

# على نموذج الستوكاستك SIS لوباء في بيئة دورية

J. Math. Biol. 71 (2015) 491–511

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01265563>

Nicolas Bacaër

Bondy, France, Institut de Recherche pour le Développement  
Pierre and Marie Curie University, Les Cordeliers, Paris, France  
nicolas.bacaer@ird.fr

## الملخص

في نموذج الاستوكاستك SIS لوباء بمعدل اتصال  $a$ ، ومعدل علاج  $b < a$  وحجم سكان  $N$ ، فإن متوسط وقت الانقراض such هو  $(\log \tau)/N$  يتلاقى ل  $c = b/a - 1 - \log(b/a)$  عندما تتقارب  $N$  إلى ما لا نهاية. نتناول هذه المقالة الحالة الأكثر واقعية حيث يكون معدل الاتصال وظيفية دورية يكون متوسطها أكبر من  $b$ . ثم  $(\log \tau)/N$  تتقارب إلى حد جديد  $C$ ، والذي يرتبط بمعادلة هاميلتون-جاكوبي الدورية. عندما يكون معدل التلامس دالة جيب التمام ذات سعة صغيرة أو بتردد كبير أو بتردد صغير جدًا، يمكن للمرء الحصول على صيغ تقريبية لـ  $C$  تحليليًا كما في [Assaf et al., 2008, Phys Rev E 78, 041123]. يتم توضيح هذه النتائج من خلال المحاكاة العددية.

## 1. مقدمة

تمت دراسة النموذج العشوائي SIS للوباء بالتفصيل عندما يفترض أن تكون البيئة ثابتة، كما هو الحال في كتاب (Nåsell, 2011). مع معدل الاتصال  $a$ ، ومعدل العلاج  $b < a$  وحجم السكان  $N$ ، فإن متوسط الوقت للانقراض  $\tau$  (بدءًا من شخص مصاب على سبيل المثال) هو

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} c = b/a - 1 - \log(b/a) > 0 \quad (1)$$

(Nåsell, 2011, Theorem 12.1). من بين المراجع الأخرى، انظر أيضًا (Doering et al., 1998) (Andersson and Djehiche, 2010) (Assaf and Meerson, 2010) (al., 2005). يستخدم الأخير طريقة Brillouin و Kramers و Wentzel [BKW]. الإحتمال  $P_n(t)$  وجود  $I \leq n$  المصابين إلى وقت  $t$  النهج الأول من توزيع شبه ثابتة  $\pi_n$ . نحدد  $x = n/N$  بحيث  $0 \leq x \leq 1$ . عندما تتقارب  $N$  إلى ما لا نهاية،  $(\log \pi_n)/N$  تقترب من وظيفية مستمرة  $S(x)$  مع معادلة هاميلتون-جاكوبي الثابتة

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$$

مع

$$\begin{aligned} H(x, p) &= ax(1-x)(e^p - 1) + bx(e^{-p} - 1) \\ &= x(1 - e^{-p})[a(1-x)e^p - b] \end{aligned} \quad (2)$$

(عساف وميرسون، 2010، (12) و (IV.D.3)). بتعبير أدق، فرع خط المستوى  $H = 0$  مع  $a(1-x)e^p - b = 0$  يؤدي إلى الصيغة

$$S(x) = x \log(b/a) + x + (1-x) \log(1-x) + \text{constante}. \quad (3)$$

هذه الوظيفة لديها الحد الأدنى عندما  $x = x^* = 1 - b/a$  مع  $x^* > 0$  لأن  $b < a$ . أخيرًا

$$c = S(0) - S(x^*)$$

هو الارتفاع بين الجزء السفلي والحافة عند  $x = 0$  للبئر المحتمل  $S(x)$ . وبالمثل، فإن النظام هاميلتوني

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (4)$$

لديه مدار مغاير للربط  $(x^*, 0) = (1 - \frac{b}{a}, 0)$  و  $(0, p^*) = (0, \log \frac{b}{a})$ . الرقم  $c$  يساوي الإجراء

$$\int_{x^*}^0 p dx$$

على طول هذا المدار. تم استخدام طريقة BKW لعمليات الولادة والوفاة الأخرى في الفيزياء أو بيولوجيا السكان (Ovaskainen and Kamenev، 2011؛ Meerson، 2010).

في دراستهم للتفاعل الكيميائي مع التفرع والإبادة، (Escudero and Rodríguez، 2008) أظهر كيف أن البيئة الدورية في الوقت المناسب أثرت على مدار heterocline الذي يلعب دوراً مركزياً لمتوسط وقت الانقراض. (عساف وآخرون، 2008) درسوا نفس النموذج بمزيد من التفصيل، ولا سيما حساب التصحيح لمتوسط وقت الانقراض بسبب الاضطراب الدوري للسعة الصغيرة أو التردد المنخفض أو التردد العالي. حصل هؤلاء المؤلفون على صيغ عامة يمكن تطبيقها على عمليات الولادة والوفاة الأخرى مع الانبثاثة. علاوة على ذلك، (بيلينجز وآخرون، 2013، الشكل 7) يُظهر محاكاة مونت كارلو لنموذج عشوائي استراتيجي SIS.

الهدف هنا هو تطبيق طريقة BKW المستخدمة من قبل (Assaf et al.، 2008) على نموذج وباء SIS مع معدل الاتصال الدوري  $T$  الذي يزيد متوسطه عن  $b$ . يمكن أن يمثل هذا النموذج على سبيل المثال انتشار عدوى بكتيرية لا تمنح المناعة. يمكن أن يتم الانتشار في مدرسة ذات دورية أسبوعية (مستحقة في عطلات نهاية الأسبوع)، أو دورية سنوية (بسبب العطل والموسمية). هذه بالطبع ليست سوى خطوة أولى نحو نماذج أكثر واقعية.

في القسم 2، تشير الحسابات غير الرسمية إلى أن متوسط وقت الانقراض  $\tau$  (يبدأ على سبيل المثال من شخص مصاب في الوقت 0) مثل هذا

$$\frac{\log \tau}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C = \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+) - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x). \quad (5)$$

هنا،  $S^*(t, x)$  هو حل اللزوجة الدوري  $T$  لمعادلة هاميلتون-جاكوبي

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \quad (6)$$

ل  $0 < x < 1$  مع حالة الحافة المختلطة Dirichlet - "حالة مقيدة"

$$S(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty.$$

$S^*(t, x)$  يجب ألا يكون صفرًا تقريبًا بالقرب من  $s = 0$ . يجب فهم الشرط عند الحواف بمعنى اللزوجة (Barles، 1994) لأنه  $S^*(t, 0^+)$  قد لا تساوي 0. هاميلتونيان  $H(t, x, p)$  مطابق لـ (2) فيما عدا المعامل الثابت  $a$  تم استبداله بـ  $a(t)$ . إذا

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t)), \quad \omega = 2\pi/T, \quad a_0 > b, \quad |\varepsilon| \leq 1,$$

نحدد  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$ . باتباع طرق (عساف وآخرون، 2008)، يوضح القسم 2 ذلك

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}$$

إذا  $\varepsilon$  قريب من 0،

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon|(1 - b/a_0)$$

إذا  $\omega \ll a_0$  و

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0)$$

في حد التردد العالي  $a_0 \gg \omega$ . يمكننا تخمين ذلك  $C > 0$  طالما  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ .  $C$  ربما يكون دائما أقل من  $c_0$ ، لأن الاختلافات الموسمية تميل لصالح انقراض الأمراض المعدية. يشير هذا بشكل أكثر دقة إلى أن البيئة الدورية تؤدي إلى نموذج SIS إلى انخفاض أسي في متوسط وقت الانقراض مماثل لتلك التي تم الحصول عليها لنموذج التفرع والإبادة (Assaf et al.، 2008). يوضح القسم 3 هذه النتائج بمحاكاة عديدة. القسم 4 يضيف بعض الملاحظات.

## 2. الحسابات التحليلية

### 2.1 معادلة هاميلتون-جاكوبي التفاضلية الجزئية

معادلة الماجستير ونظرية فلوكلية.  $N$  هو إجمالي عدد السكان ، على افتراض أنه ثابت. يوجد

- $S(t)$  الأشخاص الأصحاء
- $I(t)$  المصابين

في الوقت  $t$  ، مع  $N = S(t) + I(t)$  . إذا  $I(t) = n$  ،

- مع الاحتمال  $bndt + o(dt)$  شخص يشفى
- مع الاحتمال  $a(t)n(1 - n/N)dt + o(dt)$  شخص مصاب

بين  $t$  و  $t + dt$  . لذا  $a(t)$  هو معدل الاتصال و  $b$  نسبة الشفاء. نفترض ذلك  $a(t)$  هي دالة موجبة مستمرة  $T$ -periodic مع

$$r = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt - b > 0,$$

بعبارة أخرى

$$R_0 = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt}{b} > 1.$$

لتفسير بيولوجي لل  $R_0$  ، راجع. (بكار وآيت دادس ، 2012). (Hethcote، 1973) لاحظ أن  $r > 0$  (أي  $R_0 > 1$ ) هو شرط ضروري وكافٍ لحل معادلة المجال الوسط هذه ليتقارب إلى وظيفة دورية وإيجابية:

$$\frac{di}{dt} = a(t)i(1 - i) - bi.$$

وإلا يتقارب الحل إلى صفر.

إذا  $P_n(t)$  هو احتمال ذلك  $I(t) = n$  لدينا

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dt} = & a(t)(n - 1)(1 - (n - 1)/N)P_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]P_n \\ & + b(n + 1)P_{n+1} \end{aligned} \quad (7)$$

ل  $0 \leq n \leq N$  . هنا ،  $P_{-1} = 0$  و  $P_{N+1} = 0$  . طبعاً،

$$\sum_{n=0}^N P_n(t) = 1.$$

كما تم كتابة النظام (7)

$$\frac{dP}{dt} = M(t) P,$$

أين  $P(t)$  هو المتجه  $(P_n(t))_{0 \leq n \leq N}$  و  $M(t)$  هي مصفوفة مربعة بحجم  $N + 1$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b - a(t)(1 - \frac{1}{N}) & 2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(t)(1 - \frac{1}{N}) & -2b - 2a(t)(1 - \frac{2}{N}) & 3b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -bN \end{pmatrix}.$$

$$M(t) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & Q(t) \end{array} \right),$$

أين  $Q(t)$  هو مصفوفة مربعة من حجم  $N$ .  $X(t)$  و  $Y(t)$  هي المصفوفات مع

$$\frac{dX}{dt} = M(t) X, \quad X(0) = I_{N+1}$$

$$\frac{dY}{dt} = Q(t) Y, \quad Y(0) = I_N.$$

$I_N$  هو مصفوفة هوية حجم  $N$ . مضاعفات فلوك  $M(t)$ ، أي القيم الذاتية لمصفوفة  $X(T)$  monodromy هم  $\{\mu_0 = 1\}$  ومضاعفات فلوكويت  $Q(t)$ . المصفوفة  $Q(t)$  تعاونية: المعاملات خارج القطر موجبة أو صفر. هذه المصفوفة غير قابلة للاختزال أيضاً لأن العناصر الموجودة أعلى وأسفل القطر كلها إيجابية تماماً. لذلك، كل عناصر  $Y(t)$  هي إيجابية للغاية  $t > 0$ . وفقاً لنظرية Perron و Frobenius،  $\mu_1$  eigenvalue من  $Y(T)$  مع الجزء الحقيقي الأكبر هو عدد حقيقي موجب تماماً ومساحة eigenspace المرتبطة بها هي البعد 1. بالإضافة إلى ذلك،

$$(1 \ 1 \ \dots \ 1)Q(t) = (-b \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

$Q(t)$  "يهرب" و  $0 < \mu_1 < 1$  (Aronsson and Kellogg، 1978). لذا  $\lambda_1 = (\log \mu_1)/T < 0$ . ناقل  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  هي حالة مستقرة.  $P(t)$  تتلاقى مع هذا المتجه إذا  $t \rightarrow +\infty$ . الهدف هنا هو تقدير القرب بين  $N$  كبير  $\lambda_1$  و 0.

فليكن  $v$  eigenvector من  $X(T)$  المرتبطة بالقيمة الذاتية  $e^{\lambda_1 T} = \mu_1$ . يمكننا اختيار  $v$  بحيث  $v_n > 0 \ \forall \ 1 \leq n \leq N$ . لذا

$$X(T)v = e^{\lambda_1 T} v.$$

كما هو الحال في نظرية فلوكيه، نحدد

$$\pi(t) = e^{-\lambda_1 t} X(t)v.$$

ثم

$$\frac{d\pi}{dt}(t) = -\lambda_1 \pi(t) + M(t)\pi(t).$$

المزيد

$$\pi(T) = e^{-\lambda_1 T} X(T)v = v = \pi(0).$$

لذا  $\pi(t)$  هو  $T$ -periodic. إذا  $\pi(t) = (\pi_n(t))_{0 \leq n \leq N}$ ، ثم

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = a(t)(n-1)(1 - (n-1)/N)\pi_{n-1} - [a(t)n(1 - n/N) + bn]\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1}. \quad (8)$$

من خلال تلخيص هذه المعادلات، نحصل على

$$\lambda_1 \sum_{n=0}^N \pi_n(t) + \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0.$$

لذا

$$\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=0}^N \pi_n(0).$$

لكن  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t)$  هو  $T$ -periodic. لذلك  $\sum_{n=0}^N \pi_n(0) = 0$  و  $\sum_{n=0}^N \pi_n(t) = 0$  للجميع  $t$ . لذا

$$\pi_0(t) = - \sum_{n=1}^N \pi_n(t).$$

ولكن (8) مع  $n = 0$  يظهر ذلك أيضا

$$\lambda_1 \pi_0(t) + \frac{d\pi_0}{dt} = b \pi_1(t).$$

لان  $\pi_0(t)$  دورية ، نحصل عليها عن طريق الدمج

$$\lambda_1 = b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\int_0^T \pi_0(t) dt} = -b \frac{\int_0^T \pi_1(t) dt}{\sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt}. \quad (9)$$

**حل BKW ومعادلة هاميلتون-جاكوبي.** عندما تكون  $N$  كبيرة ، دعنا نبحث عن حل BKW

$$\pi_n(t) \simeq e^{-NS(t,x)}$$

ل  $1 \leq n \leq N$  ، أين  $x = n/N$  و  $S(t, x)$  هي دالة مستمرة لـ  $t$  و  $0 < x < 1$  وهو  $T$ -periodic فيما يتعلق بـ  $t$ . ثم

$$\frac{d\pi_n}{dt} \simeq -N \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) e^{-NS(t,x)},$$

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-NS(t, x + \frac{1}{N})} \simeq e^{-NS(t,x) - \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}, \quad \pi_{n-1}(t) \simeq e^{-NS(t,x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)}.$$

نحدد  $\beta(x) = bx$  و  $\alpha(t, x) = a(t)x(1-x)$  لذلك (8) مكتوب

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} = N\alpha(t, x - 1/N)\pi_{n-1} - N[\alpha(t, x) + \beta(x)]\pi_n + N\beta(x + 1/N)\pi_{n+1}.$$

من خلال الاحتفاظ بالتعبيرات السائدة فقط ، يمكننا استخدامها  $\alpha(t, x - 1/N) \simeq \alpha(t, x)$  و  $\beta(x + 1/N) \simeq \beta(x)$  للحصول على

$$\lambda_1 \pi_n + \frac{d\pi_n}{dt} \simeq N\alpha(t, x)[\pi_{n-1} - \pi_n] + N\beta(x)[\pi_{n+1} - \pi_n].$$

$\lambda_1$  على الأرجح صغير للغاية. يمكن تجاهلها على الجانب الأيسر. عن طريق حقن شكل BKW وقسمة  $N e^{-NS(t,x)}$  نحصل على معادلة هاميلتون-جاكوبي

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a(t)x(1-x) \left[ e^{\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] + bx \left[ e^{-\frac{\partial S}{\partial x}} - 1 \right] = 0 \quad (10)$$

ل  $0 < x < 1$ . هذا هو شكل (6) مع هاميلتوني دورية  $H(t, x, p)$  و (2)  $a(t)$  يستبدل  $a$ . المعادلات مثل (10) لها عادة حلول مقاربة للنموذج  $S(t, x) = -Et + \Sigma(t, x)$  أين  $\Sigma(t, x)$  هو  $T$ -periodic فيما يتعلق  $t$  و  $E$  ثابت. هنا ولكن الحلول فقط مع  $E = 0$  ذات أهمية: فهي تتوافق مع مدارات غير متجانسة في القسم 2.2 أدناه.

**شروط الحافة.** لان  $H(t, 0, p) = 0$  ، لدينا  $\frac{\partial S}{\partial t}(t, 0) = 0$ . لذا  $S(t, 0)$  هو ثابت  $S_0$  بغض النظر عن  $t$ . كما (10) ينطوي فقط على الدرجة الأولى المشتقات الجزئية، يتم تعريف الحلول في ثابت مضافة (أذكر أن بالمتجه الذاتي الخامس من  $X(T)$  يعرف ضمن ثابت الضرب). حتى تتمكن من الاختيار  $S_0 = 0$ ، وبالتالي حالة Dirichlet:

$$S(t, 0) = 0 \quad \forall t. \quad (11)$$

بالإضافة إلى ذلك ، لأن  $\pi_n(t) = 0$  ل  $n > N$  ولأن الصيغة (3) في بيئة ثابتة تظهر ذلك  $|S(1)| < +\infty$  بينما  $\frac{dS}{dx}(1) = +\infty$  ، نحن نفرض ذلك

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, 1) = +\infty \quad \forall t. \quad (12)$$

طريقة أخرى لتقديم هذا الشرط على الحافة هي "قيود الدولة"

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \geq 0$$

إذا  $x = 1$  تؤدي هذه الحالة مع  $x = 1$  إلى

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}) \geq 0$$

(سونر ، 1986). لكن بسبب

$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p},$$

هذا التعبير إيجابي أو صفر  $x = 1$  إذا فقط إذا  $p = +\infty$  كما في (12).

**خصائص هاميلتونيان.**  $H(t, x, p)$  هو محدب في  $v$  لأن

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p + bxe^{-p} \geq 0.$$

بالإضافة إلى ذلك ،  $H(t, x, p) \rightarrow +\infty$  إذا  $|p| \rightarrow +\infty$  شريطة أن  $0 < x < 1$ . لكن هذه الخاصية لم تعد صحيحة متى  $x = 0$  أو آخر  $x = 1$ . لقد فعلنا  $H(t, x, 0) = 0$ . لا غرارج

$$L(t, x, v) = \max_p \{pv - H(t, x, p)\}.$$

إذا  $0 < x < 1$  لدينا

$$L(t, x, v) = p_*v - H(t, x, p_*)$$

مع  $p_*$  حل فريد من نوعه

$$v = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p_*) = a(t)x(1-x)e^{p_*} - bxe^{-p_*}.$$

وهي معادلة كثيرة الحدود لدرجة 2 بوصة  $e^{p_*}$ . هذا يعطي

$$\begin{aligned} L(t, x, v) &= p_*v - a(t)x(1-x)(e^{p_*} - 1) - bx(e^{-p_*} - 1) \\ &= v \log\left(\frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2a(t)x(1-x)}\right) + a(t)x(1-x) + bx \\ &\quad - \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}{2} - \frac{2a(t)x(1-x)bx}{v + \sqrt{v^2 + 4a(t)x(1-x)bx}}. \end{aligned}$$

ل  $x = 1$ ، لدينا

- $L(t, 1, v) = +\infty$  إذا  $v > 0$
- $L(t, 1, 0) = b$
- $L(t, 1, v) = -v \log(-v/b) + v + b$  إذا  $v < 0$

ل  $x = 0$ ، لدينا

- $L(t, 0, v) = +\infty$  إذا  $v \neq 0$
- $L(t, 0, 0) = 0$

بالنسبة إلى  $x$  بالقرب من 0 ، لاحظ ذلك  $L(t, x, v) \sim -v \log x$  لذلك  $\eta > 0$  صغير ولأي وظيفة  $\xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1])$  مع  $\xi(\theta) = 0$  لدينا

$$\int_{\theta}^{\theta+\eta} L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds \simeq - \int_{\theta}^{\theta+\eta} \frac{d\xi}{ds}(s) \log \xi(s) ds = - \int_0^{\xi(\theta+\eta)} \log \xi d\xi,$$

وهو ليس لانتهائي.

حلول معادلة هاملتون - جاكوبي. لحالة أولية معينة  $S_0(x)$ ، الوظيفة

$$S(t, x) = \inf \left\{ \int_{\theta}^t L(s, \xi(s), \dot{\xi}(s)) ds + 1_{\theta=0} S_0(\xi(\theta)); \right. \\ \left. 0 \leq \theta \leq t, \xi \in C^1([\theta, t]; [0, 1]), \theta = 0 \vee \xi(\theta) = 0, \xi(t) = x \right\}$$

هو حل لزوجية من (10) بظروف مختلطة (11) - (12) عند الحواف ومع  $S(0, x) = S_0(x)$  (بارلز ، 1994). إنها دالة القيمة لمشكلة وقت الخروج في  $x = 0$  مع "قيود الدولة" في  $x = 1$ . حل دوري  $S^*(t, x)$  من (10) - (11) - (12) تُعطي من خلال نقطة ثابتة من عامل التطور أعلاه:  $S^*(0, x) = S^*(T, x)$ . (Roquejoffre، 2001) و (Mitake، 2009) درسوا معادلات هاملتون-جاكوبي الدورية المماثلة مع الظروف عند حواف نوع ديريشليت. لاحظ أنه لا يوجد تفرد. للمشاكل ذات الصلة ، راجع. (Barles and Perthame، 1988). في الواقع ، النظر في الحالة الخاصة حيث  $a(t) = a_0$  ثابت. في هذه الحالة ، هناك نوعان من حلول اللزوجة الثابتة  $S^*(x)$ .

• من ناحية هناك حلول النموذج

$$x \log(b/a_0) + x + (1 - x) \log(1 - x) + \gamma$$

مع ثابت  $\gamma \leq 0$ ، والتي تختلف فقط من خلال ثابت  $\gamma$ . الحل مع  $\gamma = 0$  هو الوحيد الذي يتحقق من الحالة عند الحافة بـ  $x = 0$  بالمعنى الكلاسيكي.

• من ناحية أخرى هناك حلول للنموذج

$$\min\{0, x \log(b/a_0) + x + (1 - x) \log(1 - x) + \gamma\}$$

مع ثابت  $\gamma$  مثل ذلك  $0 < \gamma \leq c_0$ . هذه الحلول هي مماثل الصفر القريب س  $0 =$  ولا تعطي  $C$ .

بالنسبة للمعادلة الدورية (10) بشروط مختلطة (11) - (12) عند الحواف ، يمكننا أن نفترض أن لها حلول اللزوجة

- وهي  $T$ -periodic فيما يتعلق بـ  $t$  ،
- وهي ليست متطابقة تمامًا بالقرب من  $s = 0$  ،
- والتي تختلف فقط بواسطة ثابت (وبالتالي إعطاء نفس  $C$ ).

إنه حل نختاره كحل BKW. كما يوحي الشكل 3 أدناه ، يجب فهم الحالة عند الحافة عند  $s = 0$  بمعنى اللزوجة لأن المحلول قد لا يكون مستمرًا عند  $s = 0$ .

سلوك  $\lambda_1$  إذا كانت  $N$  كبيرة. بالعودة إلى (9) لدينا

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} = \frac{\log b}{N} + \frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) - \frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right).$$

لقد فعلنا

$$\pi_1(t) \simeq e^{-NS^*(t, 1/N)} \simeq e^{-NS^*(t, 0^+)}$$

ل  $N$  كبير. لذا

$$\frac{1}{N} \log \left( \int_0^T \pi_1(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} S^*(t, 0^+)$$

بسبب صيغة لابلاس للتقييم التقاربي للتكاملات. وبالمثل ، لأنه  $\pi_n(t) \simeq e^{-NS^*(t, n/N)}$  لدينا

$$\frac{1}{N} \log \left( \sum_{n=1}^N \int_0^T \pi_n(t) dt \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} - \min_{0 \leq t \leq T} \min_{0 \leq x \leq 1} S^*(t, x)$$

$$\frac{\log(-\lambda_1)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -C$$

مع  $C$  المعطى بواسطة (5). يمكننا تخمين ذلك  $C > 0$  إذا فقط إذا  $\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt > b$ .

**متوسط وقت الانقراض.** ابتداء من عدد الأشخاص المصابين في الوقت  $t$ ، متوسط وقت الانقراض  $\tau_n(t)$  هو الحل الدوري للنظام  $T$

$$-1 = \frac{d\tau_n}{dt} + b n \tau_{n-1} - (a(t)n(1 - n/N) + b n) \tau_n + a(t)n(1 - n/N) \tau_{n+1} \quad (13)$$

ل  $1 \leq n \leq N$  مع  $\tau_0(t) = 0$ . يتضمن هذا النظام المصفوفة المنقولة  $Q^*(t)$  المصفوفة  $Q(t)$ . نحدد

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(t) &= (\tau_n(t))_{1 \leq n \leq N} \\ \hat{\pi}(t) &= (\pi_n(t))_{1 \leq n \leq N} \\ \mathbf{1} &= (1, 1, \dots, 1) \\ \langle \cdot, \cdot \rangle & \text{ الناتج العادي للموجهات الحقيقية.} \end{aligned}$$

ثم

$$\lambda_1 \hat{\pi} + \frac{d\hat{\pi}}{dt} = Q(t) \hat{\pi}, \quad -\mathbf{1} = \frac{d\hat{\tau}}{dt} + Q^*(t) \hat{\tau}.$$

و

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle = \left\langle \frac{d\hat{\pi}}{dt}, \hat{\tau} \right\rangle + \left\langle \hat{\pi}, \frac{d\hat{\tau}}{dt} \right\rangle = \langle Q(t) \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \lambda_1 \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle - \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle - \langle \hat{\pi}, Q^*(t) \hat{\tau} \rangle.$$

تعايير مع  $Q(t)$  و  $Q^*(t)$  إلغاء بعضها البعض. من خلال دمج واستخدام دورية  $T$ - $\hat{\pi}(t)$  و  $\hat{\tau}(t)$ ، نحصل

$$-\lambda_1 = \frac{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \mathbf{1} \rangle dt}{\int_0^T \langle \hat{\pi}, \hat{\tau} \rangle dt}.$$

هذا يشير إلى أن متوسط وقت الانقراض  $\tau$ ، على سبيل المثال من شخص مصاب في الوقت  $0$ ، هو من نفس الحجم من حيث الحجم  $-1/\lambda_1$ :

$$\frac{\log(\tau)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} C.$$

يمكن للمرء أن يخمن أن هذا التحليل غير الرسمي بشكل أساسي يمكن وضعه في شكل صارم، كما هو الحال بالنسبة لنموذج SIS في بيئة ثابتة (Nåsell، 2011).

## 2.2 مدار heterocline

**حالة عامة.** تذكر أن معادلة هاميلتون-جاكوبي (6) يمكن حلها محليًا على الأقل من خلال تتبع الأشعة، أي من خلال حل النظام الهاملتوني (4) والمعادلة في نفس الوقت

$$\frac{dz}{dt} = p(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t)) - H(t, x(t), p(t))$$

مع الشروط الأولية  $x(0) = x_0$ ،  $p(0) = \frac{\partial S}{\partial x}(0, x_0)$ ،  $z(0) = S(0, x_0)$ ، بحيث  $z(t) = S(t, x(t))$ . في متابعة (عساف وآخرون، 2008)، دعونا نلقي نظرة عن كثب على نظام هاميلتوني (4). في هذه الحالة،



$$\frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) = a(t)x(1-x)e^p - bxe^{-p}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) = a(t)(1-2x)(e^p - 1) + b(e^{-p} - 1).$$

دعونا أولاً نبحث عن حل  $T$ -غير دوري غير دوري مثل ذلك  $x \equiv 0$  و

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, 0, p) = -(a(t) - be^{-p})(e^p - 1).$$

مع  $p = \log(1 + q)$  نحصل على معادلة برنولي التفاضلية التي يمكن حلها بسهولة. هذا يعطي الحل تي-الدوري

$$p^*(t) = \log \left( 1 + \left[ \frac{e^{-bt + \int_0^t a(s) ds}}{e^{p^*(0)} - 1} + \int_0^t a(s) e^{-b(t-s) + \int_s^t a(u) du} ds \right]^{-1} \right),$$

أين

$$p^*(0) = \log \left( 1 + \frac{1 - e^{-bT + \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(s) e^{-b(T-s) + \int_s^T a(u) du} ds} \right).$$

الحل الدوري  $(0, p^*(t))$  غير مستقر. في الواقع، مع  $x(t) = \tilde{x}(t)$  و  $p(t) = p^*(t) + \tilde{p}(t)$  وبخطية المعادلات نحصل

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)} & 0 \\ 2a(t)(e^{p^*(t)} - 1) & -a(t)e^{p^*(t)} + be^{-p^*(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

مضاعفات فلوك هي

$$f = \exp \int_0^T [a(t)e^{p^*(t)} - be^{-p^*(t)}] dt$$

و  $1/f$  وبالتالي عدم الاستقرار. يمكن أن يُنظر إلى عدم الاستقرار أيضاً على أنه نتيجة لنظرية ليوفيل فيما يتعلق بثبات "الحجم" في مساحة الطور (س، ع) تحت تأثير تدفق هاميلتوني.

ثانياً، دعنا نبحث عن حل  $T$ -periodic غير تافه مثل ذلك  $p \equiv 0$  و

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, 0) = a(t)x(1-x) - bx.$$

هذه هي معادلة المجال المتوسطة لنموذج SIS. الحل الوحيد غير الصفري  $T$ -فترة

$$x^*(t) = \left( \frac{1}{x^*(0)} e^{bt - \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t a(u) e^{b(t-u) - \int_u^t a(s) ds} du \right)^{-1}$$

مع

$$x^*(0) = \frac{1 - e^{bT - \int_0^T a(s) ds}}{\int_0^T a(u) e^{b(T-u) - \int_u^T a(s) ds} du}. \quad (15)$$

الحل الدوري  $(x^*(t), 0)$  هو أيضاً غير مستقر. في الواقع، مع  $x(t) = x^*(t) + \tilde{x}(t)$  و  $p(t) = \tilde{p}(t)$  وبخطية المعادلات نحصل

$$\begin{pmatrix} d\tilde{x}/dt \\ d\tilde{p}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)(1 - 2x^*(t)) - b & a(t)x^*(t)(1 - x^*(t)) + bx^*(t) \\ 0 & -a(t)(1 - 2x^*(t)) + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

يتم عكس مضاعفات Floquet مرة أخرى مع بعضها البعض، وبالتالي عدم الاستقرار.

تذكر من القسم 1 أنه في بيئة ثابتة ، يوجد مدار غير متجانس في مستوى الطور (س ، ع) يربط النقاط الثابتة  $(x^*, 0) = (1 - b/a, 0)$  و  $(0, p^*) = (0, \log(b/a))$  إذا  $a > b$  وجد (Escudero and Rodríguez، 2008) مدارًا متغيرًا مماثلًا للنموذج الدوري للتفرع وإبادة الجسيمات المتطابقة ، على الأقل بالنسبة لاتساع صغير للاضطراب الدوري. لذا يمكننا أن نأمل في وجود مدار غير متجانس  $(\hat{x}(t), \hat{p}(t))$  ، الذي يربط الحلول الدورية  $(x^*(t), 0)$  و  $(0, p^*(t))$ . ربما يمكن إثبات الوجود باستخدام نهج متغير (، Rabinowitz (1994). يمكن الحصول على هذا المدار الخاص رقمياً بواسطة طريقة اطلاق. طبقاً لـ (عساف وآخرون ، 2008 ، المعادلة (20) ،

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{p}(t) \frac{\partial H}{\partial p}(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) - H(t, \hat{x}(t), \hat{p}(t)) \right] dt. \quad (16)$$

يمكن تقييم هذا التكامل رقمياً.

**طريقة التخريب.** إذا  $a(t)$  هو ثابت  $a_0$  ، ثم  $(\hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t))$  هو مدار مغاير يربط النقاط الثابتة  $(x^*, 0) = (1 - b/a_0, 0)$  و  $(0, p^*) = (0, \log(b/a_0))$ . هذا المدار هو مثل ذلك  $a_0(1 - x)e^p - b = 0$  كما يتضح من (2). باستخدام هذه المعادلة للتعبير عن  $p$  كدالة  $x$  وإدراج النتيجة في المعادلة الأولى (4) ، نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = bx - a_0x(1 - x).$$

الحل

$$x(t) = \left[ \frac{1}{x(t_0)} e^{(a_0-b)(t-t_0)} + \frac{a_0}{a_0 - b} (1 - e^{(a_0-b)(t-t_0)}) \right]^{-1}.$$

باختيار سبيل المثال  $x(t_0) = (1 - b/a_0)/2$  ، نحصل

$$\hat{x}_0(t) = \frac{1 - b/a_0}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_0(t) = \log \frac{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)}}{1 + e^{(a_0-b)(t-t_0)} a_0/b}.$$

لنفترض الآن ذلك

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \phi(t))$$

مع  $a_0 > b$  ،  $\varepsilon$  صغيرة و  $\phi(t)$  وظيفة  $T$ -périodique كما  $\int_0^T \phi(t) dt = 0$ . يمكن كتابة هاميلتوني في النموذج

$$H(t, x, p) = H_0(x, p) + \varepsilon H_1(t, x, p),$$

أين  $H_0(x, p)$  هو نفس (2) ، باستثناء ذلك  $a_0$  يستبدل  $a$  ، و او

$$H_1(t, x, p) = a_0 \phi(t) x(1 - x)(e^p - 1).$$

إذا  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0)$  ، ثم

$$C \simeq \min_{t_0} \Gamma(t_0), \quad \Gamma(t_0) = c_0 - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt$$

ل  $\varepsilon \simeq 0$  (عساف وآخرون ، 2008 ، المعادلة (24)). في هذه الحالة ،  $(1 - \hat{x}_0)e^{\hat{p}_0} = b/a_0$  ، لذا

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= c_0 - \varepsilon a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \hat{x}_0(t) [b/a_0 - 1 + \hat{x}_0(t)] dt \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t_0 + u/(a_0 - b)) \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du. \end{aligned}$$

لذا  $\Gamma(t_0)$  هي دالة  $T$ -periodic مع  $\int_0^T \Gamma(t_0) dt_0 = 0$  النظر في تحليل فورييه  $\phi(t)$  ،

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{ki\omega t},$$

مع  $\omega = 2\pi/T$  ،  $\phi_0 = 0$  لأن المتوسط  $\phi(t)$  صفر و  $\phi_{-k} = \bar{\phi}_k$  (العدد المركب المترافق). ثم

$$\begin{aligned}\Gamma(t_0) &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k i \omega u}{a_0 - b}} \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} du \\ &= c_0 + \varepsilon(1 - b/a_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{k i \omega t_0} \frac{\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}}{\sinh\left(\frac{k \pi \omega}{a_0 - b}\right)}\end{aligned}$$

(انظر الملحق). خاصة إذا  $\phi(t) = \cos(\omega t)$  ، ثم  $\phi_{\pm 1} = 1/2$  و  $\phi_k = 0$  وإلا. لذا

$$\Gamma(t_0) = c_0 + \varepsilon \frac{\pi \omega \cos(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}. \quad (17)$$

مثل (Escudero and Rodríguez, 2008) و (Assaf et al., 2008) ، فإن النظام المضطرب هو من الشكل

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x}. \quad (18)$$

$\hat{x}_0(t)$  و  $\hat{p}_0(t)$  تعتمد فقط على  $t - t_0$ . لذا فإن وظيفة Melnikov  $\mathcal{M}(t_0)$  هو

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_0}{\partial x} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{d\hat{x}_0}{dt_0} + \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{d\hat{p}_0}{dt_0} \right] (t, \hat{x}_0(t), \hat{p}_0(t)) dt = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dt_0}.\end{aligned}$$

باستخدام (17) نحصل

$$\mathcal{M}(t_0) = \frac{\pi \omega \sin(\omega t_0)}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)}.$$

لذا  $\mathcal{M}(t_0)$  يعبر 0 ل  $t_0 = k\pi/\omega$  (ك عدد صحيح). لذلك ، يوجد مدار heterocline على الأقل لـ  $\varepsilon$  صغير.

الحد الأدنى  $\Gamma(t_0)$  في (17) تم الحصول عليها ل  $t_0 = T/2$  إذا  $\varepsilon > 0$  و ل  $t_0 = 0$  إذا  $\varepsilon < 0$ . في كلتا الحالتين ، نحصل

$$C \simeq c_0 - \frac{\pi \omega |\varepsilon|}{a_0 \sinh\left(\frac{\pi \omega}{a_0 - b}\right)} \quad (19)$$

ل  $\varepsilon \simeq 0$  كما أعلن في المقدمة. لاحظ أن (19) يشبه المعادلة (4.76) من (Kamenev, 2011) التي تم الحصول عليها من هاميلتوني مختلف قليلاً. إذا كانت  $\omega$  صغيرة ( $T$  كبيرة) بحيث  $\omega \ll a_0$  ثم (19) يوضح ذلك

$$C \simeq c_0 - |\varepsilon| (1 - b/a_0), \quad (20)$$

وهو مستقل عن  $\omega$ . هذه الصيغة هي نفسها التي تم الحصول عليها في (1) مع:  $a = a_0(1 - |\varepsilon|)$

$$\frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} - 1 - \log \frac{b}{a_0(1 - |\varepsilon|)} = \frac{b}{a_0} - 1 - \log \frac{b}{a_0} - |\varepsilon| (1 - b/a_0) + o(\varepsilon)$$

ل  $\varepsilon \simeq 0$ . كما هو الحال في "التقريب الأديباتي" لـ (عساف وآخرون ، 2008 ، القسم الرابع) ، من المتوقع أن تكون الصيغة (20) صالحة ليس فقط  $\varepsilon \simeq 0$  ، ولكن أيضاً طالما  $\omega \ll a_0$  و أن الجانب الأيمن من (20) موجب. لأن  $\sinh(x) \geq x$  ل  $x \geq 0$  يمكننا ملاحظة أن القيمة التقريبية لـ  $C$  المعطاة بواسطة (20) تكون دائماً أقل من تلك المعطاة بواسطة (19).

**حد التردد العالي.** لنفترض الآن ذلك  $a_0 \gg \omega$  دائماً مع  $\phi(t) = \cos(\omega t)$ . النظام (18) مكتوب

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p}(x, p) + a_0 \varepsilon \cos(\omega t) x(1-x)e^p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}(x, p) - a_0 \varepsilon \cos(\omega t)(1-2x)(e^p - 1).\end{aligned}$$

مع طريقة Kapitsa (عساف وآخرون ، 2008 ، § III.B ،

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad p(t) = Y(t) + \eta(t),$$

حيث  $X$  و  $Y$  متغيرات بطيئة ، بينما  $\xi$  و  $\eta$  تذبذبات صغيرة ولكنها سريعة. التعبيرات التي تتأرجح تعطي بسرعة:

$$\frac{d\xi}{dt} \simeq a_0 \varepsilon \cos(\omega t) X(1-X)e^Y, \quad \frac{d\eta}{dt} \simeq -a_0 \varepsilon \cos(\omega t)(1-2X)(e^Y - 1).$$

نفترض أن  $X$  و  $Y$  ثابتان خلال تذبذب قصير مع  $T = 2\pi/\omega$ . نحصل

$$\xi(t) \simeq \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1-X)e^Y, \quad \eta(t) \simeq -\frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1-2X)(e^Y - 1).$$

هذا يشير إلى التحول

$$\begin{aligned}x &= X + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1-X)e^Y \\ p &= Y - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1-2X)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \Phi(t, X, Y),\end{aligned}$$

أين  $\Phi(t, X, Y)$  يتم اختياره بحيث يكون التحول تقريبًا أساسيًا ، وهذا يعني أن أقواس Poisson نقي بالشروط

$$\{x, p\} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial p}{\partial X} = 1 + o(a_0^2/\omega^2). \quad (21)$$

لان

$$\begin{aligned}\{x, p\} &= \left[ 1 + \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1-2X)e^Y \right] \left[ 1 - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(1-2X)e^Y + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) X(1-X)e^Y \right] \left[ 2 \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right],\end{aligned}$$

الشروط (21) مكتوب

$$\begin{aligned}\{x, p\} &= 1 - \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t)(1-2X)^2 e^{2Y} + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \\ &\quad - 2 \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) X(1-X)e^Y (e^Y - 1) + o(a_0^2/\omega^2) = 1 + o(a_0^2/\omega^2).\end{aligned}$$

لذا

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \sin^2(\omega t) [(1-2X)^2 e^{2Y} + 2X(1-X)e^Y (e^Y - 1)].$$

من أجل  $\Phi(t, X, 0) = 0$  ، يجب أن نختار

$$\Phi(t, X, Y) = \sin^2(\omega t) [(1-2X)^2 (e^{2Y} - 1)/2 + X(1-X)(e^Y - 1)^2].$$

دالة التوليد  $F_2(t, x, Y)$  هذا التحول ، مع

$$\frac{\partial F_2}{\partial Y} = X + o(a_0^2/\omega^2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = p + o(a_0^2/\omega^2),$$

$$F_2(t, x, Y) = xY - \frac{a_0 \varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) x(1-x)(e^Y - 1) + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \sin^2(\omega t) x(1-x)(1-2x)(e^{2Y} - 1).$$

إذا  $H(t, x, y) = h(t, X, Y)$ ، ثم هاميلتوني جديد

$$h(t, X, Y) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

لقد فعلنا  $T = 2\pi/\omega$ . بأخذ معنى هذا هاميلتوني، تم إلغاء التعبير الثاني بسبب

$$\int_0^T \frac{\partial F_2}{\partial t} dt = 0$$

وبقايا هاميلتون فعالة فقط

$$\bar{H}(X, Y) = \frac{1}{T} \int_0^T h(t, X, Y) dt.$$

حساب شاق باستخدام حقيقة ذلك  $1/2 \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = 1/2$  يؤدي إلى

$$\bar{H}(X, Y) \simeq X(1 - e^{-Y}) \left[ a_0(1 - X)e^Y - b + \frac{a_0^2 \varepsilon^2}{2\omega^2} \left\{ -a_0 X(1 - X)^2 e^{2Y} + b(1 - X)(1 - 2X)e^Y - bX(1 - X)(e^Y - 1) - b(1 - 2X)^2 \right\} \right].$$

يتم الحصول على مدار heterocline المضطرب بفرض أن المصطلح بين قوسين معقوفين هو صفر. يربط هذا المدار  $(X_\varepsilon^*, 0)$  و  $(0, Y_\varepsilon^*)$  مع

$$X_\varepsilon^* \simeq (1 - b/a_0) \left[ 1 - \frac{b(a_0 - b)\varepsilon^2}{2\omega^2} \right], \quad Y_\varepsilon^* \simeq \log(b/a_0) + \frac{a_0(a_0 - b)\varepsilon^2}{2\omega^2}.$$

العمل على طول هذا المدار المتغاير هو

$$C = \int_{X_\varepsilon^*}^0 Y dX.$$

حساب مملة آخر يؤدي في النهاية إلى

$$C \simeq c_0 - \frac{(a_0 - b)^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2} (1 + 2b/a_0), \quad (22)$$

كما أعلن في المقدمة. لأن الوظيفة  $(1 - z)^2(1 + 2z)$  أقل من 1 خلال الفاصل الزمني  $0 < z < 1$ ، المصطلح التصحيحي لـ  $C$  دائماً أقل من  $\frac{a_0^2 \varepsilon^2}{12 \omega^2}$ . إنه صغير لأنه  $\omega \gg a_0$  عن طريق الفرضية. كما هو متوقع، فإن السكان المعرضين لاضطراب عالي التردد لا يعتمد كثيراً على سعة هذا الاضطراب.

### 3. الحسابات العددية

**مضاعفات فلوك.**  $\lambda_1$  يمكن تقديرها مباشرة عن طريق حساب مضاعفات Floquet في المعادلة الرئيسية باستخدام برنامج مثل Scilab الذي يحل المعادلات التفاضلية العادية ويحسب القيم الذاتية للمصفوفات عددياً.  $e^{\lambda_1 T}$  هو القيمة الذاتية مع ثاني أكبر جزء حقيقي، الأول هو 1. يمكننا بعد ذلك رسم  $-\log(-\lambda_1)$  وبقال  $N$ . المنحدر من هذا المنحنى يوفر قيمة تقريبية لـ  $C$ .

مدار هيتروكلين. أما (Assaf وآخرون ، 2008) ، فيمكننا الحصول على المدار الذي يربط  $(x^*(t), 0)$  و  $(0, p^*(t))$  بطريقة اطلاق النار. نأخذ الشرط الأولي  $x^*(0)$  أعطيت بواسطة (15) وقيمة سالبة صغيرة جدا لـ  $p(0)$ . نغير هذه القيمة حتى نحصل على حل  $(x(t), p(t))$  التي تميل إلى أن تصبح دورية ، وهذا يعني مع  $x(t)$  بالقرب من 0 و  $p(kT)$  قريب  $p^*(0)$  لـ  $k$  كبيرة (ولكن ليست كبيرة جدًا لتجنب عدم الاستقرار العددي). يمكننا بعد ذلك استخدام التكامل (16) لحساب  $C$  عدديًا.

المعادلة التفاضلية الجزئية. من الممكن أيضًا حساب حل دوري  $S^*(t, x)$  من معادلة هاميلتون-جاكوبي (6) باستخدام الطرق العددية لنظرية حلول الزوجة. نحدد

- $\Delta t$  الخطوة الزمنية
- $\Delta x$  خطوة تقدير الفضاء
- $S_j^m$  تقريب  $S(m\Delta t, j\Delta x)$ ، حيث  $j$  و  $m$  أعداد صحيحة مثل هذه  $m \geq 0$  و  $0 \leq j \leq J$  مع  $J = 1/\Delta x$ .

يمكننا استخدام طريقة غودونوف

$$\frac{S_j^{m+1} - S_j^m}{\Delta t} + \mathcal{H}\left(m\Delta t, j\Delta x, \frac{S_j^m - S_{j-1}^m}{\Delta x}, \frac{S_{j+1}^m - S_j^m}{\Delta x}\right) = 0,$$

حيث هاميلتون الرقمي  $\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+)$  من قبل

$$\mathcal{H}(t, x, p^-, p^+) = \begin{cases} \min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\}, & p^- < p^+, \\ \max\{H(t, x, p); p^+ \leq p \leq p^-\}, & p^+ \leq p^- \end{cases}$$

(أوشر وشو ، 1991). لأن  $H(t, x, p)$  هو محدب بالنسبة لـ  $p$  ، التعبير الثاني الذي يحتوي على الحد الأقصى يساوي

$$\max\{H(t, x, p^+), H(t, x, p^-)\}.$$

أما بالنسبة للتعبير الأول الذي يشمل الحد الأدنى ، فلاحظ مع (14) ذلك  $H(t, x, p)$  لديه الحد الأدنى فيما يتعلق ص إذا  $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$  ، أي إذا

$$p = p^\# = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a(t)(1-x)}.$$

لذا

$$\min\{H(t, x, p); p^- \leq p \leq p^+\} = \begin{cases} H(t, x, p^+), & p^- < p^+ \leq p^\#, \\ H(t, x, p^-), & p^\# \leq p^- < p^+, \\ H(t, x, p^\#), & p^- \leq p^\# \leq p^+. \end{cases}$$

للظروف عند الحواف ، نأخذ

$$S_0^m = 0, \quad (S_J^m - S_{J-1}^m)/\Delta x = K$$

مع قيمة عالية جدا لـ  $K$  . الخطوة الزمنية  $\Delta t$  يجب أن يكون صغيرًا بما يكفي مقارنة بـ  $\Delta x$  حتى يتم استيفاء شرط Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). كشرط أولي اتخذنا

$$S(0, x) = x \log(b/a_0) + x + (1-x) \log(1-x),$$

وهذا هو الحل الثابت المنتظم عندما  $a(t)$  يتم استبداله بمتوسط وقته. يمكننا أيضًا اختيار وظيفة ثابتة  $S(0, x) = \sigma$  مع negative سلبي للغاية ، ولكن التقارب نحو النظام الدوري يكون أبطأ. يجب أن يكون الثابت negative سالبًا بما يكفي لتجنب مشكلة عدم التفرد التي سبق ذكرها في القسم 2. بمجرد وصول حل المشكلة غير الثابتة إلى نظام دوري ، يمكننا تقدير

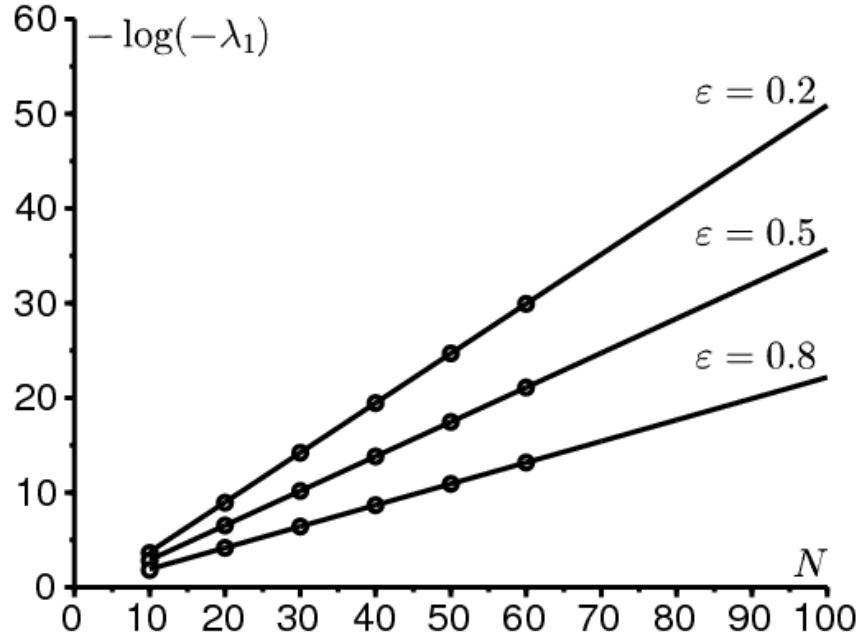
$$C = \min_t S^*(t, 0^+) - \min_{t,x} S^*(t, x).$$

طريقة مونت كارلو. يمكن أيضًا تقدير متوسط وقت الانقراض بطريقة مونت كارلو. نحن متوسط المحاكاة العشوائية. لاحظ أنه لا يمكن استخدام خوارزمية Gillespie التي تستفيد من أوقات الانتظار الموزعة بشكل كبير بسبب  $a(t)$  دورية. إذا زاد  $N$  ، يمكن أن يصبح وقت الانقراض فلكيًا. لا يتم عرض نتائج باستخدام هذه الطريقة.

أمثلة. ومن المفترض

$$a(t) = a_0(1 + \varepsilon \cos(2\pi t/T))$$

مع  $T = 1$  الأسبوع. دعونا ننظر أولاً في الحالة حيث  $a_0 = 20$  في الأسبوع و  $b = 5$  كل أسبوع. متوسط مدة الإصابة  $1/b = 1,4$  أيام. لذا  $R_0 = a_0/b = 4 > 1$  و  $c_0 = b/a_0 - 1 - \log(b/a_0) \simeq 0,636$ . يظهر الشكل 1  $-\log(-\lambda_1)$  بوصفها وظيفة من  $N$  ل  $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$  و  $N = 10, 20, \dots, 60$ ، محسوبة باستخدام مضاعفات Floquet. تتوافق الخطوط مع انحدار خطي لآخر 3 نقاط  $N = 40, 50, 60$ . منحدرات هذه الخطوط، والتي هي تقديرات  $C$ ، هي  $0,524, 0,364, 0,225$  ل  $\varepsilon = 0,2, 0,5$  و  $0,8$ .

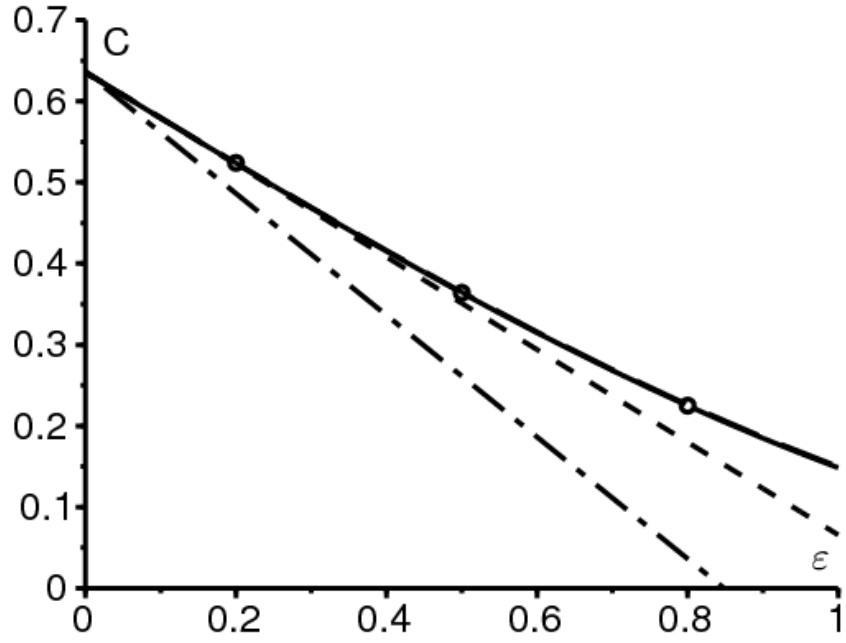


الشكل 1. حساب مضاعفات Floquet في المعادلة الرئيسية:  $-\log(-\lambda_1)$  بوصفها وظيفة من  $N$  ل  $\varepsilon \in \{0,2; 0,5; 0,8\}$  و  $N = 10, 20, \dots, 60$ . الرقم  $C$  هو ميل هذه الخطوط. قيم المعلمات:  $T = 1$ ،  $b = 5$ ،  $a_0 = 20$ .

$a_0$  و  $\omega = 2\pi/T$  هي من نفس الحجم من حيث الحجم في هذا المثال. إنها حالة وسيطة للتردد. لذلك نتوقع أن (19) يعطي تقريباً جيداً لـ  $C$  عندما تكون  $\varepsilon$  صغيرة. يبين الشكل 2 المنحنيات التالية كدالة للـ  $\varepsilon$  لـ  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ :

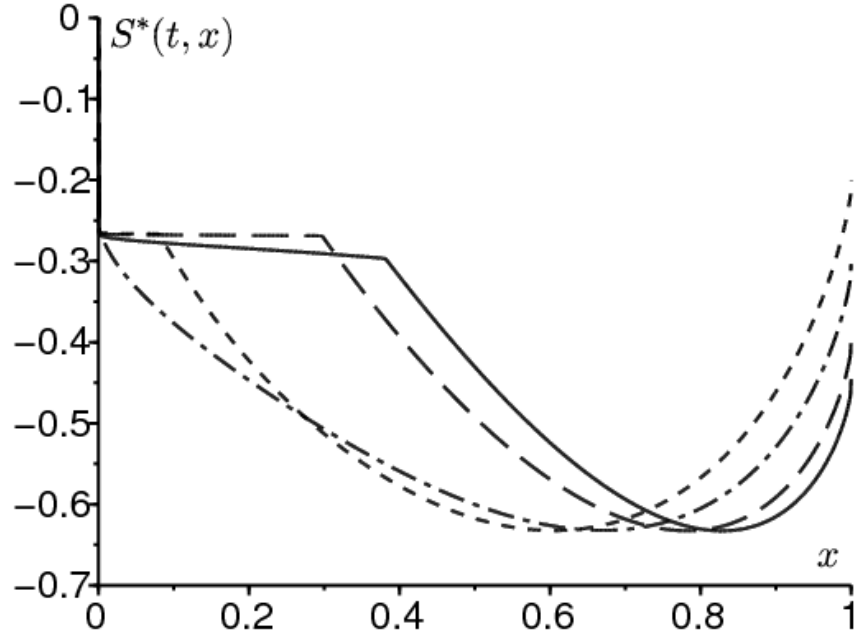
- خط صلب لـ  $C$  باستخدام مدار heterocline
- الخطوط المنقطعة الطويلة لـ  $C$  باستخدام المعادلة التفاضلية الجزئية مع  $\Delta x = 0,002$  و  $\Delta t = 0,0002$  (لا يمكن تمييزه تقريباً)
- ثلاث نقاط تمثل قيم  $C$  التي تم الحصول عليها في الشكل 1
- خطوط منقطعة قصيرة للصيغة التقريبية (19)
- الخطوط المنقطعة الطويلة والقصيرة لتقريب (20) بتردد منخفض.

يمكننا أن نرى أن الصيغة التقريبية (19) قريبة من  $C$  حتى عندما تكون  $\varepsilon$  صغيرة إلى حد ما.



الشكل 2. التردد المتوسط: الرقم  $C$  محسوب باستخدام مدار heterocline [خط صلب] أو المعادلة التفاضلية الجزئية [خطوط منقطة طويلة] (لا يمكن تمييز الخطين تقريباً)، ومضاعفات Floquet كما في الشكل 1 [نقاط]، الصيغة التقريبية (19) [خطوط منقطة قصيرة]، وصيغة التردد المنخفض (20) [خطوط منقطة طويلة وقصيرة]، اعتماداً على  $\varepsilon$ . قيم المعلمات نفسها كما في الشكل 1.

يوضح الشكل 3 حلاً دورياً  $S^*(t, x)$  لمعادلة هاميلتون-جاكوبي، تم رسمها كدالة لـ  $x$  لقيم مختلفة من  $t$ ، متى  $\varepsilon = 0,5$ . لاحظ توقف الحل في  $x = 0$ . تكبير قريب  $x = 0$  سيظهر ذلك  $S^*(t, 0^+)$  هي في الواقع دورية في الوقت المناسب، لذا فإن شرط الحدود  $S^*(t, 0) = 0$  لا يمكن أن يرضى إلا بالمعنى الضعيف.

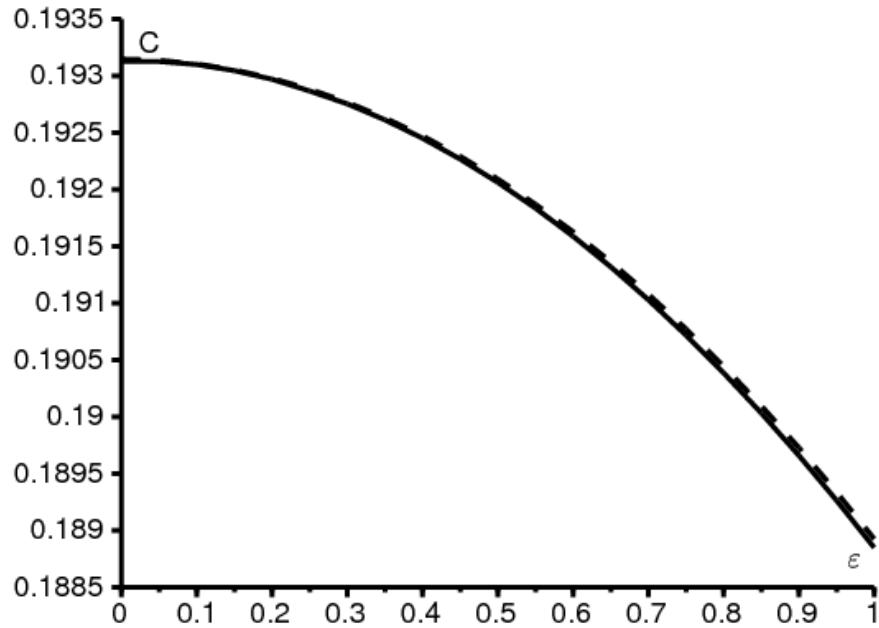


الشكل 3. حل دوري  $S^*(t, x)$  من معادلة هاميلتون-جاكوبي، تم رسمها كدالة لـ  $x$  لـ  $t = 0$  (خط متصل)،  $t = T/4$  (خطوط منقطة طويلة وقصيرة)،  $t = T/2$  (خطوط منقطة قصيرة) و  $t = 3T/4$  (خطوط منقطة طويلة وقصيرة). نفس قيم المعلمات كما في الشكل 1 و  $\varepsilon = 0,5$ .

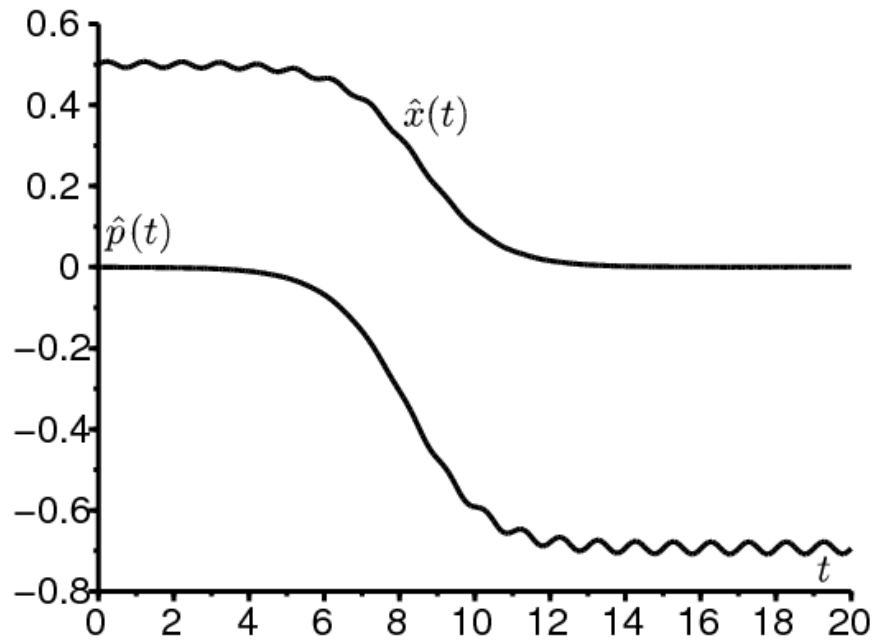
يعتبر الشكل 4 مثالاً عالي التردد:  $a_0 = 2$  في الأسبوع و  $b = 1$  كل أسبوع. لذا  $R_0 = 2a_0$  و  $c_0 \simeq 0,1931$ . في هذه الحالة  $\omega \simeq 6,28$  في الأسبوع أكبر إلى حد ما من  $a_0$ . لـ  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ، يتم حساب الرقم  $C$  باستخدام مدار heterocline وصيغة التردد العالي (22). الاتفاق



جيد على كامل نطاق القيم. وأخيرًا ، يوضح الشكل 5 اتصال المدار  $(x^*(t), 0)$  و  $(0, p^*(t))$  لنفس قيم المعلمات مع  $\varepsilon = 0,1$ .



الشكل 4. نظام التردد العالي:  $C$  محسوب باستخدام مدار غير متجانس [الخط الصلب] وصيغة التردد العالي (22) [خط منقط] كدالة  $\varepsilon$ . قيم المعلمات:  $b = 1, a_0 = 2, T = 1$ .



الشكل 5. المكونات  $t \mapsto \hat{x}(t)$  و  $t \mapsto \hat{p}(t)$  من مدار heterocline الذي يربط بين الحلين الدوريين  $(0, p^*(t))$  و  $(x^*(t), 0)$  لنفس قيم المعلمات كما في الشكل 4 و  $\varepsilon = 0,1$ .

#### 4. ملاحظات

- يمكن الحصول على تقديرات أكثر دقة باستخدام محلول BKW المكرر

$$\pi_n(t) \simeq e^{-N S_0(t, n/N) - S_1(t, n/N)}.$$

عن طريق إدخال

$$\pi_{n+1}(t) \simeq e^{-N S_0(t, n/N) - \frac{\partial S_0}{\partial x}(t, n/N) - \frac{1}{2N} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(t, n/N) - S_1(t, n/N) - \frac{1}{N} \frac{\partial S_1}{\partial x}(t, n/N)}$$

وتعبير مماثل ل  $\pi_{n-1}(t)$  في (8) ، وبفصل شروط الدرجة العليا ، نحصل على معادلة هاميلتون-جاكوبي (10) ل  $S_0(t, x)$  ومعادلة النقل

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left[ a(t)x(1-x)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} - bxe^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \right] \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ = a(t)e^{\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ 1 - 2x + \frac{x(1-x)}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] + be^{-\frac{\partial S_0}{\partial x}} \left[ -1 + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

ل  $S_1(t, x)$  إذا  $a(t)$  ثم دورية  $S_0(t, x)$  و  $S_1(t, x)$  يجب أن يحسب عدديا. إذا  $a(t) = a$  هو ثابت ، ثم عامل ما قبل الأس  $\lambda_1$  يتم الحصول عليها بطريقة التوسعات المقاربة المتصلة ، على النحو التالي (Assaf and Meerson, 2010). أولاً  $S_0(x)$  تعطى ب (3) ومعادلة ل  $S_1(x)$  يؤدي إلى

$$S_1(x) = \log(x\sqrt{1-x}) + \text{const.}$$

لذا

$$\pi_n \simeq \kappa \frac{e^{-NS_0(n/N)}}{\frac{n}{N} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}}$$

لثابت  $\kappa$ . إذا كانت  $n$  صغيرة ،

$$\pi_n \simeq \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0) - nS_0'(0)} = \frac{\kappa N}{n} e^{-NS_0(0)} \left( \frac{a}{b} \right)^n. \quad (23)$$

بالنسبة للنظام (8) ، يمكننا أيضًا استخدام التقريب

$$a(n-1)\pi_{n-1} - n(a+b)\pi_n + b(n+1)\pi_{n+1} \simeq 0, \quad n \geq 1.$$

ثم

$$\pi_n \simeq \frac{\pi_1}{n} \frac{1 - (a/b)^n}{1 - a/b} \sim \frac{\pi_1}{n} \frac{(a/b)^n}{a/b - 1}.$$

يتزامن هذا مع (23) فقط إذا  $(\frac{a}{b} - 1) \pi_1 \simeq \kappa N e^{-NS_0(0)}$  وأخيرا (9) يعطي

$$\lambda_1 \simeq \frac{-b\pi_1/(\kappa N)}{\int_0^1 \frac{e^{-NS_0(x)}}{x\sqrt{1-x}} dx} \simeq \frac{(b-a)x^* \sqrt{1-x^*} \sqrt{NS_0''(x^*)}}{e^{N[S_0(0) - S_0(x^*)]} \sqrt{2\pi}} = -\frac{(a-b)^2}{a} \frac{\sqrt{N}}{e^{cN} \sqrt{2\pi}}$$

(عساف وميرسون ، 2010 ، المعادلة (71)). إذا على سبيل المثال  $a = 20$  ،  $b = 5$  و  $N = 50$  ، فإن هذا التقدير يزيد بنسبة 2% فقط عن قيمة  $\lambda_1$  تم الحصول عليها باستخدام برنامج حساب القيم الذاتية للمصفوفات الكبيرة كما هو موضح في الشكل 1. من المحتمل أن تمتد طريقة التوسعات المقاربة المتصلة إلى الحالة الدورية ولكن من غير المحتمل أن تؤدي إلى صيغة صريحة. • دعنا تكون وظيفة التوليد

$$\phi(t, z) = \sum_{n=0}^N P_n(t) z^n$$

مع  $0 \leq z \leq 1$ . ثم  $\phi(t, 1) = 1$  للجميع  $t$ . تظهر عملية حسابية بسيطة تبدأ من (7)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1-z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1-z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

ل  $0 < z < 1$ . في النظام شبه الثابت ، من المتوقع أن

$$\phi(t, z) \simeq 1 + e^{\lambda_1 t} \psi(t, z)$$

مع  $\psi(t, z) = 0$  دوري في  $t$ ، و

$$\lambda_1 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} = (1 - z) \left( b + \frac{a(t)z}{N} - a(t)z \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{a(t)}{N} z^2 (1 - z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

لذا  $\lambda_1$  هي أيضًا أكبر قيمة ذاتية غير الصفر لهذه المشكلة مكافئ. يمكن أن تكون هذه طريقة لإثبات النتائج المقاربة لـ  $N$  large بشكل أكثر صرامة.

- مع  $P_n(t) = \mathcal{P}(t, x)$  أين  $x = n/N$  ومن خلال تنفيذ تيلور لتوسيع 2 من المعادلة الرئيسية (7)، نحصل على معادلة Fokker-Planck أو معادلة الانتشار

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ (a(t)x(1-x) - bx) \mathcal{P} \right] + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (a(t)x(1-x) + bx) \mathcal{P} \right].$$

وبالمثل بالنسبة لمتوسط وقت الانقراض  $\tau_n(t) = \tau(t, x)$  أين  $x = n/N$ ، (13) يؤدي إلى المشكلة المصاحبة

$$-1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (a(t)x(1-x) - bx) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{2N} (a(t)x(1-x) + bx) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

ومع ذلك، نحن نعلم بالفعل في حالة معاملات زمنية مستقلة أن هذه المعادلات لا تعطي عادةً القيمة الصحيحة لـ  $C$  (Doering et al.، 2005). تميل القيمة إلى أن تكون صحيحة فقط إذا  $R_0$  قريبة من 1. تظهر نفس المشكلة في النماذج الوبائية الأخرى. على سبيل المثال (ديكمان وآخرون، 2012، ص 112-113) يستخدم تقريب الانتشار لتقدير  $C$  في نموذج SIR على الرغم من حقيقة أن  $R_0 \simeq 10$  في تطبيقاتهم الرقمية. للحصول على تحليل BKW لنموذج الاستوكاستك SIR، انظر (Kamenev and Meerson، 2008).

- الرقم  $1/C$  يمكن أن يسمى الحجم الحرج للمجتمع (Diekmann et al.، 2012).

## ملحق

دعنا نظهر ذلك

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du = \frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)}.$$

أولاً،  $e^u/(1+e^u)^2 = 1/(4 \cosh^2(u/2))$ ، هذا جنباً إلى جنب مع التكامل بالأجزاء يدل على ذلك

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 2 \int_0^{+\infty} \cos(\lambda u) \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du \\ &= 2 \left[ \frac{-\cos(\lambda u)}{1+e^u} \right]_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda u)}{1+e^u} du \\ &= 1 - 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} \sin(\lambda u)}{1+e^{-u}} du. \end{aligned}$$

من خلال تطوير  $1/(1+e^{-u})$  في سلسلة الطاقة، نحصل

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du &= 1 - 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)u} \sin(\lambda u) du \\ &= 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^2 + (n+1)^2}. \end{aligned}$$

يمكن حساب مجموع هذه السلسلة باستخدام صيغة أويلر

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

وهو صحيح لأي عدد معقدة  $z \neq n\pi$  مع  $n$  عدد صحيح. ياخذ  $z = i\pi\lambda$  لان  $\sin(i\pi\lambda) = i \sinh(\pi\lambda)$ ، نحصل

$$\frac{\pi\lambda}{\sinh(\pi\lambda)} = 1 + 2\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$$

ويتبع النتيجة.

شكر وتقدير

تم تحفيز هذه المقالة من خلال مناقشة مع هانز ميترز بشأن حجم السكان الفعال في بيئة دورية خلال مؤتمر حول النماذج العشوائية في علم البيئة والتطور وعلم الوراثة في أنجيه في ديسمبر 2013.

المراجع

- Andersson H, Djehiche B (1998) A threshold limit theorem for the stochastic logistic epidemic. *J Appl Probab* 35 : 662–670
- Aronsson G, Kellogg RB (1978) On a differential equation arising from compartmental analysis. *Math Biosci* 38 : 113–122
- Assaf M, Kamenev A, Meerson B (2008) Population extinction in a time–modulated environment. *Phys Rev E* 78 : 041123
- Assaf M, Meerson B (2010) Extinction of metastable stochastic populations. *Phys Rev E* 81 : 021116
- Bacaër N, Ait Dads E (2012) On the biological interpretation of a definition for the parameter  $R_0$  in periodic population models. *J Math Biol* 65 : 601–621
- Barles G (1994) *Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi*. Springer, Berlin
- Barles G, Perthame B (1988) Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J Control Optim* 26 : 1133–1148
- Billings L, Mier–y–Teran–Romero L, Lindley B, Schwartz IB (2013) Intervention–based stochastic disease eradication. *PLoS ONE* 8(8) : e70211
- Diekmann O, Heesterbeek H, Britton T (2012) *Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics*. Princeton University Press, Princeton
- Doering CR, Sargsyan KV, Sander LM (2005) Extinction times for birth–death processes : exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker–Planck approximation. *Multiscale Model Simul* 3 : 283–299
- Escudero C, Rodríguez JA (2008) Persistence of instanton connections in chemical reactions with time–dependent rates. *Phys Rev E* 77 : 011130
- Hethcote H (1973) Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model. *Bull Math Biol* 35 : 607–614
- Kamenev A (2011) *Field theory of non–equilibrium systems*. Cambridge University Press, Cambridge
- Kamenev A, Meerson B (2008) Extinction of an infectious disease : a large fluctuation in a nonequilibrium system. *Phys Rev E* 77 : 061107
- Mitake H (2009) Large time behavior of solutions of Hamilton–Jacobi equations with periodic boundary data. *Nonlinear Anal* 71 : 5392–5405
- Nasell I (2011) Extinction and quasi–stationarity in the stochastic logistic SIS model. Springer, Berlin
- Osher S, Shu CW (1991) High–order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton–Jacobi equations. *SIAM J Numer Anal* 28 : 907–922
- Ovaskainen O, Meerson B (2010) Stochastic models of population extinction. *Trends Ecol Evol* 25 : 643–652

- Rabinowitz PH (1994) Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system.  
Ergod Theor Dyn Syst 14 : 817–829
- Roquejoffre JM (2001)  
Convergence to steady states or periodic solutions in a class of Hamilton–Jacobi equations.  
J Math Pures Appl 80 : 85–104
- Soner HM (1986) Optimal control with state–space constraint I.  
SIAM J Control Optim 24 : 552–561