

# 周期性环境中流行病的SIS随机模型

J. Math. Biol. 71 (2015) 491–511  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01265563>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, 法国邦迪 (Pierre) 和玛丽·居里大学 (Pierre and Marie Curie University), 法国巴黎的Cordeliers (法国)  
nicolas.bacaer@ird.fr

## 摘要

在具有接触率 $a$ , 治愈率 $b < a$ 和种群数量 $N$ 的流行病的随机SIS模型中, 平均灭绝时间 $\tau$ 为 $(\log \tau)/N$ 收敛到 $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ 当 $N$ 收敛到无穷大时。本文考虑一种更现实的情况, 即接触率是一个周期函数, 其平均值大于 $b$ 。 $(\log \tau)/N$ 收敛到一个新的极限 $C$ , 该极限 $C$ 链接到一个周期性的Hamilton-Jacobi方程。当接触率是具有小幅度的余弦函数, 具有大频率或具有非常小的频率, 人们可以得到近似公式 $C$ 分析如[阿萨弗等人, 2008年, 修订版物理学E78, 041123]。这些结果通过数值模拟说明。

## 1.简介

如Nåsell (2011) 所著, 假设环境恒定时, 已经详细研究了SIS流行病的随机模型。在接触率 $a$ , 治愈率 $b < a$ 和种群数量 $N$ 的情况下, 灭绝的平均时间 $\tau$  (例如, 从受感染者那里灭绝) 为

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} c = b/a - 1 - \log(b/a) > 0 \quad (1)$$

(Nåsell, 2011年, 定理12.1)。除其他参考文献外, 另请参阅 (Andersson和Djehiche, 1998年), (Doering等人, 2005年) 和 (Assaf和Meerson, 2010年)。后者使用布里渊, 克拉默斯和温策尔[BKW]的方法。机率 $P_n(t)$ 在时间 $t$ 上有 $n \geq 1$ 人被感染, 首先接近准平稳分布 $\pi_n$ 。我们定义 $x = n/N$ 以便 $0 \leq x \leq 1$ 。当 $N$ 收敛到无穷大时 $-(\log \pi_n)/N$ 接近连续功能 $S(x)$ 带有固定的Hamilton-Jacobi方程

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

与

$$\begin{aligned} H(x, p) &= ax(1-x)(e^p - 1) + bx(e^{-p} - 1) \\ &= x(1 - e^{-p})[a(1-x)e^p - b] \end{aligned} \quad (2)$$

(Assaf和Meerson, 2010, (12) 和§IV.D.3)。更确切地说, 水平分支 $H = 0$ 与 $a(1-x)e^p - b = 0$ 导致公式

$$S(x) = x \log(b/a) + x + (1-x) \log(1-x) + \text{constante}. \quad (3)$$

该功能在以下情况下具有最小值 $x = x^* = 1 - b/a$ , 带有 $x^* > 0$ 因为 $b < a$ 。最后

$$c = S(0) - S(x^*)$$

是势阱 $x = 0$ 处的底部和边缘之间的高度 $S(x)$ 。等效地, 哈密顿系统

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (4)$$

有一条连接  $(x^*, 0) = (1 - \frac{b}{a}, 0)$  和  $(0, p^*) = (0, \log \frac{b}{a})$ 。数字  $c$  等于动作

$$\int_{x^*}^0 p dx$$

沿着这个轨道。BKW方法已用于物理或种群生物学中的其他出生和死亡过程（Ovaskainen和Meerson, 2010；Kamenev, 2011）。

在他们对带有支化和灭绝的化学反应的研究中（Escudero和Rodríguez, 2008年），显示出时间上的周期性环境如何影响杂环的轨道，该轨道在灭绝的平均时间内起着核心作用。（Assaf et al., 2008）更详细地研究了同一模型，特别是计算了由于小幅度，低频或高频的周期性干扰而导致的平均消光时间的校正。这些作者获得了可用于具有亚稳定性的其他出生和死亡过程的通用公式。此外，（Billings等人, 2013, 图7）显示了周期性SIS随机模型的蒙特卡洛模拟。

此处的目的是将（Assaf等人, 2008年）使用的BKW方法应用于周期为 $T$ 的周期性接触率的SIS流行病模型，该接触率的平均值大于 $b$ 。这样的模型可以代表例如不赋予免疫力的细菌感染的传播。传播可以在每周定期（与周末关联）或每年定期（与假期和季节性关联）的学校中进行。当然，这只是迈向更现实的模型的第一步。

在第2节中，非正式计算表明平均灭绝时间  $\tau$ （例如，从在时间0被感染的人开始）

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C = \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+) - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x). \quad (5)$$

这里， $S^*(t, x)$  是Hamilton-Jacobi方程的周期 $T$ 的粘度的解

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

与混合边缘条件Dirichlet-“约束状态”

$$S(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty.$$

$S(t, x)$  在  $x = 0$  附近不能等于零。必须从粘性的角度来理解边缘条件（Barles, 1994），因为  $S^*(t, 0^+)$  可能不等于0。哈密顿量  $H(t, x, p)$  与 (2) 相同，除了常量参数  $a$  被替换为  $a(t)$ 。用

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t)), \quad \omega = 2\pi/T, \quad a_0 > b, \quad |\varepsilon| \leq 1,$$

我们定义  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$ 。按照（Assaf et al., 2008）的方法，第2节显示

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}$$

如果  $\varepsilon$  接近0,

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0)$$

如果  $\omega \ll a_0$  和

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0)$$

在高频范围内  $\omega \gg a_0$ 。我们可以推测  $C > 0$  只要  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ 。  $C$  可能总是小于  $c_0$ ，因为季节性变化往往有利于传染病的灭绝。这更准确地表明，周期性环境导致SIS模型的平均灭绝时间呈指数下降，这与分支和an灭模型获得的结果相似（Assaf等，2008）。第三节通过数值模拟说明了这些结果。第4节增加了一些说明。

## 2.分析计算

### 2.1 Hamilton-Jacobi偏微分方程

**掌握方程式和浮球理论。**  $N$ 是总人口，假设为常数。我们定义

- $S(t)$ ，健康人数
- $I(t)$ ，感染人数

在时间吨，与  $N = S(t) + I(t)$ 。如果我们  $I(t) = n$ ，

- 很有可能  $bndt + o(dt)$ ，一个人als愈
- 很有可能  $a(t)n(1 - n/N)dt + o(dt)$ ，一个人被感染

在  $t$ 和  $t + dt$ 之间。  $a(t)$ 是接触率。  $b$ 是治愈率。我们认为  $a(t)$ 是周期的连续，周期函数  $\dot{t}$ ，正与

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt - b > 0,$$

换一种说法

$$R_0 = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt}{b} > 1.$$

对于生物学的解释  $R_0$ ，请参阅（Bacaër和Ait Dads, 2012年）。（Hethcote, 1973）注意到  $r > 0$ （即  $R_0 > 1$ ）是该平均场方程解收敛为周期和正函数的必要和充分条件：

$$\frac{di}{dt} = a(t)i(1 - i) - bi.$$

否则，解收敛到零。

$P_n(t)$  是概率  $I(t) = n$ 。我们有

$$\frac{dP_n}{dt} = a(t)(n - 1)(1 - (n - 1)/N)P_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]P_n + b(n + 1)P_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (7)$$

这里，  $P_{-1} = 0$  和  $P_{N+1} = 0$ 。当然，

$$\sum_{n=0}^N P_n(t) = 1.$$

系统 (7) 也写成

$$\frac{dP}{dt} = M(t)P.$$

$P(t)$  是向量  $(P_n(t))_{0 \leq n \leq N}$  和  $M(t)$  是大小为  $N + 1$  的方阵

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b - a(t)(1 - \frac{1}{N}) & 2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(t)(1 - \frac{1}{N}) & -2b - 2a(t)(1 - \frac{2}{N}) & 3b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -bN \end{pmatrix}.$$

该矩阵具有块结构

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & Q(t) \end{pmatrix}.$$

$Q(t)$  是大小为  $N$  的方阵。  $X(t)$  和  $Y(t)$  是与矩阵

$$\frac{dX}{dt} = M(t) X, \quad X(0) = I_{N+1}$$

$$\frac{dY}{dt} = Q(t) Y, \quad Y(0) = I_N.$$

$I_N$  是大小为  $N$  的恒等矩阵。的浮球乘数  $M(t)$ ，即单峰矩阵的特征值  $X(T)$  是  $\{\mu_0 = 1\}$  和 Floquet 乘数  $Q(t)$ 。矩阵  $Q(t)$  是合作的：对角线之外的系数为正或零。该矩阵也是不可约的，因为对角线上方和下方的元素都严格为正。因此，所有要素  $Y(t)$  严格肯定  $t > 0$ 。根据 Perron 和 Frobenius 定理，特征值  $\mu_1$  的  $Y(T)$  具有最大实部的是严格的正实数，并且相关的本征空间的维数为 1。此外，

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1) Q(t) = (-b \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

我们有  $0 < \mu_1 < 1$  (Aronsson 和 Kellogg, 1978 年) 和  $\lambda_1 = (\log \mu_1)/T < 0$ 。向量  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  是稳定状态。  $P(t)$  如果收敛到这个向量  $t \rightarrow +\infty$ 。这里的目的是估计  $N$  个大点之间的接近度  $\lambda_1$  和 0。

令  $v$  为的特征向量  $X(T)$  与特征值相关  $\mu_1 = e^{\lambda_1 T}$ 。我们可以选择  $v$  使  $v_n > 0$ ,  $1 \leq n \leq N$ 。因此，我们有

$$X(T)v = e^{\lambda_1 T} v.$$

按照弗洛奎特的理论，我们定义

$$\pi(t) = e^{-\lambda_1 t} X(t)v.$$

然后我们有

$$\frac{d\pi}{dt}(t) = -\lambda_1 \pi(t) + M(t)\pi(t).$$

此外

$$\pi(T) = e^{-\lambda_1 T} X(T)v = v = \pi(0).$$

所以  $\pi(t)$  是周期  $T$  的周期函数。用  $\pi(t) = (\pi_n(t))_{0 \leq n \leq N}$ ，我们有

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = a(t)(n-1)(1 - (n-1)/N)\pi_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1}. \quad (8)$$

通过对这些方程求和，我们得到

$$\lambda_1 \sum_{n=0}^N \pi_n(t) + \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0.$$

所以我们有

$$\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=0}^N \pi_n(0).$$

但  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t)$  是周期  $T$  的周期函数。因此  $\sum_{n=0}^N \pi_n(0) = 0$  和  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0 \forall t$ 。所以我们有

$$\pi_0(t) = - \sum_{n=1}^N \pi_n(t).$$

但是 (8) 与  $n = 0$  还表明

$$\lambda_1 \pi_0(t) + \frac{d\pi_0}{dt} = b \pi_1(t).$$

因为  $\pi_0(t)$  是周期性的，我们通过积分

$$\lambda_1 = b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\int_0^T \pi_0(t) dt} = -b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt}. \quad (9)$$

**BKW解和Hamilton-Jacobi方程。** 当  $N$  大时，让我们寻找BKW解决方案

$$\pi_n(t) \simeq e^{-NS(t,x)}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

与  $x = n/N$ 。  $S(t, x)$  是  $t$  和  $x$  if  $(, 0 < x < 1 )$  的连续函数，这是周期  $T$  相对于  $t$  的周期。然后我们有

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_n}{dt} &\simeq -N \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) e^{-NS(t,x)}, \\ \pi_{n+1}(t) &\simeq e^{-NS(t, x + \frac{1}{N})} \simeq e^{-NS(t,x) - \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}, \quad \pi_{n-1}(t) \simeq e^{-NS(t,x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}. \end{aligned}$$

我们定义  $\alpha(t, x) = a(t)x(1-x)$  和  $\beta(x) = bx$ 。所以写了 (8)

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = N\alpha(t, x - 1/N)\pi_{n-1} - N[\alpha(t, x) + \beta(x)]\pi_n + N\beta(x + 1/N)\pi_{n+1}.$$

通过仅保留主要表达，我们可以使用  $\alpha(t, x - 1/N) \simeq \alpha(t, x)$  和  $\beta(x + 1/N) \simeq \beta(x)$  要得到

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} \simeq N\alpha(t, x)[\pi_{n-1} - \pi_n] + N\beta(x)[\pi_{n+1} - \pi_n].$$

$\lambda_1$  可能成倍缩小。可以在左侧忽略它。通过注入BKW形式并除以  $N e^{-NS(t,x)}$ ，我们得到了汉密尔顿-雅各比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a(t)x(1-x) \left[ e^{\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] + bx \left[ e^{-\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (10)$$

形式为 (6) 具有周期性哈密顿  $H(t, x, p)$  由 (2) 给出  $a(t)$  取代  $a$ 。等式 (10) 通常具有以下形式的渐近解  $S(t, x) = -Et + \Sigma(t, x)$ 。  $\Sigma(t, x)$  是周期的周期函数  $T$  相对于  $t$  和  $E$  是常数。但是，这里只有解决方案  $E = 0$  令人感兴趣：它们对应于下面第2.2节的异宿轨道。

**边缘条件。** 因为  $H(t, 0, p) = 0$ ，我们有  $\frac{\partial S}{\partial t}(t, 0) = 0$ 。  $S(t, 0)$  因此是一个常数  $S_0$  与  $t$  无关。如 (10) 只涉及一阶偏导数，其解决方案是一种添加剂常数内定义为（记住，本征向量  $v$  的  $X(T)$  被定义为一个乘法常数。所以我们可以选择  $S_0 = 0$ ，因此Dirichlet条件：

$$S(t, 0) = 0 \quad \forall t. \quad (11)$$

另外, 因为  $\pi_n(t) = 0 \forall n > N$  并且因为公式 (3) 在恒定的环境中表明  $|S(1)| < +\infty$  而  $\frac{dS}{dx}(1) = +\infty$ , 我们强加

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty \quad \forall t. \quad (12)$$

在边缘呈现这种情况的另一种方法是“状态约束”

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

如果  $x = 1$ 。该条件导致  $x = 1$  到

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) \geq 0$$

(Soner, 1986)。但是因为

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p},$$

当且仅当  $x = 1$  时, 此表达式为正或零  $p = +\infty$ , 如 (12) 所示。

**哈密顿量的性质。**  $H(t, x, p)$  在  $p$  中是凸的, 因为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p + bxe^{-p} \geq 0.$$

此外,  $H(t, x, p) \rightarrow +\infty$  如果  $|p| \rightarrow +\infty$  规定  $0 < x < 1$ 。但是, 当  $x = 0$  要么  $x = 1$ 。我们有  $H(t, x, 0) = 0$ 。拉格朗日是

$$L(t, x, v) = \max_p \{pv - H(t, x, p)\}.$$

我们有  $0 < x < 1$

$$L(t, x, v) = p_*v - H(t, x, p_*).$$

$p_*$  是唯一的解决方案

$$v = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p_*) = a(t)x(1-x)e^{p_*} - bxe^{-p_*}.$$

它是2中的2阶多项式方程  $e^{p_*}$ 。这给

$$\begin{aligned} L(t, x, v) &= p_*v - a(t)x(1-x)(e^{p_*} - 1) - bx(e^{-p_*} - 1) \\ &= v \log\left(\frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2a(t)x(1-x)}\right) + a(t)x(1-x) + bx \\ &\quad - \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2} - \frac{2a(t)x(1-x)bx}{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}. \end{aligned}$$

对于  $x = 1$ , 我们有

- $L(t, 1, v) = +\infty$  如果  $v > 0$
- $L(t, 1, 0) = b$
- $L(t, 1, v) = -v \log(-v/b) + v + b$  如果  $v < 0$ 。

对于  $x = 0$ , 我们有

- $L(t, 0, v) = +\infty$  如果  $v \neq 0$
- $L(t, 0, 0) = 0$ .

对于接近0的  $x$ , 请注意  $L(t, x, v) \sim -v \log x$ . 因此对于  $\eta > 0$  小巧, 适合任何功能  $\xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1])$  与  $\xi(\theta) = 0$ , 我们有

$$\int_{\theta}^{\theta+\eta} L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds \simeq - \int_{\theta}^{\theta+\eta} \frac{d\xi}{ds}(s) \log \xi(s) ds = - \int_0^{\xi(\theta+\eta)} \log \xi d\xi,$$

这不是无限的。

**汉密尔顿-雅各比方程的解。** 对于给定的初始条件  $S_0(x)$ , 功能

$$S(t, x) = \inf \left\{ \int_{\theta}^t L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds + 1_{\theta=0} S_0(\xi(\theta)); \right. \\ \left. 0 \leq \theta \leq t, \xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1]), \theta = 0 \vee \xi(\theta) = 0, \xi(t) = x \right\}$$

是 (10) 的粘度溶液, 在边缘具有混合条件 (11) - (12), 并且具有  $S(0, x) = S_0(x)$  (Barles, 1994)。它是出口时间问题的价值函数  $x = 0$  带有“状态约束”  $x = 1$ 。定期解决方案  $S^*(t, x)$  因此, (10) - (11) - (12) 的值由上面的演化算子的一个固定点给出:  $S^*(0, x) = S^*(T, x)$ 。(Roquejoffre, 2001) 和 (Mitake, 2009) 研究了相似的周期Hamilton-Jacobi方程, 条件为Dirichlet类型的边缘。但是请注意, 没有唯一性。有关相关问题, 请参见 (Barles和Perthame, 1988年)。确实, 考虑特殊情况  $a(t) = a_0$  是恒定的。在这种情况下, 有两种类型的固定粘度溶液  $S^*(x)$ 。

- 一方面有形式的解决方案

$$x \log(b/a_0) + x + (1 - x) \log(1 - x) + \gamma$$

用一个常数  $\gamma \leq 0$ , 仅通过常数  $\gamma$  有所不同。解决方案  $\gamma = 0$  是经典意义上唯一检查  $x = 0$  边缘条件的人。

- 另一方面, 存在以下形式的解决方案

$$\min\{0, x \log(b/a_0) + x + (1 - x) \log(1 - x) + \gamma\}$$

常数为  $\gamma$   $0 < \gamma \leq c_0$ 。这些解决方案都是相同的接近零  $X = 0$ , 不给  $C$ 。

对于在边缘处具有混合条件 (11) - (12) 的周期方程 (10), 我们可以推测它具有粘性解

- 它们是周期  $T$  相对于  $t$  的周期,
- 在  $x = 0$  附近不是相同的零,
- 它们仅相差一个常数 (因此给出相同的  $C$ )。

我们选择这种解决方案作为BKW解决方案。如下图3所示, 必须从粘度的角度理解  $x = 0$  边缘处的条件, 因为溶液可能在  $x = 0$  处不是连续的。

**的行为  $\lambda_1$  如果  $N$  大。** 回到 (9), 我们有

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} = \frac{\log b}{N} + \frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) - \frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right).$$

我们有

$$\pi_1(t) \simeq e^{-NS^*(t,1/N)} \simeq e^{-NS^*(t,0^+)}$$

为 $N$ 大。所以我们有

$$\frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+)$$

因为拉普拉斯的积分渐近评估公式。同样，因为  $\pi_n(t) \simeq e^{-NS^*(t,n/N)}$ ，我们有

$$\frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x)$$

和

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -C$$

用 (5) 给出的 $C$ 。我们可以推测  $C > 0$  当且仅当  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ 。

**平均灭绝时间。** 从在时间 $t$  (平均灭绝时间) 被感染的 $n$ 个人开始  $\tau_n(t)$  是系统周期 $T$ 的周期解

$$-1 = \frac{d\tau_n}{dt} + b n \tau_{n-1} - (a(t)n(1 - n/N) + b n) \tau_n + a(t)n(1 - n/N) \tau_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (13)$$

与  $\tau_0(t) = 0$ 。该系统涉及转置矩阵  $Q^*(t)$  矩阵的  $Q(t)$ 。我们定义

- $\hat{\tau}(t) = (\tau_n(t))_{1 \leq n \leq N}$
- $\hat{\pi}(t) = (\pi_n(t))_{1 \leq n \leq N}$
- $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  实向量的通常标量积。

然后我们有

$$\lambda_1 \hat{\pi} + \frac{d\hat{\pi}}{dt} = Q(t) \hat{\pi}, \quad -\mathbf{1} = \frac{d\hat{\tau}}{dt} + Q^*(t) \hat{\tau}.$$

和

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle = \left\langle \frac{d\hat{\pi}}{dt}, \hat{\tau} \right\rangle + \left\langle \hat{\pi}, \frac{d\hat{\tau}}{dt} \right\rangle = \langle Q(t) \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \lambda_1 \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle - \langle \hat{\pi}, Q^*(t) \hat{\tau} \rangle.$$

带有的表达式  $Q(t)$  和  $Q^*(t)$  互相抵消。通过积分和使用频率  $\hat{\pi}(t)$  和  $\hat{\tau}(t)$ ，我们获得

$$-\lambda_1 = \frac{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle dt}{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle dt}.$$

这表明平均灭绝时间 $\tau$  (例如，从受感染者在时间0开始) 的数量级与  $-1/\lambda_1$ ：

$$\frac{\log(\tau)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C.$$

可以猜想，这种基本的非正式分析可以严格地进行，就像在恒定环境中的SIS模型一样 (Nåsell, 2011年)。

## 2.2 杂环轨道



**一般情况。**回想一下，汉密尔顿-雅各比方程 (6) 可以至少局部地通过射线跟踪求解，即同时求解汉密尔顿系统 (4) 和方程

$$\frac{dz}{dt} = p(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t)) - H(t, x(t), p(t))$$

有初始条件  $x(0) = x_0$ ,  $p(0) = \frac{\partial S}{\partial x}(0, x_0)$ ,  $z(0) = S(0, x_0)$ , 以便  $z(t) = S(t, x(t))$ 。接下来 (Assaf等, 2008), 让我们更仔细地研究汉密尔顿系统 (4)。在目前情况下,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) &= a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p}, \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) &= a(t)(1-2x)(e^p - 1) + b(e^{-p} - 1). \end{aligned} \quad (14)$$

让我们首先寻找周期  $T$  的周期非平凡解,  $x \equiv 0$  和

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, 0, p) = -(a(t) - be^{-p})(e^p - 1).$$

用  $p = \log(1 + q)$ , 我们获得了可以轻松求解的伯努利微分方程。这给出了周期  $T$  的周期解

$$p^*(t) = \log \left( 1 + \left[ \frac{e^{-bt + \int_0^t a(s) ds}}{e^{p^*(0)} - 1} + \int_0^t a(s) e^{-b(t-s) + \int_s^t a(u) du} ds \right]^{-1} \right),$$

与

$$p^*(0) = \log \left( 1 + \frac{1 - e^{-bT + \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(s) e^{-b(T-s) + \int_s^T a(u) du} ds} \right).$$

周期解  $(0, p^*(t))$  不稳定。的确,  $x(t) = \tilde{x}(t)$  和  $p(t) = p^*(t) + \tilde{p}(t)$  通过线性化方程, 我们得到

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)} & 0 \\ 2a(t)(e^{p^*(t)} - 1) & -a(t)e^{p^*(t)} + be^{-p^*(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

浮球乘数为

$$f = \exp \int_0^T [a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)}] dt$$

和  $1/f$ , 因此不稳定。不稳定性也可以看作是Liouville定理的结果, 该定理涉及在哈密顿流作用下相空间  $(x, p)$  中“体积”的不变性。

其次, 让我们为周期的不平凡的, 周期解一下牛逼, 与  $p \equiv 0$  和

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, 0) = a(t)x(1-x) - bx.$$

这是SIS模型的平均场方程。唯一的非零周期解是

$$x^*(t) = \left( \frac{1}{x^*(0)} e^{bt - \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t a(u) e^{b(t-u) - \int_u^t a(s) ds} du \right)^{-1}$$

与

$$x^*(0) = \frac{1 - e^{bT - \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(u) e^{b(T-u) - \int_u^T a(s) ds} du}. \quad (15)$$

周期解  $(x^*(t), 0)$  也是不稳定的 的确,  $x(t) = x^*(t) + \tilde{x}(t)$  和  $p(t) = \tilde{p}(t)$  通过线性化方程, 我们得到

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)(1 - 2x^*(t)) - b & a(t)x^*(t)(1 - x^*(t)) + bx^*(t) \\ 0 & -a(t)(1 - 2x^*(t)) + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Floquet乘法器再次彼此相反, 因此不稳定。

从第1节中回想起, 在恒定的环境中, 相平面  $(x, p)$  中存在一条连接静止点的杂线轨道  $(x^*, 0) = (1 - b/a, 0)$  和  $(0, p^*) = (0, \log(b/a))$  如果  $a > b$ 。 (Escudero和Rodríguez, 2008) 发现了相似的异斜轨轨道, 用于相同粒子的分支和an灭的周期性模型, 至少对于小幅度的周期性扰动而言。所以我们可以希望存在一个杂环轨道  $(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$ , 它连接周期解  $(x^*(t), 0)$  和  $(0, p^*(t))$ 。存在可以使用变分方法来证明 (Rabinowitz, 1994)。该特殊轨道可以通过发射方法以数字方式获得。根据 (Assaf等人, 2008, 公式 (20) ) ,

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{p}(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) - H(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) \right] dt. \quad (16)$$

该积分可以通过数值评估。

**干扰法。** 如果功能  $a(t)$  是一个常数  $a_0$ , 所以  $(\hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))$  是连接静止点的杂环轨道  $(x^*, 0) = (1 - b/a_0, 0)$  和  $(0, p^*) = (0, \log(b/a_0))$ 。这个轨道是这样的  $a_0(1 - x)e^p - b = 0$ , 如 (2) 所示。使用该方程式将  $p$  表示为  $x$  的函数, 并将结果插入到 (4) 的第一个方程式中, 我们得到

$$\frac{dx}{dt} = bx - a_0x(1 - x).$$

解决方法是

$$x(t) = \left[ \frac{1}{x(t_0)} e^{(a_0-b)(t-t_0)} + \frac{a_0}{a_0 - b} (1 - e^{(a_0-b)(t-t_0)}) \right]^{-1}.$$

通过选择例如  $x(t_0) = (1 - b/a_0)/2$ , 我们获得

$$\hat{x}_0(t) = \frac{1 - b/a_0}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_0(t) = \log \frac{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)} a_0/b}.$$

现在假设

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \phi(t))$$

与  $a_0 > b$ ,  $\varepsilon$  小而  $\phi(t)$  具有的周期函数  $\int_0^T \phi(t) dt = 0$ 。哈密顿量可以用以下形式表示

$$H(t, x, p) = H_0(x, p) + \varepsilon H_1(t, x, p).$$

$H_0(x, p)$  与 (2) 相同, 除了  $a_0$  取代  $a$ 。

$$H_1(t, x, p) = a_0 \phi(t) x(1 - x)(e^p - 1).$$

用  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$ ,

$$C \simeq \min_{t_0} \Gamma(t_0), \quad \Gamma(t_0) = c_0 - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt, \quad \varepsilon \simeq 0$$

(Assaf et al. , 2008, 公式 (24) ) 。在目前情况下,  $(1 - \hat{x}_0)e^{\hat{p}_0} = b/a_0$ 。所以我们有

$$\begin{aligned}\Gamma(t_0) &= c_0 - \varepsilon a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \hat{x}_0(t) [b/a_0 - 1 + \hat{x}_0(t)] dt \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t_0 + u/(a_0 - b)) \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du.\end{aligned}$$

$\Gamma(t_0)$  因此是周期函数  $t_0$  与  $\int_0^T \Gamma(t_0) dt_0 = 0$ 。考虑下的傅立叶分解  $\phi(t)$ ,

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t},$$

与  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\phi_0 = 0$  因为平均  $\phi(t)$  是零, 并且  $\phi_{-k} = \bar{\phi}_k$  (共轭复数)。然后我们有

$$\begin{aligned}\Gamma(t_0) &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k i \omega u}{a_0 - b}} \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \frac{\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}}{\sinh\left(\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}\right)}\end{aligned}$$

(参见附录)。特别是如果  $\phi(t) = \cos(\omega t)$ , 我们有  $\phi_{\pm 1} = 1/2$  和  $\phi_k = 0$  如果不。所以我们有

$$\Gamma(t_0) = c_0 + \varepsilon \frac{\pi \omega \cos(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}. \quad (17)$$

像 (Escudero和Rodríguez, 2008) 和 (Assaf等, 2008) 一样, 受干扰的系统具有以下形式:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x}. \quad (18)$$

$\hat{x}_0(t)$  和  $\hat{p}_0(t)$  仅取决于  $t - t_0$ 。因此, 梅尔尼科夫的职能是

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_0}{\partial x} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt_0} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt_0} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dt_0}.\end{aligned}$$

使用 (17), 我们得到

$$\mathcal{M}(t_0) = \frac{\pi \omega \sin(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}.$$

$\mathcal{M}(t_0)$  越过  $0$   $t_0 = k\pi/\omega$  ( $k$ 为整数)。因此, 至少在  $\varepsilon$  小。

最小值  $\Gamma(t_0)$  在 (17) 中获得  $t_0 = T/2$  如果  $\varepsilon > 0$  和为  $t_0 = 0$  如果  $\varepsilon < 0$ 。在两种情况下, 我们得到

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}, \quad \varepsilon \simeq 0, \quad (19)$$

如简介中所宣布。请注意, (19) 与 (Kamenev, 2011) 的方程式 (4.76) 类似, 该方程式是从稍微不同的哈密顿量获得的。如果  $\omega$  小 ( $T$ 大)  $\omega \ll a_0$ , 则 (19) 表示

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0), \quad (20)$$

独立于  $\omega$ 。该公式与在 (1) 中获得的公式相同  $a = a_0(1 - |\varepsilon|)$  :

$$\frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} - 1 - \log \frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} = \frac{b}{a_0} - 1 - \log \frac{b}{a_0} - |\varepsilon|(1 - b/a_0) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \simeq 0.$$

正如 (Assaf等人, 2008, 第四节) 的“绝热逼近”一样, 期望公式 (20) 不仅对  $\varepsilon \simeq 0$ , 而且只要  $\omega \ll a_0$  并且 (20) 的右侧为正。因为  $\sinh(x) \geq x \forall x \geq 0$ , 我们可以注意到, 由 (20) 给出的  $C$  的近似值始终低于 (19) 给出的  $C$  的近似值。

**高频率限制。** 现在假设  $\omega \gg a_0$ , 总是  $\phi(t) = \cos(\omega t)$ 。系统 (18) 已编写

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p}(x, p) + a_0 \varepsilon \cos(\omega t) x(1 - x) e^p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}(x, p) - a_0 \varepsilon \cos(\omega t) (1 - 2x)(e^p - 1). \end{aligned}$$

使用Kapitsa方法 (Assaf等, 2008, 第III.B节),

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad p(t) = Y(t) + \eta(t),$$

其中  $X$  和  $Y$  是慢变量, 而  $\xi$  和  $\eta$  很小, 但振荡快。快速振荡的表达式给出:

$$\frac{d\xi}{dt} \simeq a_0 \varepsilon \cos(\omega t) X(1 - X) e^Y, \quad \frac{d\eta}{dt} \simeq -a_0 \varepsilon \cos(\omega t) (1 - 2X)(e^Y - 1).$$

我们假设  $X$  和  $Y$  在短暂振荡期间是恒定的,  $T = 2\pi/\omega$ 。我们获得

$$\xi(t) \simeq \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X) e^Y, \quad \eta(t) \simeq -\frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X)(e^Y - 1).$$

这表明转型

$$\begin{aligned} x &= X + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X) e^Y \\ p &= Y - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \Phi(t, X, Y). \end{aligned}$$

$\Phi(t, X, Y)$  选择使得变换几乎是规范的, 也就是说, 泊松括号满足条件

$$\{x, p\} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial p}{\partial X} = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \quad (21)$$

因为

$$\begin{aligned} \{x, p\} &= \left[ 1 + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X) e^Y \right] \left[ 1 - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X) e^Y + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X) e^Y \right] \left[ 2 \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right], \end{aligned}$$

条件 (21) 被写入

$$\begin{aligned} \{x, p\} &= 1 - \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) (1 - 2X)^2 e^{2Y} + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \\ &\quad - 2 \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) X(1 - X) e^Y (e^Y - 1) + o(a_0^2/\omega^2) = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \end{aligned}$$

所以我们有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 e^{2Y} + 2X(1 - X)e^Y(e^Y - 1)].$$

要得到  $\Phi(t, X, 0) = 0$ , 我们必须选择

$$\Phi(t, X, Y) = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 (e^{2Y} - 1)/2 + X(1 - X)(e^Y - 1)^2].$$

生成功能  $F_2(t, x, Y)$  这种转变,

$$\frac{\partial F_2}{\partial Y} = X + o(a_0^2/\omega^2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = p + o(a_0^2/\omega^2),$$

是 (谁) 给的

$$F_2(t, x, Y) = xY - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) x(1 - x)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \sin^2(\omega t) x(1 - x)(1 - 2x)(e^{2Y} - 1).$$

用  $H(t, x, y) = h(t, X, Y)$ , 新的哈密顿量为

$$h(t, X, Y) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

我们有  $T = 2\pi/\omega$ . 用这个哈密顿量的平均值, 第二个表达式被取消, 因为

$$\int_0^T \frac{\partial F_2}{\partial t} dt = 0$$

只有有效的汉密尔顿遗迹

$$\bar{H}(X, Y) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t, X, Y) dt.$$

使用以下事实进行费力的计算:  $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = 1/2$  导致

$$\bar{H}(X, Y) \simeq X(1 - e^{-Y}) \left[ a_0(1 - X)e^Y - b + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \left\{ -a_0 X(1 - X)^2 e^{2Y} + b(1 - X)(1 - 2X)e^Y - bX(1 - X)(e^Y - 1) - b(1 - 2X)^2 \right\} \right].$$

通过将方括号中的项强加为零, 可以得到受干扰的杂环线。该轨道连接  $(X_\varepsilon^*, 0)$  和  $(0, Y_\varepsilon^*)$ , 带有

$$X_\varepsilon^* \simeq (1 - b/a_0) \left[ 1 - \frac{b(a_0 - b)\varepsilon^2}{2\omega^2} \right], \quad Y_\varepsilon^* \simeq \log(b/a_0) + \frac{a_0(a_0 - b)\varepsilon^2}{2\omega^2}.$$

沿着这条斜线轨道的动作是

$$C = \int_{X_\varepsilon^*}^0 Y dX.$$

另一个繁琐的计算最终导致

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0), \quad (22)$$

如简介中所宣布。因为函数  $z \mapsto (1-z)^2(1+2z)$  在间隔内小于  $1 < z < 1$ ,  $C$  的更正项始终小于  $\frac{a_0^2 \varepsilon^2}{12\omega^2}$ 。它很小, 因为  $\omega \gg a_0$  通过假设。可以预期, 遭受高频干扰的人群几乎不依赖于这种干扰的幅度。

### 3.数值计算

**浮球乘法器。**  $\lambda_1$  通过使用诸如Scilab之类的软件来计算主方程的Floquet乘数, 可以直接估算出该方程, 该软件可以求解常微分方程并以数值方式计算矩阵的特征值。  $e^{\lambda_1 T}$  是具有第二大实部的特征值, 第一个为1。然后可以绘制  $-\log(-\lambda_1)$  根据  $\tilde{N}$ 。该曲线的斜率提供了  $C$  的近似值。

**杂环轨道。** 至于 (Assaf等, 2008), 人们可以得到连接的轨道。  $(x^*(t), 0)$  和  $(0, p^*(t))$  通过射击方法。我们采取初始条件  $x^*(0)$  由 (15) 给出, 并且非常小的负值  $p(0)$ 。我们改变这个值直到得到解决方案  $(x(t), p(t))$  这往往会变成周期性的, 也就是说  $x(t)$  接近0且  $p(kT)$  近  $p^*(0)$  对于  $k$  大 (但不太大, 以避免数值不稳定)。然后我们可以使用积分 (16) 来计算  $C$  数值。

**偏微分方程。** 也可以计算周期解  $S^*(t, x)$  哈密顿-雅各比方程 (6) 的计算方法是使用粘度解理论的数值方法。我们定义

- $\Delta t$  时间步
- $\Delta x$  空间离散化步骤
- $S_j^m$  近似  $S(m\Delta t, j\Delta x)$ , 其中  $j$  和  $m$  是使得  $m \geq 0$  和  $0 \leq j \leq J$  与  $J = 1/\Delta x$ 。

我们可以使用戈杜诺夫的方法

$$\frac{S_j^{m+1} - S_j^m}{\Delta t} + \mathcal{H}\left(m\Delta t, j\Delta x, \frac{S_j^m - S_{j-1}^m}{\Delta x}, \frac{S_{j+1}^m - S_j^m}{\Delta x}\right) = 0,$$

哈密顿  $\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+)$  是 (谁) 给的

$$\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+) = \begin{cases} \min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\}, & p^- < p^+, \\ \max\{H(t, x, p); p^+ \leq p \leq p^-\}, & p^+ \leq p^- \end{cases}$$

(Osher and Shu, 1991)。因为  $H(t, x, p)$  相对于  $p$  是凸的, 涉及最大值的第二个表达式等于

$$\max\{H(t, x, p^+), H(t, x, p^-)\}.$$

对于涉及最小值的第一个表达式, 请注意 (14)  $H(t, x, p)$  如果  $p$  有一个最小值  $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ , 即

$$p = p^\sharp = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a(t)(1-x)}.$$

所以我们有

$$\min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\} = \begin{cases} H(t, x, p^+), & p^- < p^+ \leq p^\sharp, \\ H(t, x, p^-), & p^\sharp \leq p^- < p^+, \\ H(t, x, p^\sharp), & p^- \leq p^\sharp \leq p^+. \end{cases}$$

对于边缘条件, 我们采取

$$S_0^m = 0, \quad (S_J^m - S_{J-1}^m)/\Delta x = K$$

的  $K$  值很高。时间步  $\Delta t$  为了满足Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件, 与  $\Delta x$  相比必须足够小。作为初始条件, 我们采取了

$$S(0, x) = x \log(b/a_0) + x + (1 - x) \log(1 - x),$$

也就是说，常规的固定解何时  $a(t)$  由其平均时间代替。我们也可以选择一个常数函数  $S(0, x) = \sigma \sigma$  相当负，但是到周期状态的收敛会变慢。常数  $\sigma$  必须足够负，以避免在第2节中已经提到的非唯一性问题。一旦非平稳问题的解决方案达到周期状态，我们可以估算

$$C = \min_t S^*(t, 0^+) - \min_{t,x} S^*(t, x).$$

**蒙特卡罗方法。** 平均灭绝时间也可以通过蒙特卡洛方法来估计。我们对随机模拟进行平均。但是请注意，不能使用利用指数分布等待时间的Gillespie算法，因为  $a(t)$  是周期性的。如果  $N$  增加，则消光时间可以变成天文数字。使用此方法未显示结果。

**例子。** 我们猜测

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(2\pi t/T))$$

与  $T = 1$  周。首先让我们考虑一下  $a_0 = 20$  每周和  $b = 5$  每个星期。平均感染时间为  $1/b = 1,4$  天。因此，我们有  $R_0 = a_0/b = 4 > 1$  和  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0) \simeq 0,636$ 。图1显示  $-\log(-\lambda_1)$  作为一个功能  $\tilde{N}$  为  $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$  和  $N = 10, 20, \dots, 60$ ，使用Floquet乘法器计算得出。这些线对应于最后3个点的线性回归  $N = 40, 50, 60$ 。这些线的斜率是  $C$  的估计值，0,524, 0,364 和 0,225 对于  $\varepsilon = 0,2, 0,5$  和 0,8

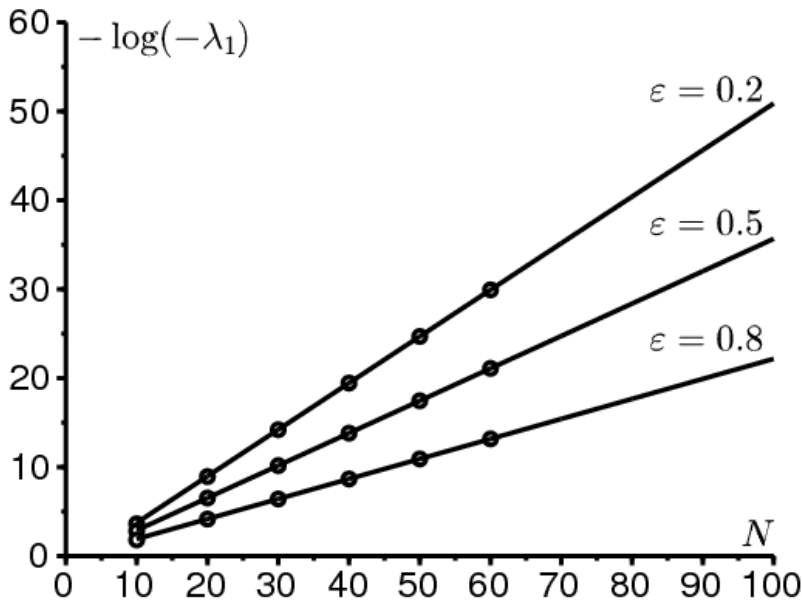


图1.主方程的Floquet乘数的计算： $-\log(-\lambda_1)$  作为一个功能  $\tilde{N}$  为  $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$  和  $N = 10, 20, \dots, 60$ 。数字  $C$  是这些线的斜率。参数值： $T = 1, a_0 = 20, b = 5$ 。

$a_0$  和  $\omega = 2\pi/T$  在此示例中，具有相同的数量级。这是频率的中间情况。因此，我们期望当  $\varepsilon$  较小时，(19) 可以很好地逼近  $C$ 。图2显示了以下曲线与  $\varepsilon$  的关系  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ：

- 使用杂线轨道的  $C$  实线
- 使用带有以下项的偏微分方程的  $C$  的长虚线  $\Delta x = 0,002$  和  $\Delta t = 0,0002$ （几乎无法区分）
- 三个点代表  $C$  的值 图1中获得的
- 近似公式的短虚线 (19)
- 长和短虚线，用于低频近似 (20)。

我们可以看到，即使当 $\varepsilon$ 很小时，近似公式 (19) 仍接近  $C$ 。

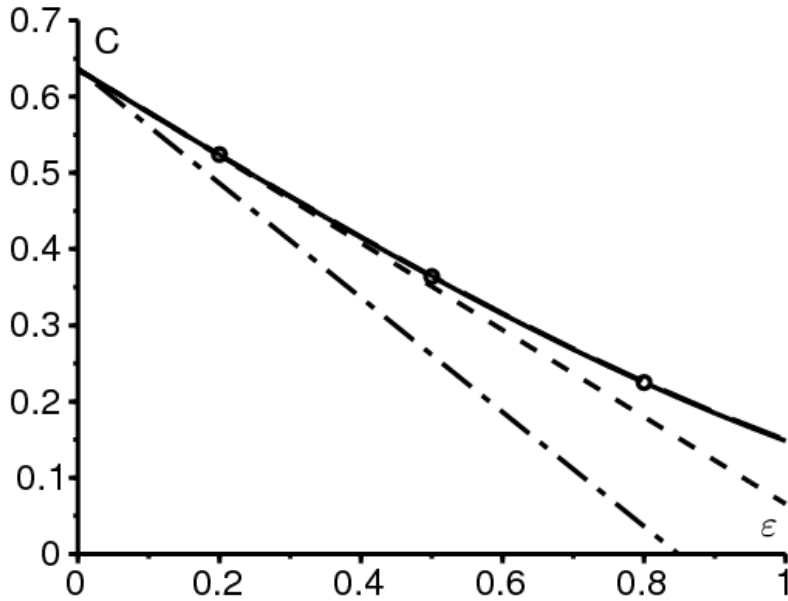


图2.中频：使用杂环曲线[实线]或偏微分方程[长虚线]（两条线几乎无法区分）计算的数 $C$ ，浮点乘数如图1 [点]，近似公式 (19) [短虚线]和低频公式 (20) [长虚线]，具体取决于 $\varepsilon$ 。与图1相同的参数值

图3显示了一个周期性的解决方案  $S^*(t, x)$  哈密顿-雅各比方程的方程式，对于不同的 $t$ 值绘制为 $x$ 的函数，当 $\varepsilon = 0,5$ 。注意解决方案的不连续性  $x = 0$ 。放大至  $x = 0$  会表明  $S^*(t, 0^+)$  实际上是时间上的周期性，因此边界条件  $S^*(t, 0) = 0$  只能在弱小的意义上得到满足。

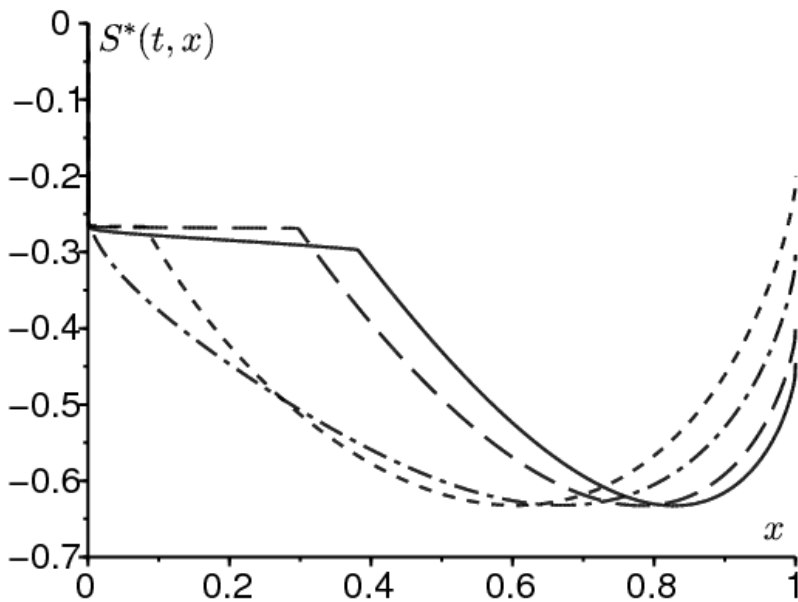


图3.定期解决方案  $S^*(t, x)$  哈密顿-雅可比方程，绘制成的函数的 $x$ 为  $t = 0$ （实线）， $t = T/4$ （长虚线）， $t = T/2$ （短虚线）和  $t = 3T/4$ （长短虚线）。参数值与图1和  $\varepsilon = 0,5$ 。

。



图4考虑了一个高频示例： $a_0 = 2$  每周和  $b = 1$  每个星期。因此，我们有  $R_0 = 2$  和  $c_0 \simeq 0,1931$ 。在这种情况下  $\omega \simeq 6,28$  每周比  $a_0$ 。对于  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ，使用杂散轨道和高频公式 (22) 计算  $C$  数。该协议在整个价值范围内都是好的。最后图5显示了轨道连接  $(x^*(t), 0)$  和  $(0, p^*(t))$  对于相同的参数值  $\varepsilon = 0,1$ 。

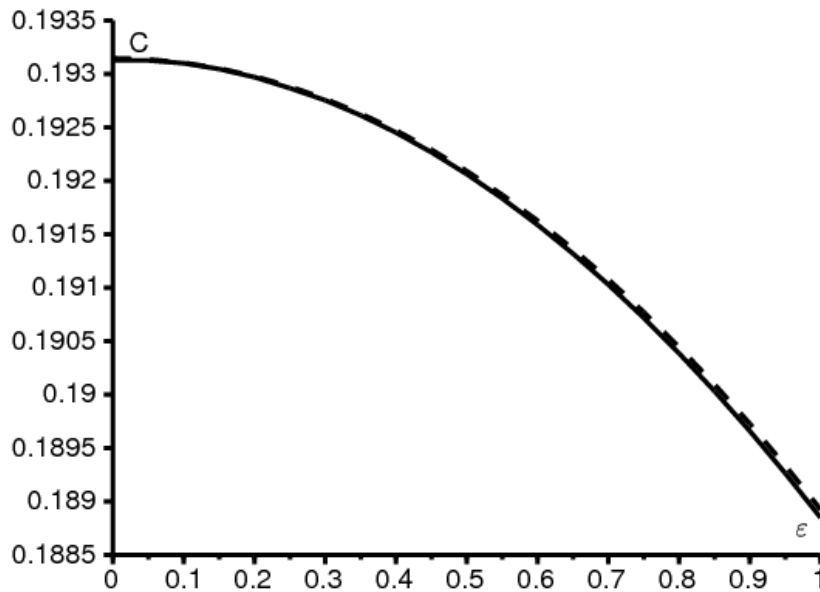


图4.高频状态： $C$ 是根据 $\varepsilon$ 的函数，使用杂环曲线[实线]和高频公式 (22) [虚线]计算的。参数值： $T = 1$ ,  $a_0 = 2$ ,  $b = 1$ 。

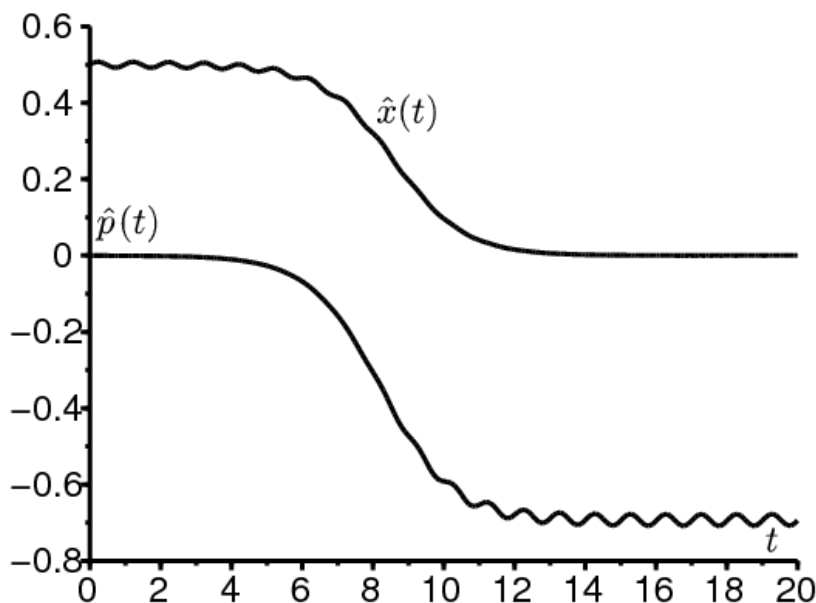


图5.组件  $t \mapsto \hat{x}(t)$  和  $t \mapsto \hat{p}(t)$  两个周期解的杂散轨道的变化  $(0, p^*(t))$  和  $(x^*(t), 0)$ 。与图4中相同的参数值和  $\varepsilon = 0,1$ 。

## 4.注意事项

- 使用改进的BKW解决方案可以获得更精确的估计

$$\pi_n(t) \simeq e^{-N S_0(t, n/N) - S_1(t, n/N)}.$$

通过插入

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-N S_0(t,n/N) - \frac{\partial S_0}{\partial x}(t,n/N) - \frac{1}{2N} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(t,n/N) - S_1(t,n/N) - \frac{1}{N} \frac{\partial S_1}{\partial x}(t,n/N)}$$

和类似的表达  $\pi_{n-1}(t)$  在 (8) 中, 通过分离高阶项, 我们获得了Hamilton-Jacobi方程 (10)  $S_0(t, x)$  和运输方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left[ a(t)x(1-x)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} - bxe^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \right] \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ = a(t)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ 1 - 2x + \frac{x(1-x)}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] + be^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ -1 + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

对于  $S_1(t, x)$ 。如果功能  $a(t)$  是周期性的  $S_0(t, x)$  和  $S_1(t, x)$  必须以数值计算。如果功能  $a(t) = a$  是常数, 则  $\lambda_1$  通过连接渐近展开的方法获得, 如下 (Assaf和Meerson, 2010年)。第一  $S_0(x)$  由 (3) 给出  $S_1(x)$  导致

$$S_1(x) = \log(x\sqrt{1-x}) + \text{const.}$$

所以我们有

$$\pi_n \simeq \kappa \frac{e^{-NS_0(n/N)}}{\frac{n}{N} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}}$$

保持恒定  $\kappa$ 。如果  $n$  小

$$\pi_n \simeq \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0) - nS_0'(0)} = \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0)} \left( \frac{a}{b} \right)^n. \quad (23)$$

对于系统 (8), 我们也可以使用近似值

$$a(n-1)\pi_{n-1} - n(a+b)\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1} \simeq 0, \quad n \geq 1.$$

然后我们有

$$\pi_n \simeq \frac{\pi_1}{n} \frac{1 - (a/b)^n}{1 - a/b} \sim \frac{\pi_1}{n} \frac{(a/b)^n}{a/b - 1}.$$

仅在以下情况下与 (23) 一致  $\pi_1 \simeq \kappa N e^{-NS_0(0)} \left( \frac{a}{b} - 1 \right)$ 。最后 (9) 给出

$$\lambda_1 \simeq \frac{-b\pi_1/(\kappa N)}{\int_0^1 \frac{e^{-NS_0(x)}}{x\sqrt{1-x}} dx} \simeq \frac{(b-a)x^*\sqrt{1-x^*}\sqrt{NS_0''(x^*)}}{e^{N[S_0(0)-S_0(x^*)]}\sqrt{2\pi}} = -\frac{(a-b)^2}{a} \frac{\sqrt{N}}{e^{cN}} \sqrt{\frac{N}{2\pi}}$$

(Assaf和Meerson, 2010, 公式 (71))。例如  $a = 20$ ,  $b = 5$  和  $N = 50$ , 则此估算值仅比的值高 2%  $\lambda_1$  用软件计算得到的大矩阵特征值如图1所示。连通渐近展开法可能可以扩展到周期情况, 但不太可能得出明确的公式。

- 设为生成函数

$$\phi(t, z) = \sum_{n=0}^N P_n(t) z^n$$

与  $0 \leq z \leq 1$ 。我们有  $\phi(t, 1) = 1 \forall t$ 。从 (7) 开始的简单计算表明

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1-z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2(1-z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1.$$

在准平稳制度下，预计

$$\phi(t, z) \simeq 1 + e^{\lambda_1 t} \psi(t, z)$$

与  $\psi(t, z)$  周期性地  $t$ ,  $\psi(t, 1) = 0$  和

$$\lambda_1 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1 - z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1 - z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

$\lambda_1$  因此，也是该抛物线问题的最大非零特征值。这可能是更严格地证明  $N$  大的渐近结果的一种方式。

- 用  $P_n(t) = \mathcal{P}(t, x)$  和  $x = n/N$  并通过以主方程 (7) 的 2 阶进行泰勒展开，我们获得了 Fokker-Planck 方程或扩散方程

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ (a(t)x(1-x) - bx) \mathcal{P} \right] + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (a(t)x(1-x) + bx) \mathcal{P} \right].$$

同样的平均灭绝时间  $\tau_n(t) = \tau(t, x)$  与  $x = n/N$ , (13) 导致相关问题

$$-1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (a(t)x(1-x) - bx) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{2N} (a(t)x(1-x) + bx) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

但是，我们已经知道，在与时间无关的系数的情况下，这些方程通常不能给出正确的  $C$  值 (Doering 等, 2005)。该值仅在以下情况下才是正确的： $R_0$  接近于 1。在其他流行病模型中也出现了同样的问题。例如 (Diekmann et al., 2012, p.112-113) 使用扩散近似来估计 SIR 模型中的  $C R_0 \simeq 10$  在他们的应用中。有关随机 SIR 模型的 BKW 分析，请参阅 (Kamenev 和 Meerson, 2008 年)。

- 号码  $1/C$  可以称为社区的临界规模 (Diekmann 等, 2012)。

## 辅助计算

让我们来证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du = \frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}.$$

第一， $e^u/(1+e^u)^2 = 1/(4 \cosh^2(u/2))$  是一个偶数函数 这与零件的集成相结合，表明：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 2 \int_0^{+\infty} \cos(\lambda u) \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du \\ &= 2 \left[ \frac{-\cos(\lambda u)}{1+e^u} \right]_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda u)}{1+e^u} du \\ &= 1 - 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} \sin(\lambda u)}{1+e^{-u}} du. \end{aligned}$$

通过串联开发  $1/(1+e^{-u})$ ，我们获得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 1 - 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)u} \sin(\lambda u) du \\ &= 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^2 + (n+1)^2}. \end{aligned}$$

该系列的总和可以用欧拉公式计算

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

对于任何具有  $z$  的复数  $z$  都是如此  $z \neq n\pi$  ( $n$  个整数)。我们采取  $z = i\pi\lambda$ 。因为  $\sin(i\pi\lambda) = i \sinh(\pi\lambda)$ ，我们获得

$$\frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

结果如下。

谢谢

在2013年12月于昂热举行的一次关于生态，进化和遗传学随机模型的会议上，与汉斯·梅斯（Hans Metz）讨论了周期性环境中的有效种群规模，这刺激了这篇文章。

### 书目参考

- Andersson H, Djehiche B (1998) A threshold limit theorem for the stochastic logistic epidemic. *J Appl Probab* 35 : 662–670
- Aronsson G, Kellogg RB (1978) On a differential equation arising from compartmental analysis. *Math Biosci* 38 : 113–122
- Assaf M, Kamenev A, Meerson B (2008) Population extinction in a time-modulated environment. *Phys Rev E* 78 : 041123
- Assaf M, Meerson B (2010) Extinction of metastable stochastic populations. *Phys Rev E* 81 : 021116
- Bacaër N, Ait Dads E (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter  $R_0$  in periodic population models. *J Math Biol* 65 : 601–621
- Barles G (1994) *Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi*. Springer, Berlin
- Barles G, Perthame B (1988) Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J Control Optim* 26 : 1133–1148
- Billings L, Mier-y-Teran-Romero L, Lindley B, Schwartz IB (2013) Intervention-based stochastic disease eradication. *PLoS ONE* 8(8) : e70211
- Diekmann O, Heesterbeek H, Britton T (2012) *Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics*. Princeton University Press, Princeton
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth–death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker–Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Escudero C, Rodríguez JA (2008) Persistence of instanton connections in chemical reactions with time-dependent rates. *Phys Rev E* 77 : 011130
- Hethcote H (1973) Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model. *Bull Math Biol* 35 : 607–614
- Kamenev A (2011) *Field theory of non-equilibrium systems*. Cambridge University Press, Cambridge
- Kamenev A, Meerson B (2008) Extinction of an infectious disease : a large fluctuation in a nonequilibrium system. *Phys Rev E* 77 : 061107
- Mitake H (2009) Large time behavior of solutions of Hamilton–Jacobi equations with periodic boundary data. *Nonlinear Anal* 71 : 5392–5405
- Nasell I (2011) Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Osher S, Shu CW (1991) High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton–Jacobi equations. *SIAM J Numer Anal* 28 : 907–922

- Ovaskainen O, Meerson B (2010) Stochastic models of population extinction. *Trends Ecol Evol* 25 : 643–652
- Rabinowitz PH (1994) Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system. *Ergod Theor Dyn Syst* 14 : 817–829
- Roquejoffre JM (2001) Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton–Jacobi equations. *J Math Pures Appl* 80 : 85–104
- Soner HM (1986) Optimal control with state–space constraint I. *SIAM J Control Optim* 24 : 552–561