

周期的環境における流行のSIS確率モデル

J. Math. Biol. 71 (2015) 491–511
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01265563>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement、フランス、ボンディ
ピエール大学、マリーキュリー大学、
レコルデリエ、パリ、フランス nicolas.bacaer@ird.fr

概要

接触率 a 、治癒率 $b < a$ 、および集団サイズ N の流行の確率論的 SIS モデルでは、絶滅までの平均時間 τ は次のようになります。 $(\log \tau)/N$ に収束する $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ N が無限大に収束するとき。この記事では、接触率が平均が b より大きい周期関数である、より現実的なケースを検討します。 $(\log \tau)/N$ は、周期的なハミルトン-ヤコビ方程式にリンクされている新しい限界 C に収束します。接触率が、振幅が小さい、周波数が大きい、または周波数が非常に小さい余弦関数である場合、[Assaf et al.、2008、Phys Rev E 78] のように、 C の近似式を分析的に取得できます。、041123]。これらの結果は、数値シミュレーションによって示されています。

1.はじめに

Nåsell による本 (2011) のように、環境が一定であると想定されている場合、流行の SIS 確率モデルが詳細に研究されています。接触率 a 、治癒率 $b < a$ および母集団サイズ N の場合、絶滅までの平均時間 τ (たとえば、感染者から) は、

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} c = b/a - 1 - \log(b/a) > 0 \quad (1)$$

(Nåsell、2011、定理12.1)。他の参考文献の中でも、(Andersson and Djehiche、1998)、(Doering et al.、2005)、(Assaf and Meerson、2010) も参照してください。後者はブリルアン、クレイマース、ウェンツェルの方法を使用します[BKW]。確率 $P_n(t)$ 持っている $n \geq 1$ 時間で感染した人々 トン最初は準定常分布に近づきます π_n 。私たちは定義します $x = n/N$ そのため $0 \leq x \leq 1$ 。とき N が無限大に収束し、 $-(\log \pi_n)/N$ 連続関数に近づく $S(x)$ 定常ハミルトン-ヤコビ方程式

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

と

$$\begin{aligned} H(x, p) &= ax(1-x)(e^p - 1) + bx(e^{-p} - 1) \\ &= x(1 - e^{-p})[a(1-x)e^p - b] \end{aligned} \quad (2)$$

(Assaf and Meerson、2010、(12) および §IV.D.3)。より正確には、レベルラインの分岐 $H = 0$ と $a(1-x)e^p - b = 0$ 式につながる

$$S(x) = x \log(b/a) + x + (1-x) \log(1-x) + \text{constante} . \quad (3)$$

この関数には最小値があります $x = x^* = 1 - b/a$ 、 $x^* > 0$ なぜなら $b < a$ 。最終的に

$$c = S(0) - S(x^*)$$

ポテンシャル井戸の $x = 0$ における 底と端の間の高さ $S(x)$ 。同様に、ハミルトニアンシステム

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (4)$$

接続する異斜軌道を持っています $(x^*, 0) = (1 - \frac{b}{a}, 0)$ そして $(0, p^*) = (0, \log \frac{b}{a})$ 。数 c はアクションに等しい

$$\int_{x^*}^0 p dx$$

この軌道に沿って。BKW法は、物理学または個体群生物学の他の出生および死亡プロセスに使用されています (Ovaskainen and Meerson、2010年; Kamenev、2011年)。

分岐と消滅を伴う化学反応の彼らの研究 (Escudero and Rodríguez、2008) は、時間の周期的環境が平均消滅時間の中心的役割を果たすヘテロクライン軌道にどのように影響するかを示しました。(Assaf et al.、2008) は、同じモデルをより詳細に研究し、特に、小振幅、低周波数、または高周波数の周期的外乱による平均消滅時間の補正を計算しました。これらの著者は、準安定性を持つ他の出生および死亡プロセスに適用できる一般式を取得しています。さらに、(Billings et al.、2013、図7) は、周期的な SIS 確率モデルのモンテカルロシミュレーションを示しています。

ここでの目的は、(Assaf et al.、2008) によって使用される BKW 法を、周期 T の周期的接触率 (平均は b より大きい) を持つ SIS 流行モデルに適用することです。そのようなモデルは、例えば、免疫を与えない細菌感染の拡大を表すことができる。伝播は、週に1回の周期 (週末にリンク) または年に1回の周期 (休暇や季節にリンク) で学校で行われます。これはもちろん、より現実的なモデルへの第一歩にすぎません。

セクション2では、非公式な計算により、平均消滅時間が τ (例えば、時刻0に感染した人から始まる) は、

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C = \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+) - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x). \quad (5)$$

ここに、 $S^*(t, x)$ ハミルトン・ヤコビ方程式の周期 T の周期的な粘度の解です

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

混合エッジ条件ディリクレ-「拘束状態」

$$S(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty.$$

$S(t, x)$ $x = 0$ の近くで完全にゼロであってはなりません。縁の状態は、粘度の意味で理解する必要があります (Barles、1994)。 $S^*(t, 0^+) = 0$ と等しくない場合があります。ハミルトニアン $H(t, x, p)$ 定数パラメータを除いて、(2) と同じです。 a に置き換えられます $a(t)$ 。と

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t)), \quad \omega = 2\pi/T, \quad a_0 > b, \quad |\varepsilon| \leq 1,$$

私たちは定義します $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$ 。(Assaf et al.、2008) の方法に従って、セクション2は

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}$$

もし ε 0に近い、

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0)$$

もし $\omega \ll a_0$ そして

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0)$$

高周波制限内 $\omega \gg a_0$ 。私たちはそれを推測することができます $C > 0$ 限り $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ 。 C おそらく常により少ない c_0 なぜなら、季節変動は感染症の絶滅を助長する傾向があるからです。これは、より正確には、周期的環境がSISモデルに対して、分岐および消滅モデルで得られたものと同様の平均消滅時間の指数関数的減少をもたらすことを示唆しています (Assaf et al.、2008)。セクション3では、数値シミュレーションを使用してこれらの結果を示します。セクション4では、いくつかの注釈を追加しています。

2.分析計算

2.1ハミルトン・ヤコビ偏微分方程式

マスター方程式とフロケ理論。 N は総人口であり、一定であると仮定されます。私たちは定義します

- $S(t)$ 、健康な人の数
- $I(t)$ 、感染者数

時間 t で、 $N = S(t) + I(t)$ 。私たちが持っている場合 $I(t) = n$ 、

- 確率で $bndt + o(dt)$ 、人が癒す
- 確率で $a(t)n(1 - n/N)dt + o(dt)$ 、人が感染している

間 t と $t + dt$ の。 $a(t)$ 接触率です。 b は治癒率です。と思う $a(t)$ は周期 T の連続的な周期関数で、

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt - b > 0,$$

言い換えると

$$R_0 = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt}{b} > 1.$$

の生物学的解釈について R_0 、 (Bacaër and Ait Dads、2012) を参照してください。(Hethcote、1973) は、 $r > 0$ (すなわち、 $R_0 > 1$) は、この平均場方程式の解が周期的かつ正の関数に収束するために必要かつ十分な条件です。

$$\frac{di}{dt} = a(t)i(1 - i) - bi.$$

そうでなければ、解はゼロに収束します。

$P_n(t)$ 確率です $I(t) = n$ 。我々は持っています

$$\frac{dP_n}{dt} = a(t)(n-1)(1 - (n-1)/N)P_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]P_n + b(n+1)P_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (7)$$

ここに、 $P_{-1} = 0$ そして $P_{N+1} = 0$ 。もちろん、

$$\sum_{n=0}^N P_n(t) = 1.$$

システム (7) も書かれています

$$\frac{dP}{dt} = M(t)P.$$

$P(t)$ ベクトルです $(P_n(t))_{0 \leq n \leq N}$ そして $M(t)$ サイズ $N+1$ の正方行列です

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b - a(t)(1 - \frac{1}{N}) & 2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(t)(1 - \frac{1}{N}) & -2b - 2a(t)(1 - \frac{2}{N}) & 3b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -bN \end{pmatrix}.$$

この行列はブロック構造を持っています

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & Q(t) \end{pmatrix}.$$

$Q(t)$ サイズ N の正方行列です。 $X(t)$ そして $Y(t)$ の行列は

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= M(t)X, & X(0) &= I_{N+1} \\ \frac{dY}{dt} &= Q(t)Y, & Y(0) &= I_N. \end{aligned}$$

I_N サイズ N の単位行列です。フロケ乗数 $M(t)$ 、つまりモノドロミー行列の固有値 $X(T)$ は $\{\mu_0 = 1\}$ とフロケ乗数 $Q(t)$ 。マトリックス $Q(t)$ は協調的です。対角線の外側の係数は正またはゼロです。対角線の真上と真下の要素はすべて正であるので、この行列も既約です。したがって、のすべての要素 $Y(t)$ 厳密に肯定的です $t > 0$ 。ペロンとフロベニウスの定理によれば、固有値は μ_1 の $Y(T)$ 最大の実数部は厳密に正の実数であり、関連する固有空間は次元1です。さらに、

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1)Q(t) = (-b \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

我々は持っています $0 < \mu_1 < 1$ (Aronsson and Kellogg, 1978) および $\lambda_1 = (\log \mu_1)/T < 0$ 。ベクトル $(1, 0, 0, \dots, 0)$ 定常状態です。 $P(t)$ 次の場合、このベクトルに収束します $t \rightarrow +\infty$ 。ここでの目的は、 N が大きい場合に、 λ_1 と0。

してみましょう v はなるの固有ベクトル $X(T)$ 固有値に関連付けられています $\mu_1 = e^{\lambda_1 T}$ 。私たちは選ぶことができ、 v をように、 $v_n > 0, 1 \leq n \leq N$ 。このように

$$X(T)v = e^{\lambda_1 T}v.$$

フロケの理論と同様に、

$$\pi(t) = e^{-\lambda_1 t}X(t)v.$$

私たちは

$$\frac{d\pi}{dt}(t) = -\lambda_1\pi(t) + M(t)\pi(t).$$

さらに

$$\pi(T) = e^{-\lambda_1 T} X(T)v = v = \pi(0).$$

そう $\pi(t)$ は周期 T の周期関数です。と $\pi(t) = (\pi_n(t))_{0 \leq n \leq N}$ 、我々は持っています

$$\lambda_1\pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = a(t)(n-1)(1-(n-1)/N)\pi_{n-1} - [a(t)n(1-n/N) + bn]\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1}. \quad (8)$$

これらの方程式を合計すると、

$$\lambda_1 \sum_{n=0}^N \pi_n(t) + \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0.$$

だから私たちは

$$\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=0}^N \pi_n(0).$$

だが $\sum_{n=0}^N \pi_n(t)$ は周期 T の周期関数です。したがって $\sum_{n=0}^N \pi_n(0) = 0$ そして $\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0 \forall t$ 。だから私たちは

$$\pi_0(t) = - \sum_{n=1}^N \pi_n(t).$$

しかし (8) と $n=0$ それも示しています

$$\lambda_1\pi_0(t) + \frac{d\pi_0}{dt} = b\pi_1(t).$$

なぜなら $\pi_0(t)$ 周期的であり、統合することで

$$\lambda_1 = b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\int_0^T \pi_0(t) dt} = -b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt}. \quad (9)$$

BKW解とハミルトン・ヤコビ方程式。 N が大きい場合、BKWソリューションを探しましょう

$$\pi_n(t) \simeq e^{-NS(t,x)}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

と $x = n/N$ 。 $S(t, x)$ ($\backslash, 0 < x < 1 \backslash$) の場合、 t と x の連続関数であり、これは t に関して周期 T の周期的です。その後、

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_n}{dt} &\simeq -N \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) e^{-NS(t,x)}, \\ \pi_{n+1}(t) &\simeq e^{-NS(t, x + \frac{1}{N})} \simeq e^{-NS(t,x) - \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}, \quad \pi_{n-1}(t) \simeq e^{-NS(t,x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}. \end{aligned}$$

私たちは定義します $\alpha(t, x) = a(t)x(1-x)$ そして $\beta(x) = bx$ 。 (8) は

$$\lambda_1\pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = N\alpha(t, x - 1/N)\pi_{n-1} - N[\alpha(t, x) + \beta(x)]\pi_n + N\beta(x + 1/N)\pi_{n+1}.$$

支配的な表現のみを保持することにより、 $\alpha(t, x - 1/N) \simeq \alpha(t, x)$ そして $\beta(x + 1/N) \simeq \beta(x)$ 取得するため

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} \simeq N\alpha(t, x)[\pi_{n-1} - \pi_n] + N\beta(x)[\pi_{n+1} - \pi_n].$$

λ_1 おそらく指数関数的に小さいです。左側から見落とすことがあります。BKWフォームを挿入し、 $N e^{-NS(t,x)}$ 、ハミルトン-ヤコビ方程式を取得します

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a(t)x(1-x)\left[e^{\frac{\partial S}{\partial x}} - 1\right] + bx\left[e^{-\frac{\partial S}{\partial x}} - 1\right] = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (10)$$

これは、周期的なハミルトニアンを持つ (6) の形式です。 $H(t, x, p)$ (2) で与えられ、 $a(t)$ 置き換える a 。 (10) などの方程式は通常、次の形式の漸近解を持ちます $S(t, x) = -Et + \Sigma(t, x)$ 。 $\Sigma(t, x)$ は t に関する周期 T の周期関数であり、 E は定数です。ただし、ここでは、 $E = 0$ 興味があります：それらは以下のセクション2.2のヘテロクリニック軌道に対応します。

エッジ条件。 なぜなら $H(t, 0, p) = 0$ 、我々は持っています $\frac{\partial S}{\partial t}(t, 0) = 0$ 。 $S(t, 0)$ したがって、定数です S_0 t に依存しない。(10) には一次の偏微分のみが含まれるため、その解は加法定数内に定義されます (固有ベクトル v が $X(T)$ 乗法定数内で定義されます)。だから私たちは選ぶことができます $S_0 = 0$ 、したがってディリクレ条件：

$$S(t, 0) = 0 \quad \forall t. \quad (11)$$

さらに、 $\pi_n(t) = 0 \quad \forall n > N$ そして、一定の環境における式 (3) は、 $|S(1)| < +\infty$ ながら $\frac{dS}{dx}(1) = +\infty$ 、私たちはそれを課します

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty \quad \forall t. \quad (12)$$

この状態をエッジに提示する別の方法は、「状態制約」です。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

$x = 1$ の場合。この条件は、 $x = 1$ で

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) \geq 0$$

(ソナー、1986)。しかし理由は

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p},$$

この式は、 $x = 1$ で正またはゼロの場合に限り、 $p = +\infty$ 、(12) のように。

ハミルトニアンの性質。 $H(t, x, p)$ p で凸です

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p + bxe^{-p} \geq 0.$$

さらに、 $H(t, x, p) \rightarrow +\infty$ もし $|p| \rightarrow +\infty$ それを条件として $0 < x < 1$ 。ただし、このプロパティは、 $x = 0$ または $x = 1$ 。我々は持っています $H(t, x, 0) = 0$ 。ラグランジアンは

$$L(t, x, v) = \max_p \{pv - H(t, x, p)\}.$$

私たちは持っています $0 < x < 1$

$$L(t, x, v) = p_* v - H(t, x, p_*).$$

p_* 唯一の解決策です

$$v = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p_*) = a(t)x(1-x)e^{p_*} - bxe^{-p_*}.$$

これは、次数2の多項式です。 e^{p_*} 。これは与える

$$\begin{aligned} L(t, x, v) &= p_* v - a(t)x(1-x)(e^{p_*} - 1) - bx(e^{-p_*} - 1) \\ &= v \log \left(\frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2a(t)x(1-x)} \right) + a(t)x(1-x) + bx \\ &\quad - \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2} - \frac{2a(t)x(1-x)bx}{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}. \end{aligned}$$

以下のための $x = 1$ 、我々は持っています

- $L(t, 1, v) = +\infty$ もし $v > 0$
- $L(t, 1, 0) = b$
- $L(t, 1, v) = -v \log(-v/b) + v + b$ もし $v < 0$ 。

以下のための $x = 0$ 、我々は持っています

- $L(t, 0, v) = +\infty$ もし $v \neq 0$
- $L(t, 0, 0) = 0$ 。

ただし、 x が0に近い場合は、 $L(t, x, v) \sim -v \log x$ 。だから $\eta > 0$ 小型であらゆる機能に対応 $\xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1])$ と $\xi(\theta) = 0$ 、我々は持っています

$$\int_{\theta}^{\theta+\eta} L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds \simeq - \int_{\theta}^{\theta+\eta} \frac{d\xi}{ds}(s) \log \xi(s) ds = - \int_0^{\xi(\theta+\eta)} \log \xi d\xi,$$

これは無限ではありません。

ハミルトン・ヤコビ方程式の解。 与えられた初期条件について $S_0(x)$ 、関数

$$\begin{aligned} S(t, x) &= \inf \left\{ \int_{\theta}^t L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds + 1_{\theta=0} S_0(\xi(\theta)); \right. \\ &\quad \left. 0 \leq \theta \leq t, \xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1]), \theta = 0 \vee \xi(\theta) = 0, \xi(t) = x \right\} \end{aligned}$$

(10) の粘性解であり、エッジに混合条件 (11) - (12) があり、 $S(0, x) = S_0(x)$ (Barles、1994)。それは出口時間問題の価値関数です $x = 0$ 「状態制約」 $x = 1$ 。定期的な解決策 $S^*(t, x)$ したがって、(10) - (11) - (12) は、上記の進化演算子の固定小数点によって与えられます。 $S^*(0, x) = S^*(T, x)$ 。(Roquejoffre、2001) と (Mitake、2009) は、ディリクレタイプのエッジに条件がある類似の周期的ハミルトンヤコビ方程式を研究しました。ただし、一意性がないことに注意してください。関連する問題については、(Barles and Perthame、1988) を参照してください。確かに、 $a(t) = a_0$ 一定です。この場合、2つのタイプの定常粘度ソリューションがあります。 $S^*(x)$ 。

- 一方で、形式の解決策があります

$$x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x) + \gamma$$

定数で $\gamma \leq 0$ 、定数 γ のみが異なります。ソリューション $\gamma = 0$ 古典的な意味で $x = 0$ のエッジで条件をチェックする唯一のものです。

- 一方、形式の解決策があります

$$\min\{0, x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x) + \gamma\}$$

γ が一定の場合 $0 < \gamma \leq c_0$ 。これらの解は、 $x = 0$ 付近ではまったく同じであり、 C を与えません。

エッジに混合条件 (11) - (12) がある周期方程式 (10) の場合、粘性の解があると推測できます。

- これらは t に関して周期 T の周期的です、
- 同様にゼロに近いされていない $X = 0$ 、
- 定数だけが異なる（したがって同じ C を与える）。

私たちが BKW ソリューションとして選択するのは、このようなソリューションです。図3は、以下のとおり、でエッジの条件 $X = 0$ は、溶液が連続的でないかもしれないので、粘度の意味で理解される必要があります、 $X = 0$ 。

の行動 $\lambda_1 N$ が大きい場合。 (9) に戻ると、

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} = \frac{\log b}{N} + \frac{1}{N} \log \left(\int_0^T \pi_1(t) dt \right) - \frac{1}{N} \log \left(\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right).$$

我々は持っています

$$\pi_1(t) \simeq e^{-NS^*(t, 1/N)} \simeq e^{-NS^*(t, 0^+)}$$

以下のための N 大。だから私たちは

$$\frac{1}{N} \log \left(\int_0^T \pi_1(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+)$$

積分の漸近評価のためのラプラスの式のため。同様に、 $\pi_n(t) \simeq e^{-NS^*(t, n/N)}$ 、我々は持っています

$$\frac{1}{N} \log \left(\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x)$$

そして

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -C$$

C (5) によって与えられます。私たちはそれを推測することができます $C > 0$ もしそうなら

$$\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b.$$

平均消滅時間。 時間 t に感染した n 人 から始まる、平均の絶滅時間 $\tau_n(t)$ システムの周期 T の周期解です

$$-1 = \frac{d\tau_n}{dt} + b n \tau_{n-1} - (a(t)n(1 - n/N) + b n) \tau_n + a(t)n(1 - n/N) \tau_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (13)$$

と $\tau_0(t) = 0$ 。このシステムは転置行列を含みます $Q^*(t)$ マトリックスの $Q(t)$ 。私たちは定義します

- $\hat{\tau}(t) = (\tau_n(t))_{1 \leq n \leq N}$
- $\hat{\pi}(t) = (\pi_n(t))_{1 \leq n \leq N}$

- $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 実際のベクトルの通常のスカラー積。

私たちは

$$\lambda_1 \hat{\pi} + \frac{d\hat{\pi}}{dt} = Q(t)\hat{\pi}, \quad -\mathbf{1} = \frac{d\hat{\tau}}{dt} + Q^*(t)\hat{\tau}.$$

そして

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle = \left\langle \frac{d\hat{\pi}}{dt}, \hat{\tau} \right\rangle + \langle \hat{\pi}, \frac{d\hat{\tau}}{dt} \rangle = \langle Q(t)\hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \lambda_1 \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle - \langle \hat{\pi}, Q^*(t)\hat{\tau} \rangle.$$

との表現 $Q(t)$ そして $Q^*(t)$ お互いをキャンセルします。の頻度を統合して使用することにより $\hat{\pi}(t)$ そして $\hat{\tau}(t)$ 、私達は手に入れました

$$-\lambda_1 = \frac{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle}{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle dt}.$$

これは、例えば時間0の感染者から始まる平均消滅時間 τ が、 $-1/\lambda_1$:

$$\frac{\log(\tau)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C.$$

この本質的に非公式な分析は、一定の環境でのSISモデルと同様に、厳密な形式で行うことができると推測できます (Näsell, 2011年)。

2.2ヘテロクライン軌道

一般的なケース。 ハミルトン-ヤコビ方程式 (6) は、光線追跡によって少なくとも局所的に、つまりハミルトニアンシステム (4) と方程式を同時に解くことによって解くことができることを思い出してください。

$$\frac{dz}{dt} = p(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t)) - H(t, x(t), p(t))$$

初期状態で $x(0) = x_0$ 、 $p(0) = \frac{\partial S}{\partial x}(0, x_0)$ 、 $z(0) = S(0, x_0)$ 、そのため $z(t) = S(t, x(t))$ 。以下 (Assaf et al.、2008) では、ハミルトニアンシステムをさらに詳しく見てみましょう (4) 。この場合、

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) &= a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p}, \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) &= a(t)(1-2x)(e^p - 1) + b(e^{-p} - 1). \end{aligned} \tag{14}$$

私たちは、最初の期間の定期的な非自明な解模索してみましょう T をして、 $x \equiv 0$ そして

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, 0, p) = -(a(t) - be^{-p})(e^p - 1).$$

と $p = \log(1 + q)$ 、簡単に解けるベルヌーイ微分方程式を得る。これは周期 T の周期解を与える

$$p^*(t) = \log \left(1 + \left[\frac{e^{-bt + \int_0^t a(s) ds}}{e^{p^*(0)} - 1} + \int_0^t a(s) e^{-b(t-s) + \int_s^t a(u) du} ds \right]^{-1} \right),$$

と

$$p^*(0) = \log \left(1 + \frac{1 - e^{-bT + \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(s) e^{-b(T-s) + \int_s^T a(u) du} ds} \right).$$

周期解 $(0, p^*(t))$ 不安定です。確かに、 $x(t) = \tilde{x}(t)$ そして $p(t) = p^*(t) + \tilde{p}(t)$ 方程式を線形化することで、

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)} & 0 \\ 2a(t)(e^{p^*(t)} - 1) & -a(t)e^{p^*(t)} + be^{-p^*(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

フロケ乗数は

$$f = \exp \int_0^T [a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)}] dt$$

そして $1/f$ 、それゆえ不安定性。不安定性は、ハミルトニアンフローの作用下での位相空間 (x, p) の「ボリューム」の不変性に関するリウビルの定理の結果としても見るすることができます。

第二に、期間の非自明、周期解のための見てみましょう T と、 $p \equiv 0$ そして

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, 0) = a(t)x(1-x) - bx.$$

これは、SISモデルの平均場方程式です。唯一の非ゼロ周期解は

$$x^*(t) = \left(\frac{1}{x^*(0)} e^{bt - \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t a(u) e^{b(t-u) - \int_u^t a(s) ds} du \right)^{-1}$$

と

$$x^*(0) = \frac{1 - e^{bT - \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(u) e^{b(T-u) - \int_u^T a(s) ds} du}. \quad (15)$$

周期解 $(x^*(t), 0)$ また、不安定です。確かに、 $x(t) = x^*(t) + \tilde{x}(t)$ そして $p(t) = \tilde{p}(t)$ 方程式を線形化することで、

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)(1 - 2x^*(t)) - b & a(t)x^*(t)(1 - x^*(t)) + bx^*(t) \\ 0 & -a(t)(1 - 2x^*(t)) + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Floquetの乗数は再び互いに逆になるため、不安定になります。

セクション1から、一定の環境では、静止点を接続する位相平面 (x, p) にヘテロクライン軌道があることを思い出してください。 $(x^*, 0) = (1 - b/a, 0)$ そして $(0, p^*) = (0, \log(b/a))$ もし $a > b$ 。(Escudero and Rodríguez, 2008) は、少なくとも周期的摂動の小さな振幅に対して、同一粒子の分岐と消滅の周期的モデルに対して同様の異斜軌道を発見しました。ですから、ヘテロクライン軌道の存在を期待できます $(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$ 、周期解を接続します $(x^*(t), 0)$ そして $(0, p^*(t))$ 。存在はおそらく変分的アプローチを使用して証明することができます (Rabinowitz, 1994)。この特別な軌道は、発射法によってデジタルで取得できます。(Assaf et al., 2008, 式 (20)) によれば、

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{p}(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) - H(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) \right] dt. \quad (16)$$

この積分は数値的に評価できます。

外乱法。 関数 $a(t)$ 定数です a_0 、そう $(\hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))$ 静止点を接続する異斜軌道です $(x^*, 0) = (1 - b/a_0, 0)$ そして $(0, p^*) = (0, \log(b/a_0))$ 。この軌道は $a_0(1 - x)e^p - b = 0$ 、(2) でわかるように。この方程式を使用して p を x の関数として表し、その結果を (4) の最初の方程式に挿入すると、次のようになります。

$$\frac{dx}{dt} = bx - a_0x(1 - x).$$

解決策は

$$x(t) = \left[\frac{1}{x(t_0)} e^{(a_0-b)(t-t_0)} + \frac{a_0}{a_0 - b} (1 - e^{(a_0-b)(t-t_0)}) \right]^{-1}.$$

例えば選ぶことによって $x(t_0) = (1 - b/a_0)/2$ 、私達は手に入れました

$$\hat{x}_0(t) = \frac{1 - b/a_0}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_0(t) = \log \frac{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)} a_0/b}.$$

今それを仮定します

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \phi(t))$$

と $a_0 > b$ 、 ε 小さくて $\phi(t)$ 周期関数 $\int_0^T \phi(t) dt = 0$ 。ハミルトニアンは次の形式で書くことができます

$$H(t, x, p) = H_0(x, p) + \varepsilon H_1(t, x, p).$$

$H_0(x, p)$ (2) と同じですが、 a_0 置き換える a 。

$$H_1(t, x, p) = a_0 \phi(t) x(1 - x)(e^p - 1).$$

と $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$ 、

$$C \simeq \min_{t_0} \Gamma(t_0), \quad \Gamma(t_0) = c_0 - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt, \quad \varepsilon \simeq 0$$

(Assaf et al.、2008、式 (24))。この場合、 $(1 - \hat{x}_0)e^{\hat{p}_0} = b/a_0$ 。だから私たちは

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 - \varepsilon a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \hat{x}_0(t) [b/a_0 - 1 + \hat{x}_0(t)] dt \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t_0 + u/(a_0 - b)) \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du. \end{aligned}$$

$\Gamma(t_0)$ したがって、の周期関数 t_0 と $\int_0^T \Gamma(t_0) dt_0 = 0$ 。のフーリエ分解を考えます $\phi(t)$ 、

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t},$$

と $\omega = 2\pi/T$ 、 $\phi_0 = 0$ の平均は $\phi(t)$ ゼロであり、 $\phi_{-k} = \bar{\phi}_k$ (共役複素数)。私たちは

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k i \omega u}{a_0 - b}} \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \frac{\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}}{\sinh\left(\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}\right)} \end{aligned}$$

(付録を見てください)。特に $\phi(t) = \cos(\omega t)$ 、我々は持っています $\phi_{\pm 1} = 1/2$ そして $\phi_k = 0$ そうでない場合。だから私たちは

$$\Gamma(t_0) = c_0 + \varepsilon \frac{\pi\omega \cos(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0-b}\right)}. \quad (17)$$

(Escudero and Rodríguez, 2008) および (Assaf et al., 2008) のように、かく乱システムは次の形式です。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x}. \quad (18)$$

$\hat{x}_0(t)$ そして $\hat{p}_0(t)$ のみに依存 $t - t_0$ 。メルニコフの機能は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_0}{\partial x} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt_0} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt_0} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dt_0}. \end{aligned}$$

(17) を使用して、

$$\mathcal{M}(t_0) = \frac{\pi\omega \sin(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0-b}\right)}.$$

$\mathcal{M}(t_0) = 0$ をクロス $t_0 = k\pi/\omega$ (k は整数)。したがって、ヘテロクライン軌道は少なくとも ε 小さい。

の最小値 $\Gamma(t_0)$ (17) では、 $t_0 = T/2$ もし $\varepsilon > 0$ そしてのために $t_0 = 0$ もし $\varepsilon < 0$ 。どちらの場合でも、

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi\omega|\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0-b}\right)}, \quad \varepsilon \simeq 0, \quad (19)$$

導入部で発表したとおり。(19) は、わずかに異なるハミルトニアンから得られた (Kamenev, 2011) の式 (4.76) に似ていることに注意してください。 ω が小さい (T が大きい) 場合、 $\omega \ll a_0$ 、次に (19) は、

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0), \quad (20)$$

独立しています ω 。この式は、(1) で得られる式と同じです。 $a = a_0(1 - |\varepsilon|)$:

$$\frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} - 1 - \log \frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} = \frac{b}{a_0} - 1 - \log \frac{b}{a_0} - |\varepsilon|(1 - b/a_0) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \simeq 0.$$

(Assaf et al., 2008, section IV) の「断熱近似」のように、式 (20) は、 $\varepsilon \simeq 0$ 、しかしまた限り $\omega \ll a_0$ (20) の右辺が正であること。なぜなら $\sinh(x) \geq x \forall x \geq 0$ 、(20) で与えられる C のおおよその値は常に (19) で与えられる値よりも低いことがわかります。

高周波制限。 今それを仮定します $\omega \gg a_0$ 、常に $\phi(t) = \cos(\omega t)$ 。システム (18) が書かれている

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p}(x, p) + a_0 \varepsilon \cos(\omega t) x(1-x)e^p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}(x, p) - a_0 \varepsilon \cos(\omega t)(1-2x)(e^p - 1).\end{aligned}$$

Kapitsa法 (Assaf et al.、2008、§III.B) では、

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad p(t) = Y(t) + \eta(t),$$

ここで、 X と Y は遅い変数ですが、 ξ と η は小さくても速い振動です。すばやく振動する式は次のようになります。

$$\frac{d\xi}{dt} \simeq a_0 \varepsilon \cos(\omega t) X(1-X)e^Y, \quad \frac{d\eta}{dt} \simeq -a_0 \varepsilon \cos(\omega t)(1-2X)(e^Y - 1).$$

私たちは、と仮定し、 X と Y は、で、短い発振時一定であります $T = 2\pi/\omega$ 。私達は手に入れました

$$\xi(t) \simeq \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1-X)e^Y, \quad \eta(t) \simeq -\frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1-2X)(e^Y - 1).$$

これは変革を示唆しています

$$\begin{aligned}x &= X + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1-X)e^Y \\ p &= Y - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1-2X)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \Phi(t, X, Y).\end{aligned}$$

$\Phi(t, X, Y)$ 変換がほぼ正準になるように、つまりポアソン括弧が条件を満足するように選択されます

$$\{x, p\} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial p}{\partial X} = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \quad (21)$$

なぜなら

$$\begin{aligned}\{x, p\} &= \left[1 + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1-2X)e^Y \right] \left[1 - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1-2X)e^Y + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right] \\ &\quad - \left[\frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1-X)e^Y \right] \left[2 \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right],\end{aligned}$$

条件 (21) が書かれている

$$\begin{aligned}\{x, p\} &= 1 - \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t)(1-2X)^2 e^{2Y} + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \\ &\quad - 2 \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) X(1-X)e^Y(e^Y - 1) + o(a_0^2/\omega^2) = 1 + o(a_0^2/\omega^2).\end{aligned}$$

だから私たちは

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \sin^2(\omega t) [(1-2X)^2 e^{2Y} + 2X(1-X)e^Y(e^Y - 1)].$$

取得するため $\Phi(t, X, 0) = 0$ 、選択する必要があります

$$\Phi(t, X, Y) = \sin^2(\omega t) [(1-2X)^2 (e^{2Y} - 1)/2 + X(1-X)(e^Y - 1)^2].$$

生成関数 $F_2(t, x, Y)$ この変革の

$$\frac{\partial F_2}{\partial Y} = X + o(a_0^2/\omega^2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = p + o(a_0^2/\omega^2),$$

によって与えられます

$$F_2(t, x, Y) = xY - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) x(1-x)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \sin^2(\omega t) x(1-x)(1-2x)(e^{2Y} - 1).$$

と $H(t, x, y) = h(t, X, Y)$ 、新しいハミルトニアンは

$$h(t, X, Y) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

我々は持っています $T = 2\pi/\omega$ 。このハミルトニアンの平均を取ると、2番目の式はキャンセルされます。

$$\int_0^T \frac{\partial F_2}{\partial t} dt = 0$$

そして有効なハミルトニアンだけが残っています

$$\bar{H}(X, Y) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t, X, Y) dt.$$

という事実を利用した面倒な計算 $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = 1/2$ につながる

$$\bar{H}(X, Y) \simeq X(1 - e^{-Y}) \left[a_0(1 - X)e^Y - b + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \left\{ -a_0 X(1 - X)^2 e^{2Y} + b(1 - X)(1 - 2X)e^Y - bX(1 - X)(e^Y - 1) - b(1 - 2X)^2 \right\} \right].$$

かく乱されたヘテロクライン軌道は、角括弧内の項がゼロであることを課すことによって得られます。この軌道は $(X_\varepsilon^*, 0)$ そして $(0, Y_\varepsilon^*)$ 、

$$X_\varepsilon^* \simeq (1 - b/a_0) \left[1 - \frac{b(a_0 - b)\varepsilon^2}{2\omega^2} \right], \quad Y_\varepsilon^* \simeq \log(b/a_0) + \frac{a_0(a_0 - b)\varepsilon^2}{2\omega^2}.$$

このヘテロクライン軌道に沿ったアクションは

$$C = \int_{X_\varepsilon^*}^0 Y dX.$$

別の面倒な計算は、最終的には

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0), \quad (22)$$

はじめに発表したとおり。機能が $z \mapsto (1 - z)^2(1 + 2z)$ 間隔全体で1未満 $0 < z < 1$ 、 C の補正項は常に $\frac{a_0^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2}$ 。小さいので $\omega \gg a_0$ 仮説によって。予想されるように、高周波妨害を受ける集団は、この妨害の振幅にほとんど依存しません。

3.数値計算

フロケ乗数。 λ_1 常微分方程式を解いて行列の固有値を数值的に計算するScilabなどのソフトウェアを使用して、マスター方程式のフロケ乗数を計算することで直接推定できます。 $e^{\lambda_1 T}$ 2番目に大きい実数部を持つ固有値で、最初は1です。次に、プロットできます $-\log(-\lambda_1)M$ によると。この曲線の傾きは、 C のおおよその値を提供します。

ヘテロクライン軌道。 (Assaf et al.、2008) については、 $(x^*(t), 0)$ そして $(0, p^*(t))$ 撮影方法によって。初期状態をとります $x^*(0)$ (15) で与えられ、非常に小さい負の値 $p(0)$ 。ソリューションが得られるまで、この値を変化させます $(x(t), p(t))$ 周期的になる傾向がある、つまり $x(t)$ 0に近い $p(kT)$ 近く $p^*(0)$ 以下のための K 大 (ただし、数値的不安定性を避けるためには大きすぎるではありません)。次に、積分 (16) を使用して C を数值的に計算できます。

偏微分方程式。 周期解を計算することも可能です $S^*(t, x)$ 解の理論の数値的方法を使用したハミルトン・ヤコビ方程式 (6) の解。私たちは定義します

- Δt タイムステップ
- Δx 空間離散化ステップ
- S_j^m の近似 $S(m\Delta t, j\Delta x)$ ここで、 j と m は次のような整数です。 $m \geq 0$ そして $0 \leq j \leq J$ と $J = 1/\Delta x$ 。

ゴドゥノフの方法を使うことができます

$$\frac{S_j^{m+1} - S_j^m}{\Delta t} + \mathcal{H}\left(m\Delta t, j\Delta x, \frac{S_j^m - S_{j-1}^m}{\Delta x}, \frac{S_{j+1}^m - S_j^m}{\Delta x}\right) = 0,$$

どこハミルトニアン $\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+)$ によって与えられます

$$\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+) = \begin{cases} \min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\}, & p^- < p^+, \\ \max\{H(t, x, p); p^+ \leq p \leq p^-\}, & p^+ \leq p^- \end{cases}$$

(Osher and Shu、1991)。なぜなら $H(t, x, p)$ p に関して凸であり、最大値を含む2番目の式は

$$\max\{H(t, x, p^+), H(t, x, p^-)\}.$$

最小値を含む最初の式については、(14) に注意してください。 $H(t, x, p)$ 以下の場合、 p に関して最小値があります。 $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ 、つまり

$$p = p^\# = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a(t)(1-x)}.$$

だから私たちは

$$\min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\} = \begin{cases} H(t, x, p^+), & p^- < p^+ \leq p^\#, \\ H(t, x, p^-), & p^\# \leq p^- < p^+, \\ H(t, x, p^\#), & p^- \leq p^\# \leq p^+. \end{cases}$$

エッジの条件については、

$$S_0^m = 0, \quad (S_j^m - S_{j-1}^m)/\Delta x = K$$

K の値が非常に高い。タイムステップ Δt Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件が満たされるには、 Δx と比較して十分に小さい必要があります。私たちが取った初期条件として

$$S(0, x) = x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x),$$

つまり、通常の定常解 $a(t)$ 時間平均に置き換えられます。定数関数を選択することもできます $S(0, x) = \sigma \sigma$ はかなり負ですが、周期的レジームへの収束は遅くなります。定数 σ は、セクション2です で述べた非一意性の問題を回避するのに十分な負でなければなりません。非定常問題の解が周期的レジームに達したら、推定できます。

$$C = \min_t S^*(t, 0^+) - \min_{t,x} S^*(t, x).$$

モンテカルル口法。 平均消滅時間は、モンテカルル口法でも推定できます。確率シミュレーションを平均化します。ただし、指数分布の待機時間を利用する Gillespie アルゴリズムは使用できないことに注意してください。 $a(t)$ 定期的です。場合は N が増加すると、消光時間が天文学的になることができます。この方法を使用しても結果は表示されません。

例。 とする

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(2\pi t/T))$$

と $T = 1$ 週間。最初に、 $a_0 = 20$ 週あたりと $b = 5$ 週あたり。感染の平均期間は $1/b = 1,4$ 日々。このように $R_0 = a_0/b = 4 > 1$ そして $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0) \simeq 0,636$ 。図1は $-\log(-\lambda_1)N$ の関数として $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$ そして $N = 10, 20, \dots, 60$ 、フロケ乗数を使用して計算されます。線は最後の3つのポイントの線形回帰に対応します $N = 40, 50,$ の推定値であるこれらの株の60斜面 C であります $0,524, 0,364$ そして $0,225$ ために $\varepsilon = 0,2, 0,5$ そして $0,8$ 。

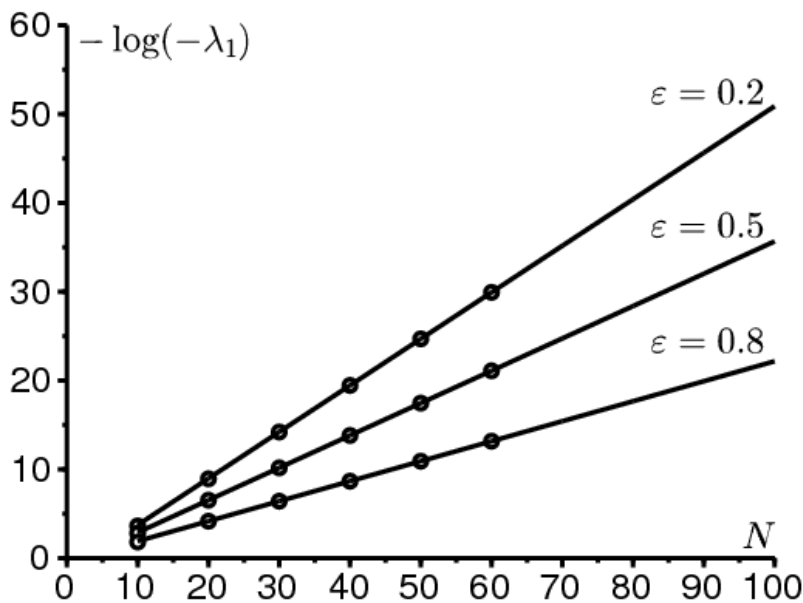


図1. マスター方程式のフロケ乗数の計算： $-\log(-\lambda_1)N$ の関数として $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$ そして $N = 10, 20, \dots, 60$ 。数 C は、これらの線の傾きです。パラメータ値： $T = 1, a_0 = 20, b = 5$ 。

a_0 そして $\omega = 2\pi/T$ この例では、同じ大きさです。周波数の中間的なケースです。したがって、 ε が小さい場合、(19) は C の適切な近似を与えると予想されます。関数として図2に示す次曲線 ε のための $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

- ヘテロクライン軌道を使用した C の実線
- C の長い点線と偏微分方程式 $\Delta x = 0,002$ そして $\Delta t = 0,0002$ (ほとんど区別がつかない)
- 図1で得られた C の値を表す3つの点

- 近似式の短い点線 (19)
- 低周波数での近似 (20) のための長い点線と短い点線。

ε が適度に小さい場合でも、近似式 (19) がCに近いことがわかります。

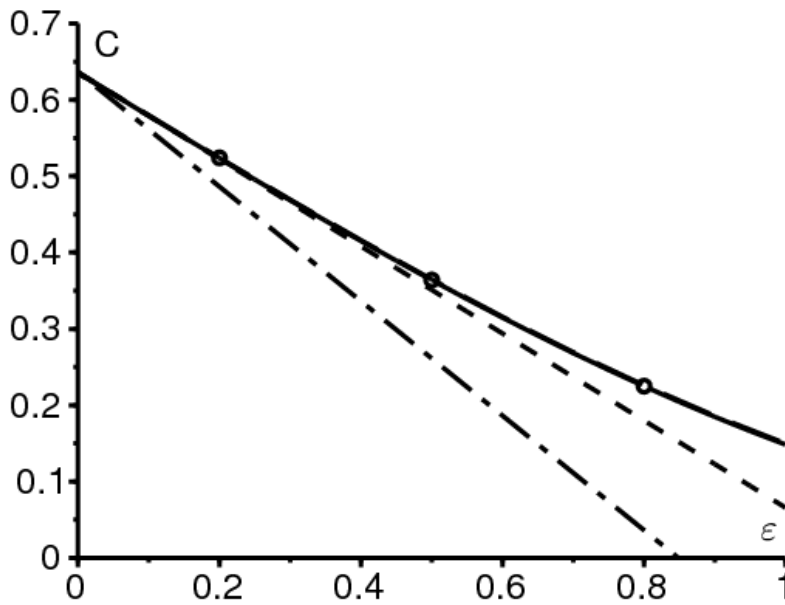


図2.中間周波数：ヘテロクライン軌道[実線]または偏微分方程式[長い点線]（2つの線はほとんど区別できない）を使用して計算された数値C、Floquet乗数図1 [ポイント]、近似式 (19) [短い点線]、および低周波の式 (20) [長い点線と短い点線]に応じて ε 。図1と同じパラメーター値

図3は定期的なソリューションを示しています $S^*(t, x)$ ハミルトン-ヤコビ方程式の t のさまざまな値に対して x の関数としてプロットされた場合、 $\varepsilon = 0,5$ 。の解の不連続性に注意してください $x = 0$ 。近くにズーム $x = 0$ それを示すだろう $S^*(t, 0^+)$ 実際には時間的に周期的であるため、境界条件 $S^*(t, 0) = 0$ 弱い意味でのみ満足することができます。

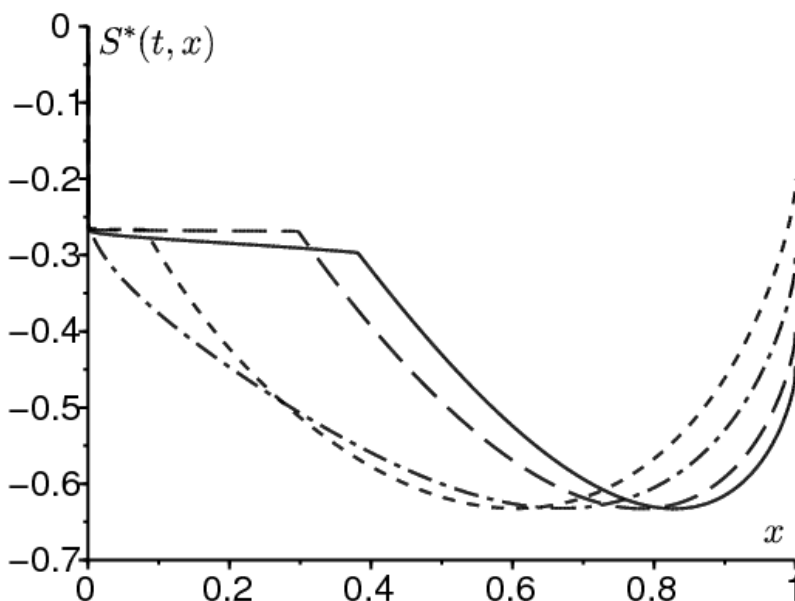


図3. 定期的なソリューション $S^*(t, x)$ ハミルトン-ヤコビ方程式の、の関数としてプロット X 用 $t = 0$ (実線)、 $t = T/4$ (長い点線)、 $t = T/2$ (短い点線) と $t = 3T/4$ (長い点線と短い点線)。図1と同じパラメーター値と $\varepsilon = 0,5$ 。

図4は高周波の例を考慮しています。 $a_0 = 2$ 週あたりと $b = 1$ 週あたり。このように $R_0 = 2$ そして $c_0 \simeq 0,1931$ 。その場合 $\omega \simeq 6,28$ 週あたりはやや大きい a_0 。ために $0 \leq \varepsilon \leq 1$ 、数 C は、ヘテロクライン軌道と高周波公式 (22) を使用して計算されます。値の範囲全体で一致は良好です。最後に、図5は軌道接続を示しています $(x^*(t), 0)$ そして $(0, p^*(t))$ 同じパラメータ値で $\varepsilon = 0,1$ 。

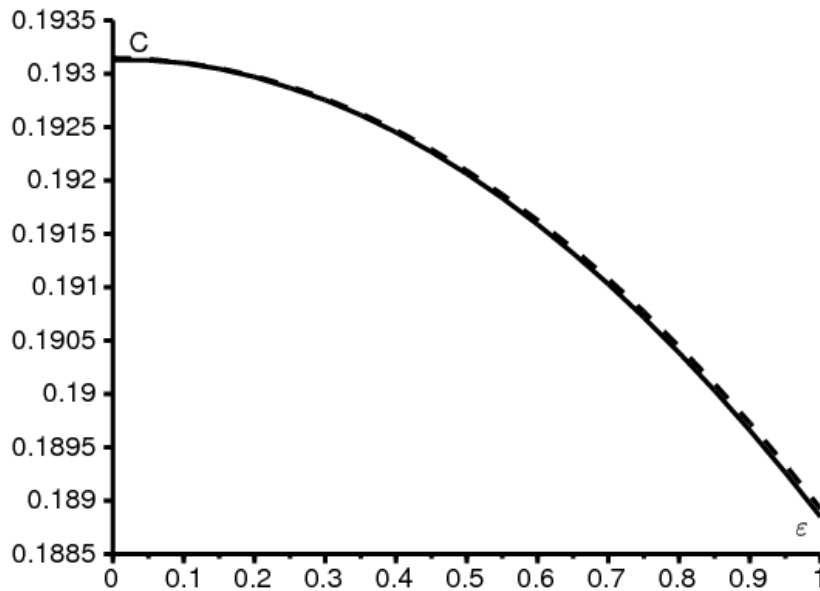


図4. 高周波領域：ヘテロクライン軌道[実線]と高周波公式 (22) [点線]を使用して ε の関数として計算された C 。パラメータ値： $T = 1$ 、 $a_0 = 2$ 、 $b = 1$ 。

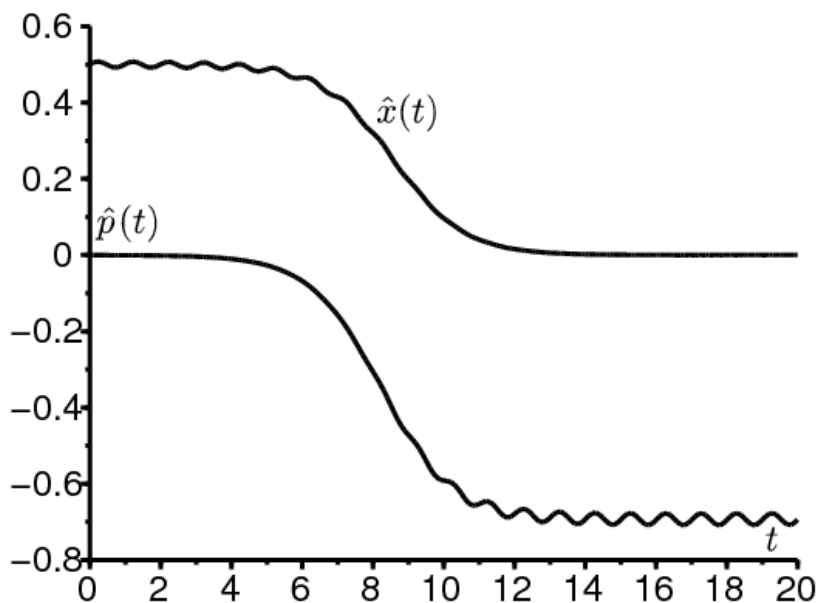


図5. コンポーネント $t \mapsto \hat{x}(t)$ そして $t \mapsto \hat{p}(t)$ 2つの周期解を接続するヘテロクライン軌道の $(0, p^*(t))$ そして $(x^*(t), 0)$ 。図4と同じパラメーター値と $\varepsilon = 0,1$ 。

4.注意事項

- 洗練されたBKWソリューションを使用すると、より正確な見積もりを取得できます

$$\pi_n(t) \simeq e^{-N S_0(t,n/N) - S_1(t,n/N)}.$$

挿入することにより

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-N S_0(t,n/N) - \frac{\partial S_0}{\partial x}(t,n/N) - \frac{1}{2N} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(t,n/N) - S_1(t,n/N) - \frac{\partial S_1}{\partial x}(t,n/N)}$$

および同様の表現 $\pi_{n-1}(t)$ (8) で、高次の項を分離することにより、次のハミルトンヤコビ方程式 (10) を取得します。 $S_0(t, x)$ そして輸送方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left[a(t)x(1-x)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} - bxe^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \right] \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ = a(t)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[1 - 2x + \frac{x(1-x)}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] + be^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[-1 + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

ために $S_1(t, x)$ 。関数が $a(t)$ 周期的であり、 $S_0(t, x)$ そして $S_1(t, x)$ 数値で計算する必要があります。関数が $a(t) = a$ が一定の場合、次の前指数係数 λ_1 次のように、結合漸近展開の方法によって得られます (AssafおよびMeerson、2010年)。最初 $S_0(x)$ (3) で与えられ、 $S_1(x)$ につながる

$$S_1(x) = \log(x\sqrt{1-x}) + \text{const.}$$

だから私たちは

$$\pi_n \simeq \kappa \frac{e^{-NS_0(n/N)}}{\frac{n}{N} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}}$$

一定の κ 。 n が小さい場合、

$$\pi_n \simeq \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0) - nS_0'(0)} = \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0)} \left(\frac{a}{b} \right)^n. \quad (23)$$

システム (8) については、近似を使用することもできます。

$$a(n-1)\pi_{n-1} - n(a+b)\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1} \simeq 0, \quad n \geq 1.$$

私たちは

$$\pi_n \simeq \frac{\pi_1}{n} \frac{1 - (a/b)^n}{1 - a/b} \sim \frac{\pi_1}{n} \frac{(a/b)^n}{a/b - 1}.$$

これは、(23) と一致するのは、 $\pi_1 \simeq \kappa N e^{-NS_0(0)} \left(\frac{a}{b} - 1 \right)$ 。最後に (9) は

$$\lambda_1 \simeq \frac{-b\pi_1/(\kappa N)}{\int_0^1 \frac{e^{-NS_0(x)}}{x\sqrt{1-x}} dx} \simeq \frac{(b-a)x^*\sqrt{1-x^*}\sqrt{NS_0''(x^*)}}{e^{N[S_0(0)-S_0(x^*)]}\sqrt{2\pi}} = -\frac{(a-b)^2}{a e^{cN}} \sqrt{\frac{N}{2\pi}}$$

(アサフとメアソン、2010、方程式 (71))。たとえば $a = 20$ 、 $b = 5$ そして $N = 50$ の場合、この推定値は、 λ_1 図1のように、大きな行列の固有値を計算するソフトウェアで取得されます。接続された漸近展開の方法は、おそらく周期的なケースに拡張できませんが、明示的な式につながる可能性は低いです。

- を生成関数にしよう

$$\phi(t, z) = \sum_{n=0}^N P_n(t) z^n$$

と $0 \leq z \leq 1$ 。我々は持っています $\phi(t, 1) = 1 \forall t$ 。(7) から始まる簡単な計算は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1-z) \left(b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1.$$

準定常体制では、

$$\phi(t, z) \simeq 1 + e^{\lambda_1 t} \psi(t, z)$$

と $\psi(t, z)$ 定期的に t 、 $\psi(t, 1) = 0$ そして

$$\lambda_1 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1-z) \left(b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

λ_1 したがって、この放物線問題の最大の非ゼロ固有値でもあります。これは、 N large の漸近的な結果をより厳密に示す方法である可能性があります。

- と $P_n(t) = \mathcal{P}(t, x)$ そして $x = n/N$ マスター方程式 (7) の次数2へのテイラー展開を実行すると、フォッカープランク方程式または拡散方程式が得られます。

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[(a(t)x(1-x) - bx) \mathcal{P} \right] + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(a(t)x(1-x) + bx) \mathcal{P} \right].$$

同様に平均消滅時間について $\tau_n(t) = \tau(t, x)$ と $x = n/N$ 、(13) は関連する問題につながります

$$-1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (a(t)x(1-x) - bx) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{2N} (a(t)x(1-x) + bx) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

ただし、時間に依存しない係数の場合、これらの方程式は通常 C の正しい値を与えないことがわかっています (Doering et al.、2005)。値が正しい傾向があるのは、 R_0 同じ問題が他の流行モデルでも発生します。たとえば、(Diekmann et al.、2012、p. 112-113) は、拡散近似を使用して、SIRモデルの C を推定しますが、 $R_0 \simeq 10$ 彼らのアプリケーションで。確率論的SIRモデルのBKW分析については、(Kamenev and Meerson、2008) を参照してください。

- 番号 $1/C$ コミュニティの重要なサイズと呼ぶことができます (Diekmann et al.、2012)。

補助計算

それを見せましょう

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du = \frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}.$$

最初、 $e^u/(1+e^u)^2 = 1/(4 \cosh^2(u/2))$ 偶数関数です。これを部品による統合と組み合わせると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 2 \int_0^{+\infty} \cos(\lambda u) \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du \\ &= 2 \left[\frac{-\cos(\lambda u)}{1+e^u} \right]_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda u)}{1+e^u} du \\ &= 1 - 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} \sin(\lambda u)}{1+e^{-u}} du. \end{aligned}$$

一連の力で開発することによって $1/(1+e^{-u})$ 、私達は手に入れました

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 1 - 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)u} \sin(\lambda u) du \\ &= 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^2 + (n+1)^2}.\end{aligned}$$

このシリーズの合計はオイラーの公式で計算できます

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

任意の複素数についても同様である Z と $z \neq n\pi$ (n 整数)。私達は取る $z = i\pi\lambda$ 。なぜなら $\sin(i\pi\lambda) = i \sinh(\pi\lambda)$ 、私達は手に入れました

$$\frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

結果は次のとおりです。

ありがとう

この記事は、2013年12月にアンジェで発生した生態学、進化論、遺伝学の確率論的モデルに関する会議中に、定期的な環境での有効な人口規模に関するハンスメッツとの議論に刺激を受けました。

参考文献

- Andersson H, Djehiche B (1998) A threshold limit theorem for the stochastic logistic epidemic. *J Appl Probab* 35 : 662–670
- Aronsson G, Kellogg RB (1978) On a differential equation arising from compartmental analysis. *Math Biosci* 38 : 113–122
- Assaf M, Kamenev A, Meerson B (2008) Population extinction in a time-modulated environment. *Phys Rev E* 78 : 041123
- Assaf M, Meerson B (2010) Extinction of metastable stochastic populations. *Phys Rev E* 81 : 021116
- Bacaër N, Ait Dads E (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter R_0 in periodic population models. *J Math Biol* 65 : 601–621
- Barles G (1994) *Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi*. Springer, Berlin
- Barles G, Perthame B (1988) Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J Control Optim* 26 : 1133–1148
- Billings L, Mier-y-Teran-Romero L, Lindley B, Schwartz IB (2013) Intervention-based stochastic disease eradication. *PLoS ONE* 8(8) : e70211
- Diekmann O, Heesterbeek H, Britton T (2012) *Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics*. Princeton University Press, Princeton
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth–death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker–Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Escudero C, Rodríguez JA (2008) Persistence of instanton connections in chemical reactions with time-dependent rates. *Phys Rev E* 77 : 011130
- Hethcote H (1973) Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model. *Bull Math Biol* 35 : 607–614
- Kamenev A (2011) *Field theory of non-equilibrium systems*. Cambridge University Press, Cambridge

- Kamenev A, Meerson B (2008) Extinction of an infectious disease : a large fluctuation in a nonequilibrium system. *Phys Rev E* 77 : 061107
- Mitake H (2009)
Large time behavior of solutions of Hamilton– Jacobi equations with periodic boundary data. *Nonlinear Anal* 71 : 5392– 5405
- Nasell I (2011) Extinction and quasi– stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Osher S, Shu CW (1991)
High– order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton– Jacobi equations. *SIAM J Numer Anal* 28 : 907– 922
- Ovaskainen O, Meerson B (2010) Stochastic models of population extinction. *Trends Ecol Evol* 25 : 643– 652
- Rabinowitz PH (1994) Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system. *Ergod Theor Dyn Syst* 14 : 817– 829
- Roquejoffre JM (2001)
Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton– Jacobi equations. *J Math Pures Appl* 80 : 85– 104
- Soner HM (1986) Optimal control with state– space constraint I. *SIAM J Control Optim* 24 : 552– 561