



**HAL**  
open science

## Utiliser des éléments imaginaires en géométrie : Carnot, Poncelet, von Staudt et Chasles

Philippe Nabonnand

### ► To cite this version:

Philippe Nabonnand. Utiliser des éléments imaginaires en géométrie : Carnot, Poncelet, von Staudt et Chasles . Lise Bioesmat-Martagon. Eléments d'une biographie de l'espace géométrique, PUN-Edulor, pp.69-105, 2016, Histoires de géométries, 978-2-8143-0269-3. hal-01264479

**HAL Id: hal-01264479**

**<https://hal.science/hal-01264479v1>**

Submitted on 29 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Philippe NABONNAND<sup>1</sup>

## Utiliser des éléments imaginaires en géométrie : Carnot, Poncelet, von Staudt et Chasles

En 1872, dans un article sur l'interprétation des éléments imaginaires en géométrie<sup>2</sup>, Felix Klein subordonne historiquement cette réflexion à l'introduction de ceux-ci dans le cadre de l'étude des surfaces algébriques :

*En géométrie analytique, lorsque l'étude des domaines algébriques conduit inévitablement à introduire des éléments complexes, on a longtemps discuté si et dans quelle mesure leur attribuer une interprétation purement géométrique. [Klein 1872, p. 402]<sup>i</sup>*

S'il est évident que la discussion autour de la justification et de l'interprétation des éléments imaginaires en géométrie pure est liée à l'utilisation des nombres complexes en géométrie analytique, celle-ci a aussi une dynamique propre insérée dans des questionnements autour de la généralité des énoncés et des démonstrations en géométrie pure.

De plus, le recours à des éléments imaginaires en géométrie pure ne date pas du 19<sup>e</sup> siècle. Dès le 18<sup>e</sup> siècle, pour décrire certaines

---

<sup>1</sup> Université de Lorraine — Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie – Archives Poincaré (UMR 7117 CNRS).

<sup>2</sup> [Klein 1872].

situations géométriques, les mathématiciens considèrent que lorsqu'on fait subir à une droite une rotation autour d'un point jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle à une seconde droite, le point d'intersection des deux droites part à l'infini. De même, lorsque deux cercles s'éloignent suffisamment pour ne plus avoir de point d'intersection réel, ceux-ci sont devenus imaginaires.

Par exemple, dans son article sur le nombre de points en lesquels deux courbes d'ordre quelconque peuvent se couper, Euler envisage des points d'intersection qui peuvent s'éloigner à l'infini ou devenir imaginaires<sup>3</sup>. Ces expressions sont dès 1750 acceptables dans un texte mathématique et des points partant à l'infini ou devenant imaginaires peuvent être envisagés pour analyser des configurations géométriques. Ces expressions sont considérées comme intuitivement compréhensibles, souvent comme relevant de la métaphore et leurs utilisateurs ne cherchent pas à en expliciter un sens plus mathématique.

Dans le contexte de la redéfinition du champ de la géométrie pure au cours de la première moitié du 19<sup>e</sup> siècle, un certain nombre de mathématiciens tentent au contraire de donner un sens géométrique aux expressions « élément à l'infini » et « élément imaginaire ». De la même manière que la locution « à l'infini » sert à décrire la disparition de certains éléments d'une figure lorsque l'évolution de celle-ci les entraîne à s'éloigner indéfiniment<sup>4</sup>, le terme « imaginaire » permet de décrire la disparition d'un élément au cours d'une évolution d'une figure dans un domaine fini.

La suite de ce chapitre est consacrée à la manière dont quatre géomètres de cette tradition ont défini, présenté et justifié, chacun à leur manière, l'usage de ces expressions pour décrire des situations dans le cadre d'une géométrie réelle. Lazare Carnot intègre la réflexion sur les imaginaires dans des considérations générales sur les corrélations en distinguant les corrélations directes par lesquelles les positions mutuelles des éléments d'une figure restent identiques, les corrélations indirectes durant lesquelles ces dernières changent et enfin les corrélations imaginaires qui rassemblent les cas où des éléments d'une figure ont disparu. Jean Victor Poncelet justifie l'usage des élé-

---

3 [Euler 1748].

4 Voir [Nabonnand 2011b].

ments à l'infini ou des éléments imaginaires par le principe de continuité. Michel Chasles développe une théorie justifiant l'utilisation des éléments imaginaires en géométrie à partir de considérations sur le signe des quantités géométriques (longueurs et angles)<sup>5</sup>. Enfin, von Staudt donne un véritable fondement géométrique à la notion d'élément imaginaire à partir de considérations de pure incidence.

### 1. — Les corrélations complexes de Carnot

Lazare Carnot introduit la notion de corrélation pour décrire les transformations qu'une figure peut subir :

*Le mode que je me propose de suivre consiste à rapporter chaque figure dont on recherche les propriétés, à une autre figure dont les propriétés sont connues, et qu'on prend pour terme de comparaison ; puis à l'aide de caractéristiques particulières, et de l'arrangement systématique des lettres employées pour désigner les points qui déterminent les diverses parties de ces figures, on exprime les modifications qui les distinguent : c'est ce que j'appelle établir la corrélation des figures. [Carnot 1801, p. 1]*

En 1803, dans son traité sur la *Géométrie de position*, Carnot considère des spectres de figures corrélatives et se propose d'en étudier les propriétés. Il affirme que les formules qui expriment les relations entre les éléments d'une figure ou d'un système se conservent au prix de quelques modifications :

*Cette diversité de positions s'exprime souvent par de simples mutations de signes ; et c'est précisément la théorie de ces mutations qui fait l'objet essentiel des recherches que j'ai en vue, et que je nomme Géométrie de position. [Carnot 1803, p. ii]*

Dans un premier temps, les déplacements sont faibles et les formules qui expriment les relations entre les éléments d'une figure qui se déplacent (sans déformation) les uns par rapport aux autres ne subissent aucune modification. Comme l'exprime Carnot, les formules ne sont « altérées que dans les valeurs absolues de ces mêmes

---

<sup>5</sup> Cette méthode est souvent qualifiée de « mixte ». Voir [Rowe 1997, p. 193].

quantités » et « n'ont encore éprouvé aucune mutation dans les signes ». Dans ce cas, Carnot parle de *corrélations directes*.

Lorsque les déplacements des éléments de la figure sont suffisamment importants, les formules qui s'appliquaient au système initial ou *primitif* doivent subir des mutations de signes pour continuer à « s'adapter au système ainsi transformé ». Dans ce cas, le système transformé est en corrélation *indirecte* avec le système primitif. Pour Carnot, les signes « + » ou « - » ne sont que des marques à caractère algébrique et on ne doit, ni en arithmétique, ni en géométrie, donner une quelconque charge ontologique à celles-ci :

*Dire d'une quantité qu'elle devient négative, c'est donc employer une expression impropre et capable d'induire en erreur, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus ; et le vrai sens qu'on doit attacher à cette expression, est que cette quantité absolue n'appartient point au système sur lequel les raisonnements ont été établis ; mais à un autre qui se trouve avec le premier dans une certaine relation ; telle que pour lui rendre applicables les formules trouvées pour ce premier système, il est nécessaire d'y changer de + en - le signe qui la précède. [Carnot 1803, p. xix]*

Enfin, des figures ou des systèmes peuvent se transformer de manière que certains de leurs éléments constitutifs disparaissent ou apparaissent. Dans ce cas, les systèmes de quantités considérés ne sont plus ni directement, ni indirectement corrélatifs :

*Cette transformation du système peut aller plus loin encore. Il peut se faire qu'il ne suffise plus de changer comme ci-dessus le signe d'une ou de plusieurs des quantités qui entrent dans le système, mais qu'on soit obligé de multiplier ces quantités, ou quelques unes d'entre elles, par telles ou telles de celles qui sont connues sous le nom de racines imaginaires de l'unité. [...]. J'exprime ce nouvel état du système transformé, en disant qu'il est en corrélation imaginaire avec le système primitif. [Carnot 1803, p. 3-4]*

Carnot ne fait pas intervenir les notions de points ou de droites imaginaires. Il ne fait mention que de « signes imaginaires » ou quel-

quefois de « quantités imaginaires » dont l'introduction ne sert pas seulement à résoudre des problèmes. L'utilisation des « signes imaginaires » est le symptôme d'une troisième forme de corrélations, les « corrélations imaginaires » ou « complexes » des systèmes et des figures, ainsi associées à une certaine analogie entre les propriétés des figures corrélatives. Pour illustrer cette situation, Carnot considère les deux courbes d'équation

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad \text{et} \quad y'^2 = x'^2 - a^2$$

qui forment « deux systèmes qui ne seront ni directement, ni indirectement corrélatifs, mais seulement en corrélation complexe » puisque les carrés de leur équation sont égaux<sup>6</sup>. Pourtant, souligne Carnot, « ces deux courbes [...] ne laisseront pas d'avoir beaucoup de propriétés semblables ou analogues<sup>7</sup> ».

Par exemple, si le cercle est un ensemble de points équidistants d'un même point, l'hyperbole équilatère qui correspond au cercle dans la corrélation imaginaire possède une propriété « qui, quoique différente, lui correspond [...], c'est-à-dire, que dans l'hyperbole équilatère, tout point du second axe est également éloigné du sommet de la courbe et du point de cette courbe qui lui répond perpendiculairement<sup>8</sup> ».

En effet, explique Carnot, comme les trapèzes  $ghBA$  et  $BAmp$  (voir figure 1) sont semblables et comme la diagonale  $Ag$  du premier trapèze est égale au côté  $AB$ , il s'ensuit que la diagonale correspondante du second trapèze est égale au côté  $pm$ , ce qui prouve que « tout point  $p$  du second axe est également éloigné du sommet de la courbe et du point de cette courbe qui lui répond perpendiculairement<sup>9</sup> ».

En conclusion, Carnot distingue différentes manières pour des figures ou des systèmes de quantités d'être corrélées ce qui se traduit par le mode de transformation des formules qui peuvent être directement appliquées à la figure ou au système ; un système reste en *corrélation directe* avec le système primitif dont il est issu tant que la forme des formules (qui lui sont immédiatement applicables) ne change pas ou « aussi longtemps qu'aucune des quantités qui le composent ne passe ni par 0, ni par  $\infty$  ». Un système est en *corrélation indirecte*

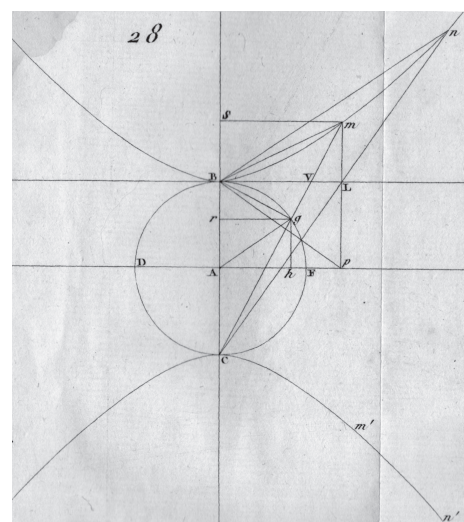


figure 1 [Carnot 1803, pl. II, figure 39]

6 Carnot explique aussi que les deux systèmes  $(a, x, y)$  et  $(a, x', y')$  ne sont pas corrélés ni directement, ni indirectement mais qu'il existe quand même un lien entre eux puisque les systèmes  $(a^2, x^2, y^2)$  et  $(a^2, x'^2, y'^2)$  sont indirectement corrélés.

7 [Carnot 1801, p. 184].

8 [Carnot 1801, p. 188].

9 [Carnot 1801, p. 188].

avec le système primitif si les formules subissent des changements de signes pour être applicables. Un système est en *corrélation complexe* avec le système primitif si certaines quantités dans les formules doivent être multipliées par des racines imaginaires de l'unité, c'est-à-dire que « ce n'est plus de l'inconnue elle-même qu'il faut changer le signe, mais c'est d'une puissance ou même d'une fonction plus ou moins composée de cette même inconnue ».

Pour autant, que l'étude d'un problème fasse apparaître des solutions imaginaires ne signifie pas que celui-ci n'a pas de solution mais qu'il faut « chercher ensuite quel nouveau système peut satisfaire à ce changement ».

Carnot illustre son propos en considérant le problème suivant :

*Une droite  $\overline{AB}$  étant donnée, trouver sur cette droite un point  $K$ , tel que le produit des deux segments  $\overline{AK}$ ,  $\overline{BK}$ , soit égal à une quantité donnée ; par exemple, à la moitié du carré de  $\overline{AB}$ . [Carnot 1803, p. 53]*

Comme on ne sait pas où se situe a priori le point  $K$ , Carnot pose son calcul en supposant que «  $K$  tombe entre  $A$  et  $B$  »<sup>10</sup>.

En posant  $AK = x$  et  $AB = a$ , le problème conduit à l'équation

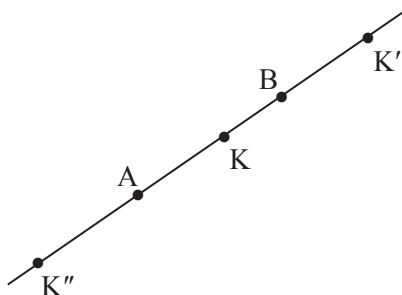
$$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 = 0 ;$$

et donc

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{1}{4}a^2}$$

est une solution imaginaire. Carnot ne conclut pas à l'impossibilité absolue du problème mais simplement à l'incompatibilité de l'hypothèse de départ avec les conditions du problème :

*Je ne conclus de-là que la solution du problème proposé soit impossible ; mais seulement qu'elle l'est dans la supposition que j'ai faite, que le point  $K$  est placé entre  $A$  et  $B$  ; c'est-à-dire que le problème a pu être mal mis en équation, parce que j'aurai établi*



<sup>10</sup> L'introduction de quantités de longueur et d'angle possédant un signe permettra à Chasles d'éviter ce genre de considérations.

*mes raisonnemens sur une figure qui n'étoit pas celle que je devois considérer, ou qui ne pouvoit satisfaire aux conditions du problème que l'on obtient lorsque l'on admet que le point K est à l'extérieur de AB du côté de B*<sup>11</sup>.

Carnot mène une discussion analogue avec la solution positive et la solution négative. La solution positive est la seule à retenir puisqu'elle correspond à l'hypothèse que le point est à l'extérieur de AB du côté de B. La solution négative n'est pas pour autant sans signification, elle est la marque qu'il faut chercher une autre solution à l'extérieur de AB du côté de A.

*On voit que le signe imaginaire qui affecte la racine de l'équation, n'annonce pas plus que le simple signe négatif, l'impossibilité de résoudre le problème proposé ; mais seulement l'impossibilité de concilier les conditions de ce problème avec les hypothèses sur lesquelles on a établi le raisonnement, et que ce signe indique également dans l'un et l'autre cas, mais seulement d'une manière plus ou moins difficile à saisir, les modifications qu'il faut faire, soit aux unes, soit aux autres, pour rendre la solution possible. » [Carnot 1803, p. 55]*

Bien entendu, selon Carnot, il reste des problèmes sans solution lorsque les conditions du problème sont incompatibles, mais l'impossibilité de trouver une solution n'est pas indiquée par l'apparition d'une solution négative ou imaginaire mais par le fait que les indications données par cette solution négative ou imaginaire sont elles-mêmes incompatibles avec des données du problème [Carnot 1803, p. 55].

Pour Carnot, les nombres imaginaires sont des outils algébriques, des marques (au même titre que les signes + ou -) qui peuvent apparaître dans les formules lorsque l'on étudie une figure ou un système. Ils n'ont pas de sens géométrique et il convient de les rendre explicites, c'est-à-dire, trouver la configuration géométrique où les indications signifiées par ces marques deviennent effectives géométriquement. Il n'y a donc pas d'éléments imaginaires en géométrie mais des corrélations imaginaires entre figures, celles pour lesquelles il est nécessaire d'utiliser les nombres complexes pour « préserver » les

---

11 [Carnot 1803, p. 54 et 55].



formules. Le champ de la géométrie s'étend néanmoins avec la notion de corrélation complexe ou imaginaire, puisqu'il devient crucial d'étudier les propriétés qui sont préservées entre figures corrélatives :

*La théorie des corrélations complexes donne lieu à des recherches très étendues, puisque c'est par elles que sont visiblement caractérisées les différentes courbes d'un même ordre. Je n'ai eu ici pour objet que de proposer, sur la comparaison des figures en général, quelques vues qui peuvent mériter l'attention des Géomètres.* [Carnot 1801, p. 188]

## 2. — Les éléments imaginaires de Jean Victor Poncelet

Les réflexions de Jean Victor Poncelet sur la question des éléments imaginaires sont intimement dépendantes de celles concernant le principe de continuité<sup>12</sup> sur lequel il fait reposer la nouvelle théorie de la géométrie<sup>13</sup>. En effet, l'introduction dans le cas de la géométrie pure<sup>14</sup> d'un tel principe qu'il appelle aussi principe de permanence des propriétés est l'outil essentiel pour permettre à la géométrie pure d'accéder au même niveau de généralité que celui de la géométrie analytique<sup>15</sup> :

*Agrandir les ressources de la simple Géométrie, en généraliser les conceptions et le langage ordinairement assez restreints, les rapprocher de ceux de la Géométrie analytique, et surtout offrir des moyens généraux propres à démontrer et faire découvrir, d'une manière facile, cette classe de propriétés dont jouissent les figures quand on les considère d'une manière purement abstraite et indépendamment d'aucune grandeur absolue et déterminée, tel est l'objet qu'on s'est spécialement proposé dans cet Ouvrage. De telles propriétés subsistent, avons-nous dit, à la fois pour une figure donnée et pour toutes ses projections ou perspectives ; on a donc dû les distinguer de toutes les autres par le nom générique de propriétés projectives, qui en rappelle, d'une manière abrégée, la véritable nature.* » [Poncelet 1822, p. xxii]

La stratégie adoptée par Poncelet est d'étendre à la géométrie pure un principe de continuité qu'il présente comme le fondement des

12 Sur le principe de continuité de Poncelet et sa justification, voir [Friedelmeyer 2011] et [Nabonnand 2015].

13 Dans les cahiers [Poncelet 1862] qui réunissent ses travaux antérieurs au projet du *Traité des propriétés projectives des figures* [Poncelet 1822], Poncelet envisage

à plusieurs reprises la possibilité que des éléments géométriques (droite, segment, corde, ellipse, cercle, projection...) puissent devenir « imaginaires ». L'utilisation de ce terme n'est pas vraiment justifiée et sert à considérer plusieurs « cas » d'un même problème sans les distinguer.

14 Dans le langage de Poncelet, la géométrie pure est celle qui n'utilise pas les coordonnées.

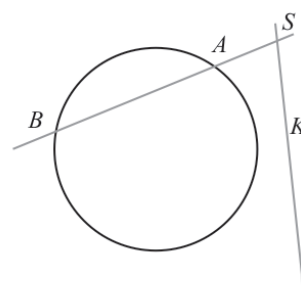
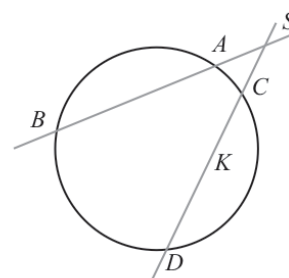
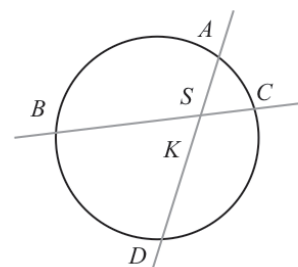
15 La géométrie analytique est essentiellement la géométrie des coordonnées qui utilise un formalisme algébrique.

méthodes utilisées en algèbre et en géométrie analytique. Il s'agit en fait d'adapter à la géométrie pure « le *principe* ou la *loi de continuité* des relations mathématiques de la grandeur abstraite et figurée<sup>16</sup> » considéré selon Poncelet comme un axiome dans la plupart des domaines des mathématiques. L'idée est de considérer que les propriétés des figures se conservent lorsque leurs éléments changent continument de positions les uns par rapport aux autres, « pourvu toutefois qu'on ait égard aux modifications particulières qui auront pu y survenir, comme lorsque certaines grandeurs se seront évanouies, auront changé de sens ou de signes, etc., modifications qu'il sera toujours aisé de reconnaître *à priori*, et par des règles sûres<sup>17</sup> ». De la même manière que les expressions désignant les éléments à l'infini sont introduites pour décrire les situations dans lesquelles un élément d'une figure est amené à disparaître en s'éloignant progressivement à l'infini, les expressions désignant des éléments imaginaires serviront au contraire à décrire les situations dans lesquelles des éléments disparaissent en restant à « distance finie ».

Un des exemples emblématiques de Poncelet est le théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Selon Poncelet, le principe de continuité permet non seulement d'étendre la formule  $SA.SB = SC.SD$  à l'ensemble des cas où les droites  $AB$  et  $CD$  coupent effectivement le cercle, mais aussi au cas où l'une des droites ne couperait plus le cercle. Il affirme que « cette relation demeure toujours réelle dans sa forme et son énoncé, même quand l'une  $SC$ , des deux sécantes, vient à ne plus rencontrer le cercle »<sup>18</sup>. Un tel résultat, souligne-t-il, pourrait apparaître en première analyse « contradictoire ou absurde ». En fait, répond Poncelet, cette seule relation ne suffit pas à caractériser les points  $C$  et  $D$ . Il faut une seconde relation (« car il y a deux inconnues ») que l'on obtient par exemple en considérant la perpendiculaire à la droite  $SC$  issue du centre  $O$  du cercle (la médiatrice de  $CD$ ).  $K$  étant le pied de cette perpendiculaire, on obtient par exemple, dans le cas où  $S$  est à l'extérieur du cercle et où  $SC$  est une sécante réelle, une seconde relation<sup>19</sup>

$$2 SK = SC + SD$$



$$SA.SB = SC.SD$$

16 [Poncelet 1822, p. xiv].

17 [Poncelet 1822, p. xii].

18 [Poncelet 1818, p. 341].

19 On notera que le formalisme de Chasles simplifiera ce genre de discussion.

qui permet de déterminer les points C et D et « qui exprime, il est vrai, comme la première, une dépendance toujours réelle, mais qui, étant incompatible avec elle pour toutes les circonstances où la sécante  $SK$  sort du cercle, sert par là même à caractériser et à définir l'état du système, et lui demeure ainsi applicable dans tous les cas possibles »<sup>20</sup>. Une manière d'exprimer une incompatibilité entre des équations caractérisant un élément géométrique ou une impossibilité de le construire sera de dire qu'il est imaginaire.

Dans son article *Sur la loi des signes de position en géométrie*<sup>21</sup> dans lequel il critique le point de vue de Carnot, Poncelet fait référence en reprenant les termes de ce dernier à « l'idée attribuée primitivement à l'illustre Leibniz, et depuis reproduite par d'Alembert, d'une Analyse qui donnerait le moyen de faire entrer la situation dans le calcul des problèmes, de sorte que l'on pût séparer par un caractère bien distinctif et par conséquent isoler facilement le système particulier que l'on a dessein de considérer dans l'énoncé de chaque question »<sup>22</sup>. Poncelet voit dans cette idée « une conception entièrement chimérique et dénuée de fondement » si elle consiste à affirmer que l'on peut séparer les solutions par le calcul algébrique « dans les cas mêmes où ces solutions seraient considérées en Géométrie comme de leur nature, tout à fait inséparables »<sup>23</sup>, ce qui supposerait que l'on puisse réduire toutes les équations algébriques à des équations du premier degré. Lorsque les solutions sont géométriquement séparables et que l'analyse les donne de manière simultanée, cela est dû à une mise en équation trop générale « ou, si l'on veut, de ce que la mise en équation enveloppe à la fois plusieurs questions analogues à celles de l'énoncé ».

Un exemple simple analysé par Poncelet permet de mieux comprendre son argument : « Soit un triangle rectangle en A dans lequel on connaît l'hypoténuse BC et la somme AB + AC + AD des deux petits côtés et de la perpendiculaire AD : on demande la valeur de cette perpendiculaire. »<sup>24</sup> En posant  $BC = a$ , la somme donnée  $AB + AC + AD = b$ ,  $AC = z$ ,  $AB = y$  et  $AD = x$ , les équations du problème s'écrivent :

$$x + y + z = b, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad yz = ax$$

20 [Poncelet 1818, p. 341].

21 [Poncelet 1815].

22 [Poncelet 1815, p. 290].

23 [Poncelet 1815, p. 290-291].

24 [Poncelet 1815, p. 282].

La résolution de ce système d'équations donne deux solutions :

$$x = a + b \pm \sqrt{2a^2 + 2ab} .$$

La première de ces solutions est plus grande que  $a + b$ , ce qui peut apparaître comme absurde. Poncelet refuse de considérer comme Carnot aurait pu le faire que l'on est en présence d'un cas où les manipulations algébriques conduisent à une solution fausse. Au contraire, Poncelet insiste sur le fait que la donnée de AD est insuffisante pour construire le triangle (en grandeur et en position). En poursuivant l'analyse et en calculant  $y$  et  $z$ , il apparaît que la valeur absurde correspond à un cas où ces valeurs sont imaginaires et donc à un cas où le triangle n'est pas constructible. Toutes les solutions du problème sont dotées de sens, certaines qui correspondent à des cas où toutes les valeurs envisagées sont réelles et donc à des figures constructibles, d'autres correspondent à des cas où certaines valeurs envisagées sont imaginaires et donc à des figures non-constructibles. Ces dernières valeurs ne sont pour autant dénuées de sens puisqu'elles expriment des situations qui n'ont pas d'existence géométrique. Poncelet considèrerait la capacité de l'analyse d'envisager toutes les situations, réelles ou non, dans un même raisonnement implicite comme la raison de sa généralité et de sa supériorité sur la géométrie pure.

Son objectif est de doter la géométrie pure de méthodes et de procédures qui lui permettent d'acquérir un caractère de généralité analogue à celui de la géométrie analytique. Parmi celles-ci, Poncelet propose de donner, grâce au principe de continuité, un sens à l'expression « élément imaginaire ». Poncelet distingue les éléments réels, les éléments idéaux qui sont des éléments réels dont la fonction est idéale et les éléments imaginaires. Ainsi, dans la figure ci-contre, la droite  $mn$  est une sécante réelle de l'ellipse et les points d'intersection de  $mn$  avec l'ellipse sont réels ; la droite est une droite réelle et une sécante idéale de l'ellipse. Les points d'intersection de  $mn$  avec l'ellipse sont des points imaginaires. Il convient donc de bien distinguer la droite sécante idéale « de toute ligne droite entièrement inconstructible dans son cours et sa direction, laquelle conservera d'ailleurs la dénomination, déjà admise, de *droite imaginaire*<sup>25</sup>. »

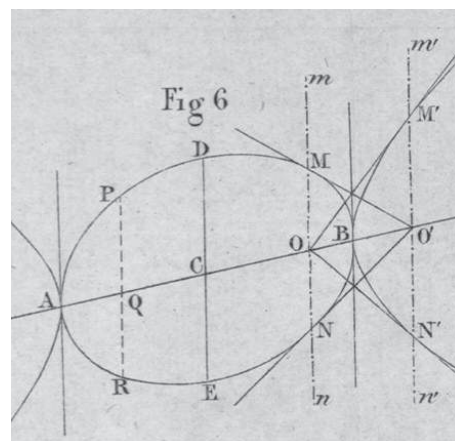


Fig. 2 : [Poncelet 1822, Pl. 1, Fig. 6]

25 [Poncelet 1822, 27].

Pour plus de précisions sur les techniques introduites par Poncelet, voir [Friedelmeyer 2011] et [Nabonnand

2015]. Pour une réécriture analytico-géométrique des techniques de Poncelet, on peut consulter [Bos-Kers-Oort-Raven 1987].

Poncelet utilise la notion classique de diamètres conjugués pour expliquer que le milieu  $O$  de la corde réelle  $MN$  est situé sur le diamètre conjugué  $AB$  de la direction  $mn$ . De même, le point d'intersection  $O'$  des tangentes à l'ellipse en  $M$  et  $N$  est lui aussi situé sur la droite  $AB$ . Comme les points  $O$  et  $O'$  sont conjugués harmoniques par rapport à  $A$  et  $B$ , ils jouent des rôles réciproques l'un de l'autre de ce point de vue. Poncelet considère donc la parallèle  $m'n'$  à  $mn$  qui passe par  $O'$  comme une sécante idéale à l'ellipse ; celle-ci définit une corde imaginaire dont le point  $O'$  est le centre idéal. Le point  $O$  devient le point d'intersection idéal des tangentes imaginaires (à l'ellipse) en les extrémités de la corde imaginaire.

Poncelet ajoute alors pour justifier ces définitions qu'« il suffit de supposer que la section conique que l'on considère ne soit pas décrite, mais seulement donnée par certaines conditions<sup>26</sup> ». Comme on ignore alors lorsque l'on cherche les points où la section conique rencontre une droite réelle si ceux-ci sont « possibles » (réels) ou non, « il est naturel de persister, dans tous les cas, à regarder cette ligne droite comme une sécante véritable de la courbe, et par conséquent de la traiter comme telle dans le raisonnement géométrique qui sert à faire découvrir les objets qu'on cherche<sup>27</sup> ».

Poncelet résume l'utilisation des nouveaux termes comme désignant différents modes de non-existence et justifie leur introduction en faisant référence d'une part à la nécessité d'utiliser un langage précis et juste et d'autre part à celle de la commodité :

*En général, on pourrait désigner par l'adjectif imaginaire tout objet qui, d'absolu et réel qu'il était dans une certaine figure, serait devenu entièrement impossible ou inconstructible dans la figure corrélative, « celle qui est censée provenir de la première par le mouvement progressif et continu de quelques parties, sans violer les lois primitives du système<sup>28</sup> » ; l'épithète idéal servirait à désigner le mode particulier d'existence d'un objet qui, en demeurant au contraire réel dans la transformation de la figure primitive, cesserait cependant de dépendre d'une manière absolue et réelle d'autres objets qui le définissent graphiquement, parce que ces objets seraient devenus imagi-*

---

26 [Poncelet 1822, p. 27].

27 [*Ibid.*].

28 Poncelet cite Carnot.

*naires. Car de même qu'on a déjà en Géométrie des noms pour exprimer les divers modes d'existence qu'on veut comparer, tels que infiniment petit, infiniment grand, il faut aussi en avoir pour exprimer ceux de la non-existence, afin de donner de la justesse et de la précision à la langue du raisonnement géométrique.*

*Ces définitions ont, sur toutes celles qu'on pourrait leur substituer, l'avantage de pouvoir s'étendre directement à des points, des lignes et des surfaces quelconques ; elles ne sont d'ailleurs ni indifférentes, ni inutiles en elles-mêmes ; elles servent à abréger le discours et à étendre l'objet des conceptions géométriques ; enfin elles permettent d'établir un point de contact, sinon toujours réel, au moins fictif, entre des figures qui paraissent, au premier aspect, n'avoir aucun rapport entre elles, et de découvrir sans peine les relations et les propriétés qui leur sont communes. [Poncelet 1822, p. 28]*

En analysant les sécantes communes réelles à deux coniques, Poncelet montre que lorsque celles-ci sont homothétiques<sup>29</sup>, elles ont une sécante commune à l'infini. Si les coniques homothétiques sont des hyperboles, elles ont donc deux points communs à l'infini et s'il s'agit d'ellipses, « elles ont deux *points imaginaires* à l'infini »<sup>30</sup>.

Poncelet ne réserve pas l'utilisation du mot « imaginaire » à la seule considération d'éléments devenus inconstructibles. L'objectif explicite de Poncelet est d'étudier les propriétés projectives des figures (vues comme des propriétés communes à un spectre de figures projectives). À cette fin, il établit une série de principes de projection qui sont autant d'outils généraux pour la suite de son traité. Le principe de continuité est utilisé pour assurer la généralité des principes de projection et Poncelet est amené à introduire l'idée de projection impossible ou imaginaire.

Par exemple, un des premiers principes de projection étudié par Poncelet est celui qui affirme que l'on peut toujours envoyer une droite à l'infini et considérer une conique comme un cercle :

*Une figure plane quelconque, où entrent une certaine droite et une section conique, peut, en général, être regardée comme la projecti-*

---

29 Poncelet dit « semblables et semblablement placées ».

30 [Poncelet 1822, p. 47].

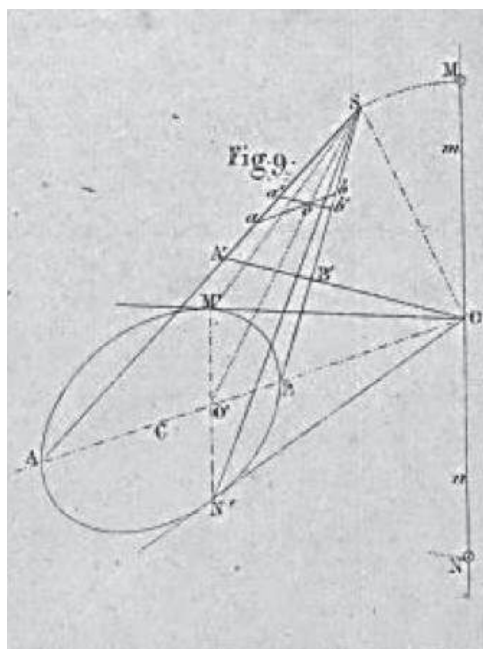


Fig. 3 : [Poncelet 1822, Pl. 1, Fig. 9]

*on d'une autre, pour laquelle la droite est passée entièrement à l'infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle. [Poncelet 1822, p. 53]*

Pour le démontrer, il formalise le problème en posant la question de déterminer les éléments d'une projection, à savoir déterminer le centre et le plan de projection :

*Etant données une section conique (C), et une droite mn, située à volonté sur son plan, trouver un centre et un plan de projection tels, que la droite donnée mn soit projetée à l'infini sur ce plan, et que la section conique y soit en même temps représentée par un cercle. [Poncelet 1822, p. 53]*

Poncelet donne une solution effective lorsque la droite ne coupe pas la conique, en montrant qu'il suffit de déterminer sur cette droite la corde idéale MN, de choisir le centre de projection sur la circonférence de centre le milieu O de MN et de diamètre MN et de projeter sur un plan perpendiculaire à MN<sup>31</sup>. Mais, signale Poncelet, « quand la droite donnée rencontre la section conique (C), [...], la projection de cette courbe, suivant un cercle, devient impossible ou imaginaire » puisque dans ce cas, la distance devient imaginaire<sup>32</sup>. Pour autant, le principe ne perd pas en généralité ; simplement, il est vrai pour une série de configurations et devient idéal pour une autre, ce qui signifie que le principe peut être appliqué en général. Les théorèmes ainsi obtenus qui n'impliquent que des objets réels sont bien entendu valables. Quant aux autres, soit l'apparition d'objets imaginaires est la marque d'une impossibilité, soit de la nécessité d'adapter l'énoncé. Ainsi, le principe de projection ci-dessus, redevient effectif dans ce cas en remplaçant le cercle par une hyperbole supplémentaire<sup>33</sup>. Si les propriétés qui découlent de l'utilisation d'une projection « impossible ou imaginaire » n'ont plus un « sens réel et absolu », elles ne sont pas, malgré cela, fausses en ce sens que leur utilisation ne peut conduire à « des erreurs véritables, à des absurdités manifestes et contraires aux axiomes incontestables de la raison »<sup>34</sup>. Elles gardent une utilité certaine et ainsi, les principes ne perdent en aucun cas leur généralité.

31 Pour plus de détails sur la démonstration de Poncelet, voir [Nabonnand 2015].

32 Comme la propriété d'incidence est projective, si une sécante réelle à une

conique est projetée à l'infini, il est difficile que la projection de celle-ci soit un cercle.

33 [Poncelet 1822, p. 54].

34 [Poncelet 1822, p. 68].

*Ainsi ces propriétés pourront bien ne conserver, dans certains cas, qu'une signification purement idéale dans ce qu'elles expriment, à cause qu'une ou plusieurs des parties qu'elles concernent auront perdu leur existence absolue et géométrique ; elles deviendront, si l'on veut illusoire, paradoxales dans leur objet ; mais elles n'en seront pas moins logiques, et propres, si on les emploie d'une manière convenable, à conduire à des vérités incontestables et rigoureuses, d'ailleurs susceptibles des mêmes limitations et des mêmes restrictions que les premières. » [Poncelet 1822, p. 68]*

Aux yeux de Poncelet, le principe de continuité assure la permanence des propriétés des figures même dans les cas où celles-ci ne sont plus effectives. Dans ces cas, il conserve pour autant une opérabilité dans la mesure où des modifications adéquates des énoncés permettent d'en obtenir de nouveaux qui s'appliquent alors effectivement.

### **3. — Une théorie des éléments imaginaires fondée sur la notion de correspondance projective : les *Beiträge* de von Staudt**

À la suite de Jacob Steiner, l'objectif de Georg von Staudt dans sa *Geometrie der Lage*<sup>35</sup> est de présenter la géométrie sur la seule base de l'incidence. Le point de vue adopté par Steiner et von Staudt est de faire reposer l'édifice de la géométrie sur la notion de forme fondamentale et de relation projective entre formes (définie chez von Staudt par la conservation de l'harmonicité)<sup>36</sup>. Le théorème fondamental de la géométrie projective, selon lequel la connaissance de trois couples d'éléments correspondants d'une correspondance projective entre deux formes uniformes ou de première espèce, c'est-à-dire qui correspondent au déploiement d'un seul élément (le point dans la ponctuelle vue comme un ensemble de points, la droite dans le faisceau de droites et le plan dans le faisceau de plans), détermine totalement celle-ci, a pour conséquence que la seule correspondance projective qui a trois éléments doubles est l'identité. Un autre corollaire du théorème fondamental est qu'une correspondance projective (entre deux

---

35 [Staudt 1847].

36 Voir [Nabonnand 2011a].



formes uniformes) est une involution « si deux éléments quelconques [différents] se correspondent doublement<sup>37</sup> ». Von Staudt étend la notion de correspondance projective aux formes fondamentales de deuxième espèce – c'est-à-dire qui correspondent au déploiement de deux éléments (point et droite pour le plan, droites et plans pour la gerbe) – et de troisième espèce (l'espace vu comme le déploiement de trois catégories d'éléments). Il distingue, parmi celles-ci, celles qui conservent la catégorie des éléments et celles qui les échangent. Dans le cas d'un plan, une correspondance directe associe un point à un point et une droite à une droite alors qu'une correspondance réciproque associe une droite à un point et un point à une droite. La notion de polarité est alors définie comme une involution projective réciproque. Les coniques sont alors obtenues comme les courbes doubles des polarités des formes de seconde espèce<sup>38</sup>.

Les polarités sans courbe double sont l'occasion pour von Staudt d'introduire le mot « imaginaire » et de se livrer à quelques considérations sur les éléments imaginaires :

*Si un système polaire n'a pas de courbe double, on dit alors que sa courbe double est imaginaire. [Staudt 1847, p. 155]<sup>ii</sup>*

En particulier, von Staudt avait signalé qu'une involution entre deux formes de première espèce (uniformes) avait soit deux éléments invariants réels, soit aucun<sup>39</sup>. Il reprend ce dernier cas en montrant que la courbe double imaginaire d'une polarité (sans élément double) est alors déterminée par trois points réels et deux points imaginaires<sup>40</sup>. Il en conclut une règle générale qui reprend le point de vue de Poncelet sur les éléments imaginaires :

*Si dans un théorème, deux éléments apparaissent comme des éléments doubles d'une forme en involution, alors en règle générale, le théorème peut être interprété plus généralement en faisant abstraction de l'hypothèse selon laquelle le système a deux éléments doubles. Pour s'en souvenir, on dit d'une forme uniforme en involution dans laquelle aucun élément (réel) n'est associé à lui-même, que ses éléments doubles sont imaginaires. [Staudt 1847, p. 165]<sup>iii</sup>*

37 Dans le vocabulaire de von Staudt, deux éléments  $A, A_1$  se correspondent doublement si  $A_1$  correspond à  $A$  et si  $A$  correspond à  $A_1$ .

38 Les surfaces du deuxième ordre sont définies comme surface double d'une polarité de l'espace.

39 [Staudt 1847, p. 119].

40 Ces points imaginaires sont les points doubles imaginaires de l'involution formée par la restriction de la polarité sans points doubles réels à une droite.

Dès 1847, aux yeux de von Staudt les expressions, points imaginaires, droites imaginaires, tangentes imaginaires, courbes imaginaires... ont toute légitimité non seulement dans l'énoncé des théorèmes mais aussi dans celui des problèmes :

*Déterminer une courbe du II. ordre qui passe par les trois sommets d'un triangle et qui touche deux droites imaginaires données qui ne se coupent pas en un sommet du triangle mais qui sont situées dans le même plan que le triangle.* [Staudt 1847, p. 166]<sup>iv</sup>

Quelques années plus tard, en 1856, dans le premier tome des *Beiträge*, von Staudt systématise cette présentation en proposant une théorie des éléments imaginaires fondée sur un mode d'écriture des éléments doubles d'une involution : une involution (sans point double réel)  $AA_1.BB_1$ <sup>41</sup> (dans le sens  $ABA_1$ <sup>42</sup>) d'une forme uniforme<sup>43</sup> définit un élément imaginaire de première espèce  $ABA_1B_1$ . Par l'expression « élément imaginaire  $ABA_1B_1$  », on ne désigne que quatre éléments d'une forme involutive  $AA_1.BB_1$ <sup>44</sup> de sens  $ABA_1$ .  $AA_1BB_1$  désigne donc un point imaginaire si la forme involutive est une ponctuelle, une droite imaginaire de première espèce si la forme est un faisceau de droites, et un plan imaginaire si elle est un faisceau de plans<sup>45</sup>.

Si les deux involutions  $AA_1.BB_1$  et  $EE_1.FF_1$  coïncident et si les sens  $ABA_1$  et  $EFE_1$  sont identiques,  $ABA_1B_1$  et  $EFE_1F_1$  désignent le même élément imaginaire. En particulier, comme les formes involutives  $AA_1.BB_1$  et  $A_1A.B_1B$  coïncident et que les sens  $ABA_1$  et  $A_1B_1A$ <sup>46</sup> sont identiques,  $ABA_1B_1$  et  $A_1B_1AB$  désignent le même élément imaginaire<sup>47</sup>. La notation de von Staudt pour désigner les éléments imaginaires est pertinente puisque la donnée de deux paires d'éléments correspondants spécifie non seulement l'involution et le sens choisi mais est invariante par l'involution elle-même. Von Staudt obtient donc de cette manière, une définition des éléments imaginaires en évitant toute considération métaphysique ou tout recours à une quelconque intuition ; il introduit dans le même temps une notation héritée de sa théorie des involutions qui va s'avérer commode. Les notations qui correspondent à la même forme involutive mais au sens opposé désignent l'élément imaginaire

que deux points ne coïncident pas et que le sens  $ABC$  est identique aux sens  $BCA$  et  $CAB$  et contraire aux sens  $CBA$ ,  $BAC$  et  $ACB$ . Les involutions des formes uniformes sont soit directes, c'est-à-dire conservent les sens, soit indirectes, c'est-à-dire inversent tous les sens. Dans le premier cas, la forme est divisée en deux parties associées par deux éléments correspondants par l'involution. Chaque paire d'éléments correspondants est séparée par toute autre paire d'éléments correspondants et l'involution ne présente aucun élément double. Dans le second cas, aucune paire d'éléments correspondants n'est séparée par une autre paire d'éléments correspondants et la forme contient deux éléments (réels) doubles.

43 La ponctuelle munie de son point à l'infini est considérée comme une forme fermée.

44 Comme l'involution n'a pas de point double réel et est donc directe, la paire d'éléments  $A, A_1$  est séparée par la paire  $B, B_1$ .

45 Pour une présentation analytique de la théorie de von Staudt, on peut consulter [Stephanos 1883] et pour une présentation en terme moderne, [Rowe 1997].

46 Les sens  $ABA_1$  et  $A_1B_1A$  sont identiques car la paire d'éléments  $A, A_1$  est séparée par la paire  $B, B_1$ .

47 De même que  $BA_1B_1A$  et  $B_1ABA_1$ .

41 Dans la notation de von Staudt,  $AA_1.BB_1$  désigne l'involution qui associe  $A$  à  $A_1$ ,  $A_1$  à  $A$ ,  $B$  à  $B_1$ , et  $B_1$  à  $B$ .

42 Trois éléments  $A, B, C$  d'une forme uniforme (et plus généralement d'une forme élémentaire fermée) déterminent une partie de celle-ci qui débute en  $A$ ,

contient  $B$  et se termine en  $C$ , ce qui détermine le sens  $ABC$  de la forme. La notion de sens est implicitement associée par von Staudt à celle de sens de parcours de la forme. Il précise même que lorsque les points  $A, B, C$  se déplacent, le sens  $ABC$  ne change pas tant

conjugué ; ainsi,  $A_1BAB_1$ ,  $BAB_1A_1$ ,  $AB_1A_1B$ ,  $B_1A_1BA$  désignent l'élément conjugué à  $AB_1A_1B$ <sup>48</sup>.

Au premier chapitre du premier tome des *Beiträge*, von Staudt avait étendu la notion de forme uniforme à celle de forme élémentaire en leur adjoignant les courbes et les surfaces du second ordre (les courbes et les surfaces doubles des polarités) et les surfaces réglées. Ces formes sont susceptibles d'être en correspondance projective et la notion d'involution s'étend avec les mêmes propriétés à celles-ci. La considération des systèmes réglés (hyperboloïdes à une nappe vus comme des surfaces engendrées par un système de droites non-coplanaires) en involution permet à von Staudt de proposer un nouvel élément imaginaire : les droites imaginaires de seconde espèce. Un système réglé en involution  $aa_1.bb_1$  et le sens  $aba_1$  définissent une droite imaginaire de seconde espèce qui sera désignée par  $aba_1b_1$ . Comme les propriétés des involutions des formes élémentaires sont analogues à celles des formes uniformes,  $aba_1b_1$ ,  $ba_1b_1a$ ,  $a_1b_1ab$ ,  $b_1aba_1$  désignent la même droite imaginaire de seconde espèce et  $a_1bab_1$ ,  $bab_1a_1$ ,  $ab_1a_1b$ ,  $b_1a_1ba$  la droite imaginaire conjuguée.

Bien entendu, il ne suffit pas de définir divers éléments imaginaires mais il faut aussi déterminer les relations d'incidence entre éléments imaginaires et celles entre éléments imaginaires et éléments réels.

Un élément imaginaire  $A_1BAB_1$  est situé sur un élément réel  $u$  si les éléments réels  $A_1$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $B_1$  sont situés sur  $u$ . De manière duale, un élément imaginaire  $A_1BAB_1$  passe par un élément réel  $s$  si les éléments réels  $A_1$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $B_1$  passent par  $s$ . En conséquence un point imaginaire est situé sur la droite réelle qui est le support de l'involution qui le définit. Une droite réelle coupe un plan imaginaire qu'à la condition que celle-ci coupe l'axe du faisceau de plans qui définit le plan imaginaire. De même, une droite imaginaire de première espèce est située dans le plan réel du faisceau de droites (réelles) involutif qui la définit. Elle passe aussi par un point réel, à savoir le centre de ce faisceau involutif. Par contre, une droite de seconde espèce n'est pas située dans un plan réel, ni ne passe par un point réel<sup>49</sup>.

48 La théorie de von Staudt permet de différencier les points conjugués à la différence de celle de Poncelet et de Chasles. C. Stephanos en fait le point essentiel de sa présentation dans un cadre analytique de la théorie de von Staudt :

*On sait que les éléments imaginaires ont été introduits en géométrie, par Poncelet et Chasles, pour les mêmes raisons que l'introduction des quantités imaginaires s'est imposées à l'analyse. Ces illustres géomètres se sont contentés toute fois d'examiner celles des propriétés de deux éléments imaginaires conjugués qui se rapportent d'une manière symétrique à ces deux éléments. De cette manière la question de la séparation de deux éléments imaginaires conjugués, question qui consiste à caractériser ces deux éléments*

*par des propriétés réelles distinctes, restait intacte jusqu'à ce que von Staudt en eût fait connaître la solution dans *Beiträge zur Geometrie der Lage*. [Stephanos 1883, p. 204]*

Les théories de Poncelet et de Chasles sont très inspirées par les manières d'introduire les solutions imaginaires dans les équations

à coefficients réels et tentent d'adapter en géométries ces idées. Les éléments imaginaires apparaissent donc par paires d'éléments conjugués.

49 En effet, aucune droite d'un système générateur de l'hyperboloïde n'est coplanaire d'une autre droite de ce système.

Enfin, une autre propriété importante des incidences entre éléments réel et imaginaire est le fait que ce sont les couples d'éléments conjugués qui sont concernés. En effet, un élément réel qui passe par un élément imaginaire passe aussi par l'élément imaginaire conjugué et un élément réel situé sur un élément imaginaire l'est également sur l'élément imaginaire conjugué.

Une fois établies les règles d'incidence entre éléments réels et éléments imaginaires, von Staudt détermine les règles d'incidence entre éléments imaginaires dans l'intention d'étendre aux éléments imaginaires les notions de projection (à partir d'un élément réel) ou de section (par un élément réel) ; un point imaginaire  $ABA_1B_1$  est situé dans un plan imaginaire  $EFE_1F_1$  si le support  $u$  du point imaginaire coïncide avec l'axe réel du support  $s$  du plan<sup>50</sup> ou si la ponctuelle involutive  $AA_1.BB_1$  (de support  $u$ ) et le faisceau involutif  $EE_1.FF_1$  (d'axe  $s$ ) sont en perspective<sup>51</sup> et si de plus les sens  $ABA_1$  et  $EFE_1$  coïncident. Dans ce dernier cas, le plan imaginaire  $EE_1.FF_1$  peut être désigné par  $s(ABA_1B_1)$  et le point  $AA_1.BB_1$  par  $u(EFE_1F_1)$ , cette nouvelle notation indiquant que les deux éléments sont en perspective.

Von Staudt peut alors définir la projection d'un point imaginaire à partir d'une droite réelle et la section d'un plan imaginaire par une droite réelle : le point imaginaire  $ABA_1B_1$  est projeté à partir d'une droite réelle  $s$  (qui n'est pas située dans un même plan réel que le point imaginaire) par le plan imaginaire  $s(ABA_1B_1)$ <sup>52</sup>. De même, un plan imaginaire  $EFE_1F_1$  est coupé par une droite réelle qui n'a avec lui aucun point réel en commun par un point imaginaire  $u(EFE_1F_1)$ .

Le comportement des droites imaginaires mérite un peu d'attention dans la mesure où il diffère selon que l'on examine des droites de première espèce ou de seconde espèce. Une droite imaginaire de première espèce  $ghg_1h_1$  passe par un point imaginaire  $ABA_1B_1$  si les deux formes involutives qui définissent ces éléments imaginaires sont en perspective et de même sens. De manière duale, la droite imaginaire de première espèce  $ghg_1h_1$  est contenue dans le plan imaginaire  $EFE_1F_1$  si les deux faisceaux involutifs qui définissent la droite et le plan sont en perspective et de même sens. Un point réel  $S$  et un point imaginaire

50 Rappelons qu'un point imaginaire est défini à partir d'une involution sur une ponctuelle et qu'un plan imaginaire est obtenu à partir d'une involution sur un faisceau de plans.

51 La ponctuelle involutive  $AA_1.BB_1$  et le faisceau involutif  $EE_1.FF_1$  sont en perspective si l'involution sur la ponc-

tuelle est définie comme une section de l'involution sur le faisceau de plans : si  $A$  est un point de  $E$ , alors  $A_1$  est un point de  $E_1$ , etc.

52 On notera que  $s(ABA_1B_1)$  est aussi le plan  $s(A)s(B)s(A_1)s(B_1)$  où  $s(A)$  est le plan qui projette  $A$  à partir de  $s$ .

qui ne sont pas situés sur une même droite réelle sont reliés par la droite imaginaire de première espèce  $S(ABA_1B_1)$ . Deux droites imaginaires de première espèce qui ont un point imaginaire en commun sont situées dans un même plan réel ou un même plan imaginaire selon que la droite qui joint leur point réel (le sommet des faisceaux involutifs qui les définissent) coupe ou non le support de la ponctuelle qui définit leur point d'intersection<sup>53</sup>. Les propriétés duales sont bien entendu vérifiées. Une droite de seconde espèce  $ghg_1h_1$  passe par un point imaginaire  $ABA_1B_1$  si l'involution de points  $AA_1.BB_1$  est induite par l'involution de droites  $gg_1.hh_1$  et si les deux sens des formes sont identiques<sup>54</sup>. De manière duale, une droite de seconde espèce  $ghg_1h_1$  est située dans un plan imaginaire  $EFE_1F_1$  si l'involution de plans  $EE_1.FF_1$  induit sur le système de droites une involution identique à celle qui définit la droite. Une droite imaginaire de seconde espèce et une droite réelle ont un point imaginaire commun et sont donc situées dans un même plan imaginaire si la droite réelle appartient à l'autre système de droites qui définit l'hyperboloïde<sup>55</sup>. Autrement, les deux droites ne se coupent pas et ne sont pas situées dans un même plan.

Von Staudt met en place alors un début de géométrie des éléments complexes en montrant que les propriétés d'incidence de la géométrie projective se généralisent<sup>56</sup> : ainsi, deux points  $P$  et  $Q$  déterminent une droite  $PQ$  qui passe par ces deux points. Si les deux points  $P$  et  $Q$  n'appartiennent pas à une même droite réelle, alors  $PQ$  est une droite imaginaire du premier ordre ou du second ordre selon que les points sont ou non situés dans un même plan réel. De manière duale, deux plans  $P$  et  $Q$  déterminent une droite  $PQ$  en laquelle les deux plans se coupent. Si elle n'est pas réelle, la droite d'intersection de deux plans est de première ou seconde espèce selon que les deux plans ont ou n'ont pas un point réel en commun. Si une droite et un plan ont plus d'un point en commun, la droite est contenue toute entière dans le plan et tous les points communs de deux plans sont situés sur leur droite d'intersection.

Une droite et un point situé à l'extérieur de cette droite déterminent un plan qui passe par cette droite et ce point. De manière

53 Soit les deux faisceaux de droites involutifs sont coplanaires et il existe une droite de ce plan telle que les involutions induites sur cette droite par les deux faisceaux involutifs sont identiques. Dans ce cas, les deux droites sont contenues dans un même plan réel (celui des deux faisceaux). Soit les deux faisceaux de droites involutifs ne sont pas coplanaires et les deux involutions définissent sur la droite d'intersection des deux plans la même involution. Dans ce cas les deux droites imaginaires sont contenues dans le plan imaginaire engendré par le point imaginaire d'intersection et la droite qui joint les deux points réels des deux droites imaginaires (c'est-à-dire le faisceau involutif de plans engendrés par les deux faisceaux involutifs non coplanaires de droites).

54 Le support de l'involution  $AA_1.BB_1$

doit couper chaque droite du système de droites qui définit la droite de seconde espèce. Cette droite appartient nécessairement à l'autre système de droites qui engendrent l'hyperboloïde.

55 Voir note précédente. Von Staudt parle de droite directrice (*Leitstrahl*).

56 Von Staudt caractérise les éléments réels comme des éléments confondus avec leur conjugué. Il souligne alors que les relations d'inclusion de la géométrie classique sont identiques à celles qu'il vient de définir dans ce cas particulier.

duale, un plan et une droite située à l'extérieur de ce plan déterminent un point en lequel ils se coupent. Enfin, trois points non alignés déterminent un plan de même que trois plans non coaxiaux déterminent un point.

Von Staudt conclut la présentation des éléments imaginaires et de leurs propriétés en expliquant qu'à quelques exceptions, les théorèmes établis (à partir des relations d'incidence) dans *Geometrie der Lage* peuvent se généraliser :

*Il suit de ce qui précède que les théorèmes contenus dans G[éométrie der Lage] §.6, à l'exception de 75 et 76, ne se limitent pas aux éléments réels, mais valent généralement. Par conséquent, cette validité générale vaut aussi pour les théorèmes établis dans le G. § 7 de telle manière que ni les énoncés de ceux-ci, ni les démonstrations soient à modifier en quoi que ce soit, du moment que l'on entend dorénavant par éléments pas seulement les éléments réels mais les éléments en général. [Staudt 1856, p. 85-86]<sup>v</sup>*

En se généralisant, les objets géométriques acquièrent de nouvelles propriétés ; ainsi, un triangle situé dans un plan imaginaire a au plus un côté réel ; un triangle imaginaire situé dans un plan réel peut avoir, quant à lui, deux côtés réels.

Von Staudt va plus loin encore dans la construction d'une géométrie des éléments imaginaires en étudiant les ensembles d'éléments et en revenant en particulier aux formes uniformes. Von Staudt distingue trois sortes de forme uniforme selon qu'elle contient une suite continue<sup>57</sup> d'éléments réels, un seul élément réel ou aucun. Les premières seront qualifiées de réelles<sup>58</sup>. Pour développer la notion de jet imaginaire<sup>59</sup>, von Staudt montre que l'on peut étendre aux éléments imaginaires des formes réelles la notion de correspondance projective. Pour autant, la géométrie des éléments imaginaires de von Staudt n'est pas une géométrie complexe puisqu'elle n'envisage pas de formes complexes, ni de transformation entre celles-ci<sup>60</sup> ; en développant une théorie des éléments géométriques imaginaires, ce dernier dote sa géométrie de position, à savoir la géométrie fondée sur l'étude des

57 Von Staudt a une conception cinématique de la notion de continuité géométrique, à savoir une suite continue autorise le mouvement continu d'un élément le long de la forme.

58 Von Staudt précise que les formes

réelles contiennent une infinité d'éléments imaginaires.

59 Pour un exposé de la théorie des jets de von Staudt, on peut consulter [Nabonnand 2008].

60 Même si l'action de ses éléments

est étendue aux éléments imaginaires des formes, le groupe reste celui des transformations projectives réelles.

correspondances projectives des formes (réelles) d'un outil supplémentaire qui permet de généraliser les démonstrations et les énoncés. Dans ce cadre, von Staudt montre que les correspondances projectives entre formes uniformes s'étendent à leurs éléments imaginaires. Pour cela, il considère deux formes uniformes réelles projectives (c'est-à-dire deux formes uniformes dont les éléments réels sont en correspondance projective<sup>61</sup>). Comme les involutions et les sens sont conservées par les correspondances projectives, à chaque élément imaginaire  $ABCD$  de la première forme, il correspond un élément imaginaire  $A_1B_1C_1D_1$ . Le problème est de s'assurer que si  $EFGH$  est une autre description de  $ABCD$  et si  $E_1, F_1, G_1, H_1$  sont les éléments correspondants à  $E, F, G, H$ , alors  $E_1F_1G_1H_1$  est une autre description de  $A_1B_1C_1D_1$ , ce qui est assuré par le fait que  $A_1C_1.B_1D_1$  et  $E_1G_1.F_1H_1$  représentent la même involution de la seconde forme. Avec cette extension, von Staudt établit que deux formes réelles uniformes projectives ayant même support possèdent soit un élément réel correspondant commun<sup>62</sup> (invariant), soit deux éléments réels correspondants communs, soit deux éléments imaginaires conjugués correspondants communs. Cette propriété lui permet de traiter uniformément un certain nombre de questions relatives aux jets sans se préoccuper (au moins dans un premier temps<sup>63</sup>) de la réalité des éléments fixes des correspondances projectives qu'il considère.

La présentation des éléments imaginaires par von Staudt sera reprise par Friederich August [1872], Felix Klein [1872] et Jacob Lüroth [1875 & 1876]. Tous soulignent que cette théorie est à leurs yeux la seule qui ait un fondement. Ainsi, J. Lüroth, après avoir souligné les différences d'approches de la question des éléments imaginaires en géométrie analytique et en géométrie pure, défend l'idée que l'interprétation des expressions liées aux éléments réels doit s'appuyer sur des considérations à propos de domaines réels :

*À ma connaissance, une seule interprétation pure des imaginaires a, jusqu'à présent, été véritablement mise en œuvre : celle que v. Staudt a exposée dans ses Beiträge zur Geometrie der Lage. V. Staudt emploie pour cela des involutions sans éléments doubles,*

61 Von Staudt définit la notion de correspondance projective des formes uniformes par la conservation de l'harmonie.

62 Von Staudt désigne par « *entsprechend gemein* » les points invariants des correspondances.

63 Après avoir développé en n'utilisant

que les ressources de la géométrie pure, c'est-à-dire des propriétés d'incidence et d'ordre, von Staudt applique celle-ci dans une annexe (tous les développements qui utilisent une quelconque notion de grandeur sont signalés dans les traités de von Staudt comme des annexes

(*Anhang*)) pour proposer une théorie des birapports et au-delà des coordonnées projectives réelles. Pour plus de précisions, voir [Nabonnand 2008]. On peut noter qu'à partir de ce moment, il n'est plus question d'éléments imaginaires, ni de coordonnées imaginaires.

*auxquelles il accorde un sens [...]. Par conséquent, sa théorie est à proprement parler une théorie des involutions dans l'espace et chaque théorème qui se présente dans celle-ci peut être immédiatement exprimé de telle manière qu'il ne soit uniquement question de points, plans ou droite réels. [Lüroth 1875, p. 146]<sup>vi</sup>*

En 1872, Klein exprime son insatisfaction devant les théories de Poncelet et de Michel Chasles en les qualifiant d'obscurcs et même d'inutilisables. C'est, à ses yeux, d'autant plus regrettable qu'il est nécessaire de donner une interprétation géométrique à la notion d'éléments imaginaires fondée sur une intuition reposant sur notre connaissance des domaines réels aux théorèmes montrés en utilisant des procédures analytiques ou algébriques. Selon Klein, la théorie de von Staudt a le mérite<sup>vii</sup> d'accomplir cet objectif.

Pour autant, selon Klein, la théorie de von Staudt n'est pas complètement satisfaisante ; en effet, Klein reproche à la théorie de von Staudt le caractère arbitraire de l'attribution d'un sens aux formes uniformes<sup>64</sup> et propose une solution alternative qui repose sur la notion de détermination projective de la métrique :

*Les deux points complexes  $O, O'$  situés sur une droite peuvent être considérés comme les points fondamentaux d'une métrique projective sur la droite en question. [Klein 1872, p. 403]<sup>viii</sup>*

Klein propose alors de définir la distance entre deux points  $a$  et  $b$  de la droite à partir du « logarithme d'un des deux birapports que forment les points  $a$  et  $b$  avec les points  $O$  et  $O'$  »<sup>ix</sup>. Une telle expression change de signes lorsque l'on intervertit  $O$  et  $O'$  mais il reste à montrer qu'une telle métrique définit les deux points  $O$  et  $O'$ . Pour cela, Klein considère les suites cycliques de points équidistants pour cette métrique obtenues sur la droite. Lorsque ces suites sont constituées de deux points, elles définissent une involution et l'on retrouve la construction de von Staudt. Dès qu'elles sont constituées d'au moins trois points, ces suites cycliques définissent un sens sur la droite. Inversement, la donnée de trois points est une suite cyclique pour une certaine métrique dont les points fondamentaux

---

64 [Klein 1872, p. 403].



sont ainsi définis. Pour cela, il associe aux trois points la forme cubique  $f$  qui représente ces points et les points fondamentaux de la métrique obtenue en considérant la hessienne  $\Delta$  de la forme  $f$ <sup>65</sup>. Selon Klein, cette théorie algébrique permet de caractériser les points complexes en évitant les difficultés (réelles) de la théorie de von Staudt concernant le sens de parcours des formes. Elle ne répond cependant pas au programme de von Staudt de ne s'appuyer que sur des considérations de pure géométrie<sup>66</sup>.

#### 4. — Le calcul géométrique de Michel Chasles

Michel Chasles, quant à lui, propose de reprendre le point de vue de Poncelet en le justifiant par un calcul inspiré de la théorie des équations algébriques. Dans sa biographie de Chasles rédigée à l'occasion du centenaire de l'École polytechnique, Eugène Rouché cite parmi les contributions importantes de Chasles la théorie des éléments imaginaires de la géométrie qu'il développe dans son *Traité de géométrie supérieure*<sup>67</sup> :

*La Géométrie supérieure, lors de sa publication, était nouvelle, à bien des égards pour les matières, et principalement pour les méthodes de démonstration qui, grâce à l'emploi des signes et à l'introduction des imaginaires, participent aux avantages de l'Analyse. Ces méthodes se distinguent par ce caractère spécial que les quantités susceptibles de devenir imaginaires n'y entrent pas sous forme explicite, mais s'y trouvent représentées par des éléments réels, de même qu'en Analyse les racines d'une équation sont représentées collectivement par les coefficients de cette équation.* [Rouché 1897, p. XXX]

Rouché considère donc que la théorie de Chasles développée dans son *Traité* constitue une réponse au problème de l'interprétation des éléments imaginaires en géométrie pure puisque les éléments imaginaires y sont construits à partir des éléments réels. Chasles lui-même mettait en avant ce point dans la préface de son *Traité* :

65 Pour plus de précisions, voir [Clebsch 1876, p. 215 & p. 273].

66 Alfred Clebsch semble ne pas suivre l'opinion de Klein au sujet de la théorie de von Staudt puisqu'après avoir exposé une théorie algébrique

des éléments imaginaires en géométrie, il renvoie à ce dernier pour « une définition purement géométrique des éléments imaginaires du domaine binaire » [Clebsch 1876, p. 216].  
67 [Chasles 1852].

*Les imaginaires, en Géométrie pure, présentent de graves difficultés : souvent on ne sait comment les définir ni les introduire dans le raisonnement ; et, d'autre part, les éléments d'une démonstration peuvent disparaître quand quelques parties d'une figure deviennent imaginaires. [...]*

*Nos théories donnent lieu aussi à certaines équations du second degré, qui permettent d'introduire naturellement et dans un sens parfaitement déterminé, les imaginaires dans les spéculations géométriques ; parce que ces objets imaginaires, points, lignes ou quantités n'entrent pas eux-mêmes explicitement dans le raisonnement, mais s'y trouvent représentés par des éléments toujours réels qui peuvent servir à les déterminer. [Chasles 1852, p. xiii-xiv]*

Chasles avait auparavant évoqué la question des éléments imaginaires en géométrie dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*<sup>68</sup> en évoquant une méthode introduite par Monge en géométrie qui consiste à démontrer (en utilisant des méthodes de géométrie pure) un théorème dans un cas particulier et de l'admettre en toute généralité en s'appuyant sur la possibilité de le démontrer en utilisant des méthodes de géométrie analytique<sup>69</sup> :

*Pour définir cette méthode, nous dirons « qu'elle consiste à considérer la figure, sur laquelle on a à la démontrer quelque propriété générale, dans des circonstances de construction générale, où la présence de certains points, de certains plans ou de certaines lignes, qui dans d'autres circonstances seraient imaginaires, facilite la démonstration. Ensuite, on applique le théorème qu'on a ainsi démontré au cas de la figure où ces points, ces plans et ces droites seraient imaginaires ; c'est-à-dire, qu'on le regarde comme vrai dans toutes les circonstances de constructions générales que peut présenter la figure à laquelle il se rapporte. [Chasles 1837, p. 198]*

Chasles nomme cette méthode *principe des relations contingentes* et précise que Monge utilise cette méthode tacitement<sup>70</sup> sans vraiment chercher à lui donner une quelconque légitimation<sup>71</sup>. Chasles, quant à lui, le justifie par des voies analytiques en espérant que ce principe

née par Monge dans son traité *Géométrie descriptive* (p. 52).

71 De fait, il semble que ce soit Chasles qui présente la méthode de Monge comme une méthode de géométrie pure. En effet, Monge semblait plutôt défendre un point de vue syncrétiste en géométrie :

*Il seroit à désirer que ces deux sciences [la géométrie descriptive et l'algèbre] fussent cultivées ensemble ; la géométrie descriptive porteroit dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence qui est son caractère, et, à son tour, l'analyse porteroit dans la géométrie la généralité qui lui est propre. [Monge VII, p. 16]*

Pour plus de détails sur cette question, voir [Belhoste 1998, p. 17-19].

68 [Chasles 1837].

69 Maximilien Marie reprend cette présentation dans son histoire des sciences mathématiques et physiques : *Enfin Monge, sans songer encore à réaliser les imaginaires en Géométrie, eut la hardiesse de les y considérer à l'état*

*d'intermédiaires entre les données et les inconnues, également réelles, et de formuler le principe fécond des relations contingentes qui a été le point de départ des belles recherches de Poncelet. [Marie 1886, p. 131]*

70 Chasles cite la démonstration don-

« sera peut-être basé un jour sur quelque principe métaphysique de l'étendue figurée, [...] »<sup>72</sup>. Il ajoute que Poncelet a cherché à fonder la méthode de Monge en posant le principe de continuité mais il rappelle que, bien que Poncelet ait fait un usage fructueux de ce principe, celui-ci « n'étant pas démontré rigoureusement, n'a été considéré par d'autres célèbres académiciens<sup>73</sup> que comme une forte induction, et un moyen précieux pour deviner et pressentir les vérités, mais non pour suppléer aveuglément, et dans tous les cas, à leur démonstration rigoureuse<sup>74</sup> ». Dans la préface du *Traité de géométrie supérieure*, Chasles répète sa critique en expliquant que c'est la « puissance de l'Analyse qui autorise à faire avec confiance, en Géométrie pure, usage du *principe de continuité*<sup>75</sup> » et donc que ce principe « ne pouvait répondre aux vues qui [l'] ont dirigé dans la méthode suivant laquelle je traite la Géométrie. En fait, la critique de Chasles ne s'arrête pas à la simple constatation que le principe de continuité n'est pas démontré a priori et que l'on est obligé de le considérer comme un postulat. En effet, Chasles reproche aux démonstrations qui utilisent ce principe de ne pas fournir une démonstration géométrique générale. En montrant les propositions ou en résolvant un problème dans un cas particulier et en étendant le résultat en utilisant le principe de continuité, on ne comprend pas complètement la question que l'on étudie dans toute sa généralité et on laisse « dans chaque question une lacune et un sujet de recherche<sup>76</sup> » :

*Mais il est une autre considération plus puissante qui m'a déterminé à ne pas profiter, dans ce Volume destiné à poser les bases de méthodes générales, des facilités qu'aurait pu offrir souvent le principe de continuité. Une étude attentive des différents procédés de démonstration qui peuvent s'appliquer à une même question m'a convaincu qu'à côté d'une démonstration facile, fondée sur quelques propriétés accidentelles ou contingentes d'une figure, devaient s'en trouver toujours d'autres, fondées sur des propriétés absolues et subsistantes dans tous les cas que peut présenter la figure en raison de la diversité de positions de ses parties ; et j'ai éprouvé que la recherche de ces démonstrations complètement*

---

72 [Chasles 1837, p. 204].

73 Chasles fait allusion à Cauchy qui

74 [Chasles 1837, p. 199-200].

75 [Chasle 1852, p. xvi].

76 [Chasles 1852, p. xvii].

*rigoureuses est d'autant plus utile, qu'elle met nécessairement sur la voie des propositions les plus importantes, de celles qui établissent tous les liens qui doivent exister entre les différentes parties d'un même sujet.* » [Chasles 1852, p. xvii]

L'objectif explicite de Chasles est d'assurer aux énoncés et aux démonstrations de géométrie pure<sup>77</sup> un caractère de généralité grâce auquel, à l'instar de la géométrie analytique, on ne tient pas compte des différences de positions relatives des différents éléments d'une figure, ni même du statut de réalité ou d'« imaginarité »<sup>78</sup>. À ses yeux, la solution est d'adopter le principe des signes, c'est-à-dire de « marquer la direction des segments ou des angles »<sup>79</sup>. Chasles énumère les avantages de l'adoption du principe des signes en les situant par rapport à son programme. En accordant un signe aux longueurs des segments ou aux angles, on exprime en une formule la totalité des propriétés des figures :

[...] *l'usage explicite du principe des signes est souvent indispensable pour donner aux propositions leur signification complète et toute la portée qui leur est propre, et à la science toutes ses ressources naturelles.* [Chasles 1852, p. xi]

Chasles illustre son argument en évoquant la théorie de l'involution<sup>80</sup> et en pointant que la relation entre 6 points alignés

$$ab'.bc'.ca' = ac'.cb'.ba'$$

détermine pour une position donnée des cinq points  $a, a', b, b', c$  deux points  $c'$  « si on la regarde comme une relation purement numérique et sans y faire entrer, aux moyens des signes, aucune condition de direction des segments »<sup>81</sup>. Les formules ne sont plus attachées à une figure particulière et expriment ainsi les conditions du problème en toute généralité. En permettant donc de raisonner en toute généralité et indépendamment d'une configuration particulière, le principe des signes apporte en même temps dans les démonstrations « une facilité qui rapproche les conceptions de la Géométrie de celles de l'Analyse »<sup>82</sup>. Pour les mêmes raisons, les énoncés eux-mêmes sont plus généraux et permettent de se concentrer sur l'essentiel :

côtés d'un quadrilatère inscrit dans une conique et cette conique forment une involution. Si  $a, a'$  et  $b, b'$  désignent les points d'intersection des deux paires de côtés opposés du quadrilatère et  $c, c'$  les points d'intersection avec la conique, ces six points vérifient des relations du type :  $ab'.bc'.ca' = ac'.cb'.ba'$  qui sont considérées sans considération de signe des segments dans les traités classiques de géométrie pure.  
81 [Chasles 1852, p. ix-x].  
82 [Chasles 1852, p. xi].

77 L'expression « géométrie pure » signifie chez Chasles, comme chez Poncelet et Carnot, que l'on s'interdit d'utiliser des coordonnées et de former des équations algébriques avec celles-ci. Par contre, on ne s'interdit pas d'utiliser des grandeurs comme les longueurs et d'opé-

rer de manière calculatoire sur celles-ci.

78 Chasles ajoute un autre « avantage essentiel » de sa méthode : la dualité point/droite.

79 [Chasles 1852, p. vi].

80 Les six points  $a, a', b, b', c, c'$  en lesquels une droite intersecte les quatre

*Le principe des signes étend même son influence sur l'énoncé des propositions ; car, lorsqu'elles ne se compliquent pas de conditions de situation, elles prennent une forme à la fois plus générale et plus concise, qui présente à l'esprit une idée plus nette et se prête mieux au raisonnement. » [Chasles 1852, p. xii]*

Le premier exemple et le fondement de la méthode proposée par Chasles est la relation à laquelle il donnera son nom. Pour cela, il affecte une direction aux droites<sup>83</sup> et en même temps un signe aux segments. Si  $a, b, c$  sont trois points d'une droite ainsi orientée, on aura la relation à partir de laquelle Chasles développe une théorie de l'harmonicité, des homographies et de l'involution :

$$ab + bc + ca = 0 .$$

Grâce à cette formule, Chasles est en mesure de traduire géométriquement l'essentiel des procédures algébriques et obtenir un formalisme géométrique aussi puissant que celui mis en œuvre en géométrie analytique.

Pour introduire la notion de points imaginaires, Chasles part de la constatation qu'un point  $M$  étant fixé sur une droite, deux points  $a$  et  $a'$  sont déterminés par la donnée de leur milieu  $\alpha$  et du produit  $v$  de leur distance à l'origine  $M$ . En effet, la définition des paramètres du problème permet d'écrire :

$$v = Ma.Ma' = M\alpha^2 - \alpha a'^2$$

et l'on en déduit immédiatement en exprimant par exemple que  $Ma$  et  $Ma'$  et sont les racines de l'équation :  $x^2 - 2M\alpha.x + v = 0$  :

$$Ma = M\alpha + \sqrt{M\alpha^2 - v} \quad \text{et} \quad Ma' = M\alpha - \sqrt{M\alpha^2 - v} .$$

Lorsque  $M\alpha^2$  est plus petit que  $v$ , « les deux points cherchés n'existent plus. On dit alors qu'ils sont *imaginaires*.<sup>84</sup> ». Chasles précise que les points imaginaires sont obtenus par paire de points conjugués déterminés par deux données réelles :

*Ainsi, l'on conçoit bien ce que nous entendrons par deux points imaginaires sur une droite ; cela signifiera les deux données ou éléments qui servent à la détermination des deux points, savoir, leur*

83 Sans préciser exactement comment il procède.

84 [Chasles 1852, p. 55].

*point milieu et le rectangle de leurs distances à une origine commune, donnent lieu à une expression imaginaire des distances de ces points à l'origine, ou bien que l'équation du second degré qui suffit pour représenter les deux points a ses racines imaginaires.*

*Quand nous parlerons de deux point imaginaires, il sera question de deux points conjugués déterminés comme il vient d'être dit, lesquels peuvent avoir, avec une figure donnée, certaines relations au moyen de leurs éléments, et il ne s'agira pas de deux points quelconques indépendants l'un de l'autre [...]. » [Chasles 1852, p. 55]*

Les points imaginaires peuvent interférer avec les éléments réels mais cela se traduit par des formules dans lesquelles interviennent les données qui ont servi à déterminer la paire de points imaginaires. Par exemple, deux points imaginaires  $a$  et  $a'$  (définis par leur milieu  $\alpha$  et le produit de leurs distances à un point de la droite  $m$ ) peuvent être conjugués harmoniques de deux points réels  $e$  et  $f$ .

La démonstration que donne Chasles de cette propriété est emblématique de sa méthode. En effet, Chasles a pris le soin de montrer auparavant (dans un cadre purement réel) que l'équation qui traduit la propriété d'harmonicité de quatre points d'une droite

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = -1$$

devient lorsque l'on rapporte les distances à un point arbitraire de la droite :

$$\frac{me - ma}{mf - ma} = \frac{me - ma'}{mf - ma'}$$

ou encore

$$(ma + ma')(me + mf) = 2 ma.ma' + 2 me.mf$$

soit en notant  $\alpha$  et  $O$  les milieux respectifs de  $a$  et  $a'$  et de  $e$  et  $f$ ,

$$ma.ma' + me.mf = 2 m\alpha.mO$$

La propriété d'harmonicité des quatre points  $a, a', e, f$  peut donc se traduire en utilisant les paramètres qui servent à déterminer les paires de points conjugués (réels ou imaginaires), ce qui permet d'étendre

naturellement la définition de l'harmonicité au cas où deux des points sont imaginaires<sup>85</sup> :

*Ainsi l'on peut concevoir deux points imaginaires, conjugués harmoniques par rapport à deux points réels ; cela veut dire que les deux points réels ont avec les éléments qui représentent le système des deux points imaginaires les relations qui expriment d'une manière générale le rapport harmonique de quatre points réels, conjugués deux à deux. [Chasles 1852, p. 58]*

On peut aborder le problème de manière légèrement différente, c'est-à-dire en demandant de construire le point conjugué harmonique  $f$  d'un point donné  $e$  par rapport à deux points (réels ou imaginaires)  $a$  et  $a'$ <sup>86</sup>. Chasles utilise une propriété classique des points en relation harmonique selon laquelle la distance de l'un deux à son conjugué est la moyenne harmonique des distances du même point aux deux autres, à savoir :

$$\frac{2}{ef} = \frac{1}{ea} + \frac{1}{ea'}$$

[...] le second [point]  $f$  se déterminera par la relation

$$ea \cdot ea' = ea \cdot ef,$$

*dans laquelle les deux points imaginaires entrent par leurs deux éléments, savoir leur point milieu et le rectangle de leurs distances au point. [Chasles 1852, p. 58]*

Les deux formules ci-dessus ont des statuts différents lorsque  $a$  et  $a'$  sont des points imaginaires. La première n'a plus, selon Chasles, de sens explicite. Par contre, si l'on admet que les quantités imaginaires sont susceptibles des mêmes opérations algébriques que les quantités réelles, on peut transformer les formules qui n'ont pas de sens de manière à faire disparaître les quantités imaginaires et les remplacer par « les deux éléments des deux points imaginaires<sup>87</sup> » comme dans la seconde formule. En conséquence, Chasles propose un usage symbolique des formules qui comportent des quantités imaginaires :

*On pourra donc exprimer les dépendances existant entre deux points imaginaires et des parties réelles d'une figure, dépendances*

85 Chasles montre que lorsque deux des quatre points en relation harmonique sont imaginaires, les deux autres sont nécessairement réels [Chasles 1852, p. 49, 56 et 58].

86 Ce problème est un cas particulier du problème des centres des moyennes harmoniques, traité par Poncelet [1828] dans un mémoire publié dans le *Journal de Crelle*.

*qui, au fond, ne peuvent contenir que les éléments des deux points, par les relations générales qui conviennent au cas de points réels et dans lesquelles ces éléments n'apparaissent pas explicitement. Mais alors les segments qui entrent dans ces relations [...] doivent être considérés comme des symboles, au moyen desquels on fait allusion au cas où les points seraient réels, et qui, combinés entre eux, comme dans ce cas spécial, conduisent à des relations où n'entrent que les éléments des deux points; de sorte que la relation symbolique primitive n'est, au fond, qu'une expression de cette relation entre des éléments toujours réels.* [Chasles 1852, p. 62]

D'après Chasles, un des avantages de son exposition de la géométrie est la dualité point-droite. Il donne donc une version duale de sa présentation des points imaginaires et propose une « manière de déterminer simultanément deux droites conjuguées passant par un point donné<sup>88</sup> ». Pour cela, il a besoin de déterminer deux éléments réels qui détermineront la position de deux droites passant par un point. Or, une telle position est simplement déterminée par la donnée de leur point d'intersection avec une droite donnée. Si ces deux points sont réels, il n'y a pas de problème ; par contre, lorsque les deux points sont imaginaires, on dit que les deux droites sont imaginaires.

Dans le cas réel, la position des deux droites (A,A') est déterminée par la donnée des angles qu'elles forment « avec un axe fixe mené par leur point de concours ». Si on note S et P la somme et le produit des cotangentes de ces angles, celles-ci seront les racines de l'équation du second degré

$$\cot x^2 - S \cot x + P = 0 .$$

Un résultat classique sur les droites harmoniques donne

$$2 \cot (E,F) = \cot (E,A) + \cot (E,A')$$

(où F est la droite conjuguée harmonique de l'axe fixe E par rapport à A et A') permet alors d'affirmer qu'une paire de droites est déterminées par la donnée de deux éléments réels : le produit des cotangentes de l'angle qu'elles font avec un axe fixe passant par leur point d'intersection et la droite conjuguée harmonique de cet axe par rapport aux deux droites cherchées :

---

87 [Chasles 1852, p. 61].

88 [Chasles 1852, p. 62].



*Cette droite et le produit des cotangentes des inclinaisons peuvent être considérés comme les éléments propres à la détermination des deux droites.*

*Les deux droites, nonobstant la réalité de ces deux éléments peuvent être imaginaires. Ainsi l'on voit ce que nous entendrons par droites imaginaires représentées par deux éléments réels, comme le sont deux droites réelles. [Chasles 1852, p. 63]*

Les points et droites imaginaires sont donc définis à partir d'éléments réels et Chasles précise bien que la considération de points ou de droites imaginaires n'implique que ces éléments réels. L'utilisation de quantités imaginaires dans des formules n'est là encore qu'une manière symbolique de manipuler commodément les éléments réels qui déterminent les objets imaginaires. Bien entendu, le calcul géométrique de Chasles suit de près les procédures de la géométrie analytique.

En cherchant à légitimer l'usage des éléments imaginaires dans le raisonnement, les praticiens de la géométrie pure du 19<sup>e</sup> siècle s'occupent plus de justifier des procédures, des expressions et des modes de questionnement. Il ne s'agit pas de donner une valeur ontologique à la définition d'une notion – la plupart des auteurs affirment que les éléments imaginaires n'existent pas. Poncelet déclare qu'il réserve « le mot imaginaire pour le cas où l'objet en question serait tout à fait impossible<sup>89</sup> ». De la même manière, von Staudt introduit la notion d'élément imaginaire pour décrire le cas des polarités qui n'ont pas de courbe double réelle<sup>90</sup>. Chasles enfin insiste pour signaler qu'il ne s'intéresse qu'à des propriétés qui « se distinguent par ce caractère spécial que les objets susceptibles de devenir imaginaires n'y entrent pas sous forme explicite, mais s'y trouvent, représentés par des éléments réels<sup>91</sup> ». De fait, leur problème est de justifier les conditions d'utilisation d'expressions comme « points imaginaires », « droites imaginaires », « plans imaginaires » ou encore « contact imaginaire » dans des raisonnements de géométrie de manière à pouvoir les mener en toute généralité de la même manière que l'utilisation des nombres

---

89 [Poncelet 1820, p. 404].

90 [von Staudt 1847, p. 155]

91 [Chasles 1854, p xvii].

complexes simplifie le calcul algébrique et son application en géométrie. Ce point de vue perdure très longtemps. Ainsi, Eugène Rouché et Charles de Comberousse présentent les éléments imaginaires en reprenant la théorie de Chasles et défendent leur utilisation de manière pragmatique :

*Les avantages de cette nouvelle manière de voir [L'utilisation des éléments imaginaires] sont connus du lecteur qui est déjà versé dans l'Analyse algébrique. En Géométrie comme en Algèbre, l'introduction des imaginaires permet de généraliser les énoncés, évite les subdivisions, et leur emploi transitoire fournit des démonstrations rapides et élégantes. [Rouché-Comberousse 1891, p. 373]*

---

**Bibliographie**

- August Friederich  
[1872] *Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie*, (Programme der Friederichs-Realschule), Berlin : Gustav Lange, 1872.
- Belhoste Bruno  
[1998] De l'École polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet, *Bulletin de la SABIX*, 19 (1998), p. 9-29.
- Bos Henk, Kers C., F. Oort & D. W. Raven  
[1987] Poncelet's closure theorem, *Expositiones Mathematicae* (1987), p. 289-364.
- Carnot Lazare  
[1801] *De la Corrélation des figures de géométrie*, Paris : Duprat, 1801.  
[1803] *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.
- Chasles Michel  
[1837] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*, Hayez : Bruxelles, 1837.  
[1852] *Traité de géométrie supérieure*, Paris : Bachelier, 1852 ; cité d'après la seconde édition, Paris : Gauthier-Villars, 1880.  
[1870] *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Paris : Imprimerie nationale, 1870.
- Clebsch Alfred  
[1876] *Vorlesungen über Geometrie, 1 Band, Geometrie der Ebene*, bearbeitet und herausgegeben von F. Lindeman mit einem Vorwort von F. Klein, Leipzig : Teubner, 1876, cité d'après la trad. fr. par A. Benoist, *Leçons sur la géométrie, t. 1, Traité des sections coniques et introduction à la théorie des formes algébriques*, Paris : Gauthier-Villars, 1879.
- Euler Leonhard  
[1748] Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper, *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin* [4] (1748), 1750, 234-248 ; *Opera omnia*, I-26 *Commentationes geometricae*, 46- 59.
- Friedelmeyer Jean-Pierre  
[2011] L'impulsion originelle de Poncelet dans l'invention de la géométrie projective, in *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*, Lise Bioesmat-Martangon (éd.), Nancy : PUN, 2011, 55-158.
- Klein Felix  
[1872] Zur Interpretation der komplexe Elemente in der Geometrie, *Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1872 ; *Mathematische Annalen*, 22 (1883), 242-245 ; cité d'après *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t.1 (1921), p. 402-405.

- Lüroth Jacob
- [1875] Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln. Darstellung und -Erweiterung der v. Staudt'schen Theorie, *Mathematische Annalen*, 8 (1875), p. 145-214.
  - [1876] Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln, *Mathematische Annalen*, 11 (1876), p. 84-110.
- Monge Gaspard
- [VII] *Géométrie descriptive, leçons données aux écoles normales*, Paris : Baudouin, an VII de la République ; rééd. Paris : Gauthier-Villars, 1922.
- Nabonnand Philippe
- [2008] La théorie des jets de von Staudt : une irruption de l'algèbre en géométrie, *Archive for History of Exact Sciences*, 62 (2008), p. 201-242, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01082945>.
  - [2011a] « Deux droites coplanaires sont sécantes », in *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*, Lise Bioesmat-Martangon (éd.), Nancy : PUN, 2011, p. 159-195, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01081820>.
  - [2011b] L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles, in D. Flament & P. Nabonnand (éds.), *Justifier en mathématiques*, Paris : Éditions de la MSH, 2011, p. 17-47, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00637385v1>.
  - [2013] La théorie des coniques chez Poncelet, Steiner et von Staudt in R. Rashed & P. Crozet (éds), *Les Courbes : histoire d'un concept*, Paris : Blanchard, 2013, p. 195-212, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01079478v1>.
  - [2015] L'étude des propriétés projectives des figures par Poncelet : une modernité explicitement ancrée dans la tradition, in A. Guilbaud & C. Gilain dir., *1750-1850 : ruptures et continuité en histoire des mathématiques*, 2015, p. 381-402.
- Poncelet Jean-Victor
- [1815] Sur la loi des signes de position en géométrie et le principe de continuité (1815), in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864, p. 167-295.
  - [1818] Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques (1818), in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864, p. 296-364.
  - [1820] Essai sur les propriétés projectives des sections coniques, in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864, p. 365-454.
  - [1822] *Traité des propriétés projectives des figures*, Metz/Paris : Lamor/Bachelier, 1822 ; cité d'après la seconde édition (tome 1), Paris : Gauthier-Villars, 1865.
  - [1828] Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 3 (1828), p. 213-272 ; rééd. dans le second tome du *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Gauthier-Villars, 1866, p. 57-121.

- [1862] *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, t. 1, Paris : Gauthier-Villars, 1862.
- Rouché Eugène  
[1897] Biographie de Michel Chasles, *Livre du Centenaire de l'Ecole polytechnique*, Paris : Gauthier-Villars, 1897.
- Rouché Eugène & de Comberousse Charles  
[1891] *Traité de géométrie, deuxième partie : géométrie dans l'espace*, Paris : Gauthier-Villars, 1891
- Rowe David  
[1997] In search of Steiner's Ghosts : Imaginary elements in the nineteenth-century geometry, in D. Flament (dir.), *Le nombre, une hydre à n visages*, Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, 1997.
- Staudt Georg von  
[1847] *Geometrie der Lage*, Nuremberg : Verlag von Bauer und Raspe, 1847 ; trad. en italien par M. Pieri, *Geometria di posizione* di Georgio von Staudt (avec une présentation des travaux de von Staudt par C. Segre), Turin : Bocca, 1889 ; cité dans la trad. fr. par P. Nabonnand, Paris : Hermann, 2011.
- [1856] *Beiträge zur Geometrie der Lage*, I, Nuremberg : Verlag von Bauer und Raspe, 1856.
- Stephanos Cyparissos  
[1883] Sur la définition géométrique des points imaginaires, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. 7 (1883), p. 204-213.
- Voelke Jean-Daniel  
[2008] Le théorème fondamental de la géométrie projective : évolution de sa preuve entre 1847 et 1900, *Archive for History of Exact Sciences*, 62 (2008), p. 243-296.
-

**Texte original des citations :**

*i* Wenn bei der analytischen Behandlung der Geometrie das Studium der algebraischen Gebilde notwendig zu der Einführung komplexer Elemente hinleitet, so hat man lange Zeit darüber gestritten, ob und in wie weit den komplexen Elementen eine rein geometrische Bedeutung beizulegen sei.

*ii* Wenn ein ebenes Polarsystem keine Ordnungcurve hat, so sagt man, dass seine Ordnungcurve imaginär sey.

*iii* Wenn in einem Satze zwei Elemente als Ordnungselemente eines involutorischen Gebildes erscheinen, so kann derselbe in der Regel dadurch allgemeiner aufgefasst werden, dass man von der Voraussetzung, das involutorische Gebilde habe zwei Ordnungselemente, abstrahirt. Um hieran zu erinnern, sagt man von einem involutorischen einförmigen Gebilde, in welchem kein (reelles) Element sich selbst zugeordnet ist, dass seine Ordnungselemente imaginär seyen.

*iv* Eine Curve II. Ordnung zu finden, welche durch die drei Eckpunkte eines gegebenen Dreiecks

gehe und zwei gegebene imaginäre Gerade berühre, die in keinem Eckpunkte des Dreiecks sich schneiden, aber mit ihm in einerlei Ebene liegen.

*v* Aus dem Bisherigen geht hervor, dass die in G. §. 6 enthaltenen Sätze, mit Ausnahme von 75 und 76, sich nicht auf reelle Elemente beschränken, sondern allgemein gelten. Dieselbe allgemeine Gültigkeit kommt daher auch den in G. §. 7 aufgestellten Sätzen zu, so dass weder in den Aussagen derselben noch in den Beweisen etwas abzuändern ist, wenn nun unter Elementen nicht bloß reelle Elemente sondern Elemente überhaupt verstanden werden.

*vi* Bis jetzt ist meines Wissens nur reine Interpretation des Imaginären in der Geometrie wirklich durchgeführt: diejenige, welche v. Staudt in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage auseinandergesetzt hat. v. Staudt benutzt dabei Involutionen ohne Ordnungselemente, die er mit einem Sinne begabt [...]. Seine Theorie ist also eigentlich eine Theorie von Involutionen im

Raume und jeder Satz der in ihr auftritt, kann sofort so ausgesprochen werden, dass nur von reellen Punkten, Ebenen oder Geraden die Rede ist.

*vii* v. Staudts Verdienst ist es, in seinen Beiträgen zur Geometrie die Frage in der so präzisierten Form aufgestellt und in in einer nun noch näher zu beleuchtenden Art beantwortet zu haben.. [Klein 1872, p. 402]

*viii* Die beiden auf einer Geraden befindlichen komplexen Punkte können als Grundpunkte für eine auf der Geraden zu treffende *projectivische Massbestimmung* betrachtet werden. [Klein 1872, p. 403]

*ix* Als Entfernung zweier Punkte *et* hat man dann den mit einer beliebig zu wählenden Konstanten multiplizierten Logarithmus eines der beiden Doppelverhältnisse zu betrachten, welches die Punkte *et* mit den Punkten *et* bilden. [Klein 1872, p. 403]