

Стохастическая модель SIS для эпидемии в периодической среде

J. Math. Biol. 71 (2015) 491–511
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01265563>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, Бонди, Франция
Университет Пьера и Марии Кюри, Les Cordeliers, Париж, Франция
nicolas.bacaer@ird.fr

резюме

В стохастической модели SIS для эпидемии с частотой контакта a , уровнем излечения $b < a$ и размером популяции N среднее время до исчезновения τ таково, что $(\log \tau)/N$ сходится к $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ когда N сходится к бесконечности. В этой статье рассматривается более реалистичный случай, когда скорость контакта является периодической функцией, среднее значение которой больше, чем b . $(\log \tau)/N$ сходится к новому пределу C , который связан с периодическим уравнением Гамильтона-Якоби. Когда скорость контакта является функцией косинуса с небольшой амплитудой, с большой частотой или с очень маленькой частотой, можно получить приближительные формулы для C аналитически, как в [Assaf et al., 2008, Phys Rev E 78 041123]. Эти результаты иллюстрируются численным моделированием.

1. Введение

Стохастическая модель SIS для эпидемии была детально изучена, когда предполагается, что среда является постоянной, как в книге Näsell (2011). При скорости контакта a , уровне излечения $b < a$ и размере популяции N среднее время до исчезновения τ (начиная, например, с зараженного человека) таково, что

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} c = b/a - 1 - \log(b/a) > 0 \quad (1)$$

(Неселл, 2011, теорема 12.1). Среди других ссылок см. Также (Andersson and Djehiche, 1998), (Doering et al., 2005) и (Assaf and Meerson, 2010). Последние используют метод Бриллюэна, Крамерса и Венцеля [BKW]. Вероятность $P_n(t)$ иметь $n \geq l$ человек, инфицированных в момент t первого приближается квазистационарному распределению π_n . Мы определяем $x = n/N$ так что $0 \leq x \leq 1$. Когда N сходится к бесконечности, $-(\log \pi_n)/N$ приближается к непрерывной функции $S(x)$ со стационарным уравнением Гамильтона-Якоби

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

c

$$H(x, p) = ax(1-x)(e^p - 1) + bx(e^{-p} - 1) = x(1 - e^{-p})[a(1-x)e^p - b] \quad (2)$$

(Assaf and Meerson, 2010, (12) и §IV.D.3). Точнее, ветвь линии уровня $H = 0$ $ca(1-x)e^p - b = 0$ приводит к формуле

$$S(x) = x \log(b/a) + x + (1-x) \log(1-x) + \text{constante}. \quad (3)$$

Эта функция имеет минимум, когда $x = x^* = 1 - b/a$, с $x^* > 0$ потому что $b < a$, в заключение

$$c = S(0) - S(x^*)$$

высота между дном и краем при $x = 0$ потенциальной ямы $S(x)$. Эквивалентно, гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (4)$$

имеет гетероклинную орбиту, которая соединяет $(x^*, 0) = (1 - \frac{b}{a}, 0)$ а также $(0, p^*) = (0, \log \frac{b}{a})$. Число c равно действию

$$\int_{x^*}^0 p dx$$

по этой орбите. Метод ВКВ использовался для других процессов рождения и смерти в физике или биологии населения (Ovaskainen and Meerson, 2010; Kamenev, 2011).

В своем исследовании химической реакции с разветвлением и аннигиляцией (Escudero and Rodríguez, 2008) показано, как периодическая среда во времени влияет на гетероклинную орбиту, которая играет центральную роль в среднем времени вымирания. (Assaf et al., 2008) изучили ту же модель более подробно, в частности, вычислили поправку на среднее время вымирания из-за периодического возмущения малой амплитуды, низкой частоты или высокой частоты. Эти авторы получили общие формулы, которые могут быть применены к другим процессам рождения и смерти с метастабильностью. Кроме того, (Биллингс и др., 2013, рис. 7) показано моделирование методом Монте-Карло периодической стохастической модели SIS.

Цель здесь состоит в том, чтобы применить метод ВКВ, используемый (Assaf et al., 2008), к эпидемической модели SIS с периодической частотой контактов периода T , среднее значение которого больше, чем b . Такая модель может представлять собой, например, распространение бактериальной инфекции, которая не дает иммунитета. Распространение может происходить в школе с еженедельной периодичностью (связанной с выходными) или с годовой периодичностью (связанной с отпусками и сезонностью). Это, конечно, только первый шаг к более реалистичным моделям.

В разделе 2 неофициальные расчеты показывают, что среднее время вымирания τ (начиная, например, с человека, зараженного в момент времени 0), таков, что

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C = \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+) - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x). \quad (5)$$

Вот, $S^*(t, x)$ является решением вязкости, периодической периода T , уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

со смешанным краевым условием Дирихле - «стесненное состояние»

$$S(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty.$$

$S(t, x)$ не должно быть тождественно нулевым вблизи $x = 0$. Условие на краях должно быть понято в смысле вязкости (Barles, 1994), потому что $S^*(t, 0^+)$ не может быть равно 0. Гамильтониан $H(t, x, p)$ идентичен (2) за исключением того, что постоянный параметр a заменяется $a(t)$, C

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t)), \quad \omega = 2\pi/T, \quad a_0 > b, \quad |\varepsilon| \leq 1,$$

мы определяем $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$, Следуя методам (Assaf et al., 2008), в разделе 2 показано, что

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}$$

если ε близко к 0,

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0)$$

если $\omega \ll a_0$ а также

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0)$$

в пределах высокочастотного предела $\omega \gg a_0$, Мы можем предположить, что $C > 0$ пока $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$, C вероятно всегда меньше чем c_0 , потому что сезонные колебания имеют тенденцию способствовать исчезновению инфекционных заболеваний. Это более точно указывает на то, что периодическая среда приводит к модели SIS к экспоненциальному уменьшению среднего времени вымирания, аналогичному тому, которое было получено для модели ветвления и аннигиляции (Assaf et al., 2008). Раздел 3 иллюстрирует эти результаты с помощью численного моделирования. Раздел 4 добавляет некоторые замечания.

2. Аналитические расчеты

2.1 Уравнение в частных производных Гамильтона-Якоби

Основное уравнение и теория Флоке. N - общая численность населения, предполагаемая постоянной. Мы определяем

- $S(t)$ количество здоровых людей
- $I(t)$ количество инфицированных

в момент времени t , с $N = S(t) + I(t)$, Если мы имеем $I(t) = n$,

- с вероятностью $bndt + o(dt)$ человек лечит
- с вероятностью $a(t)n(1 - n/N)dt + o(dt)$ человек заражен

между t и $t + dt$. $a(t)$ это скорость контакта. b - показатель излечения. Мы предполагаем, что $a(t)$ является непрерывной периодической функцией периода T , положительной с

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt - b > 0,$$

другими словами

$$R_0 = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt}{b} > 1.$$

Для биологической интерпретации R_0 см. (Vasaer and Ait Dads, 2012). (Hethcote, 1973) заметил, что $r > 0$ (т.е. $R_0 > 1$) является необходимым и достаточным условием, чтобы решение этого уравнения среднего поля сходилось к периодической и положительной функции:

$$\frac{di}{dt} = a(t)i(1 - i) - bi.$$

В противном случае решение сходится к нулю.

$P_n(t)$ вероятность того, что $I(t) = n$, У нас есть

$$\frac{dP_n}{dt} = a(t)(n - 1)(1 - (n - 1)/N)P_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]P_n + b(n + 1)P_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (7)$$

Вот, $P_{-1} = 0$ а также $P_{N+1} = 0$, Конечно,

$$\sum_{n=0}^N P_n(t) = 1.$$

Система (7) также написана

$$\frac{dP}{dt} = M(t)P.$$

$P(t)$ это вектор $(P_n(t))_{0 \leq n \leq N}$ а также $M(t)$ квадратная матрица размера $N + 1$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b - a(t)(1 - \frac{1}{N}) & 2b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a(t)(1 - \frac{1}{N}) & -2b - 2a(t)(1 - \frac{2}{N}) & 3b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -bN \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет блочную структуру

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & Q(t) \end{pmatrix}.$$

$Q(t)$ является квадратной матрицей размера N . $X(t)$ а также $Y(t)$ матрицы с

$$\frac{dX}{dt} = M(t)X, \quad X(0) = I_{N+1}$$

$$\frac{dY}{dt} = Q(t)Y, \quad Y(0) = I_N.$$

I_N единичная матрица размера N . Флоке-множители $M(t)$ собственные значения матрицы монодромии $X(T)$ находятся $\{\mu_0 = 1\}$ и множители Флоке $Q(t)$, Матрица $Q(t)$ является кооперативным: коэффициенты вне диагонали положительны или равны нулю. Эта матрица также неприводима, потому что элементы чуть выше и ниже диагонали все строго положительны. Поэтому все элементы $Y(t)$ строго положительно $t > 0$, Согласно теореме Перрона и Фробениуса, собственное значение μ_1 из $Y(T)$ с наибольшей действительной частью строго положительное действительное число и соответствующее собственное пространство имеет размерность 1. Кроме того,

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1)Q(t) = (-b \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

У нас есть $0 < \mu_1 < 1$ (Aronsson and Kellogg, 1978) и $\lambda_1 = (\log \mu_1)/T < 0$, Вектор $(1, 0, 0, \dots, 0)$ это устойчивое состояние. $P(t)$ сходится к этому вектору, если $t \rightarrow +\infty$, Цель здесь состоит в том, чтобы оценить, для N больших, близость между λ_1 и 0.

Пусть v собственный вектор $X(T)$ связано с собственным значением $\mu_1 = e^{\lambda_1 T}$, Мы можем выбрать v так, чтобы $v_n > 0$, $1 \leq n \leq N$, Итак, мы имеем

$$X(T)v = e^{\lambda_1 T}v.$$

Как и в теории Флоке, мы определяем

$$\pi(t) = e^{-\lambda_1 t} X(t)v.$$

Затем мы имеем

$$\frac{d\pi}{dt}(t) = -\lambda_1 \pi(t) + M(t)\pi(t).$$

более того

$$\pi(T) = e^{-\lambda_1 T} X(T)v = v = \pi(0).$$

Так $\pi(t)$ является периодической функцией с периодом T . С $\pi(t) = (\pi_n(t))_{0 \leq n \leq N}$, у нас есть

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = a(t)(n-1)(1 - (n-1)/N)\pi_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1}. \quad (8)$$

Суммируя эти уравнения, мы получаем

$$\lambda_1 \sum_{n=0}^N \pi_n(t) + \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0.$$

Итак, мы имеем

$$\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=0}^N \pi_n(0).$$

Но $\sum_{n=0}^N \pi_n(t)$ является периодической функцией с периодом T . Следовательно $\sum_{n=0}^N \pi_n(0) = 0$ а также $\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0 \forall t$, Итак, мы имеем

$$\pi_0(t) = - \sum_{n=1}^N \pi_n(t).$$

Но (8) с $n = 0$ также показывает, что

$$\lambda_1 \pi_0(t) + \frac{d\pi_0}{dt} = b \pi_1(t).$$

Потому что $\pi_0(t)$ является периодическим, мы получаем путем интегрирования

$$\lambda_1 = b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\int_0^T \pi_0(t) dt} = -b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt}. \quad (9)$$

Решение БКВ и уравнение Гамильтона-Якоби. Когда N большое, давайте посмотрим на решение ВКВ

$$\pi_n(t) \simeq e^{-NS(t,x)}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

с $x = n/N$, $S(t, x)$ является непрерывной функцией от t и x , если $(, 0 < x < 1)$, что является периодическим периода T относительно t . Затем мы имеем

$$\frac{d\pi_n}{dt} \simeq -N \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) e^{-NS(t, x)},$$

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-NS(t, x + \frac{1}{N})} \simeq e^{-NS(t, x) - \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)}, \quad \pi_{n-1}(t) \simeq e^{-NS(t, x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)}.$$

Мы определяем $\alpha(t, x) = a(t)x(1-x)$ а также $\beta(x) = bx$, Итак (8) написано

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = N\alpha(t, x - 1/N)\pi_{n-1} - N[\alpha(t, x) + \beta(x)]\pi_n + N\beta(x + 1/N)\pi_{n+1}.$$

Сохраняя только доминирующие выражения, мы можем использовать $\alpha(t, x - 1/N) \simeq \alpha(t, x)$ а также $\beta(x + 1/N) \simeq \beta(x)$ получить

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} \simeq N\alpha(t, x)[\pi_{n-1} - \pi_n] + N\beta(x)[\pi_{n+1} - \pi_n].$$

λ_1 вероятно экспоненциально мало. Это можно упустить с левой стороны. Вводя форму ВКВ и деление на $N e^{-NS(t, x)}$ получаем уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a(t)x(1-x) \left[e^{\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] + bx \left[e^{-\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (10)$$

Это имеет вид (6) с периодическим гамильтонианом $H(t, x, p)$ определяется (2) и $a(t)$ Заменяет a , Уравнения типа (10) обычно имеют асимптотические решения вида $S(t, x) = -Et + \Sigma(t, x)$, $\Sigma(t, x)$ является периодической функцией периода T относительно t , а E является константой. Здесь, однако, только решения с $E = 0$ представляют интерес: они соответствуют гетероклиническим орбитам раздела 2.2 ниже.

Крайевые условия. Потому что $H(t, 0, p) = 0$, у нас есть $\frac{\partial S}{\partial t}(t, 0) = 0$, $S(t, 0)$ поэтому постоянная S_0 независимо от t . В (10) включает в себя только частные производные первого порядка, его решения определены с точностью до аддитивной константы (помните, что собственный вектор V из $X(T)$ определяется с точностью до мультипликативной константы). Так что мы можем выбрать $S_0 = 0$ отсюда вытекает условие Дирихле:

$$S(t, 0) = 0 \quad \forall t. \quad (11)$$

Кроме того, потому что $\pi_n(t) = 0 \forall n > N$ и потому что формула (3) в постоянной среде показывает, что $|S(1)| < +\infty$ пока $\frac{dS}{dx}(1) = +\infty$ мы навязываем что

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty \quad \forall t. \quad (12)$$

Другой способ представить это условие на границе - «ограничение по состоянию»

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

если $x = 1$. Это условие приводит с $x = 1$ к

$$\frac{\partial H}{\partial p}\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

(Soner, 1986). Но потому что

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p},$$

это выражение положительно или равно нулю в $x = 1$ тогда и только тогда, когда $p = +\infty$ как в (12).

Свойства гамильтониана. $H(t, x, p)$ является выпуклым в p , потому что

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p + bxe^{-p} \geq 0.$$

Более того, $H(t, x, p) \rightarrow +\infty$ если $|p| \rightarrow +\infty$ при условии, что $0 < x < 1$, Но это свойство больше не верно, когда $x = 0$ или $x = 1$, У нас есть $H(t, x, 0) = 0$, Лагранжиан

$$L(t, x, v) = \max_p \{pv - H(t, x, p)\}.$$

У нас с $0 < x < 1$

$$L(t, x, v) = p_*v - H(t, x, p_*).$$

p_* это единственное решение

$$v = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p_*) = a(t)x(1-x)e^{p_*} - bxe^{-p_*}.$$

Это полиномиальное уравнение степени 2 в e^{p_*} , Это дает

$$\begin{aligned} L(t, x, v) &= p_*v - a(t)x(1-x)(e^{p_*} - 1) - bx(e^{-p_*} - 1) \\ &= v \log \left(\frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2a(t)x(1-x)} \right) + a(t)x(1-x) + bx \\ &\quad - \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2} - \frac{2a(t)x(1-x)bx}{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}. \end{aligned}$$

Для $x = 1$ имеем

- $L(t, 1, v) = +\infty$ если $v > 0$
- $L(t, 1, 0) = b$
- $L(t, 1, v) = -v \log(-v/b) + v + b$ если $v < 0$,

Для $x = 0$ имеем

- $L(t, 0, v) = +\infty$ если $v \neq 0$
- $L(t, 0, 0) = 0$,

Для x , близкого к 0, заметьте, однако, что $L(t, x, v) \sim -v \log x$. Таким образом, для $\eta > 0$ маленький и для любой функции $\xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1])$ с $\xi(\theta) = 0$, у нас есть

$$\int_{\theta}^{\theta+\eta} L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds \simeq - \int_{\theta}^{\theta+\eta} \frac{d\xi}{ds}(s) \log \xi(s) ds = - \int_0^{\xi(\theta+\eta)} \log \xi d\xi,$$

который не бесконечен.

Решения уравнения Гамильтона-Якоби. Для данного начального условия $S_0(x)$ функция

$$S(t, x) = \inf \left\{ \int_{\theta}^t L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds + 1_{\theta=0} S_0(\xi(\theta)); \right. \\ \left. 0 \leq \theta \leq t, \xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1]), \theta = 0 \vee \xi(\theta) = 0, \xi(t) = x \right\}$$

представляет собой вязкий раствор (10) со смешанными условиями (11) - (12) по краям и с $S(0, x) = S_0(x)$ (Barles, 1994). Это функция значения проблемы времени выхода в $x = 0$ с «государственным ограничением» в $x = 1$. Периодическое решение $S^*(t, x)$ из (10) - (11) - (12), таким образом, задается фиксированной точкой оператора эволюции выше: $S^*(0, x) = S^*(T, x)$, (Roquejoffre, 2001) и (Mitake, 2009) изучали аналогичные периодические уравнения Гамильтона-Якоби с условиями на краях типа Дирихле. Обратите внимание, что нет уникальности. Для связанных проблем, см. (Barles и Perthame, 1988). Действительно, рассмотрим частный случай, когда $a(t) = a_0$ постоянно. В этом случае существует два типа стационарных растворов вязкости $S^*(x)$,

- С одной стороны, есть решения вида

$$x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x) + \gamma$$

с постоянной $\gamma \leq 0$, которые отличаются только через постоянную γ . Решение с $\gamma = 0$ является единственным, чтобы проверить условие на краю при $x = 0$ в классическом смысле.

- С другой стороны, есть решения вида

$$\min\{0, x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x) + \gamma\}$$

с постоянной γ такой, что $0 < \gamma \leq c_0$, Эти решения тождественно равны нулю вблизи $x = 0$ и не дают C .

Для периодического уравнения (10) со смешанными условиями (11) - (12) на ребрах можно предположить, что оно имеет решения вязкости

- которые являются периодическими периода T относительно t ,
- которые не равны нулю вблизи $x = 0$,
- которые отличаются только константой (таким образом, давая тот же C).

Это такое решение, которое мы выбираем как решение ВКВ. Как показано на рис. 3 ниже, граничное условие при $x = 0$ следует понимать в смысле вязкости, поскольку решение не может быть непрерывным при $x = 0$.

Поведение λ_1 если N большое. Возвращаясь к (9), мы имеем

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} = \frac{\log b}{N} + \frac{1}{N} \log \left(\int_0^T \pi_1(t) dt \right) - \frac{1}{N} \log \left(\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right).$$

У нас есть

$$\pi_1(t) \simeq e^{-NS^*(t, 1/N)} \simeq e^{-NS^*(t, 0^+)}$$

для N большой. Итак, мы имеем

$$\frac{1}{N} \log \left(\int_0^T \pi_1(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+)$$

из-за формулы Лапласа для асимптотической оценки интегралов. Точно так же, потому что $\pi_n(t) \simeq e^{-NS^*(t, n/N)}$, у нас есть

$$\frac{1}{N} \log \left(\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x)$$

а также

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -C$$

с C , определяемым (5). Мы можем предположить, что $C > 0$ если и только если $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$,

Среднее время вымирания. Начиная с n человек, зараженных в момент времени t , среднее время вымирания $\tau_n(t)$ является периодическим решением периода T системы

$$-1 = \frac{d\tau_n}{dt} + b n \tau_{n-1} - (a(t)n(1-n/N) + b n) \tau_n + a(t)n(1-n/N) \tau_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (13)$$

с $\tau_0(t) = 0$. Эта система включает транспонированную матрицу $Q^*(t)$ матрицы $Q(t)$. Мы определяем

- $\hat{\tau}(t) = (\tau_n(t))_{1 \leq n \leq N}$
- $\hat{\pi}(t) = (\pi_n(t))_{1 \leq n \leq N}$
- $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обычное скалярное произведение вещественных векторов.

Затем мы имеем

$$\lambda_1 \hat{\pi} + \frac{d\hat{\pi}}{dt} = Q(t)\hat{\pi}, \quad -\mathbf{1} = \frac{d\hat{\tau}}{dt} + Q^*(t)\hat{\tau}.$$

а также

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle = \langle \frac{d\hat{\pi}}{dt}, \hat{\tau} \rangle + \langle \hat{\pi}, \frac{d\hat{\tau}}{dt} \rangle = \langle Q(t)\hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \lambda_1 \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle - \langle \hat{\pi}, Q^*(t)\hat{\tau} \rangle.$$

Выражения с $Q(t)$ а также $Q^*(t)$ уничтожить друг друга. Путем интегриации и использования частоты $\hat{\pi}(t)$ а также $\hat{\tau}(t)$, мы получаем

$$-\lambda_1 = \frac{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle}{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle dt}.$$

Это говорит о том, что среднее время вымирания τ , начиная, например, с зараженного человека в момент времени 0, имеет тот же порядок величины, что и $-1/\lambda_1$:

$$\frac{\log(\tau)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C.$$

Можно предположить, что этот по сути неформальный анализ может быть представлен в строгой форме, как для модели SIS в постоянной среде (Nåsell, 2011).

2.2 Гетероклининая орбита

Общий случай. Напомним, что уравнение Гамильтона-Якоби (6) может быть решено хотя бы локально путем трассировки лучей, то есть путем одновременного решения гамильтоновой системы (4) и уравнения

$$\frac{dz}{dt} = p(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t)) - H(t, x(t), p(t))$$

с начальными условиями $x(0) = x_0, p(0) = \frac{\partial S}{\partial x}(0, x_0), z(0) = S(0, x_0)$, так что $z(t) = S(t, x(t))$, Далее (Assaf et al., 2008) давайте более подробно рассмотрим гамильтонову систему (4). В настоящем деле

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) &= a(t)x(1-x)e^p - be^{-p}, \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) &= a(t)(1-2x)(e^p - 1) + b(e^{-p} - 1). \end{aligned} \quad (14)$$

Давайте сначала поищем периодическое нетривиальное решение периода T с $x \equiv 0$ а также

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, 0, p) = -(a(t) - be^{-p})(e^p - 1).$$

С $p = \log(1 + q)$, мы получаем дифференциальное уравнение Бернулли, которое легко решается. Это дает периодическое решение периода T

$$p^*(t) = \log \left(1 + \left[\frac{e^{-bt + \int_0^t a(s) ds}}{e^{p^*(0)} - 1} + \int_0^t a(s) e^{-b(t-s) + \int_s^t a(u) du} ds \right]^{-1} \right),$$

с

$$p^*(0) = \log \left(1 + \frac{1 - e^{-bT + \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(s) e^{-b(T-s) + \int_s^T a(u) du} ds} \right).$$

Периодическое решение $(0, p^*(t))$ неустойчиво Действительно, с $x(t) = \tilde{x}(t)$ а также $p(t) = p^*(t) + \tilde{p}(t)$ и линеаризуя уравнения, мы получаем

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)} & 0 \\ 2a(t)(e^{p^*(t)} - 1) & -a(t)e^{p^*(t)} + be^{-p^*(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Мультипликаторы

$$f = \exp \int_0^T [a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)}] dt$$

а также $1/f$ отсюда и неустойчивость. Неустойчивость также можно рассматривать как следствие теоремы Лиувилля об инвариантности «объема» в фазовом пространстве (x, p) под действием гамильтонова потока.

Во-вторых, давайте посмотрим на нетривиальное, периодическое решение периода T , с $p \equiv 0$ а также

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, 0) = a(t)x(1-x) - bx.$$

Это уравнение среднего поля модели SIS. Единственное ненулевое периодическое решение

$$x^*(t) = \left(\frac{1}{x^*(0)} e^{bt - \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t a(u) e^{b(t-u) - \int_u^t a(s) ds} du \right)^{-1}$$

с

$$x^*(0) = \frac{1 - e^{bT - \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(u) e^{b(T-u) - \int_u^T a(s) ds} du}. \quad (15)$$

Периодическое решение $(x^*(t), 0)$ также нестабильно. Действительно, с $x(t) = x^*(t) + \tilde{x}(t)$ а также $p(t) = \tilde{p}(t)$ и линеаризуя уравнения, мы получаем

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)(1 - 2x^*(t)) - b & a(t)x^*(t)(1 - x^*(t)) + bx^*(t) \\ 0 & -a(t)(1 - 2x^*(t)) + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Множители Флоке снова обратны друг другу, следовательно, нестабильность.

Напомним из раздела 1, что в постоянной среде на фазовой плоскости (x, p) имеется гетероклинная орбита, соединяющая стационарные точки $(x^*, 0) = (1 - b/a, 0)$ а также $(0, p^*) = (0, \log(b/a))$ если $a > b$, (Escudero and Rodriguez, 2008) обнаружили подобную гетероклинную орбиту для периодической модели ветвления и аннигиляции одинаковых частиц, по крайней мере, для небольшой амплитуды периодического возмущения. Таким образом, мы можем надеяться на существование гетероклинной орбиты $(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$, который связывает периодические решения $(x^*(t), 0)$ а также $(0, p^*(t))$. Существование, вероятно, может быть продемонстрировано с помощью вариационного подхода (Рабинович, 1994). Эта особая орбита может быть получена в цифровом виде методом обжига. Согласно (Assaf et al., 2008, уравнение (20)),

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{p}(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) - H(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) \right] dt. \quad (16)$$

Этот интеграл можно оценить численно.

Метод возмущений. Если функция $a(t)$ постоянная a_0 , так $(\hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))$ является гетероклинной орбитой, соединяющей стационарные точки $(x^*, 0) = (1 - b/a_0, 0)$ а также $(0, p^*) = (0, \log(b/a_0))$. Эта орбита такова, что $a_0(1 - x)e^p - b = 0$ Как видно из (2). Используя это уравнение для выражения p как функции от x и вставив результат в первое уравнение (4), получим

$$\frac{dx}{dt} = b x - a_0 x(1 - x).$$

Решение

$$x(t) = \left[\frac{1}{x(t_0)} e^{(a_0 - b)(t - t_0)} + \frac{a_0}{a_0 - b} (1 - e^{(a_0 - b)(t - t_0)}) \right]^{-1}.$$

Выбирая например $x(t_0) = (1 - b/a_0)/2$, мы получаем

$$\hat{x}_0(t) = \frac{1 - b/a_0}{1 + e^{(a_0 - b)(t - t_0)}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_0(t) = \log \frac{1 + e^{(a_0 - b)(t - t_0)}}{1 + e^{(a_0 - b)(t - t_0)} a_0/b}.$$

Теперь предположим, что

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \phi(t))$$

с $a_0 > b$, ε маленький и $\phi(t)$ периодическая функция с $\int_0^T \phi(t) dt = 0$, Гамильтониан можно записать в виде

$$H(t, x, p) = H_0(x, p) + \varepsilon H_1(t, x, p).$$

$H_0(x, p)$ такой же, как (2), за исключением того, что a_0 Заменяет a ,

$$H_1(t, x, p) = a_0 \phi(t) x(1 - x)(e^p - 1).$$

С $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$,

$$C \simeq \min_{t_0} \Gamma(t_0), \quad \Gamma(t_0) = c_0 - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt, \quad \varepsilon \simeq 0$$

(Assaf et al., 2008, уравнение (24)). В настоящем деле $(1 - \hat{x}_0)e^{\hat{p}_0} = b/a_0$, Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 - \varepsilon a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \hat{x}_0(t) [b/a_0 - 1 + \hat{x}_0(t)] dt \\ &= c_0 + \varepsilon (1 - b/a_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t_0 + u/(a_0 - b)) \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du. \end{aligned}$$

$\Gamma(t_0)$ таким образом, периодическая функция t_0 с $\int_0^T \Gamma(t_0) dt_0 = 0$, Рассмотрим разложение Фурье $\phi(t)$,

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t},$$

с $\omega = 2\pi/T$, $\phi_0 = 0$ потому что в среднем $\phi(t)$ ноль, и $\phi_{-k} = \bar{\phi}_k$ (сопряженное комплексное число). Затем мы имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 + \varepsilon (1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k \omega u}{a_0 - b}} \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du \\ &= c_0 + \varepsilon (1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \frac{\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}}{\sinh\left(\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}\right)} \end{aligned}$$

(смотри Приложение). Особенно если $\phi(t) = \cos(\omega t)$, у нас есть $\phi_{\pm 1} = 1/2$ а также $\phi_k = 0$ если не. Итак, мы имеем

$$\Gamma(t_0) = c_0 + \varepsilon \frac{\pi \omega \cos(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}. \quad (17)$$

Как (Escudero and Rodriguez, 2008) и (Assaf et al., 2008), нарушенная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x}. \quad (18)$$

$\hat{x}_0(t)$ а также $\hat{p}_0(t)$ зависит только от $t - t_0$. Так что функция Мельникова

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_0}{\partial x} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt_0} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt_0} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dt_0}. \end{aligned}$$

Используя (17), получим

$$\mathcal{M}(t_0) = \frac{\pi\omega \sin(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0 - b}\right)}.$$

$\mathcal{M}(t_0)$ пересекает 0 для $t_0 = k\pi/\omega$ (k целое число). Следовательно, гетероклиническая орбита существует, по крайней мере, для ε маленький.

Минимум $\Gamma(t_0)$ в (17) получается для $t_0 = T/2$ если $\varepsilon > 0$ и для $t_0 = 0$ если $\varepsilon < 0$. В обоих случаях мы получаем

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi\omega|\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0 - b}\right)}, \quad \varepsilon \simeq 0, \quad (19)$$

как объявлено во введении. Отметим, что (19) напоминает уравнение (4.76) уравнения (Каменев, 2011), полученное из немного другого гамильтониана. Если ω мало (T велико), так что $\omega \ll a_0$ тогда (19) показывает, что

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0), \quad (20)$$

который не зависит от ω . Эта формула такая же, как полученная в (1) с $a = a_0(1 - |\varepsilon|)$:

$$\frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} - 1 - \log \frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} = \frac{b}{a_0} - 1 - \log \frac{b}{a_0} - |\varepsilon|(1 - b/a_0) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \simeq 0.$$

Как и в «адиабатическом приближении» (Assaf et al., 2008, раздел IV), ожидается, что формула (20) справедлива не только для $\varepsilon \simeq 0$, но также до тех пор, пока $\omega \ll a_0$ и что правая часть (20) положительна. Потому что $\sinh(x) \geq x \forall x \geq 0$ мы можем заметить, что приближительное значение C , определяемое формулой (20), всегда меньше значения, заданного формулой (19).

Высокий предел частоты. Теперь предположим, что $\omega \gg a_0$ всегда с $\phi(t) = \cos(\omega t)$. Система (18) написана

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p}(x, p) + a_0 \varepsilon \cos(\omega t) x(1 - x)e^p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}(x, p) - a_0 \varepsilon \cos(\omega t)(1 - 2x)(e^p - 1). \end{aligned}$$

С помощью метода Капицы (Assaf et al., 2008, §III.B),

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad p(t) = Y(t) + \eta(t),$$

где X и Y - медленные переменные, а ξ и η - небольшие, но быстрые колебания. Выражения, которые колеблются быстро, дают:

$$\frac{d\xi}{dt} \simeq a_0 \varepsilon \cos(\omega t) X(1 - X)e^Y, \quad \frac{d\eta}{dt} \simeq -a_0 \varepsilon \cos(\omega t)(1 - 2X)(e^Y - 1).$$

Мы предполагаем, что X и Y постоянны во время короткого колебания, с $T = 2\pi/\omega$. Мы получаем

$$\xi(t) \simeq \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X)e^Y, \quad \eta(t) \simeq -\frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1 - 2X)(e^Y - 1).$$

Это предполагает преобразование

$$\begin{aligned} x &= X + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X)e^Y \\ p &= Y - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1 - 2X)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \Phi(t, X, Y). \end{aligned}$$

$\Phi(t, X, Y)$ выбирается так, чтобы преобразование было почти каноническим, то есть чтобы скобки Пуассона удовлетворяли условию

$$\{x, p\} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial p}{\partial X} = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \quad (21)$$

Потому что

$$\begin{aligned} \{x, p\} &= \left[1 + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1 - 2X)e^Y \right] \left[1 - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1 - 2X)e^Y + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right] \\ &\quad - \left[\frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X)e^Y \right] \left[2 \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right], \end{aligned}$$

условие (21) записано

$$\{x, p\} = 1 - \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) (1 - 2X)^2 e^{2Y} + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} - 2 \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) X(1 - X) e^Y (e^Y - 1) + o(a_0^2/\omega^2) = 1 + o(a_0^2/\omega^2).$$

Итак, мы имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 e^{2Y} + 2X(1 - X) e^Y (e^Y - 1)].$$

Получить $\Phi(t, X, 0) = 0$ мы должны выбрать

$$\Phi(t, X, Y) = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 (e^{2Y} - 1)/2 + X(1 - X)(e^Y - 1)].$$

Производящая функция $F_2(t, x, Y)$ этой трансформации, с

$$\frac{\partial F_2}{\partial Y} = X + o(a_0^2/\omega^2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = p + o(a_0^2/\omega^2),$$

дан кем-то

$$F_2(t, x, Y) = xY - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) x(1 - x)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \sin^2(\omega t) x(1 - x)(1 - 2x)(e^{2Y} - 1).$$

С $H(t, x, y) = h(t, X, Y)$ новый гамильтониан

$$h(t, X, Y) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

У нас есть $T = 2\pi/\omega$, Принимая среднее значение этого гамильтониана, второе выражение отменяется, потому что

$$\int_0^T \frac{\partial F_2}{\partial t} dt = 0$$

и остается только эффективный гамильтониан

$$\bar{H}(X, Y) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t, X, Y) dt.$$

Трудоемкий расчет с использованием того факта, что $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = 1/2$ приводит к

$$\bar{H}(X, Y) \simeq X(1 - e^{-Y}) \left[a_0(1 - X)e^Y - b + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \left\{ -a_0 X(1 - X)^2 e^{2Y} + b(1 - X)(1 - 2X)e^Y - bX(1 - X)(e^Y - 1) - b(1 - 2X)^2 \right\} \right].$$

Нарушенная гетероклидная орбита получается путем наложения нулевого члена в квадратных скобках. Эта орбита соединяется $(X_\varepsilon^*, 0)$ а также $(0, Y_\varepsilon^*)$, с

$$X_\varepsilon^* \simeq (1 - b/a_0) \left[1 - \frac{b(a_0 - b)\varepsilon^2}{2\omega^2} \right], \quad Y_\varepsilon^* \simeq \log(b/a_0) + \frac{a_0(a_0 - b)\varepsilon^2}{2\omega^2}.$$

Действие вдоль этой гетероклидной орбиты

$$C = \int_{X_\varepsilon^*}^0 Y dX.$$

Еще один утомительный расчет в конечном итоге приводит к

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0), \quad (22)$$

как объявлено во введении. Потому что функция $z \mapsto (1 - z)^2(1 + 2z)$ меньше 1 за интервал $0 < z < 1$ корректирующий член для C всегда меньше $\frac{a_0^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2}$, Это маленький, потому что $\omega \gg a_0$ по гипотезе. Как и следовало ожидать, население, подверженное высокочастотному нарушению, мало зависит от амплитуды этого нарушения.

3. Численные расчеты

Мультипликаторы Флоке. λ_1 может быть оценен непосредственно путем вычисления множителей Флоке для главного уравнения с использованием программного обеспечения, такого как Scilab, которое решает обычные дифференциальные уравнения и вычисляет собственные значения матриц численно. $e^{\lambda_1 T}$ является собственным значением со второй по величине вещественной частью, первая из которых равна 1. Затем мы можем построить $-\log(-\lambda_1)$ в соответствии с N . Наклон этой кривой обеспечивает приближенное значение C .

Гетероклидная орбита. Что касается (Assaf и др., 2008), можно получить орбиту, которая соединяет $(x^*(t), 0)$ а также $(0, p^*(t))$ методом стрельбы. Мы берем начальное условие $x^*(0)$ определяется выражением (15) и очень малым отрицательным значением для $p(0)$, Мы изменяем это значение, пока не получим решение $(x(t), p(t))$ который имеет тенденцию становиться периодическим, то есть $x(t)$ близко к 0 и $p(kT)$ около $p^*(0)$ для k большой (но не слишком большой, чтобы избежать численной неустойчивости). Затем мы можем использовать интеграл (16) для численного вычисления C .

Уравнение в частных производных. Также возможно рассчитать периодическое решение $S^*(t, x)$ уравнения Гамильтона-Якоби (6) с использованием численных методов теории вязких растворов. Мы определяем

- Δt шаг по времени

- Δx шаг дискретизации пространства
- S_j^m приближение $S(m\Delta t, j\Delta x)$ где j и m такие целые числа, что $m \geq 0$ а также $0 \leq j \leq J$ с $J = 1/\Delta x$,

Мы можем использовать метод Годунова

$$\frac{S_j^{m+1} - S_j^m}{\Delta t} + \mathcal{H}\left(m\Delta t, j\Delta x, \frac{S_j^m - S_{j-1}^m}{\Delta x}, \frac{S_{j+1}^m - S_j^m}{\Delta x}\right) = 0,$$

где гамильтониан $\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+)$ дан кем-то

$$\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+) = \begin{cases} \min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\}, & p^- < p^+, \\ \max\{H(t, x, p); p^+ \leq p \leq p^-\}, & p^+ \leq p^- \end{cases}$$

(Ошер и Шу, 1991). Потому что $H(t, x, p)$ является выпуклым относительно p , второе выражение, включающее максимум, равно

$$\max\{H(t, x, p^+), H(t, x, p^-)\}.$$

Что касается первого выражения, включающего минимум, обратите внимание на (14), что $H(t, x, p)$ имеет минимум относительно p , если $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ то есть если

$$p = p^\# = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a(t)(1-x)}.$$

Итак, мы имеем

$$\min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\} = \begin{cases} H(t, x, p^+), & p^- < p^+ \leq p^\#, \\ H(t, x, p^-), & p^\# \leq p^- < p^+, \\ H(t, x, p^\#), & p^- \leq p^\# \leq p^+. \end{cases}$$

Для условий на краях мы берем

$$S_0^m = 0, \quad (S_j^m - S_{j-1}^m)/\Delta x = K$$

с очень высоким значением K . Шаг по времени Δt должно быть достаточно маленьким по сравнению с Δx для выполнения условия Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ). В качестве начального условия мы взяли

$$S(0, x) = x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x),$$

то есть обычное стационарное решение, когда $a(t)$ заменяется его средним временем. Мы также можем выбрать постоянную функцию $S(0, x) = \sigma$ с σ весьма отрицательным, но сходимость к периодическому режиму тогда медленнее. Константа σ должна быть достаточно отрицательной, чтобы избежать проблемы неединственности, уже упомянутой в разделе 2. Как только решение нестационарной задачи достигло периодического режима, мы можем оценить

$$C = \min_t S^*(t, 0^+) - \min_{t,x} S^*(t, x).$$

Метод Монте-Карло. Среднее время вымирания также можно оценить методом Монте-Карло. Мы усредняем стохастическое моделирование. Однако обратите внимание, что алгоритм Гиллеспи, использующий экспоненциально распределенное время ожидания, не может быть использован, потому что $a(t)$ является периодическим. Если N увеличивается, время вымирания может стать астрономическим. Результаты не представлены с использованием этого метода.

Примеры. Мы предполагаем

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(2\pi t/T))$$

с $T = 1$ неделя. Давайте сначала рассмотрим случай, когда $a_0 = 20$ в неделю и $b = 5$ в неделю. Средняя продолжительность заражения составляет $1/b = 1,4$ дней. Итак, мы имеем $R_0 = a_0/b = 4 > 1$ а также $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0) \simeq 0,636$, Рисунок 1 показывает $-\log(-\lambda_1)$ как функция N для $\varepsilon \in \{0, 2; 0, 5; 0, 8\}$ а также $N = 10, 20, \dots, 60$, рассчитывается с использованием множителей Флоке. Линии соответствуют линейной регрессии последних 3-х точек $N = 40, 50, 60$. Наклоны этих линий, которые являются оценками C , являются $0,524, 0,364$ а также $0,225$ за $\varepsilon = 0, 2, 0, 5$ а также $0, 8$,

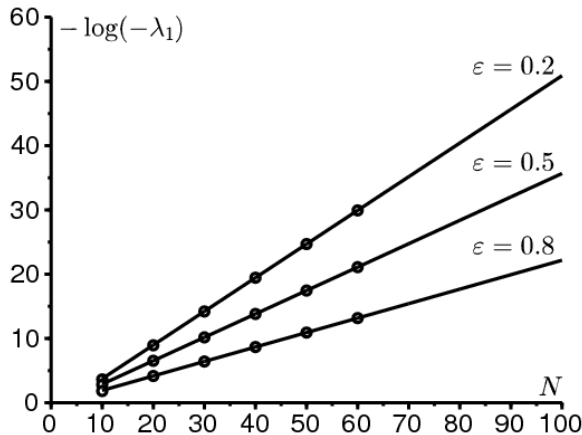


Рисунок 1. Расчет множителей Флоке для основного уравнения: $-\log(-\lambda_1)$ как функция N для $\varepsilon \in \{0, 2; 0, 5; 0, 8\}$ а также $N = 10, 20, \dots, 60$, Число C - наклон этих линий. Значения параметров: $T = 1, a_0 = 20, b = 5$,

a_0 а также $\omega = 2\pi/T$ имеют тот же порядок величины в этом примере. Это промежуточный случай для частоты. Поэтому мы ожидаем, что (19) дает хорошее приближение для C , когда ε мало. На рисунке 2 показаны следующие кривые в зависимости от ε для $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

- сплошная линия для C с использованием гетероклиной орбиты
- длинные пунктирные линии для C с использованием уравнения в частных производных с $\Delta x = 0,002$ а также $\Delta t = 0,0002$ (почти неразличимо)
- три точки, представляющие значения C , полученные на фиг.1
- короткие пунктирные линии для приближенной формулы (19)
- длинные и короткие пунктирные линии, для приближения (20) с низкой частотой.

Мы видим, что приближенная формула (19) близка к C , даже если ε лишь умеренно мала.

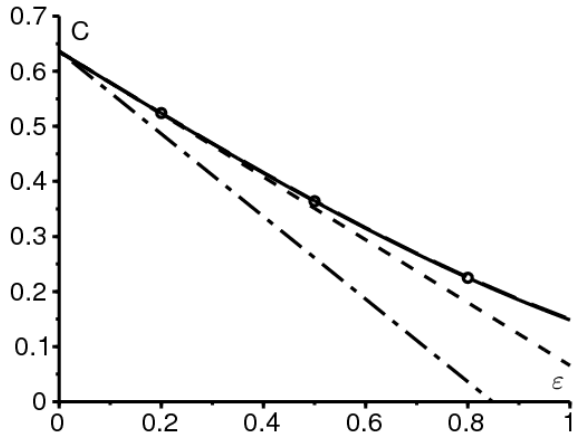


Рисунок 2. Промежуточная частота: число C , вычисленное с использованием гетероклиной орбиты [сплошная линия] или уравнения в частных производных [длинные пунктирные линии] (две линии почти не различимы), множители Флоке, как в рисунок 1 [точки], приближительная формула (19) [короткие пунктирные линии] и низкочастотная формула (20) [длинные и короткие пунктирные линии], в зависимости от ε . Те же значения параметров, что и на рисунке 1.

На рисунке 3 показано периодическое решение $S^*(t, x)$ уравнения Гамильтона-Якоби, построенная как функция от x для разных значений t , когда $\varepsilon = 0,5$. Обратите внимание на прерывность решения в $x = 0$. Увеличить близко к $x = 0$ показал бы, что $S^*(t, 0^+)$ на самом деле периодичен во времени, поэтому граничное условие $S^*(t, 0) = 0$ может быть удовлетворено только в слабом смысле.

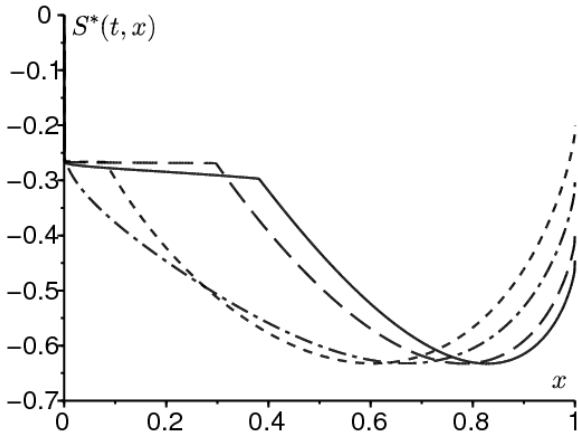


Рисунок 3. Периодическое решение $S^*(t, x)$ уравнения Гамильтона-Якоби, построенная как функция от x для $t = 0$ (Сплошная линия), $t = T/4$ (длинные пунктирные линии), $t = T/2$ (короткие пунктирные линии) и $t = 3T/4$ (длинные и короткие пунктирные линии). Те же значения параметров, что и на рисунке 1 и $\varepsilon = 0,5$,

На рисунке 4 показан высокочастотный пример: $a_0 = 2$ в неделю и $b = 1$ в неделю. Итак, мы имеем $R_0 = 2$ а также $c_0 \simeq 0,1931$. В таком случае $\omega \simeq 6,28$ в неделю несколько больше, чем a_0 . За $0 \leq \varepsilon \leq 1$ число C рассчитывается с использованием гетероклиной орбиты и высокочастотной формулы (22). Соглашение хорошее во всем диапазоне ценностей. Наконец, на рисунке 5 показана орбита, соединяющая $(x^*(t), 0)$ а также $(0, p^*(t))$ для тех же значений параметров с $\varepsilon = 0,1$,

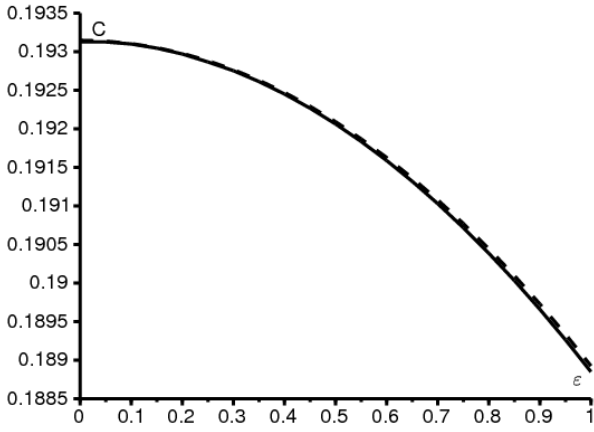


Рисунок 4. Высокочастотный режим: C рассчитывается с использованием гетероклинной орбиты [сплошная линия] и высокочастотной формулы (22) [пунктирная линия] как функция от ε . Значения параметров: $T = 1$, $a_0 = 2$, $b = 1$,

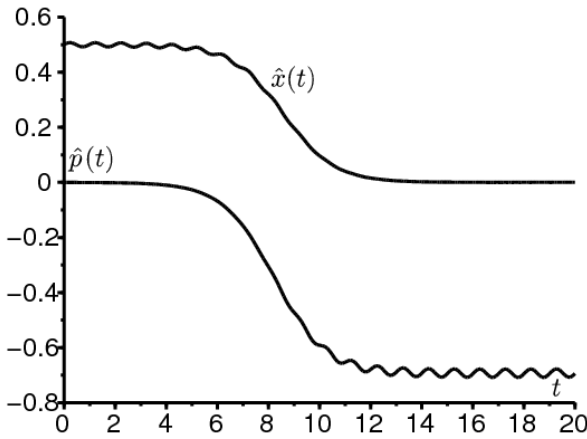


Рисунок 5. Компоненты $t \mapsto \hat{x}(t)$ а также $t \mapsto \hat{p}(t)$ гетероклинной орбиты, соединяющей два периодических решения $(0, p^*(t))$ а также $(x^*(t), 0)$, Те же значения параметров, что и на рисунке 4 и $\varepsilon = 0,1$,

4. Примечания

- Более точные оценки можно получить с помощью уточненного решения ВКВ

$$\pi_n(t) \simeq e^{-N S_0(t, n/N) - S_1(t, n/N)}.$$

Вставив

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-N S_0(t, n/N) - \frac{\partial S_0}{\partial x}(t, n/N) - \frac{1}{2N} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(t, n/N) - S_1(t, n/N) - \frac{1}{N} \frac{\partial S_1}{\partial x}(t, n/N)}$$

и аналогичное выражение для $\pi_{n-1}(t)$ в (8) и, отделяя члены более высокой степени, получаем уравнение Гамильтона-Якоби (10) для $S_0(t, x)$ и уравнение переноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left[a(t)x(1-x)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} - bxe^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \right] \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ = a(t)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[1 - 2x + \frac{x(1-x)}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] + b e^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[-1 + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

за $S_1(t, x)$. Если функция $a(t)$ является периодическим, то $S_0(t, x)$ а также $S_1(t, x)$ должен быть рассчитан численно. Если функция $a(t) = a$ является постоянным, то предэкспоненциальный множитель для λ_1 Получается методом связанных асимптотических разложений следующим образом (Assaf and Meerson, 2010). Первый $S_0(x)$ дается формулой (3) и уравнением для $S_1(x)$ приводит к

$$S_1(x) = \log(x\sqrt{1-x}) + \text{const.}$$

Итак, мы имеем

$$\pi_n \simeq \kappa \frac{e^{-NS_0(n/N)}}{\frac{n}{N} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}}$$

для постоянного κ , Если n мало,

$$\pi_n \simeq \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0) - nS_0'(0)} = \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0)} \left(\frac{a}{b} \right)^n. \quad (23)$$

Для системы (8) мы также можем использовать приближение

$$a(n-1)\pi_{n-1} - n(a+b)\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1} \simeq 0, \quad n \geq 1.$$

Затем мы имеем

$$\pi_n \simeq \frac{\pi_1}{n} \frac{1 - (a/b)^n}{1 - a/b} \sim \frac{\pi_1}{n} \frac{(a/b)^n}{a/b - 1}.$$

Это совпадает с (23) только если $\pi_1 \simeq \kappa N e^{-NS_0(0)} (\frac{a}{b} - 1)$, Наконец (9) дает

$$\lambda_1 \simeq \frac{-b\pi_1/(\kappa N)}{\int_0^1 \frac{e^{-NS_0(x)}}{x\sqrt{1-x}} dx} \simeq \frac{(b-a)x^* \sqrt{1-x^*} \sqrt{NS_0''(x^*)}}{e^{N[S_0(0)-S_0(x^*)]} \sqrt{2\pi}} = -\frac{(a-b)^2}{a e^{eN}} \sqrt{\frac{N}{2\pi}}$$

(Assaf and Meerson, 2010, уравнение (71)). Если например $a = 20$, $b = 5$ а также $N = 50$, тогда эта оценка только на 2% выше значения λ_1 полученный с помощью программного обеспечения для вычисления собственных значений больших матриц, как на рисунке 1. Метод связанных асимптотических разложений, вероятно, может быть распространен на периодический случай, но вряд ли приведет к явной формуле.

- Позвольте быть производящей функции

$$\phi(t, z) = \sum_{n=0}^N P_n(t) z^n$$

с $0 \leq z \leq 1$, У нас есть $\phi(t, 1) = 1 \forall t$, Простой расчет, начиная с (7), показывает, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1-z) \left(b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1.$$

В квазистационарном режиме ожидается, что

$$\phi(t, z) \simeq 1 + e^{\lambda_1 t} \psi(t, z)$$

с $\psi(t, z)$ периодический в t , $\psi(t, 1) = 0$ а также

$$\lambda_1 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1-z) \left(b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

λ_1 поэтому также является наибольшим ненулевым собственным значением этой параболической задачи. Это может быть средством более строгой демонстрации асимптотических результатов для N больших.

- С $P_n(t) = \mathcal{P}(t, x)$ а также $x = n/N$ и выполняя разложение Тейлора до порядка 2 главного уравнения (7), мы получаем уравнение Фоккера-Планка или уравнение диффузии

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[(a(t)x(1-x) - bx) \mathcal{P} \right] + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(a(t)x(1-x) + bx) \mathcal{P} \right].$$

Аналогично для среднего времени вымирания $\tau_n(t) = \tau(t, x)$ с $x = n/N$, (13) приводит к связанной проблеме

$$-1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (a(t)x(1-x) - bx) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{2N} (a(t)x(1-x) + bx) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

Однако в случае не зависящих от времени коэффициентов мы уже знаем, что эти уравнения обычно не дают правильного значения C (Doering et al., 2005). Значение имеет тенденцию быть правильным, только если R_0 близко к 1. Такая же проблема появляется в других моделях эпидемии. Например (Diekmann et al., 2012, стр. 112-113) использует диффузионное приближение для оценки C в модели SIR, несмотря на тот факт, что $R_0 \simeq 10$ в их приложении. Для ВКВ-анализа стохастической модели SIR см. (Каменев и Меерсон, 2008).

- Номер $1/C$ можно назвать критическим размером сообщества (Diekmann et al., 2012).

Вспомогательный расчет

Давайте покажем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du = \frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}.$$

Первый, $e^u/(1+e^u)^2 = 1/(4 \cosh^2(u/2))$ это четная функция. Это в сочетании с интеграцией по частям показывает, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 2 \int_0^{+\infty} \cos(\lambda u) \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du \\ &= 2 \left[\frac{-\cos(\lambda u)}{1+e^u} \right]_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda u)}{1+e^u} du \\ &= 1 - 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} \sin(\lambda u)}{1+e^{-u}} du. \end{aligned}$$

Развивая в серии власти $1/(1+e^{-u})$, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 1 - 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)u} \sin(\lambda u) du \\ &= 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^2 + (n+1)^2}. \end{aligned}$$

Сумма этого ряда может быть рассчитана по формуле Эйлера

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

что верно для любого комплексного числа z с $z \neq n\pi$ (n — целое число). Мы принимаем $z = i\pi\lambda$, Потому что $\sin(i\pi\lambda) = i \sinh(\pi\lambda)$, мы получаем

$$\frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

и результат следует.

Спасибо

Эта статья была стимулирована дискуссией с Хансом Метцем об эффективном размере популяции в периодической среде во время конференции по стохастическим моделям в области экологии, эволюции и генетики в Анже в декабре 2013 года.

Библиографические ссылки

- Andersson H, Djehiche B (1998) A threshold limit theorem for the stochastic logistic epidemic. *J Appl Probab* 35 : 662–670
- Aronsson G, Kellogg RB (1978) On a differential equation arising from compartmental analysis. *Math Biosci* 38 : 113–122
- Assaf M, Kamenev A, Meerson B (2008) Population extinction in a time-modulated environment. *Phys Rev E* 78 : 041123
- Assaf M, Meerson B (2010) Extinction of metastable stochastic populations. *Phys Rev E* 81 : 021116
- Bacaër N, Ait Dads E (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter R_0 in periodic population models. *J Math Biol* 65 : 601–621
- Barles G (1994) *Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi*. Springer, Berlin
- Barles G, Perthame B (1988) Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J Control Optim* 26 : 1133–1148
- Billings L, Mier-y-Teran-Romero L, Lindley B, Schwartz IB (2013) Intervention-based stochastic disease eradication. *PLoS ONE* 8(8) : e70211
- Diekmann O, Heesterbeek H, Britton T (2012) *Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics*. Princeton University Press, Princeton
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth–death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker–Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Escudero C, Rodríguez JA (2008) Persistence of instanton connections in chemical reactions with time-dependent rates. *Phys Rev E* 77 : 011130
- Hethcote H (1973) Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model. *Bull Math Biol* 35 : 607–614
- Kamenev A (2011) *Field theory of non-equilibrium systems*. Cambridge University Press, Cambridge
- Kamenev A, Meerson B (2008) Extinction of an infectious disease : a large fluctuation in a nonequilibrium system. *Phys Rev E* 77 : 061107
- Mitake H (2009) Large time behavior of solutions of Hamilton–Jacobi equations with periodic boundary data. *Nonlinear Anal* 71 : 5392–5405
- Nasell I (2011) Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Osher S, Shu CW (1991) High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton–Jacobi equations. *SIAM J Numer Anal* 28 : 907–922
- Ovaskainen O, Meerson B (2010) Stochastic models of population extinction. *Trends Ecol Evol* 25 : 643–652
- Rabinowitz PH (1994) Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system. *Ergod Theor Dyn Syst* 14 : 817–829
- Roquejoffre JM (2001) Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton–Jacobi equations. *J Math Pures Appl* 80 : 85–104
- Soner HM (1986) Optimal control with state-space constraint I. *SIAM J Control Optim* 24 : 552–561