HAL open science

Sur le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement périodique

Nicolas Bacaër

▶ To cite this version:

Nicolas Bacaër. Sur le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement périodique. 2015, pp.491-511. hal-01265563v4

HAL Id: hal-01265563

https://hal.science/hal-01265563v4

Submitted on 22 Jun 2020 (v4), last revised 11 Jan 2023 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur le modèle stochastique SIS pour une épidémie dans un environnement périodique

Nicolas Bacaër * †

J. Math. Biol. 71 (2015) 491-511
hal : 01265563
Traductions : [ar, de, es, it, ja, nl, pt, ru, zh], [html]

Résumé

Dans le modèle stochastique SIS pour une épidémie avec un taux de contact a, un taux de guérison $b < a$ et une taille de population N, le temps moyen jusqu'à extinction τ est tel que $(\log \tau)/N$ converge vers $c = b/a - 1 - \log(b/a)$ lorsque N tend vers l'infini. Cet article considère le cas plus réaliste où le taux de contact $a(t)$ est une fonction périodique dont la moyenne est supérieure à b. Alors $(\log \tau)/N$ converge vers une nouvelle limite C, qui est liée à une équation de Hamilton-Jacobi périodique en temps. Lorsque $a(t)$ est une fonction cosinus avec une petite amplitude, avec une grande fréquence ou avec une fréquence très petite, on peut obtenir des formules approchées pour C de manière analytique en suivant la méthode utilisée par [Assaf *et al.* (2008) Phys Rev E 78, 041123]. Ces résultats sont illustrés par des simulations numériques.

1 Introduction

Le modèle stochastique SIS pour une épidémie a été étudié en détail lorsque l'environnement est supposé constant, comme dans le livre de Nåsell (2011). Avec un taux de contact rate a, un taux de guérison $b < a$ et une taille de population N, le temps moyen jusqu'à extinction τ (partant par exemple d'une personne infectée) est tel que

$$\frac{\log \tau}{N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} c = b/a - 1 - \log(b/a) > 0 \tag{1}$$

(Nåsell, 2011, Théorème 12.1). Parmi d'autres références, voir aussi Andersson et Djehiche (1998), Doering *et al.* (2005) et Assaf et Meerson (2010). Ces derniers utilisent

*Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, France. Courriel : nicolas.bacaer@ird.fr
†Université Pierre et Marie Curie, Campus des Cordeliers, Paris, France.

la méthode de Brillouin, Kramers et Wentzel [BKW]. La probabilité $P_n(t)$ d'avoir $n \geq 1$ personnes infectées au temps t s'approche d'abord d'une distribution quasi-stationnaire π_n. Posons $x = n/N$ de sorte que $0 \leq x \leq 1$. Lorsque N tend vers l'infini, $-(\log \pi_n)/N$ s'approche d'une fonction continue $S(x)$ vérifiant l'équation de Hamilton-Jacobi stationnaire $H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$ avec

$$\begin{aligned} H(x,p) &= ax(1-x)(e^p - 1) + bx(e^{-p} - 1) \\ &= x(1-e^{-p})[a(1-x)e^p - b] \end{aligned} \tag{2}$$

(Assaf et Meerson, 2010, (12) et §IV.D.3). Plus précisément, la branche de la ligne de niveau $H = 0$ telle que $a(1-x)e^p - b = 0$ conduit à la formule

$$S(x) = x\log(b/a) + x + (1-x)\log(1-x) + \text{constante}\,. \tag{3}$$

Cette fonction a un minimum lorsque $x = x^* = 1 - b/a$, avec $x^* > 0$ puisque $b < a$. Finalement $c = S(0) - S(x^*)$ est la hauteur entre le fond et le bord à $x = 0$ du puits de potentiel $S(x)$. De manière équivalente, le système hamiltonien

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4}$$

a une orbite hétérocline reliant $(x^*, 0) = (1 - \frac{b}{a}, 0)$ à $(0, p^*) = (0, \log \frac{b}{a})$, et le nombre c est égal à l'action $\int_{x^*}^{0} p\,dx$ le long de cette orbite. La méthode BKW a été utilisée pour d'autres processus de naissance et de mort issus de la physique ou de la biologie des populations (Ovaskainen et Meerson, 2010; Kamenev, 2011).

Dans leur étude d'une réaction chimique avec branchement et annihilation, Escudero et Rodríguez (2008) ont montré comment un environnement périodique en temps influençait l'orbite hétérocline qui joue un rôle central pour la limite quand $N \to \infty$ du temps moyen d'extinction. Assaf *et al.* (2008) ont étudié le même modèle plus en détail, calculant notamment la correction au temps moyen d'extinction due à une perturbation périodique de petite amplitude, de basse fréquence ou de haute fréquence. Ces auteurs ont obtenu des formules générales qui peuvent être appliquées à d'autres processus de naissance et de mort présentant une métastabilité. Par ailleurs, Billings *et al.* (2013, Figure 7) montrent des simulations Monte-Carlo d'un modèle stochastique SIS avec un traitement périodique.

L'objectif ici est d'appliquer la méthode BKW utilisée par Assaf *et al.* (2008) au modèle épidémique SIS avec un taux de contact T-périodique $a(t)$ dont la moyenne est supérieure à b. Un tel modèle peut représenter par exemple la propagation d'une infection bactérienne qui ne confère pas d'immunité dans une école avec une périodicité hebdomadaire due aux fins de semaine, ou une périodicité annuelle due aux vacances et à la saisonnalité. Il s'agit bien sûr seulement d'une première étape vers des modèles plus réalistes.

Dans la section 2, des calculs informels suggèrent que le temps moyen d'extinction τ (partant par exemple d'une personne infectée au temps 0) est tel

que

$$\frac{\log \tau}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} C = \min_{0\le t\le T} S^*(t,0^+) - \min_{0\le t\le T} \min_{0\le x\le 1} S^*(t,x)\,. \tag{5}$$

Ici, $S^*(t,x)$ est une solution de viscosité T-périodique de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \tag{6}$$

pour $0 < x < 1$ avec la condition aux bords mixte Dirichlet-« état contraint »

$$S(t,0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t,1) = +\infty,$$

telle que $S(t,x)$ ne soit pas identiquement nulle près de $x = 0$. La condition aux bords doit être entendue au sens de viscosité (Barles, 1994) puisque $S^*(t,0^+)$ peut ne pas être égal à 0. Le hamiltonien $H(t,x,p)$ est identique à (2) sauf que le paramètre constant a est remplacé par $a(t)$. Quand $a(t) = a_0(1+\varepsilon\cos(\omega t))$ avec $\omega = 2\pi/T$, $a_0 > b$ et $|\varepsilon| \le 1$, on peut poser $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$. Suivant les méthodes d'Assaf *et al.* (2008), la section 2 montre que

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi\,\omega\,|\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0-b}\right)}$$

quand ε est proche de 0, $C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0)$ quand $\omega \ll a_0$ et

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0-b)^2\varepsilon^2}{12\,\omega^2}(1 + 2b/a_0)$$

dans la limite haute-fréquence $\omega \gg a_0$. On peut conjecturer que $C > 0$ tant que $\frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt > b$. On peut aussi conjecturer que C est toujours inférieur à c_0 puisque les variations saisonnières tendent à favoriser l'extinction des maladies infectieuses. Ceci suggère plus précisément qu'un environnement périodique conduit pour le modèle SIS à une décroissance exponentielle du temps moyen d'extinction semblable à celle obtenue pour le modèle de branchement et annihilation (Assaf *et al.*, 2008). La section 3 illustre ces résultats avec des simulations numériques. La section 4 ajoute quelques remarques.

2 Calculs analytiques

2.1 L'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi

Équation maîtresse et théorie de Floquet. Rappelons que N est la population totale, supposée constante. Il y a $S(t)$ personnes susceptibles et $I(t)$ personnes infectées au temps t, avec $N = S(t) + I(t)$. Si $I(t) = n$ alors la probabilité qu'une personne guérisse entre t et $t + dt$ est $b\,n\,dt + o(dt)$. La probabilité qu'une nouvelle infection se produise est $a(t)n(1-n/N)dt + o(dt)$. Donc $a(t)$ est

le taux de contact et b le taux de guérison. Supposons que $a(t)$ soit une fonction continue T-périodique positive et que

$$r = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt - b > 0 \quad \text{autrement dit} \quad R_0 = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt}{b} > 1\,.$$

Pour une interpretation biologique de R_0, cf. Bacaër et Ait Dads (2012). Hethcote (1973) a remarqué que $r > 0$ (c'est-à-dire $R_0 > 1$) est une condition nécessaire et suffisante pour que la solution de l'équation de champ moyen $di/dt = a(t)i(1-i) - b\,i$ converge vers une fonction périodique et positive. Sinon la solution converge vers zéro.

Soit $P_n(t)$ la probabilité que $I(t) = n$. L'équation maîtresse est

$$\begin{aligned}\frac{dP_n}{dt} = a(t)(n-1)(1-(n-1)/N)P_{n-1} - [a(t)n(1-n/N) + b\,n]P_n \\ + b(n+1)P_{n+1}\end{aligned} \tag{7}$$

pour $0 \le n \le N$ si l'on pose $P_{-1} = 0$ et $P_{N+1} = 0$. Bien sûr, $\sum_{n=0}^N P_n(t) = 1$. Le système (7) s'écrit aussi $dP/dt = M(t)\,P$, où $P(t)$ est le vecteur $(P_n(t))_{0\le n\le N}$ et $M(t)$ est la matrice carrée de taille $N+1$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b - a(t)(1-\frac{1}{N}) & 2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(t)(1-\frac{1}{N}) & -2b - 2a(t)(1-\frac{2}{N}) & 3b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -bN \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a la structure par blocs $M(t) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & Q(t) \end{array}\right)$, où $Q(t)$ est une matrice carrée de taille N. Soient $X(t)$ et $Y(t)$ les matrices solutions des systèmes $dX/dt = M(t)\,X$ et $dY/dt = Q(t)\,Y$ telles que $X(0) = I_{N+1}$ et $Y(0) = I_N$, I_N étant la matrice identité de taille N. Les multiplicateurs de Floquet de $M(t)$, c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice de monodromie $X(T)$, forment une ensemble qui est l'union de $\{\mu_0 = 1\}$ et de l'ensemble des multiplicateurs de Floquet de $Q(t)$. La matrice $Q(t)$ est coopérative : les coefficients en dehors de la diagonale sont positifs ou nuls. Cette matrice est aussi irréductible puisque les éléments juste au-dessus et en-dessous de la diagonale sont tous strictement positifs. Par conséquent, tous les éléments de $Y(t)$ sont strictement positifs pour $t > 0$. Le théorème de Perron et Frobenius s'applique. La valeur propre μ_1 de $Y(T)$ avec la partie réelle la plus grande est en fait réelle et strictement positive et le sous-espace propre associé est de dimension 1. De plus, $(1\ 1 \ldots 1)Q(t) = (-b\ 0\ 0\ \ldots 0)$: $Q(t)$ « fuit » et $0 < \mu_1 < 1$ (Aronsson et Kellogg, 1978). Donc $\lambda_1 = (\log \mu_1)/T < 0$. Le vecteur $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ est un état stationnaire vers lequel $P(t)$ converge quand $t \to +\infty$. L'objectif ici est d'estimer pour N grand la proximité entre λ_1 et 0.

Soit v un vecteur propre de $X(T)$ associé à la valeur propre $\mu_1 = e^{\lambda_1 T}$. On peut choisir v de sorte que $v_n > 0$ pour tout $1 \le n \le N$. Ainsi $X(T)v = e^{\lambda_1 T}v$.

Comme dans la théorie de Floquet, posons $\pi(t) = e^{-\lambda_1 t} X(t) v$. Alors $\frac{d\pi}{dt}(t) = -\lambda_1 \pi(t) + M(t)\pi(t)$. De plus $\pi(T) = e^{-\lambda_1 T} X(T) v = v = \pi(0)$. Donc $\pi(t)$ est T-périodique. Soit $\pi(t) = (\pi_n(t))_{0 \le n \le N}$. Alors

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = a(t)(n-1)(1-(n-1)/N)\pi_{n-1} - [a(t)n(1-n/N) + b\,n]\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1}\,. \tag{8}$$

En sommant ces équations, on obtient $\lambda_1 \sum_{n=0}^N \pi_n(t) + \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0$, donc $\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=0}^N \pi_n(0)$. Mais $\sum_{n=0}^N \pi_n(t)$ est T-périodique. Par conséquent $\sum_{n=0}^N \pi_n(0) = 0$ et $\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0$ pour tout t. Donc $\pi_0(t) = -\sum_{n=1}^N \pi_n(t)$. Mais (8) avec $n = 0$ montre aussi que $\lambda_1 \pi_0(t) + \frac{d\pi_0}{dt} = b\,\pi_1(t)$. En intégrant sur une période et en utilisant la périodicité de $\pi_0(t)$, on obtient

$$\lambda_1 = b\,\frac{\int_0^T \pi_1(t)\,dt}{\int_0^T \pi_0(t)\,dt} = -b\,\frac{\int_0^T \pi_1(t)\,dt}{\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t)\,dt}\,. \tag{9}$$

Solution BKW et équation de Hamilton-Jacobi. Lorsque N est grand, essayons une solution BKW de la forme $\pi_n(t) \simeq e^{-NS(t,x)}$ pour $1 \le n \le N$, où $x = n/N$ et $S(t,x)$ est une fonction continue de t et x pour $0 < x < 1$, qui est T-périodique par rapport à t. Alors

$$\frac{d\pi_n}{dt} \simeq -N\,\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)\,e^{-NS(t,x)}\,,$$
$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-NS(t,x+\frac{1}{N})} \simeq e^{-NS(t,x) - \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}, \quad \pi_{n-1}(t) \simeq e^{-NS(t,x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}.$$

Posons $\alpha(t,x) = a(t)x(1-x)$ et $\beta(x) = b\,x$. Alors (8) s'écrit

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = N\alpha(t, x-1/N)\pi_{n-1} - N[\alpha(t,x) + \beta(x)]\pi_n + N\beta(x+1/N)\pi_{n+1}\,.$$

En ne gardant que les termes dominants, on peut utiliser $\alpha(t, x-1/N) \simeq \alpha(t,x)$ et $\beta(x+1/N) \simeq \beta(x)$ pour obtenir

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} \simeq N\alpha(t,x)[\pi_{n-1} - \pi_n] + N\beta(x)[\pi_{n+1} - \pi_n]\,.$$

Comme on s'attend à ce que λ_1 soit exponentiellement petit, on peut le négliger du côté gauche. En injectant la forme BKW et en divisant par $N\,e^{-NS(t,x)}$, on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a(t)x(1-x)\left[e^{\frac{\partial S}{\partial x}} - 1\right] + b\,x\left[e^{-\frac{\partial S}{\partial x}} - 1\right] = 0 \tag{10}$$

pour $0 < x < 1$. Ceci est de la forme (6) avec un hamiltonian périodique en temps $H(t,x,p)$ donné par (2), $a(t)$ remplaçant a. Des équations telles que (10) ont normalement des solutions asymptotiques de la forme $S(t,x) = -Et + \Sigma(t,x)$ où $\Sigma(t,x)$ est T-périodique par rapport à t et E est une constante. Ici cependant, seules les solutions avec $E = 0$ présentent un intérêt : elles correspondent aux orbites hétéroclines de la section 2.2 ci-dessous.

Conditions aux bords. Comme $H(t,0,p) = 0$, on a $\frac{\partial S}{\partial t}(t,0) = 0$. Donc $S(t,0)$ est une constante S_0 indépendante de t. Comme (10) ne fait intervenir que des dérivées partielles de $S(t,x)$, ses solutions sont définies à une constante additive près (rappelons que le vecteur propre v de $X(T)$ est défini à une constante multiplicative près). On peut donc choisir $S_0 = 0$, d'où la condition de Dirichlet :

$$S(t,0) = 0 \quad \forall t. \tag{11}$$

De plus, puisque $\pi_n(t) = 0$ pour $n > N$ et puisque la formule (3) dans un environnement constant montre que $S(1)$ est fini tandis que $\frac{dS}{dx}(1) = +\infty$, on impose que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t,1) = +\infty \quad \forall t. \tag{12}$$

Une autre manière de présenter cette condition au bord est la « contrainte d'état »

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

lorsque $x = 1$. Cette condition conduit pour $x = 1$ à $\frac{\partial H}{\partial p}(t,x,\frac{\partial S}{\partial x}) \geq 0$ (Soner, 1986). Mais puisque $\frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p) = a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p}$, cette expression est positive ou nulle en $x = 1$ si et seulement si $p = +\infty$, comme dans (12).

Propriétés du hamiltonien. L'hamiltonien $H(t,x,p)$ est convexe en p puisque $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t,x,p) = a(t)\,x(1-x)\,e^p + b\,x\,e^{-p} \geq 0$. De plus, $H(t,x,p) \to +\infty$ quand $|p| \to +\infty$ pourvu que $0 < x < 1$; mais cette propriété de coercivité n'est plus vraie quand $x = 0$ ou $x = 1$. Remarquer que $H(t,x,0) = 0$. Le lagrangien est $L(t,x,v) = \max_p\{pv - H(t,x,p)\}$. Quand $0 < x < 1$, on a $L(t,x,v) = p_*v - H(t,x,p_*)$ avec p_* solution unique de $v = \frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p_*) = a(t)x(1-x)e^{p_*} - bxe^{-p_*}$. C'est une équation polynomiale de degré 2 en e^{p_*}. Cela donne

$$\begin{aligned} L(t,x,v) &= p_*v - a(t)x(1-x)(e^{p_*}-1) - bx(e^{-p_*}-1) \\ &= v\log\left(\frac{v+\sqrt{v^2+4a(t)x(1-x)bx}}{2a(t)x(1-x)}\right) + a(t)x(1-x) + bx \\ &\quad - \frac{v+\sqrt{v^2+4a(t)x(1-x)bx}}{2} - \frac{2a(t)x(1-x)bx}{v+\sqrt{v^2+4a(t)x(1-x)bx}}\,. \end{aligned}$$

Pour $x = 1$, on a $L(t,1,v) = +\infty$ si $v > 0$, $L(t,1,0) = b$ et $L(t,1,v) = -v\log(-v/b) + v + b$ si $v < 0$. Pour $x = 0$, on a $L(t,0,v) = +\infty$ si $v \neq 0$ et $L(t,0,0) = 0$. Pour x proche de 0, noter cependant que $L(t,x,v) \sim -v\log x$. Donc pour $\eta > 0$ petit et pour toute fonction $\xi \in C^1([\theta,t];[0,1])$ telle que $\xi(\theta) = 0$, on a $\int_\theta^{\theta+\eta} L(s,\xi(s),\dot\xi(s))\,ds \simeq -\int_\theta^{\theta+\eta} \frac{d\xi}{ds}(s)\,\log\xi(s)\,ds = -\int_0^{\xi(\theta+\eta)}\log\xi\,d\xi$, qui est fini.

Solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi. Pour une condition initiale donnée $S_0(x)$, la fonction

$$S(t,x) = \inf\Big\{ \int_\theta^t L(s,\xi(s),\dot\xi(s))\,ds + 1_{\theta=0}\,S_0(\xi(\theta))\,; \\ 0 \le \theta \le t,\ \xi \in C^1([\theta,t];[0,1]),\ \theta = 0 \text{ ou } \xi(\theta) = 0,\ \xi(t) = x \Big\}$$

est une solution de viscosité de (10) avec les conditions aux bords mixtes Dirichlet-« état contraint » (11)-(12) telle que $S(0,x) = S_0(x)$ (Barles, 1994). C'est la fonction valeur d'un problème de temps de sortie en $x = 0$ avec la « contrainte d'état » en $x = 1$. Une solution périodique en temps $S^*(t,x)$ de (10)-(11)-(12) est ainsi donnée par un point fixe de l'opérateur d'évolution ci-dessus : $S^*(0,x) = S^*(T,x)$. Roquejoffre (2001) et Mitake (2009) ont étudié de semblables équations de Hamilton-Jacobi périodiques en temps avec des conditions aux bords de Dirichlet. Noter cependant qu'il n'y a pas d'unicité (pour des problèmes reliés, cf. Barles et Perthame (1988)). En effet, considérons le cas spécial où $a(t) = a_0$ est constant. Dans ce cas, il y a deux types de solutions de viscosité stationnaires $S^*(x)$: d'un côté il y a les solutions de la forme $x\log(b/a_0) + x + (1-x)\log(1-x) + \gamma$ avec une constante $\gamma \le 0$, qui ne diffèrent qu'à travers la constante γ, la solution avec $\gamma = 0$ étant la seule à vérifier la condition au bord en $x = 0$ au sens classique ; d'un autre côté il y a les solutions de la forme $\min\{0, x\log(b/a_0) + x + (1-x)\log(1-x) + \gamma\}$ avec une constante γ telle que $0 < \gamma \le c_0$. Ces dernières solutions sont identiquement nulles près de $x = 0$ et donc ne donnent pas la bonne valeur pour C. Pour l'équation périodique en temps (10) avec les conditions aux bords mixtes (11)-(12), on peut conjecturer qu'elle a des solutions de viscosité $S^*(t,x)$ qui sont T-périodiques par rapport à t, qui ne sont pas identiquement nulles près de $x = 0$ et qui ne diffèrent que d'une constante (donnant ainsi le même C). C'est une telle solution que l'on choisit comme solution BKW. Comme le suggère la figure 3 ci-dessous, la condition au bord en $x = 0$ doit être entendue au sens de viscosité puisque $S^*(t,x)$ peut ne pas être continu en $x = 0$.

Comportement de λ_1 lorsque N est grand. Retournant à (9), on a

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} = \frac{\log b}{N} + \frac{1}{N}\log\left(\int_0^T \pi_1(t)\,dt\right) - \frac{1}{N}\log\left(\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t)\,dt\right).$$

Noter que $\pi_1(t) \simeq e^{-NS^*(t,1/N)} \simeq e^{-NS^*(t,0^+)}$ pour N grand. Donc

$$\frac{1}{N}\log\left(\int_0^T \pi_1(t)\,dt\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\min_{0\le t\le T} S^*(t,0^+)$$

à cause de la formule de Laplace pour l'évaluation asymptotique des intégrales. De même, comme $\pi_n(t) \simeq e^{-NS^*(t,n/N)}$, on a

$$\frac{1}{N}\log\left(\sum_{n=1}^{N}\int_0^T \pi_n(t)\,dt\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\min_{0\le t\le T}\min_{0\le x\le 1} S^*(t,x)$$

et

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -C$$

avec C donné par (5). On peut conjecturer que $C > 0$ si et seulement si $\frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt > b$.

Temps moyen d'extinction. Le temps moyen d'extinction $\tau_n(t)$ partant de n personnes infectées au temps t est une solution T-périodique du système

$$-1 = \frac{d\tau_n}{dt} + b\,n\tau_{n-1} - (a(t)n(1-n/N) + b\,n)\tau_n + a(t)n(1-n/N)\tau_{n+1} \quad (13)$$

pour $1 \le n \le N$, avec $\tau_0(t) = 0$. Ce système fait intervenir l'adjoint $Q^*(t)$ de la matrice $Q(t)$. Posons $\hat\tau(t) = (\tau_n(t))_{1\le n\le N}$, $\hat\pi(t) = (\pi_n(t))_{1\le n\le N}$ et $\mathbf{1} = (1,1,\dots,1)$. Alors

$$\lambda_1\hat\pi + \frac{d\hat\pi}{dt} = Q(t)\hat\pi, \quad -\mathbf{1} = \frac{d\hat\tau}{dt} + Q^*(t)\hat\tau\,.$$

Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de vecteurs réels. Alors

$$\frac{d}{dt}\langle\hat\pi,\hat\tau\rangle = \langle\frac{d\hat\pi}{dt},\hat\tau\rangle + \langle\hat\pi,\frac{d\hat\tau}{dt}\rangle = \langle Q(t)\hat\pi,\hat\tau\rangle - \lambda_1\langle\hat\pi,\hat\tau\rangle - \langle\hat\pi,\mathbf{1}\rangle - \langle\hat\pi,Q^*(t)\hat\tau\rangle.$$

Les termes faisant intervenir $Q(t)$ et $Q^*(t)$ s'annulent. En intégrant sur une période et en utilisant le fait que $\hat\pi(t)$ et $\hat\tau(t)$ sont T-périodiques, on obtient que

$$-\lambda_1 = \frac{\int_0^T\langle\hat\pi,\mathbf{1}\rangle}{\int_0^T\langle\hat\pi,\hat\tau\rangle\,dt}\,.$$

Ceci suggère que le temps moyen d'extinction τ, partant par exemple d'une personne infectée au temps 0, est du même ordre de grandeur que $-1/\lambda_1$:

$$\frac{\log(\tau)}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} C\,.$$

On peut conjecturer que cette analyse essentiellement informelle peut être mise sous forme rigoureuse, comme pour le modèle SIS dans un environnement constant (Nåsell, 2011).

2.2 L'orbite hétérocline

Cas général. Rappelons que l'équation de Hamilton-Jacobi (6) peut être résolue au moins localement par tracé de rayons, c'est-à-dire, en résolvant simultanément le système hamiltonien (4) et l'équation

$$\frac{dz}{dt} = p(t)\frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t)) - H(t, x(t), p(t))$$

avec les conditions initiales $x(0) = x_0$, $p(0) = \frac{\partial S}{\partial x}(0, x_0)$, $z(0) = S(0, x_0)$, de sorte que $z(t) = S(t, x(t))$. Suivant Assaf *et al.* (2008), considérons de plus près le système hamiltonien (4). Dans le cas présent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) &= a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p}, \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) &= a(t)(1-2x)(e^p - 1) + b(e^{-p} - 1)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Cherchons d'abord une solution non triviale T-périodique telle que $x \equiv 0$ et

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, 0, p) = -(a(t) - b\,e^{-p})(e^p - 1)\,.$$

En posant $p = \log(1+q)$, on obtient une équation différentielle de Bernoulli qui peut être facilement résolue. Cela donne la solution T-périodique

$$p^*(t) = \log\left(1 + \left[\frac{e^{-bt+\int_0^t a(s)\,ds}}{e^{p^*(0)} - 1} + \int_0^t a(s)\,e^{-b(t-s)+\int_s^t a(u)\,du} ds\right]^{-1}\right)\,,$$

où

$$p^*(0) = \log\left(1 + \frac{1 - e^{-bT+\int_0^T a(s)\,ds}}{\int_0^T a(s)\,e^{-b(T-s)+\int_s^T a(u)\,du} ds}\right)\,.$$

La solution périodique $(0, p^*(t))$ est instable. En effet, en posant $x(t) = \tilde{x}(t)$ et $p(t) = p^*(t) + \tilde{p}(t)$ et en linéarisant les équations, on obtient

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)} & 0 \\ 2a(t)(e^{p^*(t)} - 1) & -a(t)e^{p^*(t)} + be^{-p^*(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Les multiplicateurs de Floquet sont $f = \exp\int_0^T [a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)}]dt$ et $1/f$, d'où l'instabilité. L'instabilité peut aussi être vue comme une conséquence du théorème de Liouville concernant l'invariance du « volume » dans l'espace de phase (x, p) sous l'action du flot hamiltonien.

Deuxièmement, cherchons une solution non triviale T-périodique telle que $p \equiv 0$ et

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, 0) = a(t)x(1-x) - bx\,.$$

C'est l'équation de champ moyen du modèle SIS. L'unique solution T-périodique non nulle est

$$x^*(t) = \left(\frac{1}{x^*(0)} \, e^{bt - \int_0^t a(s)\, ds} + \int_0^t a(u)\, e^{b(t-u) - \int_u^t a(s)\, ds} du \right)^{-1}$$

avec

$$x^*(0) = \frac{1 - e^{bT - \int_0^T a(s)\, ds}}{\int_0^T a(u)\, e^{b(T-u) - \int_u^T a(s)\, ds}\, du} \,. \tag{15}$$

La solution périodique $(x^*(t), 0)$ est également instable. En effet, en posant $x(t) = x^*(t) + \tilde{x}(t)$ et $p(t) = \tilde{p}(t)$ et en linéarisant les équations, on obtient

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)(1 - 2x^*(t)) - b & a(t)x^*(t)(1 - x^*(t)) + bx^*(t) \\ 0 & -a(t)(1 - 2x^*(t)) + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Les multiplicateurs de Floquet sont une nouvelle fois inverses l'un de l'autre, d'où l'instabilité.

Rappelons de la section 1 que dans un environnement constant, il y a une orbite hétérocline dans le plan (x, p) reliant les points stationnaires $(x^*, 0) = (1 - b/a, 0)$ et $(0, p^*) = (0, \log(b/a))$ lorsque $a > b$. Rappelons aussi qu'Escudero et Rodríguez (2008) ont trouvé une orbite hétérocline semblable pour le modèle périodique en temps de branchement et annihilation de particules identiques, au moins pour une petite amplitude de la perturbation périodique. Donc on peut espérer l'existence d'une orbite hétérocline $(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$ reliant les solutions périodiques $(x^*(t), 0)$ et $(0, p^*(t))$; l'existence peut probablement être démontrée en utilisant une approche variationnelle (Rabinowitz, 1994). Cette orbite spéciale peut être obtenue numériquement par une méthode de tir. D'après Assaf *et al.* (2008, Eq. (20)),

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{p}(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) - H(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) \right] dt \,. \tag{16}$$

Cette intégrale peut être évaluée numériquement.

Méthode perturbative. Lorsque $a(t)$ est une constante a_0, notons $(\hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))$ l'orbite hétérocline reliant les points stationnaires $(x^*, 0) = (1 - b/a_0, 0)$ et $(0, p^*) = (0, \log(b/a_0))$. Cette orbite est telle que $a_0(1 - x)e^p - b = 0$, comme on peut le voir avec (2). En utilisant cette équation pour exprimer p en fonction de x et en insérant le résultat dans la première équation de (4), on obtient $\frac{dx}{dt} = b\,x - a_0 x(1 - x)$. La solution est

$$x(t) = \left[\frac{1}{x(t_0)} e^{(a_0 - b)(t - t_0)} + \frac{a_0}{a_0 - b}(1 - e^{(a_0 - b)(t - t_0)}) \right]^{-1} .$$

En choisissant par exemple $x(t_0) = (1 - b/a_0)/2$, on obtient

$$\hat{x}_0(t) = \frac{1 - b/a_0}{1 + e^{(a_0 - b)(t - t_0)}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_0(t) = \log \frac{1 + e^{(a_0 - b)(t - t_0)}}{1 + e^{(a_0 - b)(t - t_0)} a_0/b} \,.$$

Supposons maintenant que $a(t) = a_0(1 + \varepsilon\,\phi(t))$ avec $a_0 > b$, ε petit et $\phi(t)$ une fonction T-périodique telle que $\int_0^T \phi(t)\,dt = 0$. L'hamiltonien peut être écrit sous la forme $H(t,x,p) = H_0(x,p) + \varepsilon\,H_1(t,x,p)$, où $H_0(x,p)$ est identique à (2) sauf que a est remplacé par a_0, et où $H_1(t,x,p) = a_0\,\phi(t)\,x(1-x)(e^p - 1)$. Posons $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$. Assaf *et al.* (2008, Eq. (24)) ont montré que

$$C \simeq \min_{t_0} \Gamma(t_0), \quad \Gamma(t_0) = c_0 - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))\,dt$$

pour ε proche de 0. Dans le cas présent, $(1 - \hat{x}_0)e^{\hat{p}_0} = b/a_0$. Donc

$$\begin{aligned}\Gamma(t_0) &= c_0 - \varepsilon\,a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\,\hat{x}_0(t)\,[b/a_0 - 1 + \hat{x}_0(t)]\,dt \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t_0 + u/(a_0 - b)) \frac{e^u}{(1+e^u)^2}\,du\,.\end{aligned}$$

Ainsi $\Gamma(t_0)$ est une fonction T-périodique de t_0 telle que $\int_0^T \Gamma(t_0)\,dt_0 = 0$. Considérons la décomposition de Fourier de $\phi(t)$, $\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k\,e^{k\,\mathrm{i}\omega t}$, avec $\omega = 2\pi/T$, $\phi_0 = 0$ puisque la moyenne de $\phi(t)$ est nulle, et $\phi_{-k} = \bar{\phi}_k$ (complexe conjugué). Alors

$$\begin{aligned}\Gamma(t_0) &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k\,e^{k\,\mathrm{i}\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k\,\mathrm{i}\omega u}{a_0 - b}} \frac{e^u}{(1+e^u)^2}\,du \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k\,e^{k\,\mathrm{i}\omega t_0} \frac{\frac{k\pi\omega}{a_0 - b}}{\sinh\left(\frac{k\pi\omega}{a_0 - b}\right)}\end{aligned}$$

(cf. Appendice). En particulier si $\phi(t) = \cos(\omega t)$, alors $\phi_{\pm 1} = 1/2$ et $\phi_k = 0$ sinon. Donc

$$\Gamma(t_0) = c_0 + \varepsilon \frac{\pi\omega\cos(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0 - b}\right)}\,. \tag{17}$$

Rappelons, suivant Escudero et Rodríguez (2008) et Assaf *et al.* (2008), que le système perturbé est de la forme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x}\,, \tag{18}$$

et que $\hat{x}_0(t)$ et $\hat{p}_0(t)$ ne dépendent que de $t - t_0$; donc la fonction de Melnikov $\mathcal{M}(t_0)$ est

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\partial H_1}{\partial x}\frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial H_0}{\partial x}\right](t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))\;dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\partial H_1}{\partial x}\frac{d\hat{x}_0}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{d\hat{p}_0}{dt}\right](t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))\;dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial H_1}{\partial x}\frac{d\hat{x}_0}{dt_0} + \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{d\hat{p}_0}{dt_0}\right](t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))\;dt = -\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{d\Gamma}{dt_0}\,.\end{aligned}$$

En utilisant (17), on obtient

$$\mathcal{M}(t_0) = \frac{\pi\omega \sin(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0 - b}\right)} .$$

Donc $\mathcal{M}(t_0)$ traverse 0 pour $t_0 = k\pi/\omega$ (k entier). Par conséquent, l'orbite hétérocline existe au moins pour ε petit.

Le minimum de $\Gamma(t_0)$ dans (17) est obtenu pour $t_0 = T/2$ si $\varepsilon > 0$ et pour $t_0 = 0$ si $\varepsilon < 0$: dans les deux cas, on obtient

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi\omega|\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0 - b}\right)} \tag{19}$$

pour ε proche de 0, comme annoncé dans l'introduction. Noter que (19) ressemble à l'équation (4.76) de Kamenev (2011) obtenue en partant d'un hamiltonien légèrement différent. Quand ω est petit (ou T est grand) de sorte que $\omega \ll a_0$, alors (19) montre que

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0) , \tag{20}$$

qui est indépendant de ω. Cette formule est la même que celle que l'on obtient dans (1) en posant $a = a_0(1 - |\varepsilon|)$:

$$\frac{b}{a_0(1-|\varepsilon|)} - 1 - \log\frac{b}{a_0(1-|\varepsilon|)} = \frac{b}{a_0} - 1 - \log\frac{b}{a_0} - |\varepsilon|(1 - b/a_0) + o(\varepsilon)$$

pour ε proche de 0. Comme dans « l'approximation adiabatique » d'Assaf *et al.* (2008, Sect. IV), on s'attend à ce que la formule (20) soit valable non seulement pour ε petit mais aussi tant que $\omega \ll a_0$ et que le côté droit de (20) est positif. Comme $\sinh(x) \geq x$ pour tout $x \geq 0$, on peut remarquer que la valeur approchée de C donnée par (20) est toujours inférieure à celle donnée par (19).

Limite haute fréquence. Supposons maintenant que $\omega \gg a_0$, toujours avec $\phi(t) = \cos(\omega t)$. Le système (18) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p}(x,p) + a_0\varepsilon\cos(\omega t)x(1-x)e^p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}(x,p) - a_0\varepsilon\cos(\omega t)(1-2x)(e^p - 1) . \end{aligned}$$

Suivant la méthode de Kapitsa (Assaf *et al.*, 2008§III.B), posons $x(t) = X(t) + \xi(t)$ et $p(t) = Y(t) + \eta(t)$, où X et Y sont des variables lentes, tandis que ξ et η sont de petites mais rapides oscillations. Les termes oscillant rapidement se balancent :

$$\frac{d\xi}{dt} \simeq a_0\varepsilon\cos(\omega t)X(1-X)e^Y, \quad \frac{d\eta}{dt} \simeq -a_0\varepsilon\cos(\omega t)(1-2X)(e^Y - 1) .$$

En considérant X et Y constant durant la courte période $T = 2\pi/\omega$, on obtient

$$\xi(t) \simeq \frac{a_0\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)X(1-X)e^Y, \quad \eta(t) \simeq -\frac{a_0\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)(1-2X)(e^Y-1)\,.$$

Ceci suggère la transformation

$$\begin{aligned} x &= X + \frac{a_0\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)X(1-X)e^Y \\ p &= Y - \frac{a_0\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)(1-2X)(e^Y-1) + \frac{a_0^2\varepsilon^2}{\omega^2}\Phi(t,X,Y)\,, \end{aligned}$$

où $\Phi(t,X,Y)$ est choisi pour que la transformation soit presque canonique, c'est-à-dire pour que les crochets de Poisson satisfassent la condition

$$\{x,p\} = \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial p}{\partial X} = 1 + o(a_0^2/\omega^2)\,. \tag{21}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \{x,p\} = &\left[1 + \frac{a_0\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)(1-2X)e^Y\right]\left[1 - \frac{a_0\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)(1-2X)e^Y + \frac{a_0^2\varepsilon^2}{\omega^2}\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right] \\ &- \left[\frac{a_0\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)X(1-X)e^Y\right]\left[2\frac{a_0\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)(e^Y-1) + \frac{a_0^2\varepsilon^2}{\omega^2}\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right], \end{aligned}$$

la condition (21) s'écrit

$$\begin{aligned} \{x,p\} = 1 &- \frac{a_0^2\varepsilon^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t)(1-2X)^2e^{2Y} + \frac{a_0^2\varepsilon^2}{\omega^2}\frac{\partial\Phi}{\partial Y} \\ &- 2\frac{a_0^2\varepsilon^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t)X(1-X)e^Y(e^Y-1) + o(a_0^2/\omega^2) = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \sin^2(\omega t)\left[(1-2X)^2e^{2Y} + 2X(1-X)e^Y(e^Y-1)\right].$$

Pour avoir $\Phi(t,X,0) = 0$, on doit choisir

$$\Phi(t,X,Y) = \sin^2(\omega t)\left[(1-2X)^2(e^{2Y}-1)/2 + X(1-X)(e^Y-1)^2\right].$$

La fonction génératrice $F_2(t,x,Y)$ de cette transformation, telle que $\frac{\partial F_2}{\partial Y} = X + o(a_0^2/\omega^2)$ et $\frac{\partial F_2}{\partial x} = p + o(a_0^2/\omega^2)$, est donnée par

$$\begin{aligned} F_2(t,x,Y) = xY &- \frac{a_0\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)x(1-x)(e^Y-1) \\ &+ \frac{a_0^2\varepsilon^2}{2\omega^2}\sin^2(\omega t)x(1-x)(1-2x)(e^{2Y}-1)\,. \end{aligned}$$

Soit $H(t,x,y) = h(t,X,Y)$. Le nouveau hamiltonien est $h(t,X,Y) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$. En prenant la moyenne de ce hamiltonien sur une période $T = 2\pi/\omega$, le second

terme s'annule puisque $\int_0^T \frac{\partial F_2}{\partial t}\,dt = 0$ et il ne reste que le hamiltonien effectif $\bar{H}(X,Y) = \frac{1}{T}\int_0^T h(t,X,Y)\,dt$. Un calcul laborieux utilisant le fait que $\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = 1/2$ conduit à

$$\begin{aligned}\bar{H}(X,Y) \simeq & X(1-e^{-Y})\Big[a_0(1-X)e^Y - b + \frac{a_0^2\varepsilon^2}{2\omega^2}\Big\{-a_0X(1-X)^2e^{2Y} + \\ & + b(1-X)(1-2X)e^Y - bX(1-X)(e^Y-1) - b(1-2X)^2\Big\}\Big]\,.\end{aligned}$$

On obtient l'orbite hétérocline perturbée en imposant que le terme entre crochets soit nul. Cette orbite relie $(X_\varepsilon^*, 0)$ à $(0, Y_\varepsilon^*)$, avec

$$X_\varepsilon^* \simeq (1-b/a_0)\left[1 - \frac{b(a_0-b)\,\varepsilon^2}{2\omega^2}\right], \quad Y_\varepsilon^* \simeq \log(b/a_0) + \frac{a_0(a_0-b)\varepsilon^2}{2\omega^2}.$$

L'action le long de cette orbite hétérocline est $C = \int_{X_\varepsilon^*}^0 Y\,dX$. Un autre calcul fastidieux conduit finalement à

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0-b)^2\varepsilon^2}{12\,\omega^2}(1+2b/a_0)\,, \tag{22}$$

comme annoncé dans l'introduction. Puisque la fonction $z \mapsto (1-z)^2(1+2z)$ est inférieure à 1 sur l'intervalle $0 < z < 1$, le terme correctif pour C est toujours inférieur à $\frac{a_0^2\,\varepsilon^2}{12\,\omega^2}$, ce qui est petit puisque $\omega \gg a_0$ par hypothèse. Comme on pouvait s'y attendre, une population sujette à une perturbation haute fréquence dépend peu de l'amplitude ε de cette perturbation.

3 Calculs numériques

Multiplicateurs de Floquet. λ_1 peut être estimé directement en calculant les multiplicateurs de Floquet de l'équation maîtresse en utilisant un logiciel tel que Scilab qui résout les équations différentielles ordinaires et calcule les valeurs propres des matrices numériquement. $e^{\lambda_1 T}$ est la valeur propre avec la deuxième partie réelle la plus grande, la première étant 1. On peut alors tracer $-\log(-\lambda_1)$ en fonction de N. La pente de cette courbe donne une valeur approchée de C.

Orbite hétérocline. Comme pour Assaf *et al.* (2008), l'orbite reliant $(x^*(t), 0)$ à $(0, p^*(t))$ peut être obtenue par une méthode de tir, en prenant la condition initiale $x^*(0)$ donnée par (15) et une toute petite valeur négative pour $p(0)$. On varie cette valeur jusqu'à obtenir une solution $(x(t), p(t))$ qui tend à devenir périodique, c'est-à-dire avec $x(t)$ approchant 0 et $p(kT)$ approchant $p^*(0)$ pour k grand (mais pas trop grand pour éviter l'instabilité numérique). On peut alors utiliser l'intégrale (16) pour calculer C numériquement.

Méthode EDP. Il est aussi possible de calculer une solution périodique $S^*(t,x)$ de l'équation aux dérivées partielles [EDP] de Hamilton-Jacobi (6) en utilisant les méthodes numériques de la théorie des solutions de viscosité. Par exemple, soit Δt le pas de temps et Δx le pas en espace. Soit S_j^m une approximation de $S(m\Delta t, j\Delta x)$, où j et m sont des entiers tels que $m \geq 0$ et $0 \leq j \leq J$ avec $J = 1/\Delta x$. On peut utiliser le schéma de type Godunov

$$\frac{S_j^{m+1} - S_j^m}{\Delta t} + \mathcal{H}\left(m\Delta t, j\Delta x, \frac{S_j^m - S_{j-1}^m}{\Delta x}, \frac{S_{j+1}^m - S_j^m}{\Delta x}\right) = 0\,,$$

où le hamiltonien numérique $\mathcal{H}(t,x,p^-,p^+)$ est donné par

$$\mathcal{H}(t,x,p^-,p^+) = \begin{cases} \min\{H(t,x,p);\ p^- \leq p \leq p^+\} & \text{si} \quad p^- < p^+, \\ \max\{H(t,x,p);\ p^+ \leq p \leq p^-\} & \text{si} \quad p^+ \leq p^- \end{cases}$$

(Osher et Shu, 1991). Comme $H(t,x,p)$ est convexe par rapport à p, la seconde expression faisant intervenir un maximum est égale à $\max\{H(t,x,p^+), H(t,x,p^-)\}$. Quant à la première expression faisant intervenir un minimum, noter avec (14) que $H(t,x,p)$ a un minimum par rapport à p lorsque $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$, c'est-à-dire lorsque $p = p^\sharp = \frac{1}{2}\log\frac{b}{a(t)(1-x)}$. Donc

$$\min\{H(t,x,p);\ p^- \leq p \leq p^+\} = \begin{cases} H(t,x,p^+) & \text{si} \quad p^- < p^+ \leq p^\sharp, \\ H(t,x,p^-) & \text{si} \quad p^\sharp \leq p^- < p^+, \\ H(t,x,p^\sharp) & \text{si} \quad p^- \leq p^\sharp \leq p^+. \end{cases}$$

Pour les conditions aux bords, on pose $S_0^m = 0$ et $(S_J^m - S_{J-1}^m)/\Delta x = K$ avec une grande valeur pour K. Le pas de temps Δt doit être assez petit comparé à Δx pour que la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) soit satisfaite. Comme condition initiale on a pris $S(0,x) = x\log(b/a_0) + x + (1-x)\log(1-x)$, c'est-à-dire la solution stationnaire régulière lorsque $a(t)$ est remplacé par sa moyenne temporelle. On peut aussi prendre une fonction constante $S(0,x) = \sigma$ avec σ assez négative, mais la convergence vers le régime périodique est alors plus lente. La constante σ doit être assez négative pour éviter le problème de non-unicité déjà mentionné dans la section 2. Une fois que la solution du problème non stationnaire a atteint un régime périodique, on peut estimer $C = \min_t S^*(t,0^+) - \min_{t,x} S^*(t,x)$.

Méthode de Monte-Carlo. Le temps moyen d'extinction peut aussi être estimé par une méthode de Monte-Carlo faisant la moyenne de simulations stochastiques. Noter cependant que l'algorithme de Gillespie prenant avantage des temps d'attente distribués exponentiellement ne peut pas être utilisée puisque $a(t)$ est périodique en temps. Quand N croît, le temps d'extinction peut devenir astronomique. On ne présente pas de résultats utilisant cette méthode.

Exemples. Supposons que $a(t) = a_0(1 + \varepsilon\cos(2\pi t/T))$ avec $T = 1$ semaine. Considérons d'abord le cas où $a_0 = 20$ par semaine et $b = 5$ par semaine. La

durée moyenne d'infection est $1/b = 1{,}4$ jours. Ainsi $R_0 = a_0/b = 4 > 1$ et $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0) \simeq 0{,}636$. La figure 1 montre $-\log(-\lambda_1)$ en fonction de N pour $\varepsilon = 0{,}2$, 0,5 ou 0,8 et $N = 10, 20, \ldots, 60$, calculé en utilisant les multiplicateurs de Floquet. Les lignes correspondent à une régression linéaire des 3 derniers points $N = 40, 50, 60$. Les pentes de ces lignes—des estimations de C—sont 0,524, 0,364 et 0,225 dans l'ordre pour $\varepsilon = 0{,}2$, 0,5 et 0,8.

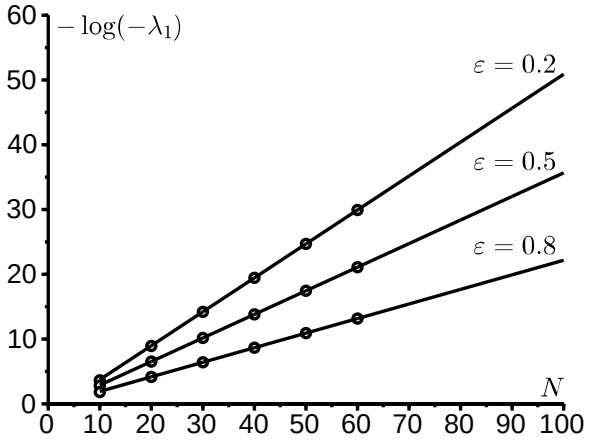

FIGURE 1 – Calcul des multiplicateurs de Floquet de l'équation maîtresse : $-\log(-\lambda_1)$ en fonction de N pour $\varepsilon = 0{,}2$, 0,5 ou 0,8 et $N = 10, 20, \ldots, 60$. Le nombre C est la pente de ces lignes. Valeurs des paramètres : $T = 1$, $a_0 = 20$, $b = 5$.

Noter dans cet exemple que a_0 et $\omega = 2\pi/T$ sont du même ordre ; c'est un cas de fréquence intermédiaire. On s'attend donc à ce que (19) donne une bonne approximation pour C lorsque ε est petit. La figure 2 montre les courbes suivantes en fonction de ε pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$: une ligne pleine pour C utilisant l'orbite hétérocline et une ligne avec de longs pointillés pour C utilisant la méthode EDP avec $\Delta x = 0{,}002$ et $\Delta t = 0{,}0002$ (ces deux premières lignes ne peuvent presque pas être distinguées) ; trois points représentant les valeurs de C obtenues dans la figure 1 (noter comment ils tombent sur les deux lignes précédentes) ; une ligne avec des pointillés courts pour la formule approchée (19) ; une ligne mêlant points et pointillés pour l'approximation basse fréquence (20). On peut voir que la formule approchée (19) est proche de C même lorsque ε n'est que modérément petit.

La figure 3 montre une solution périodique en temps $S^*(t, x)$ de l'EDP de Hamilton-Jacobi, tracée en fonction de x pour différentes valeurs de t, lorsque $\varepsilon = 0{,}5$. Noter la discontinuité de la solution en $x = 0$. Un zoom près de $x = 0$ montrerait que $S^*(t, 0^+)$ est effectivement périodique en temps, de sorte que la condition au bord $S^*(t, 0) = 0$ ne peut être satisfaite que dans un sens faible.

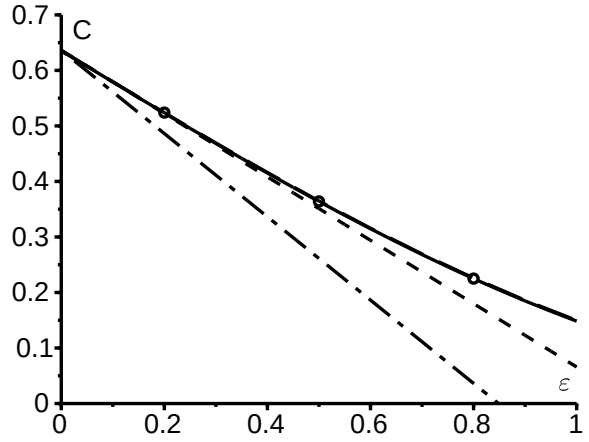

FIGURE 2 – Fréquence intermédiaire : le nombre C calculé en utilisant l'orbite hétérocline [ligne pleine] ou la méthode EDP [pointillés longs] (les deux lignes ne peuvent presque pas être distinguées), les multiplicateurs de Floquet comme dans la figure 1 [points], la formule approchée (19) [pointillés courts], et la formule basse fréquence (20) [ligne mêlant points et pointillés], en fonction de ε. Même valeurs des paramètres que dans la figure 1.

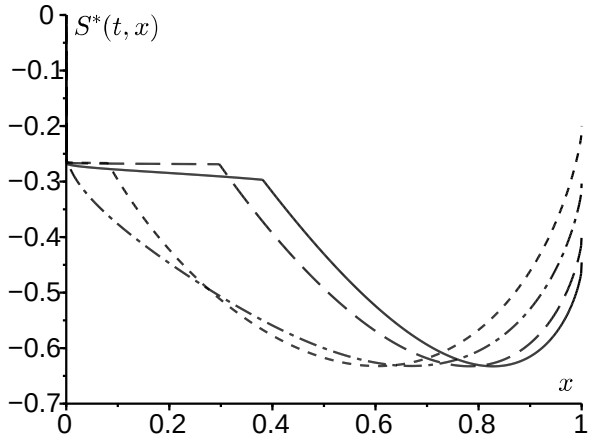

FIGURE 3 – Une solution périodique en temps $S^*(t,x)$ de l'EDP de Hamilton-Jacobi, tracée en fonction de x pour $t = 0$ (ligne pleine), $t = T/4$ (pointillés longs), $t = T/2$ (pointillés courts) et $t = 3T/4$ (points et pointillés). Mêmes valeurs des paramètres que dans la figure 1 et $\varepsilon = 0{,}5$.

La figure 4 considère un exemple haute fréquence : $a_0 = 2$ par semaine et $b = 1$ par semaine. Ainsi $R_0 = 2$ et $c_0 \simeq 0{,}1931$. Dans ce cas $\omega \simeq 6{,}28$ par semaine est quelque peu supérieur à a_0. Le nombre C est calculé en utilisant l'orbite hétérocline et la formule haute fréquence (22) en fonction de ε pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$. L'accord est bon sur toute la plage de valeurs de ε. Enfin la figure 5 montre l'orbite reliant $(x^*(t), 0)$ à $(0, p^*(t))$ pour les mêmes valeurs des paramètres avec $\varepsilon = 0{,}1$.

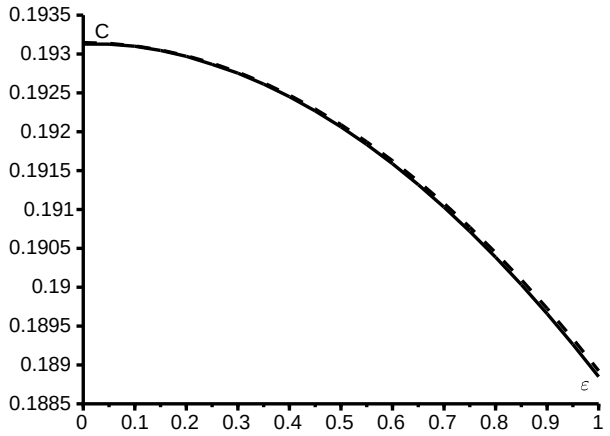

FIGURE 4 – Régime haute fréquence : C calculé en utlisant l'orbite hétérocline [ligne pleine] et la formule haute fréquence (22) [ligne en pointillé] en fonction de ε. Valeurs des paramètres : $T = 1$, $a_0 = 2$, $b = 1$.

4 Remarques

– Il est possible d'obtenir des estimations plus précises avec la solution BKW raffinée $\pi_n(t) \simeq e^{-N\,S_0(t,n/N) - S_1(t,n/N)}$. En insérant

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-N\,S_0(t,n/N) - \frac{\partial S_0}{\partial x}(t,n/N) - \frac{1}{2N}\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(t,n/N) - S_1(t,n/N) - \frac{1}{N}\frac{\partial S_1}{\partial x}(t,n/N)}$$

et une expression semblable pour $\pi_{n-1}(t)$ dans (8), et en séparant les termes de plus haut degré, on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi (10) pour $S_0(t,x)$ et l'équation de transport

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1}{\partial t} &+ \left[a(t)x(1-x)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} - bxe^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}}\right]\frac{\partial S_1}{\partial x} \\ &= a(t)\,e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}}\left[1 - 2x + \frac{x(1-x)}{2}\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}\right] + b\,e^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}}\left[-1 + \frac{x}{2}\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}\right]\end{aligned}$$

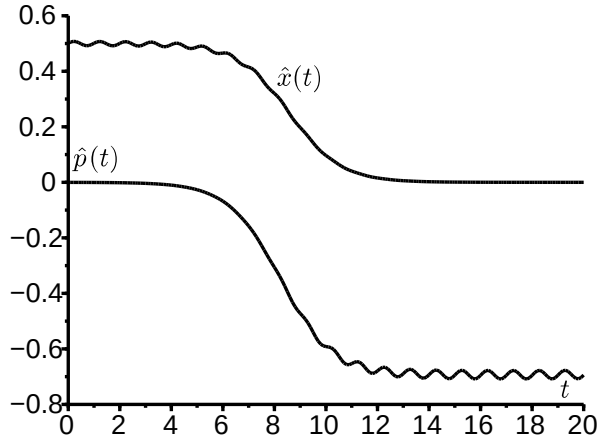

FIGURE 5 – Les composantes $t \mapsto \hat{x}(t)$ et $t \mapsto \hat{p}(t)$ de l'orbite hétérocline $(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$ reliant les deux solutions périodiques $(0, p^*(t))$ et $(x^*(t), 0)$. Mêmes valeurs des paramètres que dans la figure 4 et $\varepsilon = 0{,}1$.

pour $S_1(t,x)$. Si $a(t)$ est périodique, alors $S_0(t,x)$ et $S_1(t,x)$ doivent être calculés numériquement. Rappelons avec Assaf et Meerson (2010) que si $a(t) = a$ est constant, alors le facteur pré-exponentiel pour λ_1 s'obtient par la méthode des développements asymptotiques raccordés comme suit. D'abord $S_0(x)$ est donné par (3) et l'équation pour $S_1(x)$ conduit à $S_1(x) = \log(x\sqrt{1-x}) + \text{const}$. Donc $\pi_n \simeq \kappa \, \frac{e^{-NS_0(n/N)}}{\frac{n}{N}\sqrt{1-\frac{n}{N}}}$ pour une constante κ. Quand n est petit,

$$\pi_n \simeq \frac{\kappa\, N}{n}\, e^{-NS_0(0) - nS_0'(0)} = \frac{\kappa\, N}{n}\, e^{-NS_0(0)} \left(\frac{a}{b}\right)^n . \tag{23}$$

Mais pour n petit, le système (8) peut aussi être approché par l'équation de récurrence $a(n-1)\pi_{n-1} - n(a+b)\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1} \simeq 0$ for $n \geq 1$, qui donne $\pi_n \simeq \frac{\pi_1}{n} \frac{1-(a/b)^n}{1-a/b}$. Quand n croît, cette expression est équivalente à $\frac{\pi_1}{n} \frac{(a/b)^n}{a/b-1}$. Ceci coïncide avec (23) seulement si $\pi_1 \simeq \kappa N e^{-NS_0(0)}(\frac{a}{b} - 1)$. Finalement (9) donne

$$\lambda_1 \simeq \frac{-b\,\pi_1/(\kappa\, N)}{\int_0^1 \frac{e^{-NS_0(x)}}{x\sqrt{1-x}}\, dx} \simeq \frac{(b-a)x^*\sqrt{1-x^*}\sqrt{NS_0''(x^*)}}{e^{N[S_0(0)-S_0(x^*)]}\sqrt{2\pi}} = -\frac{(a-b)^2}{a\, e^{cN}}\sqrt{\frac{N}{2\pi}}$$

(Assaf et Meerson, 2010, Eq. (71)). Si par exemple $a = 20$, $b = 5$ et $N = 50$, alors cette estimation est seulement 2% au-dessus de la valeur de λ_1 obtenue avec un logiciel calculant les valeurs propres de grandes

matrices comme dans la figure 1. La méthode des développements asymptotiques raccordés peut probablement être étendue au cas périodique mais il est peu probable qu'elle conduise à une formule explicite.

– Soit la fonction génératrice $\phi(t,z) = \sum_{n=0}^{N} P_n(t)\, z^n$ avec $0 \le z \le 1$. Alors $\phi(t,1) = 1$ pour tout t. Un calcul simple partant de (7) montre que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1-z)\left(b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z\right)\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N}\, z^2(1-z)\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

pour $0 < z < 1$. Dans le régime quasi-stationnaire, on s'attend à ce que $\phi(t,z) \simeq 1 + e^{\lambda_1 t}\psi(t,z)$ avec $\psi(t,z)$ périodique en t, $\psi(t,1) = 0$ et

$$\lambda_1 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1-z)\left(b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z\right)\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N}\, z^2(1-z)\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\,.$$

Ainsi λ_1 est aussi la valeur propre non nulle la plus grande de ce problème parabolique. Ceci pourrait être un moyen de démontrer plus rigoureusement les résultats asymptotiques concernant λ_1 pour N grand.

– En posant $P_n(t) = \mathcal{P}(t,x)$ où $x = n/N$ et en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 2 de l'équation maîtresse (7), on obtient l'équation de Fokker-Planck ou équation de diffusion

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big[\big(a(t)x(1-x) - bx\big)\mathcal{P}\Big] + \frac{1}{2N}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[\big(a(t)x(1-x) + bx\big)\mathcal{P}\Big]\,.$$

De même, en posant pour le temps moyen d'extinction $\tau_n(t) = \tau(t,x)$ où $x = n/N$, (13) conduit au problème adjoint

$$-1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \big(a(t)x(1-x) - bx\big)\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{2N}\big(a(t)x(1-x) + bx\big)\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\,.$$

Cependant on sait déjà dans le cas des coefficients indépendants du temps que ces équations ne donnent pas normalement la valeur correcte de C (Doering *et al.*, 2005) ; la valeur ne tend à être correcte que quand R_0 est proche de 1. Le même problème apparaît dans d'autres modèles épidémiques. Par exemple Diekmann *et al.* (2012, p. 112-113) utilisent une approximation de diffusion pour estimer C dans un modèle SIR en dépit du fait que $R_0 \simeq 10$ dans leur application numérique. Pour une analyse BKW du modèle SIR stochastique, voir Kamenev et Meerson (2008).

– Le nombre $1/C$ peut être appelé la taille critique de la communauté (Diekmann *et al.*, 2012).

Appendice

Démontrons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2}\, du = \frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}\,.$$

D'abord, $e^u/(1+e^u)^2 = 1/(4\cosh^2(u/2))$ est une fonction paire. Ceci combiné avec une intégration par parties montre que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2}\, du &= 2\int_0^{+\infty} \cos(\lambda u) \frac{e^u}{(1+e^u)^2}\, du \\ &= 2\left[\frac{-\cos(\lambda u)}{1+e^u}\right]_0^{\infty} - 2\int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda u)}{1+e^u}\, du \\ &= 1 - 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}\sin(\lambda u)}{1+e^{-u}}\, du\,.\end{aligned}$$

En développant $1/(1+e^{-u})$ en série de puissance, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2}\, du &= 1 - 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)u} \sin(\lambda u)\, du \\ &= 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^2 + (n+1)^2}\,.\end{aligned}$$

La somme de cette série peut être calculée en prenant $z = \mathrm{i}\pi\lambda$ dans la formule d'Euler

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}\,,$$

qui est vraie pour tout nombre complexe z tel que $z \neq n\pi$ (n entier). Comme $\sin(\mathrm{i}\pi\lambda) = \mathrm{i}\sinh(\pi\lambda)$, on obtient

$$\frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

et le résultat s'en suit.

Remerciements. Cet article a été stimulé par une discussion avec Hans Metz concernant la taille de population effective dans un environnement périodique lors d'une conférence sur les modèles stochastiques en écologie, évolution et génétique à Angers en décembre 2013.

Références

Andersson H, Djehiche B (1998) A threshold limit theorem for the stochastic logistic epidemic. J Appl Probab 35 :662-670

Aronsson G, Kellogg RB (1978) On a differential equation arising from compartmental analysis. Math Biosci 38 :113-122

Assaf M, Kamenev A, Meerson B (2008) Population extinction in a time-modulated environment. Phys Rev E 78 :041123

Assaf M, Meerson B (2010) Extinction of metastable stochastic populations. Phys Rev E 81 :021116

Bacaër N, Ait Dads E (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter R_0 in periodic population models. J Math Biol 65 :601-621

Barles G (1994) Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Springer, Berlin

Barles G, Perthame B (1988) Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. SIAM J Control Optim 26 :1133-1148

Billings L, Mier-y-Teran-Romero L, Lindley B, Schwartz IB (2013) Intervention-based stochastic disease eradication. PLoS ONE 8(8) : e70211

Diekmann O, Heesterbeek H, Britton T (2012) Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics. Princeton University Press, Princeton

Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth-death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Planck approximation. Multiscale Model Simul 3 :283-299

Escudero C, Rodríguez JA (2008) Persistence of instanton connections in chemical reactions with time-dependent rates. Phys Rev E 77 :011130

Hethcote H (1973) Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model. Bull Math Biol 35 :607-614

Kamenev A (2011) Field theory of non-equilibrium systems. Cambridge University Press, Cambridge

Kamenev A, Meerson B (2008) Extinction of an infectious disease : a large fluctuation in a nonequilibrium system. Phys Rev E 77 :061107

Mitake H (2009) Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with periodic boundary data. Nonlinear Anal 71 :5392-5405

Nåsell I (2011) Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin

Osher S, Shu CW (1991) High-order essentially nonoscillatory schemes for HamiltonJacobi equations. SIAM J Numer Anal 28 :907-922

Ovaskainen O, Meerson B (2010) Stochastic models of population extinction. Trends Ecol Evol 25 :643-652

Rabinowitz PH (1994) Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system. Ergod Theor Dyn Syst 14 :817-829

Roquejoffre JM (2001) Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton-Jacobi equations. J Math Pures Appl 80 :85-104

Soner HM (1986) Optimal control with state-space constraint I. SIAM J Control Optim 24 :552-561