

# 周期的環境における流行のSIS確率モデルについて

J. Math. Biol. 71 (2015) 491–511  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01265563>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement、フランス、ボンディ  
ピエール大学、マリーキュリー大学、  
レコルデリエ、パリ、フランス [nicolas.bacaer@ird.fr](mailto:nicolas.bacaer@ird.fr)

## まとめ

接触率  $a$ 、治癒率  $b < a$  および個体数  $N$  の流行のSIS確率モデルでは、絶滅までの平均時間  $\tau$  は次のようになります。 $(\log \tau)/N$  に収束する  $c = b/a - 1 - \log(b/a)$   $N$  が無限大に収束するとき。この記事では、接触率が平均が  $b$  より大きい周期関数である、より現実的なケースを検討します。だから  $(\log \tau)/N$  は、周期的なハミルトンヤコビ方程式にリンクされている新しい限界  $C$  に収束します。接触比が大きい周波数で、または非常に小さい周波数で小振幅を有する余弦関数である場合、について得られた近似式であることができる  $C$  解析のAssafら、2008、PHYS改訂E 78 [のよう、041123]。これらの結果は、数値シミュレーションによって示されています。

## 1.はじめに

Nåsellによる本 (2011) のように、環境が一定であると想定されている場合、流行のSIS確率モデルが詳細に研究されています。接触率  $a$ 、治癒率  $b < a$  および母集団サイズ  $N$  の場合、絶滅までの平均時間  $\tau$  (たとえば、感染者から) は次のようになります。

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} c = b/a - 1 - \log(b/a) > 0 \quad (1)$$

(Nåsell、2011、定理12.1)。他の参考文献の中でも、(Andersson and Djehiche、1998)、(Doering et al.、2005)、および (Assaf and Meerson、2010) も参照してください。後者は、ブリルアン、クレイマース、ウェンツェルの方法を使用します[BKW]。確率  $P_n(t)$  有する  $N \geq 1$  時間感染さ  $i$  が第一準定常分布の接近  $\pi_n$ 。私たちは定義します  $x = n/N$  だから  $0 \leq x \leq 1$ 。とき  $N$  が無限大に収束し、  
–  $(\log \pi_n)/N$  連続関数に近づく  $S(x)$  定常ハミルトン-ヤコビ方程式

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

と

$$\begin{aligned} H(x, p) &= ax(1-x)(e^p - 1) + bx(e^{-p} - 1) \\ &= x(1 - e^{-p})[a(1-x)e^p - b] \end{aligned} \quad (2)$$

(Assaf and Meerson、2010、(12) および§IV.D.3)。具体的には、輪郭線の分岐  $H = 0$  と  $a(1-x)e^p - b = 0$  式につながる

$$S(x) = x \log(b/a) + x + (1-x) \log(1-x) + \text{constante}. \quad (3)$$

この関数には最小値があります  $x = x^* = 1 - b/a$ 、 $x^* > 0$  なら  $b < a$ 。やつと

$$c = S(0) - S(x^*)$$

ポテンシャル井戸の  $x = 0$  における 底と端の間の高さ  $S(x)$ 。同様に、ハミルトニアンシステム

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (4)$$

接続する異斜軌道を持っています  $(x^*, 0) = (1 - \frac{b}{a}, 0)$  と  $(0, p^*) = (0, \log \frac{b}{a})$ 。数  $c$  はアクションに等しい

$$\int_{x^*}^0 p dx$$

この軌道に沿って。BKW法は、物理学または個体群生物学の他の出生および死亡プロセスに使用されています (Ovaskainen and Meerson、2010年; Kamenev、2011年)。

分岐と消滅を伴う化学反応の彼らの研究 (Escudero and Rodríguez、2008) は、時間の周期的環境が平均消滅時間の中心的な役割を果たすヘテロクライン軌道にどのように影響するかを示しました。

(Assaf et al.、2008) は、同じモデルをより詳細に研究し、特に、小振幅、低周波数、または高周波数の周期的外乱による平均消滅時間の補正を計算しました。これらの著者は、準安定性を持つ他の出生および死亡プロセスに適用できる一般式を取得しています。さらに、(Billings et al.、2013、図7) は、周期的なSIS確率モデルのモンテカルロシミュレーションを示しています。

ここでの目的は、(Assaf et al.、2008) で使用されるBKW法を、平均が  $b$  より大きい  $T$  周期の接触率をもつSIS流行モデルに適用することです。そのようなモデルは、例えば、免疫を与えない細菌感染の広がりを表すことができる。伝播は、週に1回 (週末が原因)、または年に1回 (休日と季節が原因) の周期で行われます。これはもちろん、より現実的なモデルへの第一歩にすぎません。

セクション2では、非公式な計算により、平均消滅時間が  $\tau$  (例えば、時刻0に感染した人から始まる) は、

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C = \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+) - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x). \quad (5)$$

ここ、 $S^*(t, x)$  解である  $T$  の  $-$  périodique の式粘度ハミルトン・ヤコビは、

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \quad (6)$$

のために  $0 < x < 1$  混合エッジ条件ディリクレ-「拘束状態」

$$S(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty.$$

$S(t, x)$   $x = 0$  付近でゼロに等しくなってはいけません。縁の状態は、粘度の意味で理解する必要があります (Barles、1994)。  $S^*(t, 0^+) = 0$  と等しくない場合があります。ハミルトニアン  $H(t, x, p)$  定数  $c$

ラメータを除いて、(2)と同じです。  $a$  に置き換えられます  $a(t)$ 。もし

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t)), \quad \omega = 2\pi/T, \quad a_0 > b, \quad |\varepsilon| \leq 1,$$

私たちは定義します  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$ 。 (Assaf et al.、2008)の方法に従って、セクション2は

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}$$

もし  $\varepsilon$  0に近い、

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0)$$

もし  $\omega \ll a_0$  と

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0)$$

高周波限界で  $\omega \gg a_0$ 。私たちはそれを推測することができます  $C > 0$  限り  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ 。  $C$  おそらく常により少ない  $c_0$  なぜなら、季節変動は感染症の絶滅を助長する傾向があるからです。これは、より正確には、周期的環境がSISモデルの場合、分岐および消滅モデルで得られたものと同様の平均消滅時間の指数関数的減少をもたらすことを示唆しています (Assaf et al.、2008)。セクション3では、これらの結果を数値シミュレーションで説明します。セクション4では、いくつかの注釈を追加しています。

## 2.分析計算

### 2.1ハミルトン・ヤコビ偏微分方程式

**マスター方程式とフロケ理論。**  $N$ は総人口であり、一定であると仮定されます。あります

- $S(t)$  健康な人
- $I(t)$  感染者

時間  $t$  で、  $N = S(t) + I(t)$ 。もし  $I(t) = n$ 、

- 確率で  $bndt + o(dt)$ 、人が癒す
- 確率で  $a(t)n(1 - n/N)dt + o(dt)$ 、人が感染している

間  $t$  と  $t + dt$  の。だから  $a(t)$  は接触率、  $b$  は治癒率です。私たちは  $a(t)$  は正の連続  $T$  周期関数で、

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt - b > 0,$$

言い換えれば

$$R_0 = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt}{b} > 1.$$

の生物学的解釈について  $R_0$ 、cf. (BacaërおよびAit Dads、2012年)。(Hethcote、1973)は、 $r > 0$  (つまり  $R_0 > 1$ ) は、この平均場方程式の解が周期的かつ正の関数に収束するために必要かつ十分な条件です。

$$\frac{di}{dt} = a(t)i(1-i) - bi.$$

そうでなければ、解はゼロに収束します。

もし  $P_n(t)$  確率である  $I(t) = n$ 、私たちは持っています

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt} = & a(t)(n-1)(1-(n-1)/N)P_{n-1} - [a(t)n(1-n/N) + bn]P_n \\ & + b(n+1)P_{n+1} \end{aligned} \quad (7)$$

のために  $0 \leq n \leq N$ 。ここ、 $P_{-1} = 0$  と  $P_{N+1} = 0$ 。もちろん

$$\sum_{n=0}^N P_n(t) = 1.$$

システム (7) も書かれています

$$\frac{dP}{dt} = M(t)P,$$

どこに  $P(t)$  ベクトルです  $(P_n(t))_{0 \leq n \leq N}$  と  $M(t)$  サイズ  $N+1$  の正方行列です

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b - a(t)(1 - \frac{1}{N}) & 2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(t)(1 - \frac{1}{N}) & -2b - 2a(t)(1 - \frac{2}{N}) & 3b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -bN \end{pmatrix}.$$

この行列はブロック構造を持っています

$$M(t) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & Q(t) \end{array} \right),$$

どこに  $Q(t)$  サイズの正方行列である  $N$ 。  $X(t)$  と  $Y(t)$  の行列は

$$\frac{dX}{dt} = M(t)X, \quad X(0) = I_{N+1}$$

$$\frac{dY}{dt} = Q(t)Y, \quad Y(0) = I_N.$$

$I_N$  サイズの単位行列である  $N$ 。フロケ乗数  $M(t)$ 、つまりモノドロミー行列の固有値  $X(T)$  は  $\{\mu_0 = 1\}$  とフロケ乗数  $Q(t)$ 。マトリックス  $Q(t)$  は協調的です。対角線の外側の係数は正またはゼロです。対角線の真上と真下の要素はすべて厳密に正であるため、この行列も既約です。したがって、すべての要素  $Y(t)$  厳密に肯定的です  $t > 0$ 。ペロンとフロベニウスの定理によれば、固有値は  $\mu_1$  の  $Y(T)$  最大の実数部は厳密に正の実数であり、関連する固有空間は次元1です。さらに、

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1)Q(t) = (-b \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

$Q(t)$  「逃亡」と  $0 < \mu_1 < 1$  (Aronsson and Kellogg, 1978)。だから  $\lambda_1 = (\log \mu_1)/T < 0$ 。ベクトル  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  定常状態です。  $P(t)$  次の場合、このベクトルに収束します  $t \rightarrow +\infty$ 。ここでの目的は、  $N$  が大きい場合に、  $\lambda_1$  と  $0$ 。

どちらの  $N$  固有ベクトル  $X(T)$  固有値に関連付けられています  $\mu_1 = e^{\lambda_1 T}$ 。  $v$  を選択できるので  $v_n > 0$  のために  $1 \leq n \leq N$ 。だから

$$X(T)v = e^{\lambda_1 T} v.$$

フロケの理論と同様に、

$$\pi(t) = e^{-\lambda_1 t} X(t)v.$$

だから

$$\frac{d\pi}{dt}(t) = -\lambda_1 \pi(t) + M(t)\pi(t).$$

もつと

$$\pi(T) = e^{-\lambda_1 T} X(T)v = v = \pi(0).$$

だから  $\pi(t)$  さ  $T$  は  $-périodique$ 。もし  $\pi(t) = (\pi_n(t))_{0 \leq n \leq N}$ 、その後

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = a(t)(n-1)(1 - (n-1)/N)\pi_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + b n]\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1}. \quad (8)$$

これらの方程式を合計すると、

$$\lambda_1 \sum_{n=0}^N \pi_n(t) + \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0.$$

だから

$$\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=0}^N \pi_n(0).$$

でも  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t)$  さ  $T$  は  $-périodique$ 。したがって  $\sum_{n=0}^N \pi_n(0) = 0$  と  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0$  すべてのために  $t$ 。だから

$$\pi_0(t) = - \sum_{n=1}^N \pi_n(t).$$

しかし (8) と  $n = 0$  それも示しています

$$\lambda_1 \pi_0(t) + \frac{d\pi_0}{dt} = b \pi_1(t).$$

なぜなら  $\pi_0(t)$  周期的であり、統合することで

$$\lambda_1 = b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\int_0^T \pi_0(t) dt} = -b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt}. \quad (9)$$

**BKW解とハミルトン・ヤコビ方程式。**  $N$ が大きい場合は、BKWソリューションを探しましょう

$$\pi_n(t) \simeq e^{-NS(t,x)}$$

のために  $1 \leq n \leq N$ 、どこ  $x = n/N$  と  $S(t, x)$  は、 $t$  と  $x$  の連続関数です。  $0 < x < 1$ 、これは  $t$  に関して  $T$  周期的です。だから

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_n}{dt} &\simeq -N \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) e^{-NS(t,x)}, \\ \pi_{n+1}(t) &\simeq e^{-NS(t, x + \frac{1}{N})} \simeq e^{-NS(t,x) - \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}, \quad \pi_{n-1}(t) \simeq e^{-NS(t,x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}. \end{aligned}$$

私たちは定義します  $\alpha(t, x) = a(t)x(1-x)$  と  $\beta(x) = bx$ 。 (8) は

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = N\alpha(t, x - 1/N)\pi_{n-1} - N[\alpha(t, x) + \beta(x)]\pi_n + N\beta(x + 1/N)\pi_{n+1}.$$

支配的な表現のみを保持することにより、  $\alpha(t, x - 1/N) \simeq \alpha(t, x)$  と  $\beta(x + 1/N) \simeq \beta(x)$  得る

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} \simeq N\alpha(t, x)[\pi_{n-1} - \pi_n] + N\beta(x)[\pi_{n+1} - \pi_n].$$

$\lambda_1$  おそらく指数関数的に小さいです。左側が見逃せません。BKWフォームを挿入し、  $N e^{-NS(t,x)}$ 、ハミルトン・ヤコビ方程式を取得します

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a(t)x(1-x) \left[ e^{\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] + bx \left[ e^{-\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] = 0 \quad (10)$$

のために  $0 < x < 1$ 。これは、周期的なハミルトニアンを持つ (6) の形式です。  $H(t, x, p)$  (2) で与えられ、  $a(t)$  代わる  $a$ 。 (10) などの方程式は通常、次の形式の漸近解を持ちます

$S(t, x) = -Et + \Sigma(t, x)$  どこに  $\Sigma(t, x)$  ある  $T$  がに関して  $T$ -périodique  $T$  および  $E$  は定数です。ただし、ここでは、  $E = 0$  興味深い：それらは、以下のセクション2.2のヘテロクリニック軌道に対応します。

**エッジ条件。** なぜなら  $H(t, 0, p) = 0$ 、私たちは持っています  $\frac{\partial S}{\partial t}(t, 0) = 0$ 。だから  $S(t, 0)$  定数です  $S_0$   $t$  に依存しない。(10) には1次の偏微分のみが含まれるため、その解は加法定数内に定義されます (固有ベクトル  $\lambda$  が  $X(T)$  乗法定数内で定義されます)。だから私たちは選ぶことができます  $S_0 = 0$ 、したがってディリクレ条件：

$$S(t, 0) = 0 \quad \forall t. \quad (11)$$

さらに、  $\pi_n(t) = 0$  のために  $n > N$  そして、一定の環境における式 (3) は、  $|S(1)| < +\infty$  ながら  $\frac{dS}{dx}(1) = +\infty$ 、私たちはそれを課します

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty \quad \forall t. \quad (12)$$

この状態をエッジに提示する別の方法は、「状態制約」です。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

もし  $x = 1$ 。この状態は  $x = 1$  で

$$\frac{\partial H}{\partial p}\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

(ソナー、1986)。しかし、

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p},$$

この式は正またはゼロです  $x = 1$  もしそうなら  $p = +\infty$ 、(12) のように。

**ハミルトニアン**の性質。  $H(t, x, p)$   $p$  で凸です

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p + bxe^{-p} \geq 0.$$

また、  $H(t, x, p) \rightarrow +\infty$  もし  $|p| \rightarrow +\infty$  それを条件として  $0 < x < 1$ 。ただし、このプロパティは、 $x = 0$  ともなければ  $x = 1$ 。私たちは持っています  $H(t, x, 0) = 0$ 。ラグランジアンは

$$L(t, x, v) = \max_p \{pv - H(t, x, p)\}.$$

もし  $0 < x < 1$ 、私たちは持っています

$$L(t, x, v) = p_*v - H(t, x, p_*)$$

と  $p_*$  のユニークなソリューション

$$v = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p_*) = a(t)x(1-x)e^{p_*} - bxe^{-p_*}.$$

これは、次数2の多項式です。  $e^{p_*}$ 。それは与える

$$\begin{aligned} L(t, x, v) &= p_*v - a(t)x(1-x)(e^{p_*} - 1) - bx(e^{-p_*} - 1) \\ &= v \log \left( \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2a(t)x(1-x)} \right) + a(t)x(1-x) + bx \\ &\quad - \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2} - \frac{2a(t)x(1-x)bx}{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}. \end{aligned}$$

のために  $x = 1$ 、私たちは持っています

- $L(t, 1, v) = +\infty$  もし  $v > 0$
- $L(t, 1, 0) = b$
- $L(t, 1, v) = -v \log(-v/b) + v + b$  もし  $v < 0$ 。

のために  $x = 0$ 、私たちは持っています

- $L(t, 0, v) = +\infty$  もし  $v \neq 0$
- $L(t, 0, 0) = 0$ 。

ただし、 $x$ が0に近い場合は、  $L(t, x, v) \sim -v \log x$ 。だから  $\eta > 0$  小型であらゆる機能に対応  $\xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1])$  と  $\xi(\theta) = 0$ 、私たちは持っています

$$\int_{\theta}^{\theta+\eta} L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds \simeq - \int_{\theta}^{\theta+\eta} \frac{d\xi}{ds}(s) \log \xi(s) ds = - \int_0^{\xi(\theta+\eta)} \log \xi d\xi,$$

これは無限ではありません。

ハミルトン・ヤコビ方程式の解。与えられた初期条件について  $S_0(x)$ 、関数

$$S(t, x) = \inf \left\{ \int_{\theta}^t L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds + 1_{\theta=0} S_0(\xi(\theta)); \right. \\ \left. 0 \leq \theta \leq t, \xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1]), \theta = 0 \vee \xi(\theta) = 0, \xi(t) = x \right\}$$

(10) の粘性解であり、エッジに混合条件 (11) - (12) があり、 $S(0, x) = S_0(x)$  (Barles, 1994)。それは出口時間問題の価値関数です  $x = 0$  「状態制約」  $x = 1$ 。定期的な解決策  $S^*(t, x)$  したがって、(10) - (11) - (12) は、上記の進化演算子の固定小数点によって与えられます。

$S^*(0, x) = S^*(T, x)$ 。(Roquejoffre, 2001) と (Mitake, 2009) は、ディリクレタイプのエッジに条件がある類似の周期的ハミルトンヤコビ方程式を研究しました。ただし、一意性がないことに注意してください。関連する問題については、cf. (Barles and Perthame, 1988)。確かに、 $a(t) = a_0$  一定です。この場合、2つのタイプの定常粘度ソリューションがあります。  $S^*(x)$ 。

- 一方で、形式の解決策があります

$$x \log(b/a_0) + x + (1 - x) \log(1 - x) + \gamma$$

定数で  $\gamma \leq 0$ 、定数  $\gamma$  のみが異なります。ソリューション  $\gamma = 0$  古典的な意味で  $x = 0$  のエッジで条件をチェックする唯一のものです。

- 一方、形式の解決策があります

$$\min\{0, x \log(b/a_0) + x + (1 - x) \log(1 - x) + \gamma\}$$

$\gamma$  が一定の場合  $0 < \gamma \leq c_0$ 。これらのソリューションは、同様にゼロに近いの  $x = 0$  と与えていない  $C$  を。

エッジに混合条件 (11) - (12) がある周期方程式 (10) の場合、粘性の解があると推測できます。

- これらは  $t$  に関して  $T$  周期的であり、
- ない同じほぼゼロの  $x = 0$ 、
- 定数だけが異なる (したがって同じ  $C$  を与える)。

私たちがBKWソリューションとして選択するのは、このようなソリューションです。図3が示唆するように、解は  $x = 0$  で連続的ではない可能性があるため、 $x = 0$  での境界条件は粘度の意味で理解する必要があります。

**の行動  $\lambda_1 N$  が大きい場合。** (9) に戻ると、

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} = \frac{\log b}{N} + \frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) - \frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right).$$

私たちは持っています

$$\pi_1(t) \simeq e^{-NS^*(t, 1/N)} \simeq e^{-NS^*(t, 0^+)}$$

以下のための  $N$  大。だから

$$\frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+)$$



積分の漸近評価のためのラプラスの公式のため。同様に、 $\pi_n(t) \simeq e^{-NS^*(t,n/N)}$ 、私たちは持っています

$$\frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x)$$

と

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -C$$

$C$  (5) によって与えられます。私たちはそれを推測することができます  $C > 0$  もしそうなら  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ 。

**平均消滅時間。** 時間  $t$  に感染した  $n$  人 から開始し、平均消滅時間  $\tau_n(t)$  システムの  $T$ -定期的な ソリューションです

$$-1 = \frac{d\tau_n}{dt} + bn\tau_{n-1} - (a(t)n(1 - n/N) + bn)\tau_n + a(t)n(1 - n/N)\tau_{n+1} \quad (13)$$

のために  $1 \leq n \leq N$ 、 $\tau_0(t) = 0$ 。このシステムは転置行列を含みます  $Q^*(t)$  マトリックスの  $Q(t)$ 。私たちは定義します

- $\hat{\tau}(t) = (\tau_n(t))_{1 \leq n \leq N}$
- $\hat{\pi}(t) = (\pi_n(t))_{1 \leq n \leq N}$
- $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  実際のベクトルの通常のスカラー積。

だから

$$\lambda_1 \hat{\pi} + \frac{d\hat{\pi}}{dt} = Q(t)\hat{\pi}, \quad -\mathbf{1} = \frac{d\hat{\tau}}{dt} + Q^*(t)\hat{\tau}.$$

と

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle = \left\langle \frac{d\hat{\pi}}{dt}, \hat{\tau} \right\rangle + \left\langle \hat{\pi}, \frac{d\hat{\tau}}{dt} \right\rangle = \langle Q(t)\hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \lambda_1 \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle - \langle \hat{\pi}, Q^*(t)\hat{\tau} \rangle.$$

との表現  $Q(t)$  と  $Q^*(t)$  お互いをキャンセルします。  $T$ -周期性を統合して使用することにより、 $\hat{\pi}(t)$  と  $\hat{\tau}(t)$ 、私たちは得る

$$-\lambda_1 = \frac{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle}{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle dt}.$$

これは、例えば感染者から時間0に始まる平均消滅時間  $\tau$  が、 $-1/\lambda_1$  :

$$\frac{\log(\tau)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C.$$

この本質的に非公式な分析は、一定の環境でのSISモデルと同様に、厳密な形式で行うことができると推測できます (Nåsell, 2011年)。

## 2.2ヘテロクライン軌道

**一般的なケース。** ハミルトン-ヤコビ方程式 (6) は、光線追跡によって少なくとも局所的に、つまりハミルトニアンシステム (4) と方程式を同時に解くことによって解くことができることを思い出してください。

$$\frac{dz}{dt} = p(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t)) - H(t, x(t), p(t))$$

初期状態で  $x(0) = x_0$ 、 $p(0) = \frac{\partial S}{\partial x}(0, x_0)$ 、 $z(0) = S(0, x_0)$  なので、 $z(t) = S(t, x(t))$ 。以下 (Assaf et al.、2008) では、ハミルトニアンシステムをさらに詳しく見てみましょう (4)。この場合、

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) &= a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p}, \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) &= a(t)(1-2x)(e^p - 1) + b(e^{-p} - 1). \end{aligned} \quad (14)$$

まず、次のような自明でない  $T$  周期解を探しましょう  $x \equiv 0$  と

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, 0, p) = -(a(t) - be^{-p})(e^p - 1).$$

と  $p = \log(1 + q)$ 、簡単に解けるベルヌーイ微分方程式を得る。これは  $T$  周期解を与えます

$$p^*(t) = \log \left( 1 + \left[ \frac{e^{-bt + \int_0^t a(s) ds}}{e^{p^*(0)} - 1} + \int_0^t a(s) e^{-b(t-s) + \int_s^t a(u) du} ds \right]^{-1} \right),$$

どこに

$$p^*(0) = \log \left( 1 + \frac{1 - e^{-bT + \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(s) e^{-b(T-s) + \int_s^T a(u) du} ds} \right).$$

周期解  $(0, p^*(t))$  不安定です。確かに、 $x(t) = \tilde{x}(t)$  と  $p(t) = p^*(t) + \tilde{p}(t)$  方程式を線形化することで、

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)} & 0 \\ 2a(t)(e^{p^*(t)} - 1) & -a(t)e^{p^*(t)} + be^{-p^*(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

フロケ乗数は

$$f = \exp \int_0^T [a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)}] dt$$

と  $1/f$ 、それゆえ不安定性。不安定性は、ハミルトニアンフローの作用下での位相空間  $(x, p)$  の「ボリューム」の不変性に関するリウビルの定理の結果としても見ることができます。

次に、次のような自明ではない  $T$  周期解を探します。  $p \equiv 0$  と

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, 0) = a(t)x(1-x) - bx.$$

これは、SISモデルの平均場方程式です。非ゼロの  $T$  周期解は、

$$x^*(t) = \left( \frac{1}{x^*(0)} e^{bt - \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t a(u) e^{b(t-u) - \int_u^t a(s) ds} du \right)^{-1}$$

と

$$x^*(0) = \frac{1 - e^{bT - \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(u) e^{b(T-u) - \int_u^T a(s) ds} du}. \quad (15)$$

周期解  $(x^*(t), 0)$  また、不安定です。確かに、 $x(t) = x^*(t) + \tilde{x}(t)$  と  $p(t) = \tilde{p}(t)$  方程式を線形化することで、

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)(1 - 2x^*(t)) - b & a(t)x^*(t)(1 - x^*(t)) + bx^*(t) \\ 0 & -a(t)(1 - 2x^*(t)) + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Floquetの乗数は再び互いに逆になるため、不安定になります。

セクション1から、一定の環境では、静止点を接続する位相平面  $(x, p)$  にヘテロクライン軌道があることを思い出してください。 $(x^*, 0) = (1 - b/a, 0)$  と  $(0, p^*) = (0, \log(b/a))$  もし  $a > b$ 。

(Escudero and Rodríguez, 2008) は、少なくとも周期的摂動の小さな振幅に対して、同一粒子の分岐と消滅の周期的モデルに対して同様の異斜軌道を発見しました。ですから、ヘテロクライン軌道の存在を期待できます  $(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$ 、定期的なソリューションを接続します  $(x^*(t), 0)$  と  $(0, p^*(t))$ 。存在はおそらく変分的アプローチを使用して証明することができます (Rabinowitz, 1994)。この特別な軌道は、発射法によってデジタルで取得できます。(Assaf et al., 2008, 式 (20)) によれば、

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{p}(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) - H(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) \right] dt. \quad (16)$$

この積分は数値的に評価できます。

**破壊的な方法。** もし  $a(t)$  定数です  $a_0$ 、その後  $(\hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))$  静止点を結ぶ異斜軌道です  $(x^*, 0) = (1 - b/a_0, 0)$  と  $(0, p^*) = (0, \log(b/a_0))$ 。この軌道は  $a_0(1 - x)e^p - b = 0$  (2) でわかるように、この方程式を使用して  $p$  を  $x$  の関数として表し、その結果を (4) の最初の方程式に挿入すると、次のようになります。

$$\frac{dx}{dt} = bx - a_0x(1 - x).$$

解決策は

$$x(t) = \left[ \frac{1}{x(t_0)} e^{(a_0-b)(t-t_0)} + \frac{a_0}{a_0 - b} (1 - e^{(a_0-b)(t-t_0)}) \right]^{-1}.$$

例えば選ぶことによって  $x(t_0) = (1 - b/a_0)/2$ 、私たちは得る

$$\hat{x}_0(t) = \frac{1 - b/a_0}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_0(t) = \log \frac{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)} a_0/b}.$$

今それを仮定します

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \phi(t))$$

と  $a_0 > b$ 、 $\varepsilon$  小さくて  $\phi(t)$  次のような  $T$  周期関数  $\int_0^T \phi(t) dt = 0$ 。ハミルトニアンは次の形式で書くことができます

$$H(t, x, p) = H_0(x, p) + \varepsilon H_1(t, x, p),$$

どこに  $H_0(x, p)$  (2) と同じですが、 $a_0$  代わる  $a$ 、そしてどこ

$$H_1(t, x, p) = a_0 \phi(t) x(1-x)(e^p - 1).$$

もし  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$ 、その後

$$C \simeq \min_{t_0} \Gamma(t_0), \quad \Gamma(t_0) = c_0 - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt$$

のために  $\varepsilon \simeq 0$  (Assaf et al.、2008、式 (24))。この場合、 $(1 - \hat{x}_0)e^{\hat{p}_0} = b/a_0$ 。だから

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 - \varepsilon a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \hat{x}_0(t) [b/a_0 - 1 + \hat{x}_0(t)] dt \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t_0 + u/(a_0 - b)) \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du. \end{aligned}$$

だから  $\Gamma(t_0)$  関数である  $T$  の  $T$ -périodique  $t_0$  と  $\int_0^T \Gamma(t_0) dt_0 = 0$ 。のフーリエ分解を考えます  $\phi(t)$ 、

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t},$$

と  $\omega = 2\pi/T$ 、 $\phi_0 = 0$  の平均は  $\phi(t)$  ゼロであり、 $\phi_{-k} = \bar{\phi}_k$  (共役複素数)。だから

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k i \omega u}{a_0 - b}} \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \frac{\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}}{\sinh\left(\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}\right)} \end{aligned}$$

(付録を参照)。特に  $\phi(t) = \cos(\omega t)$ 、その後  $\phi_{\pm 1} = 1/2$  と  $\phi_k = 0$  そうでなければ。だから

$$\Gamma(t_0) = c_0 + \varepsilon \frac{\pi \omega \cos(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}. \quad (17)$$

(Escudero and Rodríguez, 2008) および (Assaf et al.、2008) のように、かく乱システムは次の形式です。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x}. \quad (18)$$

$\hat{x}_0(t)$  と  $\hat{p}_0(t)$  のみに依存  $t - t_0$ 。だから、メルニコフの機能  $\mathcal{M}(t_0)$  です

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_0}{\partial x} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt_0} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt_0} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dt_0}. \end{aligned}$$

(17) を使用して、

$$\mathcal{M}(t_0) = \frac{\pi\omega \sin(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0-b}\right)}.$$

だから  $\mathcal{M}(t_0) = 0$  と交差する  $t_0 = k\pi/\omega$  ( $k$  は整数)。したがって、ヘテロクライン軌道は少なくとも  $\varepsilon$  小さい。

最小  $\Gamma(t_0)$  (17) では、 $t_0 = T/2$  もし  $\varepsilon > 0$  そしてのために  $t_0 = 0$  もし  $\varepsilon < 0$ 。どちらの場合でも、

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi\omega|\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0-b}\right)} \quad (19)$$

のために  $\varepsilon \simeq 0$ 、紹介で発表したとおり。(19) は、わずかに異なるハミルトニアンから得られた (Kamenev, 2011) の式 (4.76) に似ています。 $\omega$  が小さい ( $T$  が大きい) 場合、 $\omega \ll a_0$ 、次に (19) は、

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0), \quad (20)$$

独立している  $\omega$ 。この式は、(1) で得られる式と同じです。 $a = a_0(1 - |\varepsilon|)$  :

$$\frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} - 1 - \log \frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} = \frac{b}{a_0} - 1 - \log \frac{b}{a_0} - |\varepsilon|(1 - b/a_0) + o(\varepsilon)$$

のために  $\varepsilon \simeq 0$ 。(Assaf et al., 2008, section IV) の「断熱近似」のように、式 (20) は、 $\varepsilon \simeq 0$ 、しかしまた限り  $\omega \ll a_0$  (20) の右辺が正であること。なぜなら  $\sinh(x) \geq x$  のために  $x \geq 0$ 、(20) で与えられる  $C$  のおおよその値は常に (19) で与えられる値よりも低いことがわかります。

**高周波制限。** 今それを仮定します  $\omega \gg a_0$ 、常に  $\phi(t) = \cos(\omega t)$ 。システム (18) が書かれている

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p}(x, p) + a_0 \varepsilon \cos(\omega t) x(1-x)e^p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}(x, p) - a_0 \varepsilon \cos(\omega t)(1-2x)(e^p - 1). \end{aligned}$$

Kapitsa法 (Assaf et al., 2008, §III.B) では、

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad p(t) = Y(t) + \eta(t),$$

ここで、 $X$  と  $Y$  は遅い変数ですが、 $\xi$  と  $\eta$  は小さいが速い振動です。すばやく振動する式は次のようになります。

$$\frac{d\xi}{dt} \simeq a_0 \varepsilon \cos(\omega t) X(1-X)e^Y, \quad \frac{d\eta}{dt} \simeq -a_0 \varepsilon \cos(\omega t)(1-2X)(e^Y - 1).$$

仮定  $X$  及び  $Y$  が短いスイング中に一定である、と  $T = 2\pi/\omega$ 。得る

$$\xi(t) \simeq \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1-X)e^Y, \quad \eta(t) \simeq -\frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1-2X)(e^Y - 1).$$

これは変革を示唆しています

$$x = X + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X) e^Y$$

$$p = Y - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X) (e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \Phi(t, X, Y),$$

どこに  $\Phi(t, X, Y)$  変換がほぼ正準になるように、つまりポアソン括弧が条件を満足するように選択されます

$$\{x, p\} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial p}{\partial X} = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \quad (21)$$

なぜなら

$$\{x, p\} = \left[ 1 + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X) e^Y \right] \left[ 1 - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (1 - 2X) e^Y + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right]$$

$$- \left[ \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1 - X) e^Y \right] \left[ 2 \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) (e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right],$$

条件 (21) が書かれている

$$\{x, p\} = 1 - \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) (1 - 2X)^2 e^{2Y} + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y}$$

$$- 2 \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) X(1 - X) e^Y (e^Y - 1) + o(a_0^2/\omega^2) = 1 + o(a_0^2/\omega^2).$$

だから

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 e^{2Y} + 2X(1 - X) e^Y (e^Y - 1)].$$

持っている  $\Phi(t, X, 0) = 0$ 、選択する必要があります

$$\Phi(t, X, Y) = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 (e^{2Y} - 1)/2 + X(1 - X)(e^Y - 1)^2].$$

生成関数  $F_2(t, x, Y)$  この変革の

$$\frac{\partial F_2}{\partial Y} = X + o(a_0^2/\omega^2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = p + o(a_0^2/\omega^2),$$

によって与えられます

$$F_2(t, x, Y) = xY - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) x(1 - x)(e^Y - 1)$$

$$+ \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \sin^2(\omega t) x(1 - x)(1 - 2x)(e^{2Y} - 1).$$

もし  $H(t, x, y) = h(t, X, Y)$ 、次に新しいハミルトニアンは

$$h(t, X, Y) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

私たちは持っています  $T = 2\pi/\omega$ 。このハミルトニアンの平均を取ると、2番目の式はキャンセルされます。

$$\int_0^T \frac{\partial F_2}{\partial t} dt = 0$$

そして有効なハミルトニアンだけが残っています

$$\bar{H}(X, Y) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t, X, Y) dt.$$

という事実を利用した面倒な計算  $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = 1/2$  につながる

$$\begin{aligned} \bar{H}(X, Y) \simeq X(1 - e^{-Y}) & \left[ a_0(1 - X)e^Y - b + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \left\{ -a_0 X(1 - X)^2 e^{2Y} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b(1 - X)(1 - 2X)e^Y - bX(1 - X)(e^Y - 1) - b(1 - 2X)^2 \right\} \right]. \end{aligned}$$

かく乱されたヘテロクライン軌道は、角括弧内の項がゼロであることを課すことによって得られます。この軌道は  $(X_\varepsilon^*, 0)$  と  $(0, Y_\varepsilon^*)$ 、

$$X_\varepsilon^* \simeq (1 - b/a_0) \left[ 1 - \frac{b(a_0 - b) \varepsilon^2}{2\omega^2} \right], \quad Y_\varepsilon^* \simeq \log(b/a_0) + \frac{a_0(a_0 - b) \varepsilon^2}{2\omega^2}.$$

このヘテロクライン軌道に沿ったアクションは

$$C = \int_{X_\varepsilon^*}^0 Y dX.$$

別の面倒な計算は、最終的には

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0), \quad (22)$$

はじめに発表したとおり。機能が  $z \mapsto (1 - z)^2(1 + 2z)$  間隔全体で1未満  $0 < z < 1$ 、 $C$ の修正項は常に  $\frac{a_0^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2}$ 。小さいので  $\omega \gg a_0$  仮説によって。予想されるように、高周波障害の影響を受ける集団は、この障害の振幅にほとんど依存しません。

### 3.数値計算

**フロケ乗数。**  $\lambda_1$  は、常微分方程式を解いて行列の固有値を数値的に計算するScilabなどのソフトウェアを使用して、マスター方程式のフロケ乗数を計算することで直接推定できます。  $e^{\lambda_1 T}$  2番目に大きい実数部を持つ固有値で、最初は1です。次に、プロットできます  $-\log(-\lambda_1)$  よる  $N$ 。この曲線の傾きは、近似値を提供  $C$  を。

**ヘテロクライン軌道。** (Assaf et al.、2008) については、 $(x^*(t), 0)$  と  $(0, p^*(t))$  撮影方法によって。初期状態をとります  $x^*(0)$  (15) によって与えられ、非常に小さい負の値  $p(0)$ 。ソリューションが得られるまで、この値を変化させます  $(x(t), p(t))$  周期的になる傾向がある、つまり  $x(t)$  0に近い  $p(kT)$  に近い  $p^*(0)$  以下のための  $K$  大 (ただし、数値的不安定性を避けるために、大きすぎません)。次に、積分 (16) を使用して  $C$  を数値的に計算できます。

**偏微分方程式。** 周期解を計算することも可能です  $S^*(t, x)$  解の理論の数値的方法を使用したハミルトン・ヤコビ方程式 (6) の解。私たちは定義します

- $\Delta t$  タイムステップ
- $\Delta x$  空間離散化ステップ
- $S_j^m$  の近似  $S(m\Delta t, j\Delta x)$  ここで、 $j$  と  $m$  は次のような整数です。  $m \geq 0$  と  $0 \leq j \leq J$  と  $J = 1/\Delta x$ 。

ゴドゥノフの方法を使うことができます

$$\frac{S_j^{m+1} - S_j^m}{\Delta t} + \mathcal{H}\left(m\Delta t, j\Delta x, \frac{S_j^m - S_{j-1}^m}{\Delta x}, \frac{S_{j+1}^m - S_j^m}{\Delta x}\right) = 0,$$

どこデジタルハミルトニアン  $\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+)$  によって与えられます

$$\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+) = \begin{cases} \min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\}, & p^- < p^+, \\ \max\{H(t, x, p); p^+ \leq p \leq p^-\}, & p^+ \leq p^- \end{cases}$$

(Osher and Shu, 1991)。なぜなら  $H(t, x, p)$   $p$  に関して凸であり、最大値を含む2番目の式は

$$\max\{H(t, x, p^+), H(t, x, p^-)\}.$$

最小値を含む最初の式については、(14) に注意してください。  $H(t, x, p)$  以下の場合、 $p$  に関して最小値があります。  $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ 、つまり

$$p = p^\# = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a(t)(1-x)}.$$

だから

$$\min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\} = \begin{cases} H(t, x, p^+), & p^- < p^+ \leq p^\#, \\ H(t, x, p^-), & p^\# \leq p^- < p^+, \\ H(t, x, p^\#), & p^- \leq p^\# \leq p^+. \end{cases}$$

エッジの条件については、

$$S_0^m = 0, \quad (S_J^m - S_{J-1}^m)/\Delta x = K$$

以下のための非常に高い値を持つ  $K$ 。タイムステップ  $\Delta t$  Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件が満たされるには、 $\Delta x$  と比較して十分に小さい必要があります。私たちが取った初期条件として

$$S(0, x) = x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x),$$

つまり、通常の定常解は  $a(t)$  時間平均に置き換えられます。定数関数を選択することもできます  $S(0, x) = \sigma$  はかなり負ですが、周期的レジームへの収束は遅くなります。定数  $\sigma$  は、セクション2ですすでに述べた非一意性の問題を回避するのに十分なほど負でなければなりません。非定常問題の解が周期的レジームに達したら、推定できます。

$$C = \min_t S^*(t, 0^+) - \min_{t,x} S^*(t, x).$$

**モンテカルロ法。** 平均消滅時間は、モンテカルロ法でも推定できます。確率シミュレーションを平均化します。ただし、指数分布の待機時間を利用する Gillespie アルゴリズムは使用できないことに注意してください。  $a(t)$  定期的です。場合は  $N$  が増加し、減衰時間は天文学的になることができます。この方法を使用しても結果は表示されません。



例。とする

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(2\pi t/T))$$

と  $T = 1$  週。最初に、 $a_0 = 20$  週あたりと  $b = 5$  週あたり。感染の平均期間は  $1/b = 1,4$  日。だから  $R_0 = a_0/b = 4 > 1$  と  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0) \simeq 0,636$ 。図1は  $-\log(-\lambda_1)N$  の関数として  $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$  と  $N = 10, 20, \dots, 60$ 、フロケ乗数を使用して計算されます。線は最後の3つのポイントの線形回帰に対応します  $N = 40, 50,$  の推定値であるこれらの株の60斜面  $C$  であります  $0,524, 0,364$  と  $0,225$  のために  $\varepsilon = 0,2, 0,5$  と  $0,8$ 。

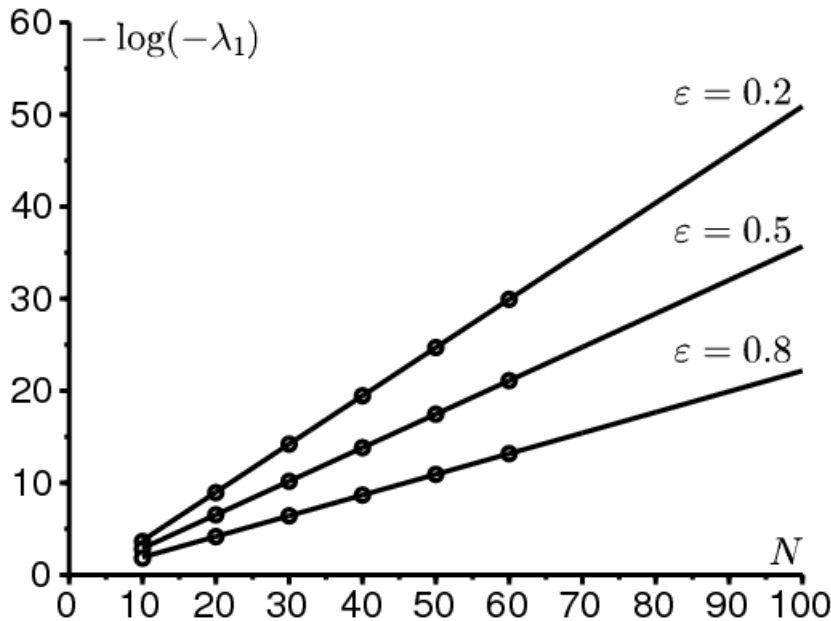


図1. マスター方程式のフロケ乗数の計算： $-\log(-\lambda_1)N$  の関数として  $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$  と  $N = 10, 20, \dots, 60$ 。数  $C$  は、これらの線の傾きです。パラメータ値： $T = 1, a_0 = 20, b = 5$ 。

$a_0$  と  $\omega = 2\pi/T$  この例では、同じ桁です。周波数の中間的なケースです。したがって、 $\varepsilon$  が小さい場合、(19) が  $C$  の適切な近似を与えると予想されます。関数として図2に示す次曲線  $\varepsilon$  のための  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  :

- ヘテロクライン軌道を使用した  $C$  の実線
- $C$  の長い点線と偏微分方程式  $\Delta x = 0,002$  と  $\Delta t = 0,0002$  (ほとんど区別がつかない)
- 図1で得られた  $C$  の値を表す3つの点
- 近似式の短い点線 (19)
- 低周波数での近似 (20) のための長短の点線。

$\varepsilon$  が適度に小さい場合でも、近似式 (19) は  $C$  に近いことがわかります。

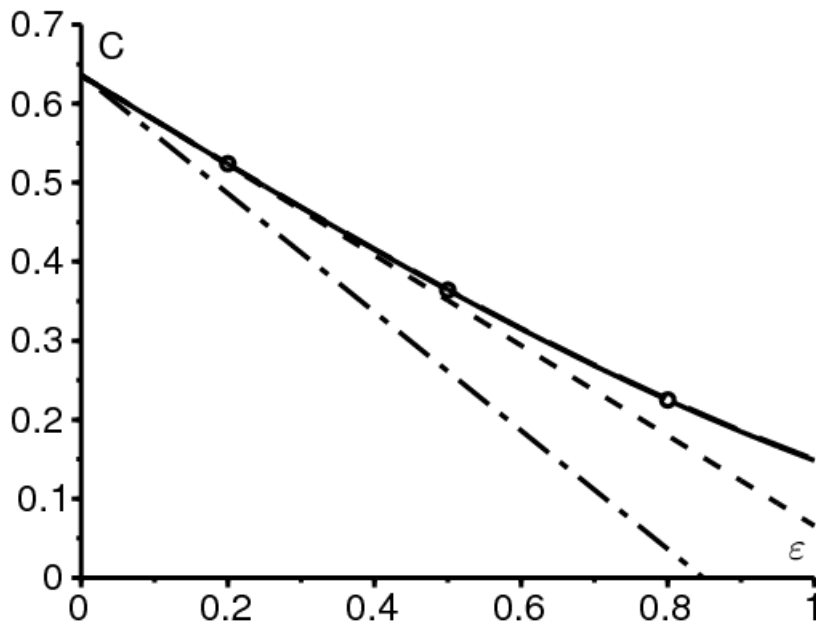


図2.中間周波数：ヘテロクライン軌道[実線]または偏微分方程式[長い点線]（2つの線はほとんど区別できません）を使用して計算された数値C、Floquet乗数図1 [ポイント]、近似式 (19) [短い点線]、および低周波の式 (20) [長い点線と短い点線]に応じて  $\varepsilon$ 。図1と同じパラメーター値。

図3は定期的なソリューションを示しています  $S^*(t, x)$  ハミルトン・ヤコビ方程式の  $t$  の異なる値に対して  $x$  の関数としてプロットされた場合、 $\varepsilon = 0,5$ 。の解の不連続性に注意してください  $x = 0$ 。近くにズーム  $x = 0$  それを示すだろう  $S^*(t, 0^+)$  実際には時間的に周期的であるため、境界条件  $S^*(t, 0) = 0$  弱い意味でのみ満足することができます。

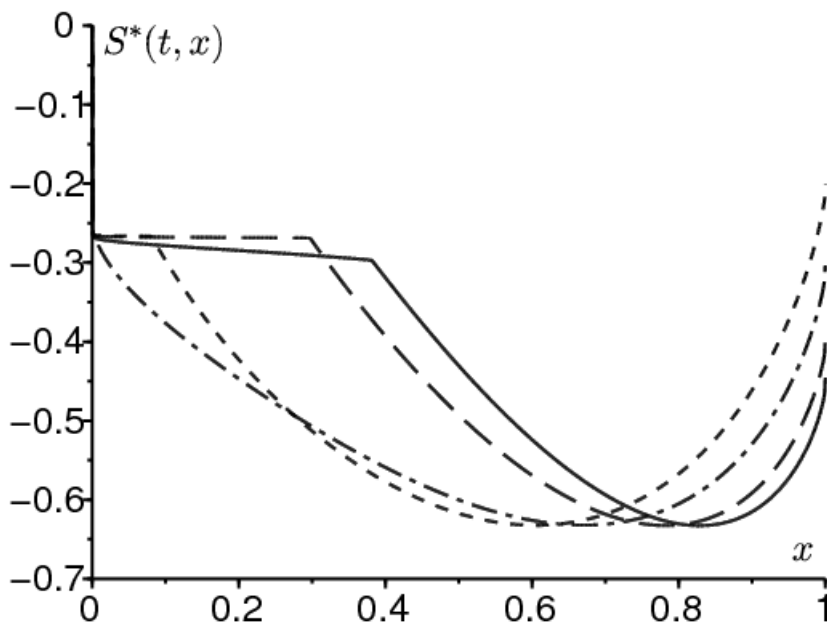


図3.定期的なソリューション  $S^*(t, x)$  関数としてプロット式ハミルトン・ヤコビ、 $x$  用  $t = 0$  (実線)、 $t = T/4$  (長い点線)、 $t = T/2$  (短い点線) と  $t = 3T/4$  (長い点線と短い点線)。図1と同じパラメーター値と  $\varepsilon = 0,5$ 。

図4は高周波の例を考慮しています。  $a_0 = 2$  週あたりと  $b = 1$  週あたり。だから  $R_0 = 2$  と  $c_0 \simeq 0,1931$ 。この場合  $\omega \simeq 6,28$  週あたりはやや大きい  $a_0$ 。のために  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ 、数  $C$  は、ヘテロクライン軌道と高周波公式 (22) を使用して計算されます。値の範囲全体で一致は良好です。最後に、図5は軌道接続を示しています ( $x^*(t), 0$ ) と  $(0, p^*(t))$  同じパラメータ値で  $\varepsilon = 0,1$ 。

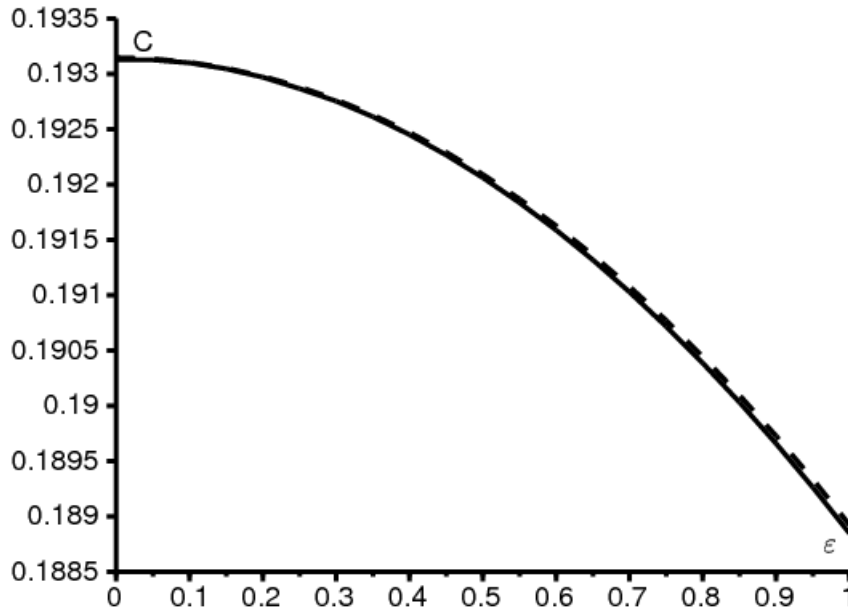


図4.高周波領域：ヘテロクライン軌道[実線]と高周波公式 (22) [点線]を使用して  $\varepsilon$  の関数として計算された  $C$ 。パラメータ値：  $T = 1$ 、  $a_0 = 2$ 、  $b = 1$ 。

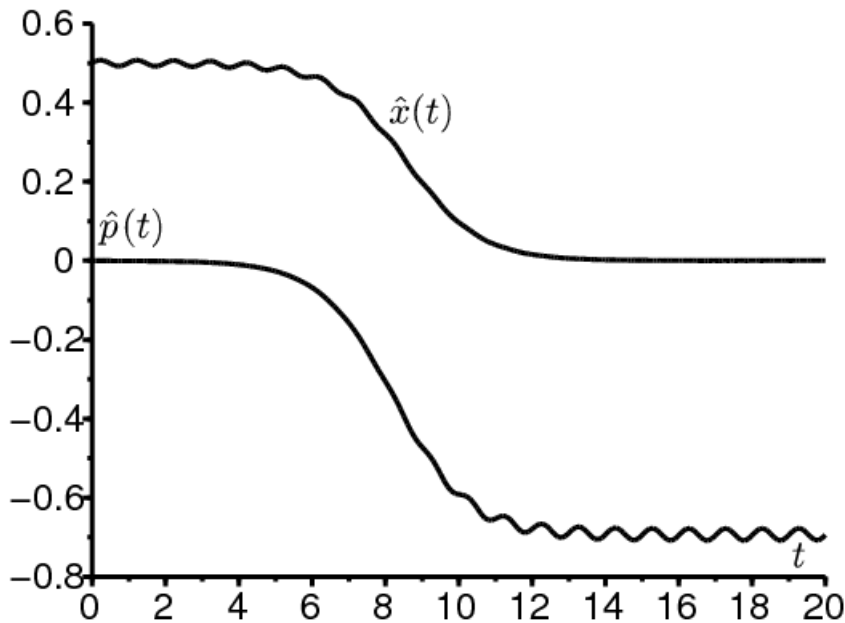


図5.コンポーネント  $t \mapsto \hat{x}(t)$  と  $t \mapsto \hat{p}(t)$  2つの周期解を接続するヘテロクライン軌道の  $(0, p^*(t))$  と  $(x^*(t), 0)$ 。図4と同じパラメータ値  $\varepsilon = 0,1$ 。

## 4.注意事項

- 洗練されたBKWソリューションを使用すると、より正確な見積もりを取得できます

$$\pi_n(t) \simeq e^{-N S_0(t, n/N) - S_1(t, n/N)}.$$

挿入することにより

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-N S_0(t, n/N) - \frac{\partial S_0}{\partial x}(t, n/N) - \frac{1}{2N} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(t, n/N) - S_1(t, n/N) - \frac{1}{N} \frac{\partial S_1}{\partial x}(t, n/N)}$$

および同様の表現  $\pi_{n-1}(t)$  (8) で、高次の項を分離することにより、次のハミルトンヤコビ方程式 (10) を取得します。  $S_0(t, x)$  そして輸送方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left[ a(t)x(1-x)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} - bxe^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \right] \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ = a(t)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ 1 - 2x + \frac{x(1-x)}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] + be^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ -1 + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

のために  $S_1(t, x)$ 。もし  $a(t)$  周期的であり、  $S_0(t, x)$  と  $S_1(t, x)$  数値で計算する必要があります。もし  $a(t) = a$  が一定の場合、次の前指数係数  $\lambda_1$  次のように、結合漸近展開の方法によって得られます (AssafおよびMeerson、2010年)。最初に  $S_0(x)$  (3) で与えられ、  $S_1(x)$  につながる

$$S_1(x) = \log(x\sqrt{1-x}) + \text{const.}$$

だから

$$\pi_n \simeq \kappa \frac{e^{-NS_0(n/N)}}{\frac{n}{N} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}}$$

一定の  $\kappa$ 。  $n$  が小さい場合、

$$\pi_n \simeq \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0) - nS_0'(0)} = \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0)} \left( \frac{a}{b} \right)^n. \quad (23)$$

システム (8) については、近似を使用することもできます。

$$a(n-1)\pi_{n-1} - n(a+b)\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1} \simeq 0, \quad n \geq 1.$$

だから

$$\pi_n \simeq \frac{\pi_1}{n} \frac{1 - (a/b)^n}{1 - a/b} \sim \frac{\pi_1}{n} \frac{(a/b)^n}{a/b - 1}.$$

これは、(23) と一致するのは、  $\pi_1 \simeq \kappa N e^{-NS_0(0)} \left( \frac{a}{b} - 1 \right)$ 。最後に (9) は

$$\lambda_1 \simeq \frac{-b\pi_1/(\kappa N)}{\int_0^1 \frac{e^{-NS_0(x)}}{x\sqrt{1-x}} dx} \simeq \frac{(b-a)x^* \sqrt{1-x^*} \sqrt{NS_0''(x^*)}}{e^{N[S_0(0) - S_0(x^*)]} \sqrt{2\pi}} = -\frac{(a-b)^2}{a e^{cN}} \sqrt{\frac{N}{2\pi}}$$

(アサフとメアソン、2010、方程式 (71) )。たとえば  $a = 20$ 、  $b = 5$  と  $N = 50$  の場合、この推定値は、  $\lambda_1$  図1のように、大きな行列の固有値を計算するソフトウェアで取得します。接続された漸近展開の方法は、おそらく周期的なケースに拡張できますが、明示的な式につながる可能性は低いです。

- を生成関数にしよう

$$\phi(t, z) = \sum_{n=0}^N P_n(t) z^n$$

と  $0 \leq z \leq 1$ 。だから  $\phi(t, 1) = 1$  すべての  $t$  について。(7) から始まる簡単な計算は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1-z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

のために  $0 < z < 1$ 。準定常体制では、

$$\phi(t, z) \simeq 1 + e^{\lambda_1 t} \psi(t, z)$$

と  $\psi(t, z)$  定期的に  $t$ 、 $\psi(t, 1) = 0$  と

$$\lambda_1 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1-z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

だから  $\lambda_1$  また、この放物線問題の非ゼロの最大固有値でもあります。これは、 $N$  large の漸近的な結果をより厳密に示す方法である可能性があります。

- と  $P_n(t) = \mathcal{P}(t, x)$  どこに  $x = n/N$  マスター方程式 (7) の次数2へのテイラー展開を実行すると、フォッカープランク方程式または拡散方程式が得られます。

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ (a(t)x(1-x) - bx) \mathcal{P} \right] + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (a(t)x(1-x) + bx) \mathcal{P} \right].$$

同様に平均消滅時間について  $\tau_n(t) = \tau(t, x)$  どこに  $x = n/N$ 、(13) は関連する問題につながります

$$-1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (a(t)x(1-x) - bx) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{2N} (a(t)x(1-x) + bx) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

ただし、時間に依存しない係数の場合、これらの方程式は通常  $C$  の正しい値を与えないことが既にわかっています (Doering et al.、2005)。値が正しい傾向があるのは、 $R_0$  同じ問題が他の流行モデルでも発生します。たとえば、(Diekmann et al.、2012、p. 112-113) は、拡散近似を使用して、SIRモデルの  $C$  を推定しますが、 $R_0 \simeq 10$  彼らのデジタルアプリケーションで。確率論的SIRモデルのBKW分析については、(Kamenev and Meerson、2008) を参照してください。

- 数  $1/C$  コミュニティの重要なサイズと呼ぶことができます (Diekmann et al.、2012)。

## 付録

それを見せましょう

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du = \frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}.$$

まず、 $e^u/(1+e^u)^2 = 1/(4 \cosh^2(u/2))$  偶数関数です。これを部品による統合と組み合わせると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 2 \int_0^{+\infty} \cos(\lambda u) \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du \\ &= 2 \left[ \frac{-\cos(\lambda u)}{1+e^u} \right]_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda u)}{1+e^u} du \\ &= 1 - 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} \sin(\lambda u)}{1+e^{-u}} du. \end{aligned}$$

開発することによって  $1/(1+e^{-u})$  ベキ級数では、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 1 - 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)u} \sin(\lambda u) du \\ &= 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^2 + (n+1)^2}. \end{aligned}$$

このシリーズの合計はオイラーの公式で計算できます

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

任意の複素数についても同様である  $Z$  と  $z \neq n\pi$  ( $n$  整数)。取る  $z = i\pi\lambda$ 。なぜなら  $\sin(i\pi\lambda) = i \sinh(\pi\lambda)$ 、私たちは得る

$$\frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

結果は次のとおりです。

## 謝辞

この記事は、2013年12月にアンジェで発生した生態学、進化論、遺伝学の確率論的モデルに関する会議中に、定期的な環境での有効な人口規模に関するハンスメッツとの議論に刺激を受けました。

## 参考文献

- Andersson H, Djehiche B (1998) A threshold limit theorem for the stochastic logistic epidemic. *J Appl Probab* 35 : 662–670
- Aronsson G, Kellogg RB (1978) On a differential equation arising from compartmental analysis. *Math Biosci* 38 : 113–122
- Assaf M, Kamenev A, Meerson B (2008) Population extinction in a time-modulated environment. *Phys Rev E* 78 : 041123
- Assaf M, Meerson B (2010) Extinction of metastable stochastic populations. *Phys Rev E* 81 : 021116
- Bacaër N, Ait Dads E (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter  $R_0$  in periodic population models. *J Math Biol* 65 : 601–621
- Barles G (1994) *Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi*. Springer, Berlin
- Barles G, Perthame B (1988) Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J Control Optim* 26 : 1133–1148
- Billings L, Mier-y-Teran-Romero L, Lindley B, Schwartz IB (2013) Intervention-based stochastic disease eradication. *PLoS ONE* 8(8) : e70211

- Diekmann O, Heesterbeek H, Britton T (2012)  
Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics.  
Princeton University Press, Princeton
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth–death processes :  
exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker–Planck approximation.  
Multiscale Model Simul 3 : 283–299
- Escudero C, Rodríguez JA (2008)  
Persistence of instanton connections in chemical reactions with time–dependent rates.  
Phys Rev E 77 : 011130
- Hethcote H (1973) Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model.  
Bull Math Biol 35 : 607–614
- Kamenev A (2011) Field theory of non–equilibrium systems.  
Cambridge University Press, Cambridge
- Kamenev A, Meerson B (2008) Extinction of an infectious disease :  
a large fluctuation in a nonequilibrium system. Phys Rev E 77 : 061107
- Mitake H (2009)  
Large time behavior of solutions of Hamilton–Jacobi equations with periodic boundary data.  
Nonlinear Anal 71 : 5392–5405
- Nasell I (2011) Extinction and quasi–stationarity in the stochastic logistic SIS model.  
Springer, Berlin
- Osher S, Shu CW (1991)  
High–order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton–Jacobi equations.  
SIAM J Numer Anal 28 : 907–922
- Ovaskainen O, Meerson B (2010) Stochastic models of population extinction.  
Trends Ecol Evol 25 : 643–652
- Rabinowitz PH (1994) Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system.  
Ergod Theor Dyn Syst 14 : 817–829
- Roquejoffre JM (2001)  
Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton–Jacobi equations.  
J Math Pures Appl 80 : 85–104
- Soner HM (1986) Optimal control with state–space constraint I.  
SIAM J Control Optim 24 : 552–561