188–211
- Wang W, Zhao XQ (2008) Threshold dynamics for compartmental epidemic models in periodic environments. *J Dyn Diff Equ* 20 : 699–717
- Zhao XQ (2003) *Dynamical Systems in Population Biology*. Springer, New York