

# Über das stochastische SIS-Modell für eine Epidemie in einem periodischen Umfeld

J. Math. Biol. 71 (2015) 491–511  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01265563>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, Frankreich  
Pierre und Marie Curie Universität, Les Cordeliers, Paris, Frankreich  
nicolas.bacaer@ird.fr

## Zusammenfassung

In dem stochastischen SIS-Modell für eine Epidemie mit einer Kontaktrate  $a$ , einer Heilungsrate  $b < a$  und einer Populationsgröße  $N$  ist die mittlere Zeit bis zum Aussterben  $\tau$  so, dass  $(\log \tau)/N$  konvergiert zu  $c = b/a - 1 - \log(b/a)$  wenn  $N$  gegen unendlich konvergiert. Dieser Artikel betrachtet den realistischeren Fall, in dem die Kontaktrate eine periodische Funktion ist, deren Durchschnitt größer als  $b$  ist. Also  $(\log \tau)/N$  konvergiert gegen eine neue Grenze  $C$ , die mit einer periodischen Hamilton-Jacobi-Gleichung verbunden ist. Wenn die Kontaktrate eine Kosinusfunktion mit einer kleinen Amplitude, einer großen Frequenz oder einer sehr kleinen Frequenz ist, kann man analytische Näherungsformeln für  $C$  erhalten, wie in [Assaf et al., 2008, Phys Rev E 78 041123]. Diese Ergebnisse werden durch numerische Simulationen veranschaulicht.

## 1. Einleitung

Das stochastische SIS-Modell für eine Epidemie wurde eingehend untersucht, wenn angenommen wird, dass die Umgebung konstant ist, wie in dem Buch von Näsell (2011). Mit einer Kontaktrate  $a$ , einer Heilungsrate  $b < a$  und einer Populationsgröße  $N$  ist die durchschnittliche Zeit bis zum Aussterben  $\tau$  (beispielsweise ausgehend von einer infizierten Person) so, dass

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} c = b/a - 1 - \log(b/a) > 0 \quad (1)$$

(Näsell, 2011, Satz 12.1). Siehe unter anderem auch (Andersson und Djehiche, 1998), (Doering et al., 2005) und (Assaf und Meerson, 2010). Letztere verwenden die Methode von Brillouin, Kramers und Wentzel [BKW]. Die Wahrscheinlichkeit  $P_n(t)$   $n \geq 1$  Personen zum Zeitpunkt  $t$  infiziert zu haben, nähert sich zunächst einer quasistationären Verteilung  $\pi_n$ . Wir definieren  $x = n/N$  so dass  $0 \leq x \leq 1$ . Wenn  $N$  gegen unendlich konvergiert,  $-(\log \pi_n)/N$  nähert sich einer kontinuierlichen Funktion  $S(x)$  mit der stationären Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} H(x, p) &= ax(1-x)(e^p - 1) + bx(e^{-p} - 1) \\ &= x(1 - e^{-p})[a(1-x)e^p - b] \end{aligned} \quad (2)$$

(Assaf und Meerson, 2010, (12) und §IV.D.3). Genauer gesagt ist der Zweig der Pegellinie  $H = 0$  mit  $a(1-x)e^p - b = 0$  führt zur Formel

$$S(x) = x \log(b/a) + x + (1-x) \log(1-x) + \text{constante}. \quad (3)$$

Diese Funktion hat ein Minimum, wenn  $x = x^* = 1 - b/a$  mit  $x^* > 0$  weil  $b < a$ . Endlich

$$c = S(0) - S(x^*)$$

ist die Höhe zwischen dem Boden und der Kante bei  $x = 0$  der Potentialwanne  $S(x)$ . Entsprechend das Hamilton-System

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (4)$$

hat eine heterokline Umlaufbahn, die verbindet  $(x^*, 0) = (1 - \frac{b}{a}, 0)$  und  $(0, p^*) = (0, \log \frac{b}{a})$ . Die Zahl  $c$  ist gleich der Aktion

$$\int_{x^*}^0 p dx$$

entlang dieser Umlaufbahn. Die BKW-Methode wurde für andere Geburts- und Todesvorgänge in der Physik oder Populationsbiologie verwendet (Ovaskainen und Meerson, 2010; Kamenev, 2011).

In ihrer Untersuchung einer chemischen Reaktion mit Verzweigung und Vernichtung (Escudero und Rodríguez, 2008) wurde gezeigt, wie eine periodische Umgebung die heterokline Umlaufbahn beeinflusst, die für die durchschnittliche Zeit des Aussterbens eine zentrale Rolle spielt. (Assaf et al., 2008) untersuchten dasselbe Modell genauer und berechneten insbesondere die Korrektur der durchschnittlichen Extinktionszeit aufgrund einer periodischen Störung mit kleiner Amplitude, niedriger Frequenz oder hoher Frequenz. Diese Autoren haben allgemeine Formeln erhalten, die auf andere Geburts- und Todesprozesse mit Metastabilität angewendet werden können. Darüber hinaus zeigt (Billings et al., 2013, Abbildung 7) Monte-Carlo-Simulationen eines periodischen stochastischen SIS-Modells.

Ziel ist es, die von (Assaf et al., 2008) verwendete BKW-Methode auf das SIS-Epidemiemodell mit einer  $T$ -periodischen Kontaktrate anzuwenden, deren Durchschnitt größer als  $b$  ist. Ein solches Modell kann beispielsweise die Ausbreitung einer bakteriellen Infektion darstellen, die keine Immunität verleiht. Die Vermehrung kann in einer Schule mit einer wöchentlichen Periodizität (fällig an Wochenenden) oder einer jährlichen Periodizität (aufgrund von Urlaub und Saisonalität) erfolgen. Dies ist natürlich nur ein erster Schritt zu realistischeren Modellen.

In Abschnitt 2 legen informelle Berechnungen nahe, dass die durchschnittliche Extinktionszeit  $\tau$  (ausgehend von einer zum Zeitpunkt 0 infizierten Person) ist so, dass

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C = \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+) - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x). \quad (5)$$

Hier,  $S^*(t, x)$  ist eine  $T$ -periodische Viskositätslösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \quad (6)$$

für  $0 < x < 1$  mit der Mischkantenbedingung Dirichlet- "Zwangszustand"

$$S(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty.$$

$S(t, x)$  darf in der Nähe von  $x = 0$  nicht identisch Null sein. Der Zustand an den Rändern muss im Sinne der Viskosität verstanden werden (Barles, 1994), weil  $S^*(t, 0^+)$  darf nicht gleich 0 sein. Der Hamiltonianer  $H(t, x, p)$  ist identisch mit (2), außer dass der konstante Parameter  $a$  wird ersetzt durch  $a(t)$ . Wenn

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t)), \quad \omega = 2\pi/T, \quad a_0 > b, \quad |\varepsilon| \leq 1,$$

wir definieren  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$ . Nach den Methoden von (Assaf et al., 2008) zeigt Abschnitt 2, dass

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}$$

wenn  $\varepsilon$  ist nahe 0,

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0)$$

wenn  $\omega \ll a_0$  und

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0)$$

in der Hochfrequenzgrenze  $\omega \gg a_0$ . Das können wir vermuten  $C > 0$  solange  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ .  $C$  ist wahrscheinlich immer kleiner als  $c_0$ , weil saisonale Schwankungen dazu neigen, das Aussterben von Infektionskrankheiten zu begünstigen. Dies deutet genauer darauf hin, dass eine periodische Umgebung für das SIS-Modell zu einer exponentiellen Abnahme der durchschnittlichen Extinktionszeit führt, ähnlich der für das Verzweigungs- und Vernichtungsmodell erhaltenen (Assaf et al., 2008). Abschnitt 3 veranschaulicht diese Ergebnisse mit numerischen Simulationen. Abschnitt 4 fügt einige Bemerkungen hinzu.

## 2. Analytische Berechnungen

### 2.1 Die partielle Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

**Master-Gleichung und Floquet-Theorie.**  $N$  ist die Gesamtbevölkerung, die als konstant angenommen wird. Es gibt

- $S(t)$  gesunde Menschen
- $I(t)$  infizierte Menschen

zum Zeitpunkt  $t$  mit  $N = S(t) + I(t)$ . Wenn  $I(t) = n$ ,

- mit Wahrscheinlichkeit  $bndt + o(dt)$  heilt eine Person
- mit Wahrscheinlichkeit  $a(t)n(1 - n/N)dt + o(dt)$  ist eine Person infiziert

zwischen  $t$  und  $t + dt$ . Also  $a(t)$  ist die Kontaktrate und  $b$  die Heilungsrate. Das nehmen wir an  $a(t)$  ist eine positive kontinuierliche  $T$ -periodische Funktion mit

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt - b > 0,$$

mit anderen Worten

$$R_0 = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt}{b} > 1.$$

Für eine biologische Interpretation von  $R_0$  vgl. (Bacaër und Ait Dads, 2012). (Hethcote, 1973) bemerkten, dass  $r > 0$  (d.h.  $R_0 > 1$ ) ist eine notwendige und ausreichende Bedingung, damit die Lösung dieser mittleren Feldgleichung zu einer periodischen und positiven Funktion konvergiert:

$$\frac{di}{dt} = a(t)i(1 - i) - bi.$$

Andernfalls konvergiert die Lösung gegen Null.

Wenn  $P_n(t)$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $I(t) = n$  haben wir

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt} = a(t)(n - 1)(1 - (n - 1)/N)P_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]P_n \\ + b(n + 1)P_{n+1} \end{aligned} \quad (7)$$

für  $0 \leq n \leq N$ . Hier,  $P_{-1} = 0$  und  $P_{N+1} = 0$ . Natürlich

$$\sum_{n=0}^N P_n(t) = 1.$$

Das System (7) ist ebenfalls geschrieben

$$\frac{dP}{dt} = M(t)P,$$

wo  $P(t)$  ist der Vektor  $(P_n(t))_{0 \leq n \leq N}$  und  $M(t)$  ist die quadratische Matrix der Größe  $N + 1$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b - a(t)(1 - \frac{1}{N}) & 2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(t)(1 - \frac{1}{N}) & -2b - 2a(t)(1 - \frac{2}{N}) & 3b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -bN \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat eine Blockstruktur

$$M(t) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & Q(t) \end{array} \right),$$

wo  $Q(t)$  ist eine quadratische Matrix der Größe  $N$ .  $X(t)$  und  $Y(t)$  sind die Matrizen mit

$$\frac{dX}{dt} = M(t)X, \quad X(0) = I_{N+1}$$

$$\frac{dY}{dt} = Q(t)Y, \quad Y(0) = I_N.$$

$I_N$  die Identitätsmatrix der Größe  $N$ . Floquet Multiplikatoren von  $M(t)$  d.h. die Eigenwerte der Monodromiematrix  $X(T)$  sind  $\{\mu_0 = 1\}$  und die Floquet-Multiplikatoren von  $Q(t)$ . Die Matrix  $Q(t)$  ist kooperativ: Die Koeffizienten außerhalb der Diagonale sind positiv oder Null. Diese Matrix ist auch nicht reduzierbar, da die Elemente direkt über und unter der Diagonale alle streng positiv sind. Daher sind alle Elemente von  $Y(t)$  sind streng positiv für  $t > 0$ . Nach dem Satz von Perron und Frobenius ist der Eigenwert  $\mu_1$  de  $Y(T)$  mit dem größten Realteil ist eine streng positive reelle Zahl und der zugehörige Eigenraum hat die Dimension 1. Zusätzlich

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1)Q(t) = (-b \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

$Q(t)$  "flieht" und  $0 < \mu_1 < 1$  (Aronsson und Kellogg, 1978). Also  $\lambda_1 = (\log \mu_1)/T < 0$ . Vektor  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  ist ein stationärer Zustand.  $P(t)$  konvergiert zu diesem Vektor, wenn  $t \rightarrow +\infty$ . Das Ziel hier ist es, für  $N$  groß die Nähe zwischen zu schätzen  $\lambda_1$  und 0.

Sei  $v$  ein Eigenvektor von  $X(T)$  mit dem Eigenwert verbunden  $\mu_1 = e^{\lambda_1 T}$ . Wir können  $v$  so wählen  $v_n > 0$  für  $1 \leq n \leq N$ . Also

$$X(T)v = e^{\lambda_1 T}v.$$

Wie in Floquets Theorie definieren wir

$$\pi(t) = e^{-\lambda_1 t}X(t)v.$$

Also

$$\frac{d\pi}{dt}(t) = -\lambda_1\pi(t) + M(t)\pi(t).$$

Mehr

$$\pi(T) = e^{-\lambda_1 T}X(T)v = v = \pi(0).$$

Also  $\pi(t)$  ist  $T$ -periodisch. Wenn  $\pi(t) = (\pi_n(t))_{0 \leq n \leq N}$  dann

$$\lambda_1\pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = a(t)(n-1)(1 - (n-1)/N)\pi_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1}. \quad (8)$$

Durch Summieren dieser Gleichungen erhalten wir

$$\lambda_1 \sum_{n=0}^N \pi_n(t) + \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0.$$

Also

$$\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=0}^N \pi_n(0).$$

Aber  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t)$  ist  $T$ -periodisch. Deshalb  $\sum_{n=0}^N \pi_n(0) = 0$  und  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0$  für alles  $t$ . Also

$$\pi_0(t) = -\sum_{n=1}^N \pi_n(t).$$

Aber (8) mit  $n = 0$  zeigt auch das

$$\lambda_1\pi_0(t) + \frac{d\pi_0}{dt} = b\pi_1(t).$$

Weil  $\pi_0(t)$  ist periodisch, bekommen wir durch Integration

$$\lambda_1 = b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\int_0^T \pi_0(t) dt} = -b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt}. \quad (9)$$

**BKW-Lösung und Hamilton-Jacobi-Gleichung.** Wenn  $N$  groß ist, suchen wir nach einer BKW-Lösung

$$\pi_n(t) \simeq e^{-NS(t,x)}$$

für  $1 \leq n \leq N$ , wo  $x = n/N$  und  $S(t, x)$  ist eine stetige Funktion von  $t$  und  $x$  für  $0 < x < 1$ , die in Bezug auf  $t$   $T$ -periodisch ist. Also

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_n}{dt} &\simeq -N \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) e^{-NS(t,x)}, \\ \pi_{n+1}(t) &\simeq e^{-NS(t, x + \frac{1}{N})} \simeq e^{-NS(t,x) - \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}, \quad \pi_{n-1}(t) \simeq e^{-NS(t,x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}. \end{aligned}$$

Wir definieren  $\alpha(t, x) = a(t)x(1-x)$  und  $\beta(x) = bx$ . Also ist (8) geschrieben

$$\lambda_1\pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = N\alpha(t, x - 1/N)\pi_{n-1} - N[\alpha(t, x) + \beta(x)]\pi_n + N\beta(x + 1/N)\pi_{n+1}.$$

Indem wir nur die dominanten Ausdrücke behalten, können wir verwenden  $\alpha(t, x - 1/N) \simeq \alpha(t, x)$  und  $\beta(x + 1/N) \simeq \beta(x)$  zu bekommen

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} \simeq N\alpha(t, x)[\pi_{n-1} - \pi_n] + N\beta(x)[\pi_{n+1} - \pi_n].$$

$\lambda_1$  ist wahrscheinlich exponentiell klein. Es kann auf der linken Seite übersehen werden. Durch Injizieren der BKW-Form und Teilen durch  $N e^{-NS(t,x)}$  erhalten wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a(t)x(1-x) \left[ e^{\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] + bx \left[ e^{-\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] = 0 \quad (10)$$

für  $0 < x < 1$ . Dies ist von der Form (6) mit einem periodischen Hamiltonianer  $H(t, x, p)$  gegeben durch (2) und  $a(t)$  ersetzt  $a$ . Gleichungen wie (10) haben normalerweise asymptotische Lösungen der Form  $S(t, x) = -Et + \Sigma(t, x)$  wo  $\Sigma(t, x)$  ist  $T$ -periodisch in Bezug auf  $t$  und  $E$  ist eine Konstante. Hier jedoch nur Lösungen mit  $E = 0$  sind von Interesse: Sie entsprechen den heteroklinen Bahnen von Abschnitt 2.2 unten.

**Randbedingungen.** Weil  $H(t, 0, p) = 0$  haben wir  $\frac{\partial S}{\partial t}(t, 0) = 0$ . Also  $S(t, 0)$  ist eine Konstante  $S_0$  unabhängig von  $t$ . Da (10) nur partielle Ableitungen erster Ordnung beinhaltet, werden seine Lösungen innerhalb einer additiven Konstante definiert (denken Sie daran, dass der Eigenvektor  $v$  von  $X(T)$  wird innerhalb einer multiplikativen Konstante definiert). Also können wir wählen  $S_0 = 0$ , daher die Dirichlet-Bedingung:

$$S(t, 0) = 0 \quad \forall t. \quad (11)$$

Außerdem weil  $\pi_n(t) = 0$  für  $n > N$  und weil Formel (3) in einer konstanten Umgebung dies zeigt  $|S(1)| < +\infty$  während  $\frac{dS}{dx}(1) = +\infty$  das verhängen wir

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty \quad \forall t. \quad (12)$$

Eine andere Möglichkeit, diese Bedingung am Rand darzustellen, ist "Zustandsbeschränkung".

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

wenn  $x = 1$ . Dieser Zustand führt mit  $x = 1$  bei

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) \geq 0$$

(Soner, 1986). Aber weil

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p},$$

Dieser Ausdruck ist positiv oder null in  $x = 1$  genau dann, wenn  $p = +\infty$  wie in (12).

**Eigenschaften des Hamiltonian.**  $H(t, x, p)$  ist in  $p$  konvex, weil

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p + bxe^{-p} \geq 0.$$

Darüber hinaus  $H(t, x, p) \rightarrow +\infty$  wenn  $|p| \rightarrow +\infty$  vorausgesetzt, dass  $0 < x < 1$ . Aber diese Eigenschaft ist nicht mehr wahr, wenn  $x = 0$  oder sonst  $x = 1$ . Wir haben  $H(t, x, 0) = 0$ . Der Lagrange ist

$$L(t, x, v) = \max_p \{pv - H(t, x, p)\}.$$

Wenn  $0 < x < 1$  haben wir

$$L(t, x, v) = p_*v - H(t, x, p_*)$$

mit  $p_*$  einzigartige Lösung von

$$v = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p_*) = a(t)x(1-x)e^{p_*} - bxe^{-p_*}.$$

Es ist eine Polynomgleichung vom Grad 2 in  $e^{p_*}$ . Das gibt

$$\begin{aligned}
L(t, x, v) &= p_* v - a(t)x(1-x)(e^{p_*} - 1) - bx(e^{-p_*} - 1) \\
&= v \log \left( \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2a(t)x(1-x)} \right) + a(t)x(1-x) + bx \\
&\quad - \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2} - \frac{2a(t)x(1-x)bx}{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}.
\end{aligned}$$

Für  $x = 1$  haben wir

- $L(t, 1, v) = +\infty$  wenn  $v > 0$
- $L(t, 1, 0) = b$
- $L(t, 1, v) = -v \log(-v/b) + v + b$  wenn  $v < 0$ .

Für  $x = 0$  haben wir

- $L(t, 0, v) = +\infty$  wenn  $v \neq 0$
- $L(t, 0, 0) = 0$ .

Beachten Sie jedoch für  $x$  nahe 0, dass  $L(t, x, v) \sim -v \log x$ . Also für  $\eta > 0$  klein und für jede Funktion  $\xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1])$  mit  $\xi(\theta) = 0$  haben wir

$$\int_{\theta}^{\theta+\eta} L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds \simeq - \int_{\theta}^{\theta+\eta} \frac{d\xi}{ds}(s) \log \xi(s) ds = - \int_0^{\xi(\theta+\eta)} \log \xi d\xi,$$

das ist nicht unendlich.

**Lösungen der Hamilton-Jacobi-Gleichung.** Für eine gegebene Ausgangsbedingung  $S_0(x)$ , die Funktion

$$\begin{aligned}
S(t, x) &= \inf \left\{ \int_{\theta}^t L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds + 1_{\theta=0} S_0(\xi(\theta)); \right. \\
&\quad \left. 0 \leq \theta \leq t, \xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1]), \theta = 0 \vee \xi(\theta) = 0, \xi(t) = x \right\}
\end{aligned}$$

ist eine Viskositätslösung von (10) mit gemischten Bedingungen (11) - (12) an den Rändern und mit  $S(0, x) = S_0(x)$  (Barles, 1994). Es ist die Wertfunktion eines Exit-Time-Problems in  $x = 0$  mit der "Zustandsbeschränkung" in  $x = 1$ . Eine periodische Lösung  $S^*(t, x)$  von (10) - (11) - (12) ist somit durch einen festen Punkt des obigen Evolutionsoperators gegeben:

$S^*(0, x) = S^*(T, x)$ . (Roquejoffre, 2001) und (Mitake, 2009) haben ähnliche periodische Hamilton-Jacobi-Gleichungen mit Bedingungen an den Rändern des Dirichlet-Typs untersucht. Beachten Sie jedoch, dass es keine Eindeutigkeit gibt. Zu verwandten Problemen vgl. (Barles und Perthame, 1988). Betrachten Sie in der Tat den Sonderfall, in dem  $a(t) = a_0$  ist konstant. In diesem Fall gibt es zwei Arten von stationären Viskositätslösungen  $S^*(x)$ .

- Einerseits gibt es die Lösungen der Form

$$x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x) + \gamma$$

mit einer Konstante  $\gamma \leq 0$ , die sich nur durch die Konstante  $\gamma$  unterscheiden. Die Lösung mit  $\gamma = 0$  ist der einzige, der die Bedingung am Rand in  $x = 0$  im klassischen Sinne überprüft.

- Auf der anderen Seite gibt es die Lösungen der Form

$$\min\{0, x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x) + \gamma\}$$

mit einer Konstanten  $\gamma$ , so dass  $0 < \gamma \leq c_0$ . Diese Lösungen sind gleich Null in der Nähe von  $x = 0$  und geben Sie nicht  $C$ .

Für die periodische Gleichung (10) mit den gemischten Bedingungen (11) - (12) an den Rändern können wir vermuten, dass es Lösungen der Viskosität gibt

- die in Bezug auf  $t$   $T$ -periodisch sind,
- die in der Nähe von  $x = 0$  nicht identisch Null sind,
- die sich nur durch eine Konstante unterscheiden (was das gleiche  $C$  ergibt).

Es ist eine solche Lösung, die wir als BKW-Lösung wählen. Wie Abbildung 3 unten zeigt, muss der Zustand am Rand bei  $x = 0$  im Sinne der Viskosität verstanden werden, da die Lösung bei  $x = 0$  möglicherweise nicht kontinuierlich ist.

**Verhalten von  $\lambda_1$  wenn  $N$  groß ist.** Zurück zu (9) haben wir

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} = \frac{\log b}{N} + \frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) - \frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right).$$

Wir haben

$$\pi_1(t) \simeq e^{-NS^*(t,1/N)} \simeq e^{-NS^*(t,0^+)}$$

für  $N$  groß. Also

$$\frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+)$$

wegen der Laplace-Formel zur asymptotischen Bewertung von Integralen. Ebenso weil  $\pi_n(t) \simeq e^{-NS^*(t,n/N)}$  haben wir

$$\frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x)$$

und

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -C$$

mit  $C$  gegeben durch (5). Das können wir vermuten  $C > 0$  genau dann, wenn  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ .

**Durchschnittliche Extinktionszeit.** Ausgehend von  $n$  zum Zeitpunkt  $t$  infizierten Personen die durchschnittliche Extinktionszeit  $\tau_n(t)$  ist eine  $T$ -periodische Lösung des Systems

$$-1 = \frac{d\tau_n}{dt} + b n \tau_{n-1} - (a(t)n(1 - n/N) + b n) \tau_n + a(t)n(1 - n/N) \tau_{n+1} \quad (13)$$

für  $1 \leq n \leq N$  mit  $\tau_0(t) = 0$ . Dieses System beinhaltet die transponierte Matrix  $Q^*(t)$  der Matrix  $Q(t)$ . Wir definieren

- $\hat{\tau}(t) = (\tau_n(t))_{1 \leq n \leq N}$
- $\hat{\pi}(t) = (\pi_n(t))_{1 \leq n \leq N}$
- $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das übliche Skalarprodukt reeller Vektoren.

Also

$$\lambda_1 \hat{\pi} + \frac{d\hat{\pi}}{dt} = Q(t) \hat{\pi}, \quad -\mathbf{1} = \frac{d\hat{\tau}}{dt} + Q^*(t) \hat{\tau}.$$

und

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle = \left\langle \frac{d\hat{\pi}}{dt}, \hat{\tau} \right\rangle + \left\langle \hat{\pi}, \frac{d\hat{\tau}}{dt} \right\rangle = \langle Q(t) \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \lambda_1 \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle - \langle \hat{\pi}, Q^*(t) \hat{\tau} \rangle.$$

Ausdrücke mit  $Q(t)$  und  $Q^*(t)$  sich gegenseitig aufheben. Durch Integration und Verwendung der  $T$ -Periodizität von  $\hat{\pi}(t)$  und  $\hat{\tau}(t)$  bekommen wir

$$-\lambda_1 = \frac{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle}{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle dt}.$$

Dies legt nahe, dass die durchschnittliche Extinktionszeit  $\tau$ , die beispielsweise von einer infizierten Person zum Zeitpunkt 0 ausgeht, in der gleichen Größenordnung liegt wie  $-1/\lambda_1$  :

$$\frac{\log(\tau)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C.$$

Man kann vermuten, dass diese im Wesentlichen informelle Analyse in eine strenge Form gebracht werden kann, wie für das SIS-Modell in einer konstanten Umgebung (Näsell, 2011).

## 2.2 Die Heterokline-Umlaufbahn

**Allgemeiner Fall.** Es sei daran erinnert, dass die Hamilton-Jacobi-Gleichung (6) zumindest lokal durch Raytracing gelöst werden kann, dh durch gleichzeitiges Lösen des Hamilton-Systems (4) und der Gleichung

$$\frac{dz}{dt} = p(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t)) - H(t, x(t), p(t))$$

mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$ ,  $p(0) = \frac{\partial S}{\partial x}(0, x_0)$ ,  $z(0) = S(0, x_0)$ , so  $z(t) = S(t, x(t))$ . Lassen Sie uns im Folgenden (Assaf et al., 2008) das Hamilton-System genauer betrachten (4). In diesem Fall

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) &= a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p}, \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) &= a(t)(1-2x)(e^p - 1) + b(e^{-p} - 1).\end{aligned}\tag{14}$$

Lassen Sie uns zunächst eine nicht triviale  $T$ -periodische Lösung suchen, so dass  $x \equiv 0$  und

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, 0, p) = -(a(t) - be^{-p})(e^p - 1).$$

Mit  $p = \log(1 + q)$  erhalten wir eine Bernoulli-Differentialgleichung, die leicht gelöst werden kann. Dies ergibt die  $T$ -periodische Lösung

$$p^*(t) = \log\left(1 + \left[\frac{e^{-bt + \int_0^t a(s) ds}}{e^{p^*(0)} - 1} + \int_0^t a(s) e^{-b(t-s) + \int_s^t a(u) du} ds\right]^{-1}\right),$$

wo

$$p^*(0) = \log\left(1 + \frac{1 - e^{-bT + \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(s) e^{-b(T-s) + \int_s^T a(u) du} ds}\right).$$

Die periodische Lösung  $(0, p^*(t))$  ist instabil. In der Tat mit  $x(t) = \tilde{x}(t)$  und  $p(t) = p^*(t) + \tilde{p}(t)$  und durch Linearisieren der Gleichungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)} & 0 \\ 2a(t)(e^{p^*(t)} - 1) & -a(t)e^{p^*(t)} + be^{-p^*(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Floquet Multiplikatoren sind

$$f = \exp\int_0^T [a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)}] dt$$

und  $1/f$  daher die Instabilität. Instabilität kann auch als Folge des Satzes von Liouville bezüglich der Invarianz des "Volumens" im Phasenraum  $(x, p)$  unter der Wirkung des Hamilton-Flusses gesehen werden.

Zweitens suchen wir nach einer nicht trivialen  $T$ -periodischen Lösung, so dass  $p \equiv 0$  und

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, 0) = a(t)x(1-x) - bx.$$

Dies ist die mittlere Feldgleichung des SIS-Modells. Die einzige  $T$ -periodische Lösung ungleich Null ist

$$x^*(t) = \left(\frac{1}{x^*(0)} e^{bt - \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t a(u) e^{b(t-u) - \int_u^t a(s) ds} du\right)^{-1}$$

mit

$$x^*(0) = \frac{1 - e^{bT - \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(u) e^{b(T-u) - \int_u^T a(s) ds} du}.\tag{15}$$

Die periodische Lösung  $(x^*(t), 0)$  ist auch instabil. In der Tat mit  $x(t) = x^*(t) + \tilde{x}(t)$  und  $p(t) = \tilde{p}(t)$  und durch Linearisieren der Gleichungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)(1 - 2x^*(t)) - b & a(t)x^*(t)(1 - x^*(t)) + bx^*(t) \\ 0 & -a(t)(1 - 2x^*(t)) + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Die Floquet-Multiplikatoren sind wieder invers zueinander, daher die Instabilität.

Rappelons de la section 1 que dans un environnement constant, il y a une orbite hétérocline dans le plan de phase  $(x, p)$  reliant les points stationnaires  $(x^*, 0) = (1 - b/a, 0)$  und  $(0, p^*) = (0, \log(b/a))$  wenn  $a > b$ . (Escudero und Rodríguez, 2008) fanden eine ähnliche heterokline Umlaufbahn für das periodische Modell der Verzweigung und Vernichtung identischer Teilchen, zumindest für eine kleine Amplitude der periodischen Störung. Wir können also auf die Existenz einer heteroklinen Umlaufbahn hoffen  $(\tilde{x}(t), \tilde{p}(t))$ , die periodische Lösungen verbindet  $(x^*(t), 0)$  und  $(0, p^*(t))$ . Die Existenz kann wahrscheinlich mit einem Variationsansatz nachgewiesen werden (Rabinowitz, 1994). Diese spezielle Umlaufbahn kann durch ein Zündverfahren digital erhalten werden. Nach (Assaf et al., 2008, Gleichung (20)),



$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{p}(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) - H(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) \right] dt. \quad (16)$$

Dieses Integral kann numerisch ausgewertet werden.

**Störende Methode.** Wenn  $a(t)$  ist eine Konstante  $a_0$  dann  $(\hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))$  ist die heterokline Umlaufbahn, die die stationären Punkte verbindet  $(x^*, 0) = (1 - b/a_0, 0)$  und  $(0, p^*) = (0, \log(b/a_0))$ . Diese Umlaufbahn ist so, dass  $a_0(1 - x)e^p - b = 0$ , wie mit (2) zu sehen ist. Wenn wir diese Gleichung verwenden, um  $p$  als Funktion von  $x$  auszudrücken und das Ergebnis in die erste Gleichung von (4) einzufügen, erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} = bx - a_0x(1 - x).$$

Die Lösung ist

$$x(t) = \left[ \frac{1}{x(t_0)} e^{(a_0-b)(t-t_0)} + \frac{a_0}{a_0 - b} (1 - e^{(a_0-b)(t-t_0)}) \right]^{-1}.$$

Zum Beispiel durch Auswahl  $x(t_0) = (1 - b/a_0)/2$  bekommen wir

$$\hat{x}_0(t) = \frac{1 - b/a_0}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_0(t) = \log \frac{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)} a_0/b}.$$

Nehmen wir das an

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \phi(t))$$

mit  $a_0 > b$ ,  $\varepsilon$  klein und  $\phi(t)$  eine  $T$ -periodische Funktion, so dass  $\int_0^T \phi(t) dt = 0$ . Der Hamiltonianer kann in der Form geschrieben werden

$$H(t, x, p) = H_0(x, p) + \varepsilon H_1(t, x, p),$$

wo  $H_0(x, p)$  ist das gleiche wie (2), außer dass  $a_0$  ersetzt  $a$  und wo

$$H_1(t, x, p) = a_0 \phi(t) x(1 - x)(e^p - 1).$$

Wenn  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$  dann

$$C \simeq \min_{t_0} \Gamma(t_0), \quad \Gamma(t_0) = c_0 - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt$$

für  $\varepsilon \simeq 0$  (Assaf et al., 2008, Gleichung (24)). In diesem Fall  $(1 - \hat{x}_0)e^{\hat{p}_0} = b/a_0$ . Also

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 - \varepsilon a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \hat{x}_0(t) [b/a_0 - 1 + \hat{x}_0(t)] dt \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t_0 + u/(a_0 - b)) \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du. \end{aligned}$$

Also  $\Gamma(t_0)$  ist eine  $T$ -periodische Funktion von  $t_0$  mit  $\int_0^T \Gamma(t_0) dt_0 = 0$ . Betrachten Sie die Fourier-Zerlegung von  $\phi(t)$ ,

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t},$$

mit  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\phi_0 = 0$  weil der Durchschnitt von  $\phi(t)$  ist Null und  $\phi_{-k} = \bar{\phi}_k$  (konjugierte komplexe Zahl). Also

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k i \omega u}{a_0 - b}} \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \frac{\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}}{\sinh\left(\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}\right)} \end{aligned}$$

(siehe Anhang). Besonders wenn  $\phi(t) = \cos(\omega t)$  dann  $\phi_{\pm 1} = 1/2$  und  $\phi_k = 0$  sonst. Also

$$\Gamma(t_0) = c_0 + \varepsilon \frac{\pi \omega \cos(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}. \quad (17)$$

Wie (Escudero und Rodríguez, 2008) und (Assaf et al., 2008) hat das gestörte System die Form

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x}. \quad (18)$$

$\hat{x}_0(t)$  und  $\hat{p}_0(t)$  hängen nur ab von  $t - t_0$ . Also die Funktion von Melnikov  $\mathcal{M}(t_0)$  ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_0}{\partial x} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt_0} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt_0} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dt_0}. \end{aligned}$$

Mit (17) erhalten wir

$$\mathcal{M}(t_0) = \frac{\pi\omega \sin(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0 - b}\right)}.$$

Also  $\mathcal{M}(t_0)$  kreuzt 0 für  $t_0 = k\pi/\omega$  ( $k$  eine ganze Zahl). Daher existiert die Heterokline-Umlaufbahn zumindest für  $\varepsilon$  klein.

Das Minimum von  $\Gamma(t_0)$  in (17) wird erhalten für  $t_0 = T/2$  wenn  $\varepsilon > 0$  und für  $t_0 = 0$  wenn  $\varepsilon < 0$ . In beiden Fällen bekommen wir

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi\omega|\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a_0 - b}\right)} \quad (19)$$

für  $\varepsilon \simeq 0$ , wie in der Einleitung angekündigt. Es ist zu beachten, dass (19) der Gleichung (4.76) von (Kamenev, 2011) ähnelt, die von einem etwas anderen Hamilton-Operator erhalten wurde. Wenn  $\omega$  klein ist ( $T$  ist groß), so dass  $\omega \ll a_0$ , dann zeigt (19) das

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0), \quad (20)$$

das ist unabhängig von  $\omega$ . Diese Formel ist die gleiche wie die in (1) mit  $a = a_0(1 - |\varepsilon|)$  :

$$\frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} - 1 - \log \frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} = \frac{b}{a_0} - 1 - \log \frac{b}{a_0} - |\varepsilon|(1 - b/a_0) + o(\varepsilon)$$

für  $\varepsilon \simeq 0$ . Wie in der "adiabatischen Näherung" von (Assaf et al., 2008, Abschnitt IV) wird erwartet, dass die Formel (20) nicht nur für  $\varepsilon \simeq 0$ , aber auch solange  $\omega \ll a_0$  und dass die rechte Seite von (20) positiv ist. Weil  $\sinh(x) \geq x$  für  $x \geq 0$  können wir feststellen, dass der durch (20) gegebene ungefähre Wert von  $C$  immer niedriger ist als der durch (19) gegebene.

**Hochfrequenzgrenze.** Nehmen wir das an  $\omega \gg a_0$ , immer mit  $\phi(t) = \cos(\omega t)$ . Das System (18) ist geschrieben

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p}(x, p) + a_0\varepsilon \cos(\omega t)x(1 - x)e^p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}(x, p) - a_0\varepsilon \cos(\omega t)(1 - 2x)(e^p - 1). \end{aligned}$$

Mit der Kapitsa-Methode (Assaf et al., 2008, §III.B),

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad p(t) = Y(t) + \eta(t),$$

wobei  $X$  und  $Y$  langsame Variablen sind, während  $\xi$  und  $\eta$  kleine, aber schnelle Schwingungen sind. Schnell schwingende Ausdrücke ergeben:

$$\frac{d\xi}{dt} \simeq a_0\varepsilon \cos(\omega t)X(1 - X)e^Y, \quad \frac{d\eta}{dt} \simeq -a_0\varepsilon \cos(\omega t)(1 - 2X)(e^Y - 1).$$

Wir nehmen an, dass  $X$  und  $Y$  während einer kurzen Schwingung konstant sind, mit  $T = 2\pi/\omega$ . Wir bekommen

$$\xi(t) \simeq \frac{a_0\varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)X(1 - X)e^Y, \quad \eta(t) \simeq -\frac{a_0\varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1 - 2X)(e^Y - 1).$$

Dies deutet auf eine Transformation hin

$$\begin{aligned} x &= X + \frac{a_0\varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)X(1 - X)e^Y \\ p &= Y - \frac{a_0\varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1 - 2X)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2\varepsilon^2}{\omega^2} \Phi(t, X, Y), \end{aligned}$$

wo  $\Phi(t, X, Y)$  wird so gewählt, dass die Transformation fast kanonisch ist, dh dass die Poisson-Klammern die Bedingung erfüllen

$$\{x, p\} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial p}{\partial X} = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \quad (21)$$

Weil

$$\begin{aligned} \{x, p\} = & \left[ 1 + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1 - 2X)e^Y \right] \left[ 1 - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1 - 2X)e^Y + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right] \\ & - \left[ \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)X(1 - X)e^Y \right] \left[ 2 \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right], \end{aligned}$$

Bedingung (21) ist geschrieben

$$\begin{aligned} \{x, p\} = & 1 - \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t)(1 - 2X)^2 e^{2Y} + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \\ & - 2 \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t)X(1 - X)e^Y(e^Y - 1) + o(a_0^2/\omega^2) = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \end{aligned}$$

Also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 e^{2Y} + 2X(1 - X)e^Y(e^Y - 1)].$$

Zu haben  $\Phi(t, X, 0) = 0$  müssen wir wählen

$$\Phi(t, X, Y) = \sin^2(\omega t) [(1 - 2X)^2 (e^{2Y} - 1)/2 + X(1 - X)(e^Y - 1)^2].$$

Die Erzeugungsfunktion  $F_2(t, x, Y)$  dieser Transformation mit

$$\frac{\partial F_2}{\partial Y} = X + o(a_0^2/\omega^2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = p + o(a_0^2/\omega^2),$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F_2(t, x, Y) = & xY - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)x(1 - x)(e^Y - 1) \\ & + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \sin^2(\omega t)x(1 - x)(1 - 2x)(e^{2Y} - 1). \end{aligned}$$

Wenn  $H(t, x, y) = h(t, X, Y)$ , dann ist der neue Hamiltonianer

$$h(t, X, Y) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Wir haben  $T = 2\pi/\omega$ . Mit dem Mittelwert dieses Hamilton-Operators wird der zweite Ausdruck gestrichen, weil

$$\int_0^T \frac{\partial F_2}{\partial t} dt = 0$$

und nur der effektive Hamiltonianer bleibt übrig

$$\bar{H}(X, Y) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t, X, Y) dt.$$

Eine mühsame Berechnung unter Verwendung der Tatsache, dass  $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = 1/2$  führt zu

$$\begin{aligned} \bar{H}(X, Y) \simeq & X(1 - e^{-Y}) \left[ a_0(1 - X)e^Y - b + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \left\{ -a_0X(1 - X)^2 e^{2Y} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b(1 - X)(1 - 2X)e^Y - bX(1 - X)(e^Y - 1) - b(1 - 2X)^2 \right\} \right]. \end{aligned}$$

Die gestörte Heterokline-Umlaufbahn wird erhalten, indem auferlegt wird, dass der Term in eckigen Klammern Null ist. Diese Umlaufbahn verbindet  $(X_\varepsilon^*, 0)$  und  $(0, Y_\varepsilon^*)$  mit

$$X_\varepsilon^* \simeq (1 - b/a_0) \left[ 1 - \frac{b(a_0 - b) \varepsilon^2}{2\omega^2} \right], \quad Y_\varepsilon^* \simeq \log(b/a_0) + \frac{a_0(a_0 - b) \varepsilon^2}{2\omega^2}.$$

Die Aktion entlang dieser Heterokline-Umlaufbahn ist

$$C = \int_{X_\varepsilon^*}^0 Y dX.$$

Eine weitere langwierige Berechnung führt letztendlich zu

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0), \quad (22)$$

wie in der Einleitung angekündigt. Weil die Funktion  $z \mapsto (1 - z)^2(1 + 2z)$  ist weniger als 1 über das Intervall  $0 < z < 1$  ist der Korrekturterm für  $C$  immer kleiner als  $\frac{a_0^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2}$ . Es ist klein, weil  $\omega \gg a_0$  durch Hypothese. Wie zu erwarten ist, hängt eine Population, die einer Hochfrequenzstörung ausgesetzt ist, wenig von der Amplitude dieser Störung ab.

### 3. Numerische Berechnungen

**Floquet Multiplikatoren.**  $\lambda_1$  kann direkt geschätzt werden, indem die Floquet-Multiplikatoren der Master-Gleichung unter Verwendung einer Software wie Scilab berechnet werden, die gewöhnliche Differentialgleichungen löst und die Eigenwerte von Matrizen numerisch berechnet.  $e^{\lambda_1 T}$  ist der Eigenwert mit dem zweitgrößten Realteil, der erste ist 1. Wir können dann zeichnen  $-\log(-\lambda_1)$  entsprechend  $N$ . Die Steigung dieser Kurve stellt einen Näherungswert von  $C$ .

**Heterokline-Umlaufbahn.** Wie für (Assaf et al., 2008) können wir die Umlaufbahn erhalten, die verbindet  $(x^*(t), 0)$  und  $(0, p^*(t))$  durch eine Schießmethode. Wir nehmen den Ausgangszustand  $ax^*(0)$  gegeben durch (15) und einen sehr kleinen negativen Wert für  $p(0)$ . Wir variieren diesen Wert, bis wir eine Lösung erhalten  $(x(t), p(t))$  was dazu neigt, periodisch zu werden, das heißt mit  $x(t)$  nahe 0 und  $p(kT)$  in der Nähe von  $p^*(0)$  für  $k$  groß (aber nicht zu groß, um numerische Instabilität zu vermeiden). Wir können dann das Integral (16) verwenden, um  $C$  numerisch zu berechnen.

**Die partielle Differentialgleichung.** Es ist auch möglich, eine periodische Lösung zu berechnen  $S^*(t, x)$  der Hamilton-Jacobi-Gleichung (6) unter Verwendung der numerischen Methoden der Theorie der Viskositätslösungen. Wir definieren

- $\Delta t$  der Zeitschritt
- $\Delta x$  der Raumdiskretisierungsschritt
- $S_j^m$  eine Annäherung von  $S(m\Delta t, j\Delta x)$ , wobei  $j$  und  $m$  ganze Zahlen sind, so dass  $m \geq 0$  und  $0 \leq j \leq J$  mit  $J = 1/\Delta x$ .

Wir können Godunovs Methode anwenden

$$\frac{S_j^{m+1} - S_j^m}{\Delta t} + \mathcal{H}\left(m\Delta t, j\Delta x, \frac{S_j^m - S_{j-1}^m}{\Delta x}, \frac{S_{j+1}^m - S_j^m}{\Delta x}\right) = 0,$$

wo der digitale Hamiltonianer  $\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+)$  ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+) = \begin{cases} \min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\}, & p^- < p^+, \\ \max\{H(t, x, p); p^+ \leq p \leq p^-\}, & p^+ \leq p^- \end{cases}$$

(Osher und Shu, 1991). Weil  $H(t, x, p)$  ist in Bezug auf  $p$  konvex, der zweite Ausdruck mit einem Maximum ist gleich

$$\max\{H(t, x, p^+), H(t, x, p^-)\}.$$

Beachten Sie für den ersten Ausdruck, der ein Minimum enthält, mit (14), dass  $H(t, x, p)$  hat ein Minimum in Bezug auf  $p$  wenn  $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$  d.h. wenn

$$p = p^\# = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a(t)(1-x)}.$$

Also

$$\min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\} = \begin{cases} H(t, x, p^+), & p^- < p^+ \leq p^\#, \\ H(t, x, p^-), & p^\# \leq p^- < p^+, \\ H(t, x, p^\#), & p^- \leq p^\# \leq p^+. \end{cases}$$

Für die Bedingungen an den Rändern nehmen wir

$$S_0^m = 0, \quad (S_j^m - S_{j-1}^m)/\Delta x = K$$

mit einem sehr hohen Wert für  $K$ . Der Zeitschritt  $\Delta t$  muss im Vergleich zu  $\Delta x$  klein genug sein, damit die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (CFL) erfüllt ist. Als Ausgangsbedingung haben wir genommen

$$S(0, x) = x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x),$$

das heißt die reguläre stationäre Lösung, wenn  $a(t)$  wird durch seinen Zeitdurchschnitt ersetzt. Wir können auch eine konstante Funktion wählen  $S(0, x) = \sigma$  mit  $\sigma$  ziemlich negativ, aber die Konvergenz zum periodischen Regime ist dann langsamer. Die Konstante  $\sigma$  muss negativ genug sein, um das bereits in Abschnitt 2 erwähnte Problem der Nicht-Eindeutigkeit zu vermeiden. Sobald die Lösung des instationären Problems ein periodisches Regime erreicht hat, können wir schätzen

$$C = \min_t S^*(t, 0^+) - \min_{t,x} S^*(t, x).$$

**Monte-Carlo-Methode.** Die durchschnittliche Extinktionszeit kann auch durch eine Monte-Carlo-Methode geschätzt werden. Wir mitteln die stochastischen Simulationen. Beachten Sie jedoch, dass der Gillespie-Algorithmus, der exponentiell verteilte Wartezeiten nutzt, nicht verwendet werden kann, weil  $a(t)$  ist periodisch. Wenn  $N$  zunimmt, kann die Extinktionszeit astronomisch werden. Mit dieser Methode werden keine Ergebnisse präsentiert.

**Beispiele.** Wir nehmen an

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(2\pi t/T))$$

mit  $T = 1$  Woche. Betrachten wir zunächst den Fall, in dem  $a_0 = 20$  pro Woche und  $b = 5$  pro Woche. Die durchschnittliche Infektionsdauer beträgt  $1/b = 1,4$  Tage. Also  $R_0 = a_0/b = 4 > 1$  und  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0) \simeq 0,636$ . Abbildung 1 zeigt  $-\log(-\lambda_1)$  als Funktion von  $N$  für  $\varepsilon \in \{0, 2; 0, 5; 0, 8\}$  und  $N = 10, 20, \dots, 60$ , berechnet mit den Floquet-Multiplikatoren. Die Linien entsprechen einer linearen Regression der letzten 3 Punkte  $N = 40, 50, 60$ . Die Steigungen dieser Linien, die Schätzungen von  $C$  sind, sind 0,524, 0,364 und 0,225 für  $\varepsilon = 0,2, 0,5$  und  $0,8$ .

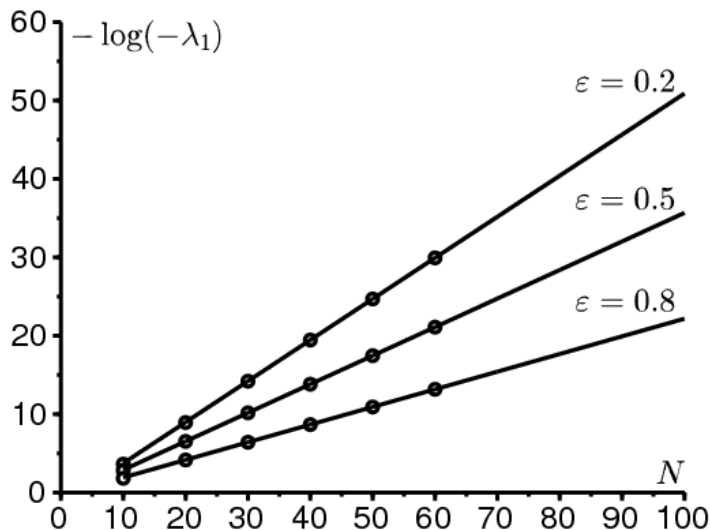


Abbildung 1. Berechnung der Floquet-Multiplikatoren der Master-Gleichung:  $-\log(-\lambda_1)$  als Funktion von  $N$  für  $\varepsilon \in \{0, 2; 0, 5; 0, 8\}$  und  $N = 10, 20, \dots, 60$ . Die Zahl  $C$  ist die Steigung dieser Linien. Parameterwerte:  $T = 1$ ,  $a_0 = 20$ ,  $b = 5$ .

$a_0$  und  $\omega = 2\pi/T$  sind in diesem Beispiel in der gleichen Größenordnung. Es ist ein Zwischenfall für die Frequenz. Wir erwarten daher, dass (19) eine gute Näherung für  $C$  ergibt, wenn  $\varepsilon$  klein ist. Fig. 2 zeigt die folgenden Kurven als Funktion von  $\varepsilon$  für  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ :

- eine durchgezogene Linie für  $C$  unter Verwendung der Heterokline-Umlaufbahn
- lange gepunktete Linien für  $C$  unter Verwendung der partiellen Differentialgleichung mit  $\Delta x = 0,002$  und  $\Delta t = 0,0002$  (fast nicht zu unterscheiden)
- drei Punkte, die die in Abbildung 1 erhaltenen Werte von  $C$  darstellen
- kurze gepunktete Linien für die ungefähre Formel (19)
- lange und kurze gepunktete Linien für die Näherung (20) mit einer niedrigen Frequenz.

Wir können sehen, dass die ungefähre Formel (19) nahe an  $C$  liegt, selbst wenn  $\varepsilon$  nur mäßig klein ist.

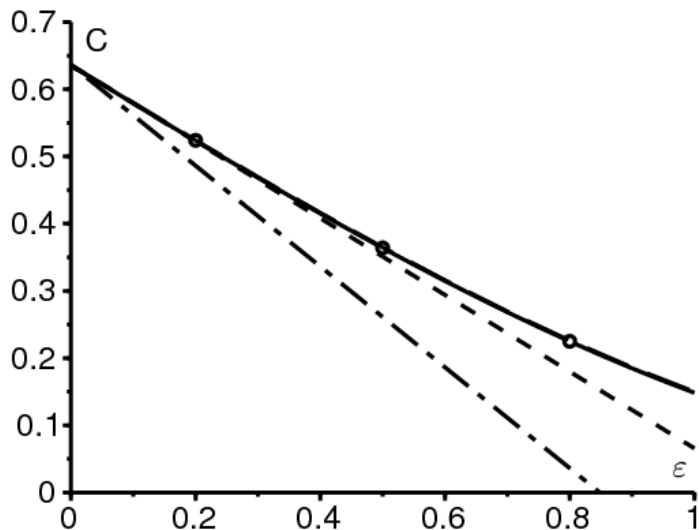


Abbildung 2. Zwischenfrequenz: Die Zahl  $C$ , berechnet mit der Heteroklinenbahn [durchgezogene Linie] oder der partiellen Differentialgleichung [lange gepunktete Linien] (die beiden Linien sind kaum zu unterscheiden), die Floquet-Multiplikatoren wie in der Abbildung 1 [Punkte], die ungefähre Formel (19) [kurze gepunktete Linien] und die Niederfrequenzformel (20) [lange und kurze gepunktete Linien], abhängig von  $\varepsilon$ . Gleiche Parameterwerte wie in Abbildung 1.

Abbildung 3 zeigt eine periodische Lösung  $S^*(t, x)$  der Hamilton-Jacobi-Gleichung, aufgetragen als Funktion von  $x$  für verschiedene Werte von  $t$ , wenn  $\varepsilon = 0,5$ . Beachten Sie die Diskontinuität der Lösung in  $x = 0$ . Zoomen Sie in die Nähe von  $x = 0$  würde das zeigen  $S^*(t, 0^+)$  ist eigentlich zeitlich periodisch, also die Randbedingung  $S^*(t, 0) = 0$  kann nur in einem schwachen Sinne befriedigt werden.

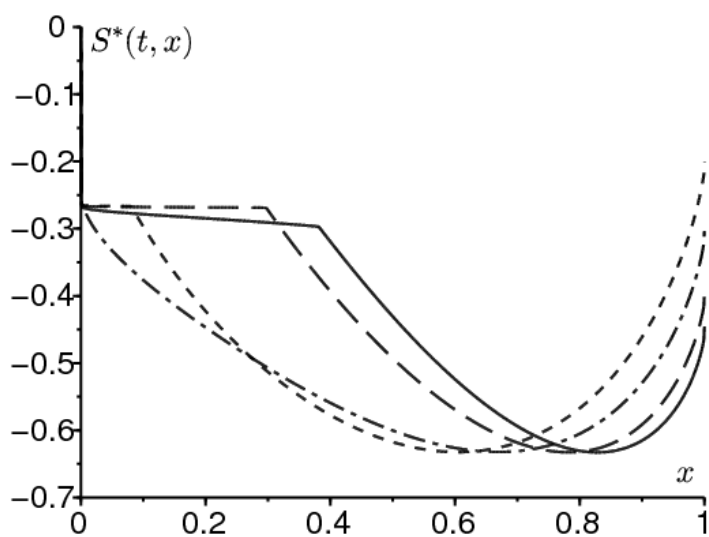


Abbildung 3. Eine periodische Lösung  $S^*(t, x)$  der Hamilton-Jacobi-Gleichung, aufgetragen als Funktion von  $x$  für  $t = 0$  (durchgezogene Linie),  $t = T/4$  (lange gepunktete Linien),  $t = T/2$  (kurze gepunktete Linien) und  $t = 3T/4$  (lange und kurze gepunktete Linien). Gleiche Parameterwerte wie in Abbildung 1 und  $\varepsilon = 0,5$ .

Abbildung 4 zeigt ein Hochfrequenzbeispiel:  $a_0 = 2$  pro Woche und  $b = 1$  pro Woche. Also  $R_0 = 2$  und  $c_0 \simeq 0,1931$ . In diesem Fall  $\omega \simeq 6,28$  pro Woche ist etwas größer als  $a_0$ . Für  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  wird die Zahl  $C$  unter Verwendung der Heterokline-Umlaufbahn und der Hochfrequenzformel (22) berechnet. Die Übereinstimmung ist über den gesamten Wertebereich gut. Schließlich zeigt Abbildung 5 die Umlaufbahnverbindung  $(x^*(t), 0)$  und  $(0, p^*(t))$  für die gleichen Parameterwerte mit  $\varepsilon = 0,1$ .

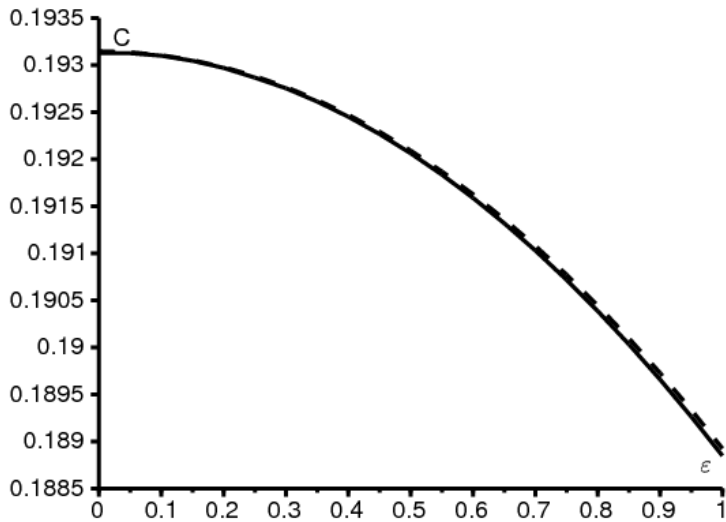


Figure 4. Hochfrequenzbereich:  $C$  berechnet unter Verwendung der Heterokline-Umlaufbahn [durchgezogene Linie] und der Hochfrequenzformel (22) [gepunktete Linie] als Funktion von  $\varepsilon$ . Parameterwerte:  $T = 1$ ,  $a_0 = 2$ ,  $b = 1$ .

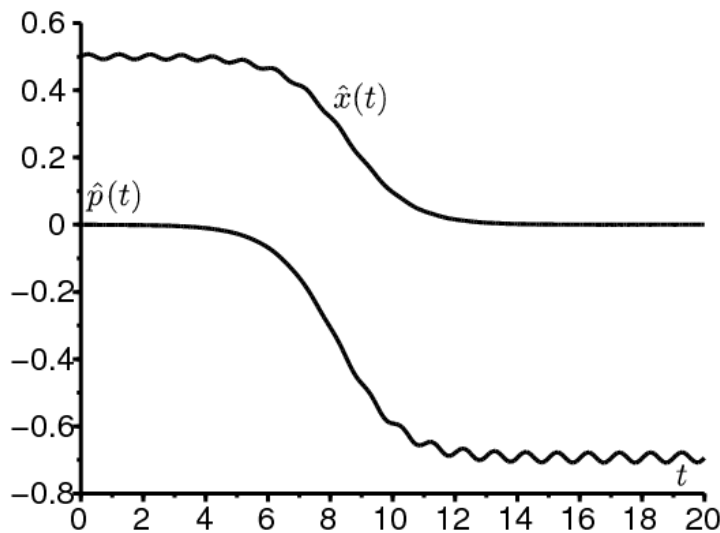


Abbildung 5. Die Komponenten  $t \mapsto \hat{x}(t)$  und  $t \mapsto \hat{p}(t)$  der Heterokline-Umlaufbahn, die die beiden periodischen Lösungen verbindet  $(0, p^*(t))$  und  $(x^*(t), 0)$ . Gleiche Parameterwerte wie in Abbildung 4 und  $\varepsilon = 0,1$ .

## 4. Hinweise

- Mit der verfeinerten BKW-Lösung können genauere Schätzungen erzielt werden

$$\pi_n(t) \simeq e^{-N S_0(t,n/N) - S_1(t,n/N)}.$$

Durch Einfügen

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-N S_0(t,n/N) - \frac{\partial S_0}{\partial x}(t,n/N) - \frac{1}{2N} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(t,n/N) - S_1(t,n/N) - \frac{1}{N} \frac{\partial S_1}{\partial x}(t,n/N)}$$

und ein ähnlicher Ausdruck für  $\pi_{n-1}(t)$  in (8) und durch Trennen der Terme höheren Grades erhalten wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung (10) für  $S_0(t, x)$  und die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left[ a(t)x(1-x)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} - bxe^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \right] \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ = a(t)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ 1 - 2x + \frac{x(1-x)}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] + be^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ -1 + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

für  $S_1(t, x)$ . Wenn  $a(t)$  ist also periodisch  $S_0(t, x)$  und  $S_1(t, x)$  muss numerisch berechnet werden. Wenn  $a(t) = a$  ist konstant, dann ist der präexponentielle Faktor für  $\lambda_1$  wird durch das Verfahren verbundener asymptotischer Expansionen wie

folgt erhalten (Assaf und Meerson, 2010). Zuerst  $S_0(x)$  ist gegeben durch (3) und die Gleichung für  $S_1(x)$  führt zu

$$S_1(x) = \log(x\sqrt{1-x}) + \text{const.}$$

Also

$$\pi_n \simeq \kappa \frac{e^{-NS_0(n/N)}}{\frac{n}{N} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}}$$

für eine Konstante  $\kappa$ . Wenn  $n$  klein ist,

$$\pi_n \simeq \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0) - nS_0'(0)} = \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0)} \left(\frac{a}{b}\right)^n. \quad (23)$$

Für das System (8) können wir auch die Näherung verwenden

$$a(n-1)\pi_{n-1} - n(a+b)\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1} \simeq 0, \quad n \geq 1.$$

Also

$$\pi_n \simeq \frac{\pi_1}{n} \frac{1 - (a/b)^n}{1 - a/b} \sim \frac{\pi_1}{n} \frac{(a/b)^n}{a/b - 1}.$$

Dies stimmt nur dann mit (23) überein, wenn  $\pi_1 \simeq \kappa N e^{-NS_0(0)} \left(\frac{a}{b} - 1\right)$ . Schließlich gibt (9)

$$\lambda_1 \simeq \frac{-b\pi_1/(\kappa N)}{\int_0^1 \frac{e^{-NS_0(x)}}{x\sqrt{1-x}} dx} \simeq \frac{(b-a)x^* \sqrt{1-x^*} \sqrt{NS_0''(x^*)}}{e^{N[S_0(0) - S_0(x^*)]} \sqrt{2\pi}} = -\frac{(a-b)^2}{a e^{cN}} \sqrt{\frac{N}{2\pi}}$$

(Assaf und Meerson, 2010, Gleichung (71)). Wenn zum Beispiel  $a = 20$ ,  $b = 5$  und  $N = 50$  dann liegt diese Schätzung nur 2% über dem Wert von  $\lambda_1$  erhalten mit Software zur Berechnung der Eigenwerte großer Matrizen wie in Abbildung 1. Die Methode der verbundenen asymptotischen Erweiterungen kann wahrscheinlich auf den periodischen Fall ausgedehnt werden, es ist jedoch unwahrscheinlich, dass sie zu einer expliziten Formel führt.

- Sei die generierende Funktion

$$\phi(t, z) = \sum_{n=0}^N P_n(t) z^n$$

mit  $0 \leq z \leq 1$ . Also  $\phi(t, 1) = 1$  für alle  $t$ . Eine einfache Berechnung ab (7) zeigt dies

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1-z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

für  $0 < z < 1$ . Im quasistationären Regime wird dies erwartet

$$\phi(t, z) \simeq 1 + e^{\lambda_1 t} \psi(t, z)$$

mit  $\psi(t, z)$  periodisch in  $t$ ,  $\psi(t, 1) = 0$  und

$$\lambda_1 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1-z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Also  $\lambda_1$  ist auch der größte Nicht-Null-Eigenwert dieses parabolischen Problems. Dies könnte eine Möglichkeit sein, die asymptotischen Ergebnisse für  $N$  groß genauer zu demonstrieren.

- Mit  $P_n(t) = \mathcal{P}(t, x)$  wo  $x = n/N$  und indem wir eine Taylor-Expansion in Ordnung 2 der Hauptgleichung (7) durchführen, erhalten wir die Fokker-Planck-Gleichung oder Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ (a(t)x(1-x) - bx) \mathcal{P} \right] + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (a(t)x(1-x) + bx) \mathcal{P} \right].$$

Ebenso für die durchschnittliche Extinktionszeit  $\tau_n(t) = \tau(t, x)$  wo  $x = n/N$ , (13) führt zu dem damit verbundenen Problem

$$-1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (a(t)x(1-x) - bx) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{2N} (a(t)x(1-x) + bx) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

Bei zeitunabhängigen Koeffizienten wissen wir jedoch bereits, dass diese Gleichungen normalerweise nicht den korrekten Wert von  $C$  ergeben (Doering et al., 2005). Der Wert ist in der Regel nur dann korrekt, wenn  $R_0$  liegt nahe bei 1. Das gleiche Problem tritt bei anderen Epidemiemodellen auf. Zum Beispiel (Diekmann et al., 2012, S. 112-113) verwendet eine Diffusionsnäherung, um  $C$  in einem SIR-Modell zu schätzen, obwohl  $R_0 \simeq 10$  in ihrer digitalen Anwendung. Für eine BKW-Analyse des stochastischen SIR-Modells siehe (Kamenev und Meerson, 2008).



- Die Nummer  $1/C$  kann als kritische Größe der Gemeinschaft bezeichnet werden (Diekmann et al., 2012).

## Anhang

Lassen Sie uns das zeigen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du = \frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}.$$

Erstens  $e^u/(1+e^u)^2 = 1/(4 \cosh^2(u/2))$  ist eine gerade Funktion. Dies in Kombination mit der Integration von Teilen zeigt dies

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 2 \int_0^{+\infty} \cos(\lambda u) \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du \\ &= 2 \left[ \frac{-\cos(\lambda u)}{1+e^u} \right]_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda u)}{1+e^u} du \\ &= 1 - 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} \sin(\lambda u)}{1+e^{-u}} du. \end{aligned}$$

Durch die Entwicklung  $1/(1+e^{-u})$  in Potenzreihen bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 1 - 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)u} \sin(\lambda u) du \\ &= 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^2 + (n+1)^2}. \end{aligned}$$

Die Summe dieser Reihen kann mit der Euler-Formel berechnet werden

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

das gilt für jede komplexe Zahl  $z$  mit  $z \neq n\pi$  ( $n$  ganze Zahl). Wir nehmen  $z = i\pi\lambda$ . Weil  $\sin(i\pi\lambda) = i \sinh(\pi\lambda)$  bekommen wir

$$\frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

und das Ergebnis folgt.

### Danksagung

Dieser Artikel wurde durch eine Diskussion mit Hans Metz über die effektive Populationsgröße in einem periodischen Umfeld während einer Konferenz über stochastische Modelle in Ökologie, Evolution und Genetik in Angers im Dezember 2013 angeregt.

### Referenzen

- Andersson H, Djehiche B (1998) A threshold limit theorem for the stochastic logistic epidemic. *J Appl Probab* 35 : 662–670
- Aronsson G, Kellogg RB (1978) On a differential equation arising from compartmental analysis. *Math Biosci* 38 : 113–122
- Assaf M, Kamenev A, Meerson B (2008) Population extinction in a time-modulated environment. *Phys Rev E* 78 : 041123
- Assaf M, Meerson B (2010) Extinction of metastable stochastic populations. *Phys Rev E* 81 : 021116
- Bacaër N, Ait Dads E (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter  $R_0$  in periodic population models. *J Math Biol* 65 : 601–621
- Barles G (1994) *Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi*. Springer, Berlin
- Barles G, Perthame B (1988) Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J Control Optim* 26 : 1133–1148
- Billings L, Mier-y-Teran-Romero L, Lindley B, Schwartz IB (2013) Intervention-based stochastic disease eradication. *PLoS ONE* 8(8) : e70211
- Diekmann O, Heesterbeek H, Britton T (2012) *Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics*. Princeton University Press, Princeton
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth–death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker–Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299

- Escudero C, Rodríguez JA (2008) Persistence of instanton connections in chemical reactions with time-dependent rates. *Phys Rev E* 77 : 011130
- Hethcote H (1973) Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model. *Bull Math Biol* 35 : 607–614
- Kamenev A (2011) *Field theory of non-equilibrium systems*. Cambridge University Press, Cambridge
- Kamenev A, Meerson B (2008) Extinction of an infectious disease : a large fluctuation in a nonequilibrium system. *Phys Rev E* 77 : 061107
- Mitake H (2009) Large time behavior of solutions of Hamilton–Jacobi equations with periodic boundary data. *Nonlinear Anal* 71 : 5392–5405
- Nasell I (2011) *Extinction and quasi-stationarity in the stochastic logistic SIS model*. Springer, Berlin
- Osher S, Shu CW (1991) High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton–Jacobi equations. *SIAM J Numer Anal* 28 : 907–922
- Ovaskainen O, Meerson B (2010) Stochastic models of population extinction. *Trends Ecol Evol* 25 : 643–652
- Rabinowitz PH (1994) Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system. *Ergod Theor Dyn Syst* 14 : 817–829
- Roquejoffre JM (2001) Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton–Jacobi equations. *J Math Pures Appl* 80 : 85–104
- Soner HM (1986) Optimal control with state–space constraint I. *SIAM J Control Optim* 24 : 552–561