

# على نموذج الستوكاستك SIS لوباء في بيئة دورية

J. Math. Biol. 71 (2015) 491–511  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01265563>

Nicolas Bacaër

Bondy, France, Institut de Recherche pour le Développement  
Pierre and Marie Curie University, Les Cordeliers, Paris, France  
nicolas.bacaer@ird.fr

## ملخص

في النموذج العشوائي SIS لوباء بمعدل اتصال  $a$ ، ومعدل علاج  $b < a$  وحجم سكان  $N$ ، فإن متوسط وقت الانقراض هو  $(\log \tau)/N$  يتلاقى ل  $c = b/a - 1 - \log(b/a)$  عندما تتقارب  $N$  إلى ما لا نهاية. تتناول هذه المقالة الحالة الأكثر واقعية حيث يكون معدل الاتصال وظيفية دورية يكون متوسطها أكبر من  $b$ .  $(\log \tau)/N$  تتقارب إلى حد جديد  $C$ ، والذي يرتبط بمعادلة هاميلتون-جاكوبي الدورية. عندما يكون معدل التلامس دالة جيب التمام ذات سعة صغيرة أو بتردد كبير أو بتردد صغير جداً، يمكن للمرء الحصول على صيغ تقريبية لـ  $C$  تحليلياً كما في [Assaf et al., 2008, Phys Rev E 78, 041123]. يتم توضيح هذه النتائج من خلال المحاكاة العددية.

## 1 المقدمة

تمت دراسة النموذج العشوائي SIS للوباء بالتفصيل عندما يفترض أن تكون البيئة ثابتة، كما هو الحال في كتاب (Nåsell, 2011). مع معدل الاتصال  $a$ ، ومعدل العلاج  $b < a$  وحجم السكان  $N$ ، فإن متوسط الوقت للانقراض  $\tau$  (على سبيل المثال من شخص مصاب) هو

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} c = b/a - 1 - \log(b/a) > 0 \quad (1)$$

(Nåsell, 2011, Theorem 12.1). من بين المراجع الأخرى، انظر أيضاً (Doering et al., 1998) (Andersson and Djehiche, 2010) (Assaf and Meerson, 2010) and (Wentzel [BKW و Kramers و Brillouin]. يستخدم الأخير طريقة  $\pi_n$  نحدد  $x = n/N$  بحيث  $0 \leq x \leq 1$ . عندما تتقارب  $N$  إلى ما لا نهاية،  $n \geq 1$  المصابين في وقت  $t$  أولاً تقترب من توزيع شبه ثابتة  $\pi_n$ . تقترب من وظيفية مستمرة  $S(x)$  مع معادلة هاميلتون-جاكوبي الثابتة  $(\log \pi_n)/N$

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

مع

$$\begin{aligned} H(x, p) &= ax(1-x)(e^p - 1) + bx(e^{-p} - 1) \\ &= x(1 - e^{-p})[a(1-x)e^p - b] \end{aligned} \quad (2)$$

(عساف وميرسون، 2010، (12) و (IV.D.3)). بتعبير أدق، فرع خط المستوى  $H = 0$  مع  $a(1-x)e^p - b = 0$  يؤدي إلى الصيغة

$$S(x) = x \log(b/a) + x + (1-x) \log(1-x) + \text{constante}. \quad (3)$$

هذه الوظيفة لديها الحد الأدنى عندما  $x = x^* = 1 - b/a$  مع  $x^* > 0$  لأن  $b < a$ . أخيراً

$$c = S(0) - S(x^*)$$

هو الارتفاع بين الجزء السفلي والحافة عند  $x = 0$  للبئر المحتمل  $S(x)$ . وبالمثل، فإن النظام هاميلتوني

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (4)$$

لديه مدار مغاير للربط  $(x^*, 0) = (1 - \frac{b}{a}, 0)$  و  $(0, p^*) = (0, \log \frac{b}{a})$ . الرقم  $c$  يساوي الإجراء

$$\int_{x^*}^0 p dx$$

على طول هذا المدار. تم استخدام طريقة BKW لعمليات الولادة والوفاة الأخرى في الفيزياء أو بيولوجيا السكان (Ovaskainen and Meerson، 2010؛ Kamenev، 2011).

في دراستهم للتفاعل الكيميائي مع التفرع والإبادة ، (Escudero and Rodríguez، 2008) أظهر كيف أن البيئة الدورية في الوقت المناسب أثرت على مدار heterocline الذي يلعب دوراً مركزياً في متوسط وقت الانقراض. (عساف وآخرون ، 2008) درسوا نفس النموذج بمزيد من التفصيل ، ولا سيما حساب التصحيح لمتوسط وقت الانقراض بسبب الاضطراب الدوري للسعة الصغيرة أو التردد المنخفض أو التردد العالي. حصل هؤلاء المؤلفون على صيغ عامة يمكن تطبيقها على عمليات الولادة والوفاة الأخرى مع الانبثاث. بالإضافة إلى ذلك ، (Billings et al. ، 2013 ، الشكل 7) يُظهر محاكاة مونت كارلو لنموذج عشوائي استراتيجي SIS.

الهدف هنا هو تطبيق طريقة BKW المستخدمة من قبل (Assaf et al.، 2008) على نموذج وباء SIS بمعدل اتصال دوري من الفترة  $T$  ، والذي يزيد متوسطه عن  $b$  . يمكن أن يمثل هذا النموذج على سبيل المثال انتشار عدوى بكتيرية لا تمنح المناعة. يمكن أن يتم الانتشار في مدرسة ذات دورية أسبوعية (مرتبطة بعطلات نهاية الأسبوع) ، أو دورية سنوية (مرتبطة بالعطلات والموسمية). هذه بالطبع ليست سوى خطوة أولى نحو نماذج أكثر واقعية.

في القسم 2 ، تشير الحسابات غير الرسمية إلى أن متوسط وقت الانقراض  $\tau$  (يبدأ على سبيل المثال من شخص مصاب في الوقت 0) مثل هذا

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C = \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+) - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x). \quad (5)$$

هنا ،  $S^*(t, x)$  هو حل اللزوجة ، دورية الفترة  $T$  ، لمعادلة هاميلتون-جاكوبي

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

مع حالة الحافة المختلطة Dirichlet - "حالة مقيدة"

$$S(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty.$$

$S(t, x)$  يجب ألا يكون صفراً تقريباً بالقرب من  $s = 0$  . يجب فهم الشرط عند الحواف بمعنى اللزوجة (Barles، 1994) لأنه  $S^*(t, 0^+)$  قد لا تساوي 0. هاميلتونيان  $H(t, x, p)$  مطابق لـ (2) فيما عدا المعامل الثابت  $a$  لقد بدل بواسطة  $a(t)$ . مع

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t)), \quad \omega = 2\pi/T, \quad a_0 > b, \quad |\varepsilon| \leq 1,$$

نحدد  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$  . باتباع طرق (عساف وآخرون ، 2008) ، يوضح القسم 2 ذلك

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}$$

إذا  $\varepsilon$  قريب من 0 ،

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0)$$

إذا  $\omega \ll a_0$  و

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0)$$

في حد التردد العالي  $a_0 \gg \omega$  . يمكننا تخمين ذلك  $C > 0$  طالما  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$  . ربما يكون دائما أقل من  $c_0$  ، لأن الاختلافات الموسمية تميل إلى انقراض الأمراض المعدية. يشير هذا بشكل أكثر دقة إلى أن البيئة الدورية تؤدي إلى نموذج SIS إلى انخفاض أسي في متوسط وقت الانقراض مماثل لتلك التي تم الحصول عليها لنموذج التفرع والإبادة (Assaf et al.، 2008). يوضح القسم 3 هذه النتائج بمحاكاة عددية. القسم 4 يضيف بعض الملاحظات.

## 2. الحسابات التحليلية

### 2.1 معادلة هاميلتون-جاكوبي التفاضلية الجزئية

معادلة الماجستير ونظرية فلوكية.  $N$  هو إجمالي عدد السكان ، على افتراض أنه ثابت. نحدد

- $S(t)$  عدد الأصحاء
- $I(t)$  عدد المصابين

في الوقت  $r$ ، مع  $I(t) = n$  إذا كان لدينا  $N = S(t) + I(t)$ .

- مع الاحتمال  $bndt + o(dt)$  شخص يشفى
- مع الاحتمال  $a(t)n(1 - n/N)dt + o(dt)$  شخص مصاب

بين  $t$  و  $t + dt$ .  $a(t)$  هو معدل الاتصال.  $b$  هو معدل الشفاء. نحن نفترض ذلك  $a(t)$  هي دالة مستمرة ودورية للفترة  $T$ ، موجبة مع

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt - b > 0,$$

بعبارة أخرى

$$R_0 = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt}{b} > 1.$$

لتفسير بيولوجي لل  $R_0$  انظر (باكير وآيت دادس ، 2012). (Hethcote، 1973) لاحظ أن  $r > 0$  (أي  $R_0 > 1$ ) هو شرط ضروري وكافٍ لحل معادلة المجال الوسط هذه ليقارب إلى وظيفة دورية وإيجابية:

$$\frac{di}{dt} = a(t)i(1 - i) - bi.$$

وإلا يتقارب الحل إلى صفر.

$P_n(t)$  هو احتمال ذلك  $I(t) = n$ . نملك

$$\frac{dP_n}{dt} = a(t)(n - 1)(1 - (n - 1)/N)P_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]P_n + b(n + 1)P_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (7)$$

هنا،  $P_{N+1} = 0$  و  $P_{-1} = 0$ ، طبعاً.

$$\sum_{n=0}^N P_n(t) = 1.$$

كما تم كتابة النظام (7)

$$\frac{dP}{dt} = M(t) P.$$

$P(t)$  هو المتجه  $(P_n(t))_{0 \leq n \leq N}$  و  $M(t)$  هي مصفوفة مربعة بحجم  $N + 1$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b - a(t)(1 - \frac{1}{N}) & 2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(t)(1 - \frac{1}{N}) & -2b - 2a(t)(1 - \frac{2}{N}) & 3b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -bN \end{pmatrix}.$$

هذه المصفوفة لها بنية كتلة

$$M(t) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & Q(t) \end{array} \right).$$

$Q(t)$  هو مصفوفة مربعة من حجم  $N$ .  $X(t)$  و  $Y(t)$  هي المصفوفات مع

$$\frac{dX}{dt} = M(t) X, \quad X(0) = I_{N+1}$$

$$\frac{dY}{dt} = Q(t) Y, \quad Y(0) = I_N.$$

$I_N$  هو مصفوفة هوية حجم  $N$ . مضاعفات فلوك  $M(t)$ ، أي القيم الذاتية لمصفوفة  $X(T)$  monodromy هم  $\{\mu_0 = 1\}$  ومضاعفات فلوكويت  $Q(t)$ . المصفوفة  $Q(t)$  تعاونية: المعاملات خارج القطر موجبة أو صفر. هذه المصفوفة غير قابلة للاختزال أيضًا لأن العناصر الموجودة أعلى وأسفل القطر كلها إيجابية تمامًا. لذلك، كل عناصر  $Y(t)$  هي إيجابية للغاية  $t > 0$ . وفقا لنظرية Perron و eigenvalue،  $\mu_1$  Frobenius من  $Y(T)$  مع الجزء الحقيقي الأكبر هو عدد حقيقي موجب تمامًا ومساحة eigenspace المرتبطة بها هي البعد 1. بالإضافة إلى ذلك،

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1)Q(t) = (-b \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

نملك  $0 < \mu_1 < 1$  (Aronsson and Kellogg, 1978) and  $\lambda_1 = (\log \mu_1)/T < 0$ . المتجه  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  هي حالة مستقرة.  $P(t)$  تتلاقى مع هذا المتجه إذا  $t \rightarrow +\infty$ . الهدف هنا هو تقدير القرب بين  $N$  كبير  $\lambda_1$  و 0.

فليكن  $v$  eigenvector من  $X(T)$  المرتبطة بالقيمة الذاتية  $\mu_1 = e^{\lambda_1 T}$ . يمكننا اختيار  $v$  بحيث  $v_n > 0$ ,  $1 \leq n \leq N$ . لقد فعلنا ذلك

$$X(T)v = e^{\lambda_1 T}v.$$

كما هو الحال في نظرية فلوكويه، نحدد

$$\pi(t) = e^{-\lambda_1 t}X(t)v.$$

لدينا بعد ذلك

$$\frac{d\pi}{dt}(t) = -\lambda_1\pi(t) + M(t)\pi(t).$$

علاوة على ذلك

$$\pi(T) = e^{-\lambda_1 T}X(T)v = v = \pi(0).$$

وبالتالي  $\pi(t)$  هي وظيفة دورية لفترة  $T$ . مع  $\pi(t) = (\pi_n(t))_{0 \leq n \leq N}$  نملك

$$\lambda_1\pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = a(t)(n-1)(1-(n-1)/N)\pi_{n-1} - [a(t)n(1-n/N) + bn]\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1}. \quad (8)$$

من خلال تلخيص هذه المعادلات، نحصل عليها

$$\lambda_1 \sum_{n=0}^N \pi_n(t) + \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0.$$

إذا لدينا

$$\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=0}^N \pi_n(0).$$

لكن  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t)$  هي وظيفة دورية لفترة  $T$ . وبالتالي  $\sum_{n=0}^N \pi_n(0) = 0$  و  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0 \forall t$ . إذا لدينا

$$\pi_0(t) = - \sum_{n=1}^N \pi_n(t).$$

ولكن (8) مع  $n = 0$  يظهر ذلك أيضا

$$\lambda_1\pi_0(t) + \frac{d\pi_0}{dt} = b\pi_1(t).$$

لان  $\pi_0(t)$  دورية، نحصل عليها عن طريق الدمج

$$\lambda_1 = b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\int_0^T \pi_0(t) dt} = -b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt}. \quad (9)$$

حل BKW ومعادلة هاميلتون-جاكوبي. عندما تكون  $N$  كبيرة، فلنبحث عن حل BKW

$$\pi_n(t) \simeq e^{-NS(t,x)}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

مع  $x = n/N$  .  $S(t, x)$  هي دالة مستمرة لـ  $t$  و  $0 < x < 1$  ، وهي فترة زمنية  $T$  بالنسبة لـ  $t$  . لدينا بعد ذلك

$$\frac{d\pi_n}{dt} \simeq -N \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) e^{-NS(t, x)},$$

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-NS(t, x + \frac{1}{N})} \simeq e^{-NS(t, x) - \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)}, \quad \pi_{n-1}(t) \simeq e^{-NS(t, x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)}.$$

نحدد  $\beta(x) = bx$  و  $\alpha(t, x) = a(t)x(1-x)$  لذلك (8) مكتوب

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = N\alpha(t, x - 1/N)\pi_{n-1} - N[\alpha(t, x) + \beta(x)]\pi_n + N\beta(x + 1/N)\pi_{n+1}.$$

من خلال الاحتفاظ بالتعبيرات السائدة فقط ، يمكننا استخدامها  $\alpha(t, x - 1/N) \simeq \alpha(t, x)$  و  $\beta(x + 1/N) \simeq \beta(x)$  للحصول على

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} \simeq N\alpha(t, x)[\pi_{n-1} - \pi_n] + N\beta(x)[\pi_{n+1} - \pi_n].$$

$\lambda_1$  على الأرجح صغير للغاية. يمكن تجاهلها على الجانب الأيسر. عن طريق حقن شكل BKKW وقسمة  $N e^{-NS(t, x)}$  نحصل على معادلة هاميلتون-جاكوبي

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a(t)x(1-x) \left[ e^{\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] + bx \left[ e^{-\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (10)$$

هذا هو شكل (6) مع هاميلتوني دورية  $H(t, x, p)$  (2) و  $a(t)$  يستبدل  $a$ . المعادلات مثل (10) لها عادة حلول مقاربة للنموذج  $S(t, x) = -Et + \Sigma(t, x)$  .  $\Sigma(t, x)$  هي دالة دورية للفترة  $T$  فيما يتعلق  $t$  و  $E$  ثابت. هنا ولكن الحل فقط مع  $E = 0$  ذات أهمية: فهي تتوافق مع مدارات غير متجانسة في القسم 2.2 أدناه.

**شروط الحافة.** لأن  $H(t, 0, p) = 0$  ، نملك  $\frac{\partial S}{\partial t}(t, 0) = 0$  . وبالتالي هو ثابت  $S(t, 0)$  . بغض النظر عن  $r$  . كما (10) ينطوي فقط المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى، يتم تعريف حلولها إلى داخل ثابتة مضافة (تذكر أن بالمتجه الذاتي الخامس من  $X(T)$  يعرف ضمن ثابت الضرب). حتى تتمكن من الاختيار  $S_0 = 0$  ، وبالتالي حالة Dirichlet:

$$S(t, 0) = 0 \quad \forall t. \quad (11)$$

بالإضافة إلى ذلك ، لأن  $\pi_n(t) = 0 \quad \forall n > N$  ولأن الصيغة (3) في بيئة ثابتة تظهر ذلك  $|S(1)| < +\infty$  في حين  $\frac{dS}{dx}(1) = +\infty$  ، نحن نفرض ذلك

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty \quad \forall t. \quad (12)$$

طريقة أخرى لتقديم هذا الشرط على الحافة هي "قيود الدولة"

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

إذا كان  $s = 1$  . تؤدي هذه الحالة مع  $x = 1$  إلى

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) \geq 0$$

(سونر ، 1986) . ولكن

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p},$$

هذا التعبير موجب أو صفر في  $s = 1$  إذا فقط إذا  $p = +\infty$  كما في (12).

**خصائص هاميلتونيان.**  $H(t, x, p)$  هو محدب في  $v$  لأن

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p + bxe^{-p} \geq 0.$$

علاوة على ذلك،  $H(t, x, p) \rightarrow +\infty$  إذا  $|p| \rightarrow +\infty$  بشرط  $0 < x < 1$  . لكن هذه الخاصية لم تعد صحيحة متى  $x = 0$  أو  $x = 1$  . نملك  $H(t, x, 0) = 0$  لاغرانج .

$$L(t, x, v) = \max_p \{pv - H(t, x, p)\}.$$

لدينا مع  $0 < x < 1$

$$L(t, x, v) = p_*v - H(t, x, p_*).$$

هو الحل الوحيد

$$v = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p_*) = a(t)x(1-x)e^{p_*} - bxe^{-p_*}.$$

وهي معادلة كثيرة الحدود لدرجة 2 بوصة  $e^{p_*}$ . هذا يعطي

$$\begin{aligned} L(t, x, v) &= p_*v - a(t)x(1-x)(e^{p_*} - 1) - bx(e^{-p_*} - 1) \\ &= v \log \left( \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2a(t)x(1-x)} \right) + a(t)x(1-x) + bx \\ &\quad - \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2} - \frac{2a(t)x(1-x)bx}{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}. \end{aligned}$$

بالنسبة لـ  $x = 1$ ، لدينا

$$\begin{aligned} v > 0 \text{ إذا } L(t, 1, v) &= +\infty \bullet \\ L(t, 1, 0) &= b \bullet \\ v < 0 \text{ إذا } L(t, 1, v) &= -v \log(-v/b) + v + b \bullet \end{aligned}$$

بالنسبة إلى  $x = 0$ ، لدينا

$$\begin{aligned} v \neq 0 \text{ إذا } L(t, 0, v) &= +\infty \bullet \\ L(t, 0, 0) &= 0 \bullet \end{aligned}$$

بالنسبة إلى  $x$  بالقرب من 0، لاحظ ذلك  $L(t, x, v) \sim -v \log x$  وذلك لـ  $\eta > 0$  صغير ولأي وظيفة  $\xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1])$  مع  $\xi(\theta) = 0$ ، نملك

$$\int_{\theta}^{\theta+\eta} L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds \simeq - \int_{\theta}^{\theta+\eta} \frac{d\xi}{ds}(s) \log \xi(s) ds = - \int_0^{\xi(\theta+\eta)} \log \xi d\xi,$$

وهو ليس لانهاضي.

حلول معادلة هاملتون - جاكوبي. لحالة أولية معينة  $S_0(x)$ ، الوظيفة

$$\begin{aligned} S(t, x) &= \inf \left\{ \int_{\theta}^t L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds + 1_{\theta=0} S_0(\xi(\theta)); \right. \\ &\quad \left. 0 \leq \theta \leq t, \xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1]), \theta = 0 \vee \xi(\theta) = 0, \xi(t) = x \right\} \end{aligned}$$

هو حل لزوجة من (10) بظروف مختلطة (11) - (12) عند الحواف ومع  $S(0, x) = S_0(x)$  (بارلز، 1994). إنها دالة القيمة لمشكلة وقت الخروج في  $x = 0$  مع "قيود الدولة" في  $x = 1$ . حل دوري  $S^*(t, x)$  من (10) - (11) - (12) تعطي من خلال نقطة ثابتة من عامل التطور أعلاه:  $S^*(0, x) = S^*(T, x)$  (Roquejoffre، 2001) و (Mitake، 2009) قاما بدراسة معادلات هاملتون-جاكوبي الدورية المماثلة مع الظروف عند حواف نوع ديريتشليت. لاحظ أنه لا يوجد تفرد. للمشاكل ذات الصلة، انظر (Barles and Perthame، 1988). في الواقع، النظر في الحالة الخاصة حيث  $a(t) = a_0$  ثابت. في هذه الحالة، هناك نوعان من حلول الزوجة الثابتة  $S^*(x)$ .

• من ناحية هناك حلول النموذج

$$x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x) + \gamma$$

مع ثابت  $\gamma \leq 0$ ، والتي تختلف فقط من خلال ثابت  $\gamma$ . الحل مع  $\gamma = 0$  هو الوحيد الذي يتحقق من الحالة عند الحافة بـ  $x = 0$  بالمعنى الكلاسيكي.

• من ناحية أخرى هناك حلول للنموذج

$$\min\{0, x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x) + \gamma\}$$

مع ثابت  $\gamma$  مثل ذلك  $0 < \gamma \leq c_0$ . هذه الحلول هي مماثل الصفر القريب  $s = 0$  ولا تعطي  $C$ .

بالنسبة للمعادلة الدورية (10) بشروط مختلطة (11) - (12) عند الحواف ، يمكننا أن نفترض أن لها حلول للزوجة

- وهي دورية من الفترة  $T$  فيما يتعلق بـ  $t$  ،
- التي ليست متطابقة تمامًا بالقرب من  $s = 0$  ،
- والتي تختلف فقط بواسطة ثابت (وبالتالي إعطاء نفس  $C$ ).

إنه مثل هذا الحل الذي نختاره كحل BKW. كما يوحي الشكل 3 أدناه ، يجب فهم حالة الحدود عند  $s = 0$  بمعنى الزوجة لأن المحلول قد لا يكون مستمراً عند  $s = 0$ .

سلوك  $\lambda_1$  إذا كانت  $N$  كبيرة. بالعودة إلى (9) لدينا

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} = \frac{\log b}{N} + \frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) - \frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right).$$

نملك

$$\pi_1(t) \simeq e^{-NS^*(t,1/N)} \simeq e^{-NS^*(t,0^+)}$$

ل  $N$  كبير. إذا لدينا

$$\frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+)$$

بسبب صيغة لابلاس للتقييم التقاربي للتكاملات. وبالمثل ، لأنه  $\pi_n(t) \simeq e^{-NS^*(t,n/N)}$  ، نملك

$$\frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x)$$

و

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -C$$

مع  $C$  المعطى بواسطة (5). يمكننا تخمين ذلك  $C > 0$  إذا فقط إذا  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ .

متوسط وقت الانقراض. ابتداء من عدد الأشخاص المصابين في الوقت  $t$  ، متوسط وقت الانقراض  $\tau_n(t)$  هو حل دوري للفترة  $T$  من النظام

$$-1 = \frac{d\tau_n}{dt} + b n \tau_{n-1} - (a(t)n(1 - n/N) + b n) \tau_n + a(t)n(1 - n/N) \tau_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (13)$$

مع  $\tau_0(t) = 0$ . يتضمن هذا النظام المصفوفة المنقولة  $Q^*(t)$  المصفوفة  $Q(t)$ . نحدد

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(t) &= (\tau_n(t))_{1 \leq n \leq N} \\ \hat{\pi}(t) &= (\pi_n(t))_{1 \leq n \leq N} \\ \mathbf{1} &= (1, 1, \dots, 1) \\ \langle \cdot, \cdot \rangle & \text{ الناتج العادي للموجهات الحقيقية.} \end{aligned}$$

لدينا بعد ذلك

$$\lambda_1 \hat{\pi} + \frac{d\hat{\pi}}{dt} = Q(t) \hat{\pi}, \quad -\mathbf{1} = \frac{d\hat{\tau}}{dt} + Q^*(t) \hat{\tau}.$$

و

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle = \left\langle \frac{d\hat{\pi}}{dt}, \hat{\tau} \right\rangle + \langle \hat{\pi}, \frac{d\hat{\tau}}{dt} \rangle = \langle Q(t) \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \lambda_1 \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle - \langle \hat{\pi}, Q^*(t) \hat{\tau} \rangle.$$

تعايير مع  $Q(t)$  و  $Q^*(t)$  يلغى كل منهما الآخر. من خلال دمج واستخدام تردد  $\hat{\pi}(t)$  و  $\hat{\tau}(t)$  ، نحصل

$$-\lambda_1 = \frac{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle}{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle dt}.$$

هذا يشير إلى أن متوسط وقت الانقراض  $\tau$  ، على سبيل المثال من شخص مصاب في الوقت 0 ، هو من نفس الحجم من حيث الحجم :  $-1/\lambda_1$

$$\frac{\log(\tau)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C.$$

يمكن للمرء أن يخمن أن هذا التحليل غير الرسمي بشكل أساسي يمكن وضعه في شكل صارم ، كما هو الحال بالنسبة لنموذج SIS في بيئة ثابتة (Nåsell ، 2011).

## 2.2 مدار heterocline

**حالة عامة.** تذكر أن معادلة هاميلتون-جاكوبي (6) يمكن حلها محلبيًا على الأقل عن طريق تتبع الشعاع ، أي عن طريق حل نظام هاميلتونيان (4) في نفس الوقت والمعادلة

$$\frac{dz}{dt} = p(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t)) - H(t, x(t), p(t))$$

مع الشروط الأولية  $x(0) = x_0$  ،  $p(0) = \frac{\partial S}{\partial x}(0, x_0)$  ،  $z(0) = S(0, x_0)$  ، بحيث  $z(t) = S(t, x(t))$  . في متابعة (عساف وآخرون ، 2008) ، دعونا نلقي نظرة عن كثب على نظام هاميلتونيان (4) . في الحالة الحالية ،

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) &= a(t)x(1-x)e^p - be^{-p}, \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) &= a(t)(1-2x)(e^p - 1) + b(e^{-p} - 1). \end{aligned} \quad (14)$$

دعونا أولاً نبحث عن حل دوري غير تافه للفترة  $T$  مع  $x \equiv 0$  و

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, 0, p) = -(a(t) - be^{-p})(e^p - 1).$$

مع  $p = \log(1+q)$  نحصل على معادلة برنولي التفاضلية التي يمكن حلها بسهولة. هذا يعطي الحل الدوري للفترة  $T$

$$p^*(t) = \log \left( 1 + \left[ \frac{e^{-bt + \int_0^t a(s) ds}}{e^{p^*(0)} - 1} + \int_0^t a(s) e^{-b(t-s) + \int_s^t a(u) du} ds \right]^{-1} \right),$$

مع

$$p^*(0) = \log \left( 1 + \frac{1 - e^{-bT + \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(s) e^{-b(T-s) + \int_s^T a(u) du} ds} \right).$$

الحل الدوري  $(0, p^*(t))$  غير مستقر. في الواقع ، مع  $x(t) = \tilde{x}(t)$  و  $p(t) = p^*(t) + \tilde{p}(t)$  وبخطية المعادلات نحصل

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)} & 0 \\ 2a(t)(e^{p^*(t)} - 1) & -a(t)e^{p^*(t)} + be^{-p^*(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

مضاعفات Floquet هي

$$f = \exp \int_0^T [a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)}] dt$$

و  $1/f$  وبالتالي عدم الاستقرار. يمكن أن يُنظر إلى عدم الاستقرار أيضاً على أنه نتيجة لنظرية ليفيل فيما يتعلق بثبات "الحجم" في مساحة الطور (س ، ع) تحت تأثير تدفق هاميلتوني.

ثانياً ، دعنا نبحث عن حل دوري غير تافه للفترة  $T$  مع  $p \equiv 0$  و

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, 0) = a(t)x(1-x) - bx.$$

هذه هي معادلة المجال المتوسطة لنموذج SIS. الحل الدوري الوحيد غير الصفري هو

$$x^*(t) = \left( \frac{1}{x^*(0)} e^{bt - \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t a(u) e^{b(t-u) - \int_u^t a(s) ds} du \right)^{-1}$$

مع

$$x^*(0) = \frac{1 - e^{bT - \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(u) e^{b(T-u) - \int_u^T a(s) ds} du}. \quad (15)$$

الحل الدوري  $(x^*(t), 0)$  هو أيضا غير مستقر. في الواقع، مع  $x(t) = x^*(t) + \tilde{x}(t)$  و  $p(t) = \tilde{p}(t)$  وبخطية المعادلات نحصل

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)(1 - 2x^*(t)) - b & a(t)x^*(t)(1 - x^*(t)) + bx^*(t) \\ 0 & -a(t)(1 - 2x^*(t)) + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

ومضاعفات Floquet عكسية مرة أخرى لبعضها البعض، وبالتالي عدم الاستقرار.

تذكر من القسم 1 أنه في بيئة ثابتة، يوجد مدار غير متجانس في مستوى الطور (س، ع) يربط النقاط الثابتة  $(x^*, 0) = (1 - b/a, 0)$  و  $(0, p^*) = (0, \log(b/a))$  إذا  $a > b$ . وجد (Escudero and Rodríguez, 2008) مدارًا متغيرًا مشابهًا للنموذج الدوري للتفرع وإبادة الجسيمات المتطابقة، على الأقل بالنسبة لاتساع صغير للاضطراب الدوري. لذا يمكننا أن نأمل في وجود مدار غير متجانس  $(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$ ، الذي يربط الحلول الدورية  $(x^*(t), 0)$  و  $(0, p^*(t))$ . ربما يمكن إثبات الوجود باستخدام نهج متغير (Rabinowitz, 1994). يمكن الحصول على هذا المدار الخاص رقمياً بواسطة طريقة اطلاق. طبقاً لـ (عساف وآخرون، 2008، المعادلة (20))،

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{p}(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) - H(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) \right] dt. \quad (16)$$

يمكن تقييم هذا التكامل بشكل رقمي.

**طريقة الاضطراب.** إذا كانت الوظيفة  $a(t)$  هو ثابت  $a_0$ ، ثم  $(\hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))$  هو مدار مغاير يربط النقاط الثابتة  $(x^*, 0) = (1 - b/a_0, 0)$  و  $(0, p^*) = (0, \log(b/a_0))$ . هذا المدار هو مثل ذلك  $a_0(1-x)e^p - b = 0$  كما يتضح من (2). باستخدام هذه المعادلة للتعبير عن  $p$  كدالة لـ  $x$  وإدراج النتيجة في المعادلة الأولى (4)، نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = bx - a_0x(1-x).$$

الحل

$$x(t) = \left[ \frac{1}{x(t_0)} e^{(a_0-b)(t-t_0)} + \frac{a_0}{a_0-b} (1 - e^{(a_0-b)(t-t_0)}) \right]^{-1}.$$

باختيار سبيل المثال  $x(t_0) = (1 - b/a_0)/2$ ، نحصل

$$\hat{x}_0(t) = \frac{1 - b/a_0}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_0(t) = \log \frac{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)} a_0/b}.$$

لنفترض الآن ذلك

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \phi(t))$$

مع  $a_0 > b$ ،  $\varepsilon$  صغيرة و  $\phi(t)$  وظيفة دورية مع  $\int_0^T \phi(t) dt = 0$ . يمكن كتابة هاميلتوني في النموذج

$$H(t, x, p) = H_0(x, p) + \varepsilon H_1(t, x, p).$$

$H_0(x, p)$  هو نفس (2)، باستثناء ذلك  $a_0$  يستبدل  $a$ .

$$H_1(t, x, p) = a_0 \phi(t) x(1-x)(e^p - 1).$$

مع  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$

$$C \simeq \min_{t_0} \Gamma(t_0), \quad \Gamma(t_0) = c_0 - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt, \quad \varepsilon \simeq 0$$

(عساف وآخرون ، 2008 ، المعادلة (24)). في الحالة الحالية ،  $(1 - \hat{x}_0)e^{\hat{p}_0} = b/a_0$  . اذا لدينا

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 - \varepsilon a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \hat{x}_0(t) [b/a_0 - 1 + \hat{x}_0(t)] dt \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t_0 + u/(a_0 - b)) \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du. \end{aligned}$$

$\Gamma(t_0)$  وبالتالي هي وظيفة دورية لل  $t_0$  مع  $\int_0^T \Gamma(t_0) dt_0 = 0$  . النظر في تحليل فورييه  $\phi(t)$  ،

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t},$$

مع  $\phi_0 = 0$  ، لأن المتوسط  $\phi(t)$  صفر و  $\phi_{-k} = \bar{\phi}_k$  (العدد المركب المترافق). لدينا بعد ذلك

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k i \omega u}{a_0 - b}} \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \frac{\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}}{\sinh\left(\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}\right)} \end{aligned}$$

(انظر الملحق). خاصة إذا  $\phi(t) = \cos(\omega t)$  ، نملك  $\phi_{\pm 1} = 1/2$  و  $\phi_k = 0$  و إلا. اذا لدينا

$$\Gamma(t_0) = c_0 + \varepsilon \frac{\pi \omega \cos(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}. \quad (17)$$

مثل (Escudero and Rodríguez، 2008) و (Assaf et al.، 2008) ، فإن النظام المضطرب هو من الشكل

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x}. \quad (18)$$

$\hat{x}_0(t)$  و  $\hat{p}_0(t)$  تعتمد فقط على  $t - t_0$  . لذا فإن وظيفة Melnikov هي

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_0}{\partial x} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt_0} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt_0} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dt_0}. \end{aligned}$$

باستخدام (17) نحصل

$$\mathcal{M}(t_0) = \frac{\pi \omega \sin(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}.$$

$\mathcal{M}(t_0)$  عبر 0 ل  $t_0 = k\pi/\omega$  (ك عدد صحيح). لذلك ، يوجد مدار heterocline على الأقل ل-  $\varepsilon$  صغير.

الحد الأدنى  $\Gamma(t_0)$  في (17) تم الحصول عليها ل  $t_0 = T/2$  إذا  $\varepsilon > 0$  و ل  $t_0 = 0$  إذا  $\varepsilon < 0$  . في كلتا الحالتين ، نحصل

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}, \quad \varepsilon \simeq 0, \quad (19)$$

كما أعلن في المقدمة. لاحظ أن (19) يشبه المعادلة (4.76) من (Kamenev، 2011) التي تم الحصول عليها من هاميلتوني مختلف قليلاً. إذا كانت  $\omega$  صغيرة ( $T$  كبيرة) بحيث  $a_0 \ll \omega$  (19) يوضح ذلك

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0), \quad (20)$$

وهو مستقل عن  $\omega$ . هذه الصيغة هي نفسها التي تم الحصول عليها في (1) مع:  $a = a_0(1 - |\varepsilon|)$

$$\frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} - 1 - \log \frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} = \frac{b}{a_0} - 1 - \log \frac{b}{a_0} - |\varepsilon|(1 - b/a_0) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \simeq 0.$$

كما هو الحال في "التقريب الأديباتي" لـ (عساف وآخرون ، 2008 ، القسم الرابع) ، من المتوقع أن تكون الصيغة (20) صالحة ليس فقط  $\varepsilon \simeq 0$  ، ولكن أيضا طالما  $a_0 \ll \omega$  وأن الجانب الأيمن من (20) موجب. لأن  $\sinh(x) \geq x \forall x \geq 0$  يمكننا ملاحظة أن القيمة التقريبية لـ  $C$  المعطاة بواسطة (20) تكون دائما أقل من تلك المعطاة بواسطة (19).

**حد التردد العالي.** لنفترض ذلك الآن  $\omega \gg a_0$  ، دائما مع  $\phi(t) = \cos(\omega t)$ . النظام (18) مكتوب

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p}(x, p) + a_0 \varepsilon \cos(\omega t) x(1 - x) e^p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}(x, p) - a_0 \varepsilon \cos(\omega t) (1 - 2x)(e^p - 1). \end{aligned}$$

مع طريقة Kapitsa (عساف وآخرون ، 2008 ، § III.B) ،

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad p(t) = Y(t) + \eta(t),$$

حيث  $X$  و  $Y$  متغيرات بطيئة ، بينما  $\xi$  و  $\eta$  تذبذبات صغيرة ولكنها سريعة. التعبيرات التي تتأرجح تعطي بسرعة:

$$\frac{d\xi}{dt} \simeq a_0 \varepsilon \cos(\omega t) X(1 - X) e^Y, \quad \frac{d\eta}{dt} \simeq -a_0 \varepsilon \cos(\omega t) (1 - 2X)(e^Y - 1).$$

نفترض أن  $X$  و  $Y$  ثابتان خلال تذبذب قصير مع  $T = 2\pi/\omega$ . نحصل

$$\xi(t) \simeq \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X) e^Y, \quad \eta(t) \simeq -\frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X)(e^Y - 1).$$

هذا يشير إلى التحول

$$\begin{aligned} x &= X + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X) e^Y \\ p &= Y - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \Phi(t, X, Y). \end{aligned}$$

$\Phi(t, X, Y)$  يتم اختياره بحيث يكون التحول تقريبا أساسيا ، وهذا يعني أن أقواس Poisson تقي بالشرط

$$\{x, p\} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial p}{\partial X} = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \quad (21)$$

لان

$$\begin{aligned} \{x, p\} &= \left[ 1 + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X) e^Y \right] \left[ 1 - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X) e^Y + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X) e^Y \right] \left[ 2 \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right], \end{aligned}$$

الشرط (21) مكتوب

$$\begin{aligned} \{x, p\} &= 1 - \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) (1 - 2X)^2 e^{2Y} + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \\ &\quad - 2 \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) X(1 - X) e^Y (e^Y - 1) + o(a_0^2/\omega^2) = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \end{aligned}$$

إذا لدينا

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 e^{2Y} + 2X(1 - X) e^Y (e^Y - 1)].$$

من أجل  $\Phi(t, X, 0) = 0$  ، يجب أن نختار

$$\Phi(t, X, Y) = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 (e^{2Y} - 1)/2 + X(1 - X)(e^Y - 1)^2].$$

دالة التوليد  $F_2(t, x, Y)$  هذا التحول ، مع

$$\frac{\partial F_2}{\partial Y} = X + o(a_0^2/\omega^2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = p + o(a_0^2/\omega^2),$$

اعطي من قبل

$$F_2(t, x, Y) = xY - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) x(1 - x)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \sin^2(\omega t) x(1 - x)(1 - 2x)(e^{2Y} - 1).$$

مع  $H(t, x, y) = h(t, X, Y)$  ، هاميلتوني جديد

$$h(t, X, Y) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

نملك  $T = 2\pi/\omega$ . بأخذ معنى هذا هاميلتوني ، تم إلغاء التعبير الثاني بسبب

$$\int_0^T \frac{\partial F_2}{\partial t} dt = 0$$

وبقايا هاميلتون فعالة فقط

$$\bar{H}(X, Y) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t, X, Y) dt.$$

حساب شاق باستخدام حقيقة ذلك  $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = 1/2$  يؤدي إلى

$$\bar{H}(X, Y) \simeq X(1 - e^{-Y}) \left[ a_0(1 - X)e^Y - b + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \left\{ -a_0 X(1 - X)^2 e^{2Y} + b(1 - X)(1 - 2X)e^Y - bX(1 - X)(e^Y - 1) - b(1 - 2X)^2 \right\} \right].$$

يتم الحصول على مدار heterocline المضطرب بفرض أن المصطلح بين قوسين معقوفين هو صفر. يربط هذا المدار  $(X_\varepsilon^*, 0)$  و  $(0, Y_\varepsilon^*)$  مع

$$X_\varepsilon^* \simeq (1 - b/a_0) \left[ 1 - \frac{b(a_0 - b) \varepsilon^2}{2\omega^2} \right], \quad Y_\varepsilon^* \simeq \log(b/a_0) + \frac{a_0(a_0 - b) \varepsilon^2}{2\omega^2}.$$

العمل على طول هذا المدار المتغير هو

$$C = \int_{X_\varepsilon^*}^0 Y dX.$$

آخر حساب مملة يؤدي في النهاية إلى

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0), \quad (22)$$

كما أعلن في المقدمة. لأن الوظيفة  $(1 - z)^2(1 + 2z)$  أقل من 1 خلال الفاصل الزمني  $0 < z < 1$ ، المصطلح التصحيحي لـ  $C$  دائماً أقل من  $\frac{a_0^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2}$ . إنه صغير لأنه  $a_0 \gg \omega$  عن طريق الفرضية. كما هو متوقع ، فإن السكان المعرضين لاضطراب عالي التردد لا يعتمد كثيراً على سعة هذا الاضطراب.

### 3. الحسابات العددية

**مضاعفات فلوك.**  $\lambda_1$  يمكن تقديرها مباشرة عن طريق حساب مضاعفات Floquet في المعادلة الرئيسية باستخدام برنامج مثل Scilab الذي يحل المعادلات التفاضلية العادية وبحسب القيم الذاتية للمصفوفات عدديًا.  $e^{\lambda_1 T}$  هو القيمة الذاتية مع ثاني أكبر جزء حقيقي ، الأول هو 1. يمكننا بعد ذلك رسم  $-\log(-\lambda_1)$  - وفقاً لـ  $N$  المنحدر من هذا المنحنى يوفر قيمة تقريبية للـ  $C$ .

**مدار هيتروكلين.** أما (Assaf وآخرون ، 2008) فيمكننا الحصول على المدار الذي يربط  $(x^*(t), 0)$  و  $(0, p^*(t))$  بطريقة اطلاق النار. نأخذ الشرط الأولي  $x^*(0)$  أعطيت بواسطة (15) وقيمة سالبة صغيرة جداً لـ  $p(0)$ . نغير هذه القيمة حتى نحصل على حل  $(x(t), p(t))$  التي تميل إلى أن تصبح دورية ، وهذا يعني  $x(t)$  قريبة من 0 و  $p(kT)$  قريب  $p^*(0)$  كبيرة  $k$  (ولكنها ليست كبيرة جداً لتجنب عدم الاستقرار العددي). يمكننا بعد ذلك استخدام التكامل (16) لحساب  $C$  عدديًا.

**المعادلة التفاضلية الجزئية.** من الممكن أيضًا حساب حل دوري  $S^*(t, x)$  من معادلة هاميلتون-جاكوبي (6) باستخدام الطرق العددية لنظرية حلول الزوجة. نحدد

- $\Delta t$  الخطوة الزمنية
- $\Delta x$  خطوة تقدير الفضاء
- $S_j^m$  تقريب  $S(m\Delta t, j\Delta x)$ ، حيث  $j$  و  $m$  أعداد صحيحة مثل هذه  $m \geq 0$  و  $0 \leq j \leq J$  مع  $J = 1/\Delta x$ .

يمكننا استخدام طريقة غودونوف

$$\frac{S_j^{m+1} - S_j^m}{\Delta t} + \mathcal{H}\left(m\Delta t, j\Delta x, \frac{S_j^m - S_{j-1}^m}{\Delta x}, \frac{S_{j+1}^m - S_j^m}{\Delta x}\right) = 0,$$

حيث هاميلتونيان  $\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+)$  اعطي من قبل

$$\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+) = \begin{cases} \min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\}, & p^- < p^+, \\ \max\{H(t, x, p); p^+ \leq p \leq p^-\}, & p^+ \leq p^- \end{cases}$$

(أوشر وشو ، 1991). لأن  $H(t, x, p)$  هو محدب بالنسبة لـ  $p$  ، التعبير الثاني الذي يحتوي على الحد الأقصى يساوي

$$\max\{H(t, x, p^+), H(t, x, p^-)\}.$$

أما بالنسبة للتعبير الأول الذي يتضمن الحد الأدنى ، فلاحظ مع (14) ذلك  $H(t, x, p)$  لديه الحد الأدنى فيما يتعلق ص إذا  $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$  ، أي إذا

$$p = p^\# = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a(t)(1-x)}.$$

إذا لدينا

$$\min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\} = \begin{cases} H(t, x, p^+), & p^- < p^+ \leq p^\#, \\ H(t, x, p^-), & p^\# \leq p^- < p^+, \\ H(t, x, p^\#), & p^- \leq p^\# \leq p^+. \end{cases}$$

للظروف عند الحواف ، نأخذ

$$S_0^m = 0, \quad (S_J^m - S_{J-1}^m)/\Delta x = K$$

مع قيمة عالية جداً لـ  $K$  . الخطوة الزمنية  $\Delta t$  يجب أن يكون صغيراً بما يكفي مقارنة بـ  $\Delta x$  حتى يتم استيفاء شرط Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). كشرط أولي اتخذنا

$$S(0, x) = x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x),$$

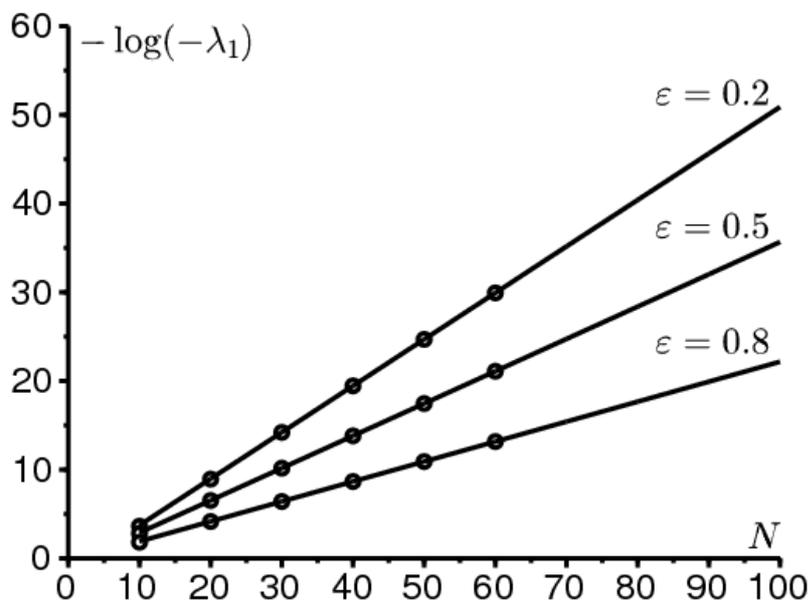
وهذا هو الحل الثابت المنتظم عندما  $a(t)$  يتم استبداله بمتوسط وقته. يمكننا أيضًا اختيار وظيفة ثابتة  $\sigma = S(0, x)$  مع negative سلبي للغاية ، ولكن التقارب نحو النظام الدوري يكون أبطأ. يجب أن يكون الثابت negative سالبًا بما يكفي لتجنب مشكلة عدم التقرد التي سبق ذكرها في القسم 2. بمجرد وصول حل المشكلة غير الثابتة إلى نظام دوري ، يمكننا تقدير

$$C = \min_t S^*(t, 0^+) - \min_{t,x} S^*(t, x).$$

**طريقة مونتي كارلو.** يمكن أيضًا تقدير متوسط وقت الانقراض بطريقة مونتي كارلو. نحن متوسط المحاكاة العشوائية. لاحظ أن خوارزمية Gillespie التي تستفيد من أوقات الانتظار الموزعة بشكل كبير لا يمكن استخدامها بسبب  $a(t)$  دورية. إذا زاد  $N$  ، يمكن أن يصبح وقت الانقراض فلكيًا. لا يتم عرض نتائج باستخدام هذه الطريقة.

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(2\pi t/T))$$

مع  $T = 1$  أسبوع. دعونا ننظر أولاً في الحالة  $a_0 = 20$  في الأسبوع و  $b = 5$  كل أسبوع. متوسط مدة الإصابة  $1/b = 1,4$  أيام. لقد فعلنا ذلك مع  $R_0 = a_0/b = 4 > 1$  و  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0) \simeq 0,636$ . يظهر الشكل 1  $-\log(-\lambda_1)$  بوصفها وظيفة من  $N$  ل  $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$  و  $N = 10, 20, \dots, 60$ ، محسوبة باستخدام مضاعفات Floquet. تتوافق الخطوط مع انحدار خطي لآخر 3 نقاط منحدرات هذه الخطوط، والتي هي تقديرات  $C$ ، هي  $0,524$ ،  $0,364$  و  $0,225$  إلى عن على  $\varepsilon = 0,2$ ،  $0,5$  و  $0,8$ .

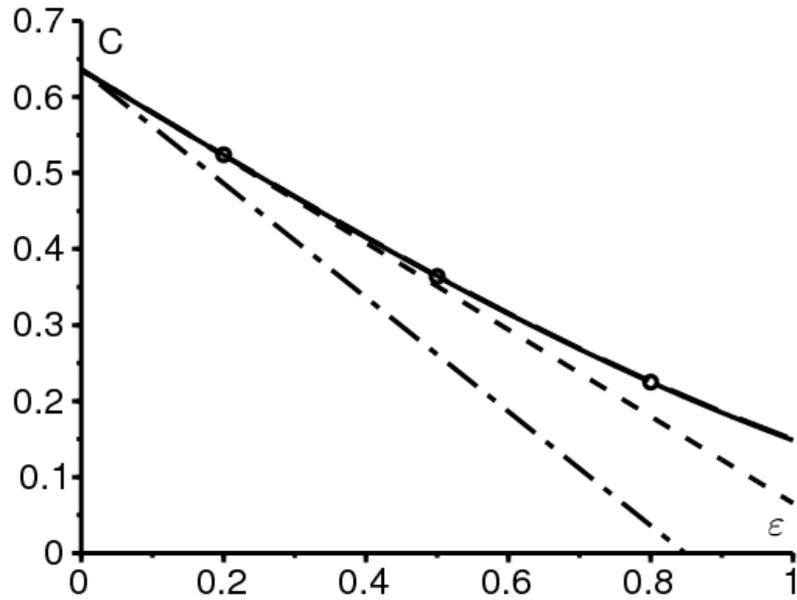


الشكل 1. حساب مضاعفات Floquet في المعادلة الرئيسية:  $-\log(-\lambda_1)$  بوصفها وظيفة من  $N$  ل  $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$  و  $N = 10, 20, \dots, 60$ . الرقم  $C$  هو ميل هذه الخطوط. قيمه المعامل:  $b = 5$ ،  $a_0 = 20$ ،  $T = 1$ .

$a_0$  و  $\omega = 2\pi/T$  هي من نفس الحجم من حيث الحجم في هذا المثال. إنها حالة وسيطة للتردد. لذلك نتوقع أن يعطي (19) تقريبًا جيدًا لـ  $C$  عندما تكون  $\varepsilon$  صغيرة. يبين الشكل 2 المنحنيات التالية كدالة للـ  $\varepsilon$  لـ  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ :

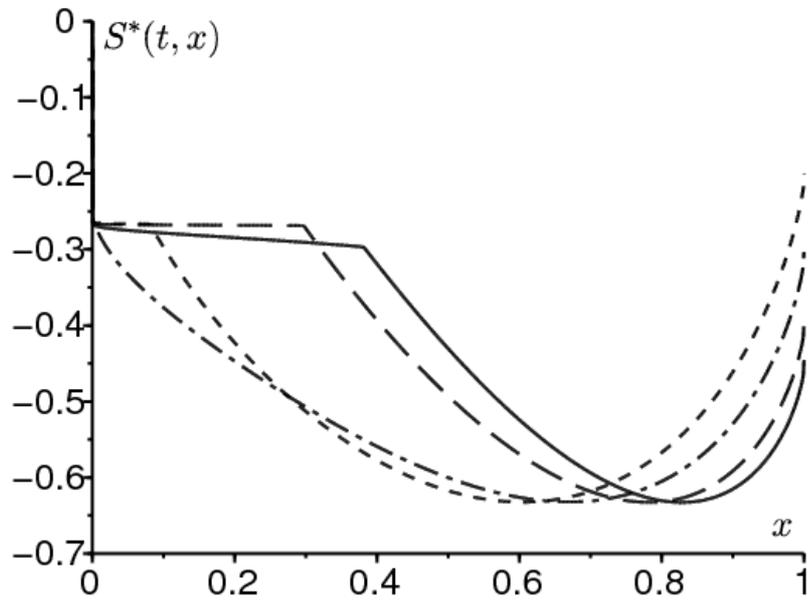
- خط صلب لـ  $C$  باستخدام مدار heterocline
- الخطوط المنقطة الطويلة لـ  $C$  باستخدام المعادلة التفاضلية الجزئية مع  $\Delta x = 0,002$  و  $\Delta t = 0,0002$  (لا يمكن تمييزه تقريبًا)
- ثلاث نقاط تمثل قيم  $C$  التي تم الحصول عليها في الشكل 1
- خطوط منقطة قصيرة للصيغة التقريبية (19)
- الخطوط المنقطة الطويلة والقصيرة لتقريب (20) بتردد منخفض.

يمكننا أن نرى أن الصيغة التقريبية (19) قريبة من  $C$  حتى عندما تكون  $\varepsilon$  صغيرة إلى حد ما.



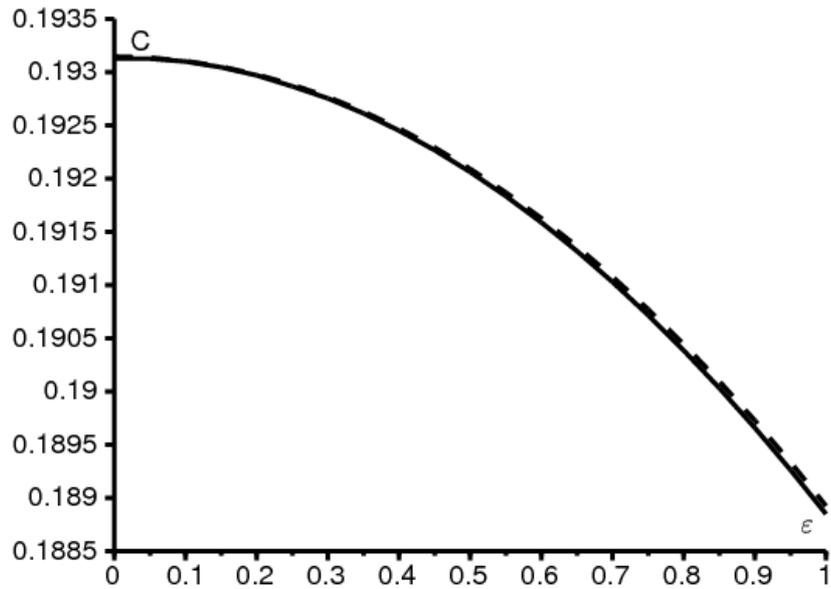
الشكل 2. التردد المتوسط: الرقم  $C$  محسوب باستخدام مدار heterocline [خط صلب] أو المعادلة التفاضلية الجزئية [خطوط منقطة طويلة] (لا يمكن تمييز الخطين تقريباً)، ومضاعفات Floquet كما في الشكل 1 [النقاط] والصيغة التقريبية (19) [الخطوط المنقطة القصيرة] وصيغة التردد المنخفض (20) [الخطوط المنقطة الطويلة والقصيرة]، اعتماداً على  $\varepsilon$ . نفس قيم المعلمات كما في الشكل 1.

يوضح الشكل 3 حلاً دورياً  $S^*(t, x)$  لمعادلة هاميلتون-جاكوبي، تم رسمها كدالة لـ  $x$  لقيم مختلفة من  $t$ ، متى  $\varepsilon = 0,5$ . لاحظ توقف الحل في  $x = 0$ . تكبير قريب  $x = 0$  سيظهر ذلك  $S^*(t, 0^+)$  هي في الواقع دورية في الوقت المناسب، لذا فإن شرط الحدود  $S^*(t, 0) = 0$  لا يمكن أن يرضي إلا بالمعنى الضعيف.

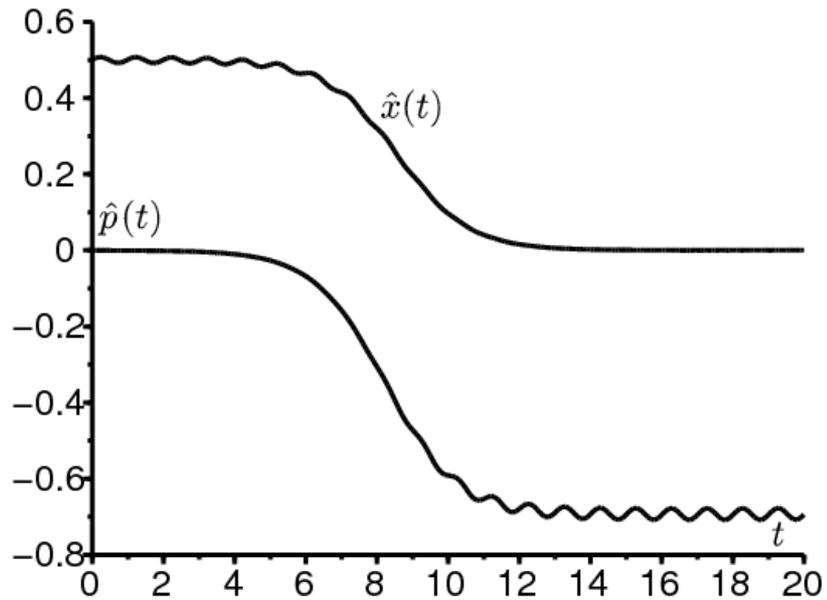


الشكل 3. حل دوري  $S^*(t, x)$  لمعادلة هاميلتون-جاكوبي، تم رسمها كدالة لـ  $x$  لـ  $t = 0$  (خط الصلبة)،  $t = T/4$  (خطوط منقطة طويلة)،  $t = T/2$  (خطوط منقطة قصيرة) و  $t = 3T/4$  (الخطوط المنقطة الطويلة والقصيرة). نفس قيم المعلمات كما في الشكل 1 و  $\varepsilon = 0,5$ .

يعتبر الشكل 4 مثلاً عالي التردد:  $a_0 = 2$  في الأسبوع و  $b = 1$  كل أسبوع. لقد فعلنا ذلك  $R_0 = 2$  و  $c_0 \simeq 0,1931$ . في هذه الحالة  $\omega \simeq 6,28$  في الأسبوع أكبر إلى حد ما من  $a_0$ . إلى عن على  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ، يتم حساب الرقم  $C$  باستخدام مدار heterocline وصيغة التردد العالي (22). الاتفاق جيد على كامل نطاق القيم. وأخيراً، يوضح الشكل 5 اتصال المدار  $(x^*(t), 0)$  و  $(0, p^*(t))$  لنفس قيم المعلمات مع  $\varepsilon = 0,1$ .



الشكل 4. نظام التردد العالي:  $C$  محسوب باستخدام مدار غير متجانس [الخط الصلب] وصيغة التردد العالي (22) [خط منقط] كدالة  $\varepsilon$ . قيمه المعامل:  $T = 1$ ،  $a_0 = 2$ ،  $b = 1$ .



الشكل 5. المكونات  $t \mapsto \hat{x}(t)$  و  $t \mapsto \hat{p}(t)$  من مدار heterocline الذي يربط بين الحلين الدوريين  $(0, p^*(t))$  و  $(x^*(t), 0)$ . نفس قيم المعلمات كما في الشكل 4 و  $\varepsilon = 0,1$ .

#### 4. ملاحظات

- يمكن الحصول على تقديرات أكثر دقة باستخدام محلول BKW المكرر

$$\pi_n(t) \simeq e^{-N S_0(t, n/N) - S_1(t, n/N)}.$$

عن طريق إدخال

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-N S_0(t, n/N) - \frac{\partial S_0}{\partial x}(t, n/N) - \frac{1}{2N} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(t, n/N) - S_1(t, n/N) - \frac{1}{N} \frac{\partial S_1}{\partial x}(t, n/N)}$$

وتعبير مماثل ل  $\pi_{n-1}(t)$  في (8) ، وبفصل شروط الدرجة العليا ، نحصل على معادلة هاميلتون-جاكوبي (10) لـ  $S_0(t, x)$  ومعادلة النقل

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left[ a(t)x(1-x)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} - bxe^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \right] \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ = a(t)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ 1 - 2x + \frac{x(1-x)}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] + be^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ -1 + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

إلى عن على  $S_1(t, x)$ . إذا كانت الوظيفة  $a(t)$  ثم دورية  $S_0(t, x)$  و  $S_1(t, x)$  يجب أن يحسب عددياً. إذا كانت الوظيفة  $a(t) = a$  هو ثابت، ثم عامل ما قبل الأس  $\lambda_1$  يتم الحصول عليها بطريقة التوسعات المقاربة المتصلة، على النحو التالي (Assaf and Meerson, 2010). أول  $S_0(x)$  تعطي بواسطة (3) ومعادلة  $S_1(x)$  يؤدي إلى

$$S_1(x) = \log(x\sqrt{1-x}) + \text{const.}$$

إذا لدينا

$$\pi_n \simeq \kappa \frac{e^{-NS_0(n/N)}}{\frac{n}{N} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}}$$

لثابت  $\kappa$ . إذا كانت  $n$  صغيرة،

$$\pi_n \simeq \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0) - nS_0'(0)} = \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0)} \left( \frac{a}{b} \right)^n. \quad (23)$$

بالنسبة للنظام (8)، يمكننا أيضاً استخدام التقريب

$$a(n-1)\pi_{n-1} - n(a+b)\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1} \simeq 0, \quad n \geq 1.$$

لدينا بعد ذلك

$$\pi_n \simeq \frac{\pi_1}{n} \frac{1 - (a/b)^n}{1 - a/b} \sim \frac{\pi_1}{n} \frac{(a/b)^n}{a/b - 1}.$$

يتزامن هذا مع (23) فقط إذا  $\pi_1 \simeq \kappa N e^{-NS_0(0)} \left( \frac{a}{b} - 1 \right)$  وأخيراً (9) يعطي

$$\lambda_1 \simeq \frac{-b\pi_1/(\kappa N)}{\int_0^1 \frac{e^{-NS_0(x)}}{x\sqrt{1-x}} dx} \simeq \frac{(b-a)x^* \sqrt{1-x^*} \sqrt{NS_0''(x^*)}}{e^{N[S_0(0) - S_0(x^*)]} \sqrt{2\pi}} = -\frac{(a-b)^2}{a e^{cN}} \sqrt{\frac{N}{2\pi}}$$

(عساف وميرسون، 2010، المعادلة (71)). إذا على سبيل المثال  $a = 20$ ،  $b = 5$  و  $N = 50$ ، فإن هذا التقدير أعلى بنسبة 2% فقط من قيمة  $\lambda_1$  تم الحصول عليها بواسطة برنامج حساب القيم الذاتية للمصفوفات الكبيرة كما هو موضح في الشكل 1. يمكن أن تمتد طريقة التوسعات المقاربة المتصلة إلى الحالة الدورية ولكن من غير المحتمل أن تؤدي إلى صيغة صريحة. • دعنا نكون وظيفة التوليد

$$\phi(t, z) = \sum_{n=0}^N P_n(t) z^n$$

مع  $0 \leq z \leq 1$ . نملك  $\phi(t, 1) = 1 \forall t$ . تظهر عملية حسابية بسيطة تبدأ من (7)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1-z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1.$$

في النظام شبه الثابت، من المتوقع أن

$$\phi(t, z) \simeq 1 + e^{\lambda_1 t} \psi(t, z)$$

مع  $\psi(t, 1) = 0$  دوري في  $t$  و

$$\lambda_1 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1-z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

$\lambda_1$  وبالتالي هي أيضاً أكبر قيمة ذاتية غير الصفر لهذه المشكلة مكافئ. يمكن أن يكون هذا وسيلة لإثبات النتائج المقاربة بدقة أكبر لـ  $N$  كبير. • مع  $P_n(t) = \mathcal{P}(t, x)$  و  $x = n/N$  وعن طريق تنفيذ تيلور لتوسيع 2 من المعادلة الرئيسية (7)، نحصل على معادلة Fokker-Planck أو معادلة الانتشار

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ (a(t)x(1-x) - bx)\mathcal{P} \right] + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (a(t)x(1-x) + bx)\mathcal{P} \right].$$

وبالمثل بالنسبة لمتوسط وقت الانقراض  $\tau_n(t) = \tau(t, x)$  مع  $x = n/N$  ، (13) يؤدي إلى المشكلة المصاحبة

$$-1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (a(t)x(1-x) - bx) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{2N} (a(t)x(1-x) + bx) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

ومع ذلك ، فإننا نعلم بالفعل في حالة معاملات زمنية مستقلة أن هذه المعادلات لا تعطي عادةً القيمة الصحيحة لـ  $C$  (Doering et al. ، 2005). تميل القيمة إلى أن تكون صحيحة فقط إذا  $R_0$  قريبة من 1. تظهر نفس المشكلة في النماذج الوبائية الأخرى. على سبيل المثال (ديكمان وآخرون ، 2012 ، ص 112-113) يستخدم تقريب الانتشار لتقدير  $C$  في نموذج SIR على الرغم من حقيقة أن  $R_0 \simeq 10$  في تطبيقهم. للحصول على تحليل BKW لنموذج الاستوكاستيك SIR ، انظر (Kamenev and Meerson ، 2008).  
 • الرقم  $1/C$  يمكن أن يسمى الحجم الحرج للمجتمع (Diekmann et al. ، 2012).

## الحساب المساعد

دعنا نظهر ذلك

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du = \frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}.$$

أولاً ،  $e^u/(1+e^u)^2 = 1/(4 \cosh^2(u/2))$  ، هذا جنباً إلى جنب مع التكامل بالأجزاء يدل على ذلك

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 2 \int_0^{+\infty} \cos(\lambda u) \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du \\ &= 2 \left[ \frac{-\cos(\lambda u)}{1+e^u} \right]_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda u)}{1+e^u} du \\ &= 1 - 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} \sin(\lambda u)}{1+e^{-u}} du. \end{aligned}$$

من خلال تطوير سلسلة من السلطة  $1/(1+e^{-u})$  ، نحصل

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 1 - 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)u} \sin(\lambda u) du \\ &= 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^2 + (n+1)^2}. \end{aligned}$$

يمكن حساب مجموع هذه السلسلة باستخدام صيغة أولير

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

وهو صحيح لأي عدد معقد  $z \neq n\pi$  مع  $n$  عدد صحيح). ياخذ  $z = i\pi\lambda$  . لان  $\sin(i\pi\lambda) = i \sinh(\pi\lambda)$  ، نحصل

$$\frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

ويتبع النتيجة.

شكر

تم تحفيز هذه المقالة من خلال مناقشة مع هانز ميتز بشأن حجم السكان الفعال في بيئة دورية خلال مؤتمر حول النماذج العشوائية في علم البيئة والتطور وعلم الوراثة في أنجيه في ديسمبر 2013.

المراجع البيولوجرافية

- Andersson H, Djehiche B (1998) A threshold limit theorem for the stochastic logistic epidemic. *J Appl Probab* 35 : 662–670
- Aronsson G, Kellogg RB (1978) On a differential equation arising from compartmental analysis. *Math Biosci* 38 : 113–122
- Assaf M, Kamenev A, Meerson B (2008) Population extinction in a time-modulated environment. *Phys Rev E* 78 : 041123
- Assaf M, Meerson B (2010) Extinction of metastable stochastic populations. *Phys Rev E* 81 : 021116
- Bacaër N, Ait Dads E (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter  $R_0$  in periodic population models. *J Math Biol* 65 : 601–621
- Barles G (1994) *Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi*. Springer, Berlin
- Barles G, Perthame B (1988) Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J Control Optim* 26 : 1133–1148
- Billings L, Mier-y-Teran-Romero L, Lindley B, Schwartz IB (2013) Intervention-based stochastic disease eradication. *PLoS ONE* 8(8) : e70211
- Diekmann O, Heesterbeek H, Britton T (2012) *Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics*. Princeton University Press, Princeton
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth–death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker–Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Escudero C, Rodríguez JA (2008) Persistence of instanton connections in chemical reactions with time-dependent rates. *Phys Rev E* 77 : 011130
- Hethcote H (1973) Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model. *Bull Math Biol* 35 : 607–614
- Kamenev A (2011) *Field theory of non-equilibrium systems*. Cambridge University Press, Cambridge
- Kamenev A, Meerson B (2008) Extinction of an infectious disease : a large fluctuation in a nonequilibrium system. *Phys Rev E* 77 : 061107
- Mitake H (2009) Large time behavior of solutions of Hamilton–Jacobi equations with periodic boundary data. *Nonlinear Anal* 71 : 5392–5405
- Nasell I (2011) Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Osher S, Shu CW (1991) High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton–Jacobi equations. *SIAM J Numer Anal* 28 : 907–922
- Ovaskainen O, Meerson B (2010) Stochastic models of population extinction. *Trends Ecol Evol* 25 : 643–652
- Rabinowitz PH (1994) Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system. *Ergod Theor Dyn Syst* 14 : 817–829
- Roquejoffre JM (2001) Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton–Jacobi equations. *J Math Pures Appl* 80 : 85–104
- Soner HM (1986) Optimal control with state-space constraint I. *SIAM J Control Optim* 24 : 552–561