



HAL
open science

Une solution explicite monodimensionnelle d'un modèle simplifié de couplage stationnaire thermohydraulique-neutronique

Stéphane Dellacherie, Olivier Lafitte

► To cite this version:

Stéphane Dellacherie, Olivier Lafitte. Une solution explicite monodimensionnelle d'un modèle simplifié de couplage stationnaire thermohydraulique-neutronique. 2016. hal-01263642v1

HAL Id: hal-01263642

<https://hal.science/hal-01263642v1>

Preprint submitted on 28 Jan 2016 (v1), last revised 22 Aug 2016 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une solution explicite monodimensionnelle d'un modèle simplifié de couplage stationnaire thermohydraulique–neutronique

Stéphane Dellacherie^{a,b,c}, Olivier Lafitte^{a,d}

^aCommissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives, CEA, DEN, DM2S, STMF, F-91191 Gif-sur-Yvette, France.

^bUniversité Pierre et Marie Curie (Paris 6), LRC-Manon, Laboratoire J.-L. Lions, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France.

^cÉcole Polytechnique de Montréal, C.P. 6079, succ. Centre-ville, Montréal (Québec), H3C 3A7, Canada.

^dUniversité Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539),
99 Avenue J.-B. Clément F-93430, Villetaneuse Cedex, France.

Résumé

Nous étudions un système stationnaire monodimensionnel couplant un modèle simplifié de thermohydraulique à un modèle simplifié de neutronique dans l'approximation par la diffusion à un groupe en énergie. Nous montrons que ce modèle de couplage non linéaire peut être abordé sous deux angles différents et qu'il peut être ramené à la résolution d'une équation différentielle ordinaire non linéaire scalaire autonome d'ordre 1. Il est ainsi possible d'obtenir une solution explicite sans passer par un algorithme itératif résolvant successivement la thermohydraulique et la neutronique. De plus, nous obtenons une solution analytique dans un cas simple. Nous étudions ensuite l'algorithme itératif de couplage thermohydraulique–neutronique classiquement utilisé mais restreint à notre modèle simplifié, et nous obtenons des conditions suffisantes de convergence pour cet algorithme. Les résultats explicites obtenus avec nos solutions analytiques confirment les résultats numériques obtenus avec l'algorithme itératif classique de couplage thermohydraulique–neutronique.

Mots clés : Équation différentielle ordinaire, spectre d'opérateur, thermohydraulique, neutronique, couplage de modèles.

Abstract

We study a monodimensional stationary system coupling a simplified thermalhydraulic model to a simplified neutronic model based on the diffusion approximation with one energy group. We observe that this non linear coupled model can be studied under two points of view and we show that solving this model is equivalent to the resolution of a scalar autonomous ordinary differential equation of order 1. As a consequence, it is possible to obtain an explicit solution without using an iterative coupling algorithm solving successively the thermalhydraulics and the neutronics. Moreover, we obtain an analytic solution in a simple case. Then, we study the iterative thermalhydraulics–neutronics coupling algorithm classically used but restricted to our simplified model, and we obtain sufficient conditions to prove the convergence of this algorithm. The explicit results obtained with our analytical solutions confirm the numerical results obtained with the iterative classical thermalhydraulics–neutronics algorithm.

Key Words: Ordinary differential equation, operator spectrum, thermalhydraulics, neutronics, models coupling.

1. Introduction

Le couplage entre les équations décrivant le chauffage d'un fluide caloporteur dû aux réactions de fission dans un cœur de réacteur nucléaire et les équations décrivant le transport des neutrons au sein du cœur est un enjeu important pour le design de cœurs innovants ainsi que pour les études de sûreté nucléaire. Ce couplage dit *couplage thermohydraulique–neutronique* est complexe du point de vue technologique car il consiste à coupler des modèles très différents résolus par deux codes de calcul complexes – un code de thermohydraulique et un code de neutronique –, souvent développés par des équipes aux compétences très différentes (incluant le génie logiciel), constituées de nombreuses personnes [1, 2, 3] puisque les équations de la thermohydraulique (équations non-linéaires de type Euler ou Navier-Stokes) et de la neutronique (équation linéaire de type Boltzmann) sont issues de théories très différentes. Ce couplage (qui est non-linéaire) est aussi complexe du point de vue mathématique. En effet, la nature des problèmes mathématiques résolus respectivement par les thermohydrauliciens et par les neutroniciens est totalement différente : le thermohydraulicien résoudra des équations de transport non-linéaires avec conditions initiales et aux limites (dédites des équations d'Euler ou de Navier-Stokes), alors que le neutronicien recherchera plutôt la plus petite valeur propre d'un opérateur linéaire (dédit de l'équation de Boltzmann du transport des neutrons). On pourra par exemple consulter [4, 5, 6] pour une description de ce couplage à l'aide d'outils industriels ainsi que des équations résolues dans chaque cas. Notons que dans [7], les auteurs proposent un couplage basé sur des outils libres avec un modèle de neutronique simplifié. On pourra aussi consulter [8] pour une description du couplage entre un modèle de thermique de type équation de la chaleur et un modèle de neutronique basé sur une approximation multigroupe de l'équation de Boltzmann, les calculs étant réalisés à l'aide de codes de calcul industriels.

Ce contexte rend difficile une compréhension fine des difficultés mathématiques de fond induites par ce couplage, qu'elles soient intrinsèques à la nature mathématique du couplage, ou à l'algorithme de couplage dont le rôle est de faire communiquer les informations entre les codes de calcul pour converger vers une solution du système couplé global (lorsqu'elle existe). Ainsi, très souvent, des résultats numériques de couplage thermohydraulique–neutronique sont présentés sans aucune description des équations résolues par chacun des codes (voir par exemple [1, 2, 9]).

Aussi, afin de mieux analyser ces difficultés, on se propose d'étudier du point de vue théorique un modèle simplifié (mais non-linéaire) de couplage stationnaire thermohydraulique-neutronique. Pour cela, on réduit la thermohydraulique à une équation de transport à débit constant de l'enthalpie interne du fluide caloporteur¹ couplée *via* un terme source à la neutronique qui est modélisée par une équation de réaction-diffusion sur le flux neutronique² (ce qui correspond à l'approximation du transport des neutrons par la diffusion à un groupe en énergie). Soulignons que dans [14] où est réalisée une étude purement numérique, le modèle de neutronique est identique à celui que l'on utilise ici, le modèle de thermohydraulique étant cependant plus complexe. Dans [15], le modèle de neutronique est également identique avec cependant une extension à deux groupes en énergie. Aucune solution analytique n'est cependant proposée pour ce modèle à deux groupes.

¹En régime stationnaire, ce modèle simplifié de thermohydraulique est néanmoins parfaitement justifié dans le cadre de l'approximation bas Mach [10, 11, 12].

²On peut noter que l'équation de la neutronique pour notre modèle simplifié est linéaire lorsque le couplage est supprimé, à l'instar de l'équation de Boltzmann de transport des neutrons [13]. De même, notre modèle simplifié de thermohydraulique est linéaire lorsque le couplage est supprimé. Seul le couplage rend donc ici le problème non-linéaire.

Ce modèle de couplage simplifié est intéressant car il permet d'une part de rappeler les concepts importants de la neutronique dans un cadre beaucoup plus simple (mais non-trivial, le couplage demeurant non-linéaire) que celui des équations d'Euler ou de Navier-Stokes couplées à l'équation de Boltzmann. Ainsi, on souligne que le couplage peut être abordé sous deux angles *a priori* différents selon que la puissance du cœur est ou n'est pas connue : dans le premier cas, l'on recherche l'enthalpie de sortie h_s alors que dans le second cas, l'on recherche le coefficient multiplicateur k_{eff} . D'autre part, malgré sa simplicité apparente, ce modèle permet l'établissement de résultats d'existence et d'unicité non triviaux – voir les Théorèmes 3.2 et 3.4 – et de diverses propriétés dont certaines classiques en neutronique – voir par exemple le Lemme 3.1. De plus, sous des hypothèses de modélisation supplémentaires, il est possible d'obtenir des solutions analytiques – voir les Corollaires 3.2 et 3.3 – restituant des phénomènes classiques dus au couplage de la thermohydraulique avec la neutronique tel que le déplacement du maximum du flux neutronique vers l'entrée du cœur du fait de l'effet Doppler (voir la Figure 1). Notons que ces solutions analytiques pourraient ensuite être utilisées dans le couplage de codes industriels pour accélérer le processus de convergence. De plus, ce modèle de couplage permet l'étude théorique relativement poussée de l'algorithme de couplage correspondant à l'algorithme traditionnellement utilisé pour coupler les codes industriels de thermohydraulique et de neutronique. Cette étude de l'algorithme de couplage montre en particulier que les conditions suffisantes de convergence de l'algorithme ne sont plus satisfaites lorsque le couplage est trop important, donnant ainsi une raison possible de non convergence de l'algorithme de couplage classique. Cette non convergence potentielle pourrait alors être responsable d'oscillations numériques telles que celles décrites dans [16, 17].

Ce travail est organisé comme suit. On présente dans la Section 2 le modèle simplifié de couplage thermohydraulique-neutronique ainsi que le couplage vu sous deux angles différents (*Recherche de l'enthalpie de sortie h_s* ou *Recherche du coefficient multiplicateur k_{eff}*) selon que la puissance du cœur est ou n'est pas connue. On s'attache également à expliciter les liens entre ces deux approches. Lorsque le coefficient de diffusion et la section efficace de fission sont constants, on détermine dans la Section 3 une solution de ce modèle de couplage pour chacune des deux approches en se ramenant à une équation différentielle ordinaire autonome sur l'enthalpie interne du fluide caloporteur. Puis on calcule cette solution à l'aide de fonctions spéciales lorsque la section efficace d'absorption dépend de façon affine de l'enthalpie interne. Quelques résultats numériques sont également présentés, résultats obtenus aussi bien avec les formules établies dans cette section qu'avec un algorithme inspiré des algorithmes de couplage thermohydraulique–neutronique classiques de recherche du k_{eff} . Enfin, on établit dans la Section 4 des inégalités permettant d'étudier la convergence de l'algorithme de couplage utilisé dans la Section 3 et on termine ce travail par une conclusion.

2. Modèle simplifié de couplage thermohydraulique–neutronique

On expose dans cette section le modèle simplifié de couplage thermohydraulique–neutronique dans le cas tridimensionnel (3D) instationnaire (on pourra consulter [6] pour un modèle complet de couplage thermohydraulique–neutronique). Puis, on en déduit un système monodimensionnel (1D) stationnaire lorsque le cœur nucléaire défini par $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est tel que $\Omega = \mathcal{S} \times [0, L]$ où $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ et $L > 0$ sont respectivement la section transversale et la hauteur du cœur. On souligne en particulier que le problème de couplage stationnaire peut être abordé sous deux angles différents selon que la puissance du cœur est ou n'est pas imposée.

2.1. Le modèle 3D instationnaire

Soit le système de l'hydrodynamique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & \text{(a)} \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla [p(\rho, h)] = \rho \mathbf{g}, & \text{(b)} \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(t, \mathbf{x}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} & \text{(c)} \end{cases} \quad (1)$$

couplé au modèle de neutronique simplifié

$$\begin{cases} \frac{1}{V} \partial_t \phi - \nabla \cdot [D(h) \nabla \phi] + [\Sigma_a(h) - \nu \Sigma_f(h)(1 - \beta)] \phi - \lambda c = 0, \\ \partial_t c + \lambda c - \nu \Sigma_f(h) \beta \phi = 0. \end{cases} \quad (2)$$

qui correspond à l'approximation par la diffusion à un groupe en énergie [13] et qui est utilisé dans [7].

Dans (1) et (2), les variables $t \geq 0$ et $\mathbf{x} \in \Omega$ sont respectivement les variables de temps et d'espace ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$ définit le cœur nucléaire). Dans (1), $\rho(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $h(t, \mathbf{x})$, $p(t, \mathbf{x}) := \mathcal{P}[\rho(t, \mathbf{x}), h(t, \mathbf{x})]$ et $E(t, \mathbf{x}) := \frac{|\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2}{2} + h(t, \mathbf{x}) - \frac{p(t, \mathbf{x})}{\rho(t, \mathbf{x})}$ sont respectivement la densité, la vitesse, l'enthalpie interne, la pression – $\mathcal{P}(\rho, h)$ étant l'équation d'état – et l'énergie totale du fluide caloporteur. Le vecteur $\rho \mathbf{g}$ est une force volumique agissant sur le fluide caloporteur (supposée externe ici pour simplifier : *e.g.* la gravité). La constante \mathbb{E} est l'énergie déposée par fission ($\mathbb{E} > 0$ s'exprime en J), $\Sigma_f(h)$ est la section efficace de fission ($\Sigma_f(h) > 0$ s'exprime en m^{-1}) et $\phi(t, \mathbf{x})$ – solution de (2) – est le flux de neutrons soit le nombre de neutrons générés par les neutrons prompts et retardés par unité de surface et de temps ($\phi(t, \mathbf{x}) \geq 0$ s'exprime en $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$). Le terme source

$$\mathcal{S}_{h, \phi}(t, \mathbf{x}) := \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(t, \mathbf{x})$$

dans (1)(c) est donc la densité de puissance déposée dans le fluide caloporteur et produite par les réactions de fission ($\mathcal{S}_{h, \phi} \geq 0$ s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$). Dans (2), $D(h)$ est le coefficient de diffusion ($D(h) > 0$ s'exprime en m), et V , ν , β et $1/\lambda$ sont des constantes strictement positives qui sont respectivement la norme de la vitesse d'émission des neutrons du groupe d'énergie considéré (ici, on a $V = \sqrt{\frac{2\mathbb{E}}{m_n}}$ où m_n est la masse atomique du neutron), le nombre moyen de neutrons émis par fission, la proportion de neutrons retardés par fission et le temps caractéristique d'émission des neutrons retardés. La fonction strictement positive $\Sigma_a(h)$ est la section efficace d'absorption ($\Sigma_a(h) > 0$ s'exprime en m^{-1}). L'inconnue $c(t, \mathbf{x})$ caractérise le flux de neutrons retardés ($c \geq 0$ s'exprime en m^{-3} et Vc est le flux de neutrons retardés).

La puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ du cœur (exprimée en W) est donnée par

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\Omega} \mathcal{S}_{h, \phi}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(on suppose ici que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) soit donc par

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\Omega} \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Le terme source $\mathcal{S}_{h,\phi}$ se réécrit alors

$$\mathcal{S}_{h,\phi}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{P}(t) \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})}{\int_{\Omega} \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})d\mathbf{x}}$$

ce qui permet de réécrire (1)(c) sous la forme équivalente

$$\partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = \mathcal{P}(t) \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})}{\int_{\Omega} \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})d\mathbf{x}} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \quad (4)$$

Cette formulation est sans intérêt lorsque la puissance $\mathcal{P}(t)$ est inconnue. Par contre, lorsque la puissance $\mathcal{P}(t)$ est une donnée du problème, la formulation (4) peut être utilisée à la place de (1)(c) : dans la suite de cette section, ce point est détaillé dans le cas stationnaire.

Le couplage entre (1) et (2) est donc réalisé par l'intermédiaire de la densité de puissance $\mathcal{S}_{h,\phi}$ et des sections efficaces d'absorption $\Sigma_a(h)$ et de fission $\Sigma_f(h)$. Il conviendra bien sûr d'ajouter des conditions aux limites et initiales au système couplé (1)(2).

2.2. Le modèle 1D stationnaire

En remplaçant l'équation (1)(c) par l'équation

$$\rho(\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h) = \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})$$

qui lui est équivalente dans le cas régulier, en remplaçant dans (1)(b) la pression thermodynamique p par une pression (dite *dynamique*) π découplée de l'équation d'état $\mathcal{P}(\rho, h)$ et en supposant que p est une constante en espace³ – ces deux simplifications correspondant à l'approximation bas Mach [10, 11, 12] –, en supposant que $\Omega = \mathcal{S} \times [0, L]$ ($\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ et $L > 0$ sont respectivement la section transversale et la hauteur du cœur), le système couplé en régime bas Mach, 1D et stationnaire issu de (1)(2) correspond à

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(\rho u) = 0, \\ \frac{d}{dz}(\rho u^2 + \pi) = \rho g, \\ \rho u \frac{d}{dz} h = \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, z) \end{cases} \quad (5)$$

($z \in [0, L]$ est la coordonnée axiale dans le cœur et u est la composante axiale de la vitesse du fluide caloporteur) et

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz} \left[D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + [\Sigma_a(h) - \nu \Sigma_f(h)(1 - \beta)]\phi(z) - \lambda c = 0, \\ \lambda c - \nu \Sigma_f(h)\beta \phi = 0 \end{cases} \quad (6)$$

³Du fait de cette hypothèse, au lieu de l'équation d'état $\mathcal{P}(\rho, h)$, on utilise dans la suite l'équation d'état $\varrho(h, P_0)$ donnant la densité – P_0 étant la pression thermodynamique pour laquelle on a par hypothèse $p = P_0$ –, et que l'on note $\varrho(h)$.

dans lequel la variable de temps a disparu, le système (6) pouvant se limiter à l'équation

$$-\frac{d}{dz} \left[D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + [\Sigma_a(h) - \nu \Sigma_f(h)] \phi(z) = 0 \quad (7)$$

puisque la connaissance du flux de neutrons retardés n'est pas nécessaire dans le cas stationnaire. Nous n'explicitons donc pas les conditions initiales et nous écrivons les conditions aux limites restreintes au cas 1D. En notant $S := |S|$ la surface de la section transversale, la puissance \mathcal{P} du cœur déduite de (3) est donc ici

$$\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(z) dz. \quad (8)$$

Pour l'hydrodynamique 1D, les conditions aux limites en entrée du cœur (*i.e.* en $z = 0$) sont données par

$$\begin{cases} (\rho u)|_{z=0} = D_e > 0, \\ h|_{z=0} = h_e \end{cases} \quad (9)$$

où D_e est le flux de masse entrant dans le cœur et h_e l'enthalpie interne en entrée. Ces deux quantités sont connues. Pour la neutronique 1D, on considère les conditions aux limites en entrée (*i.e.* en $z = 0$) et en sortie du cœur (*i.e.* en $z = 0L$)

$$\begin{cases} \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

et on cherche une solution vérifiant

$$\forall z \in]0, L[: \quad \phi(z) > 0. \quad (11)$$

Le système couplé (5)(6) muni des conditions aux limites (9)(10) n'est pas fermé. Il manque en effet une condition aux limites sur la pression $\pi(z)$. Néanmoins, la condition aux limites sur le flux de masse en entrée – qui caractérise un régime de convection forcée – implique que la pression $\pi(z)$ n'intervient pas dans le calcul de $h(z)$ et de $\phi(z)$. Plus précisément, l'équation de quantité de mouvement n'est pas utile ici pour connaître $h(z)$ (et donc $\rho(z) := \rho[h(z)]$), $u(z)$ et $\phi(z)$. Et puisque $\rho u(z) = D_e$ pour tout $z \in [0, L]$ (ce qui est une conséquence de l'équation de conservation de la masse et de la condition aux limites en entrée), le système (5)(6) se limite à

$$\begin{cases} D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(z), & \text{(a)} \\ -\frac{d}{dz} \left[D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + [\Sigma_a(h) - \nu \Sigma_f(h)] \phi(z) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (12)$$

que l'on munit des conditions aux limites

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Dans le cas de la convection forcée en régime bas Mach, le calcul de $\rho(z)$, $u(z)$ et $\pi(z)$ pourra donc être considéré comme un post-traitement du calcul de la solution du système couplé (12)(13), ce qui nous permet d'oublier les inconnues $\rho(z)$, $u(z)$ et $\pi(z)$ dans la suite.

2.3. Le couplage stationnaire 1D vu sous deux angles différents

Il est important de remarquer que (12)(b) à $h(z)$ imposé n'a en général que la solution $\phi(z) = 0$. Il est alors traditionnel de remplacer dans les codes de neutronique l'équation (12)(b) par

$$-\frac{d}{dz} \left[D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + \left[\Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f(h)}{k_{eff}} \right] \phi(z) = 0 \quad (14)$$

dans lequel $k_{eff} > 0$ est le coefficient multiplicateur qui est la plus grande valeur de k telle que

$$-\frac{d}{dz} \left[D(h) \frac{d}{dz} \right] + \left[\Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f(h)}{k} \right]$$

ait un noyau non trivial⁴. Le système couplé (12)(13) est alors remplacé par

$$\begin{cases} D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(z), & (a) \\ -\frac{d}{dz} \left[D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + \left[\Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f(h)}{k_{eff}} \right] \phi(z) = 0 & (b) \end{cases} \quad (15)$$

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e, \\ h|_{z=L} = h_s, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

On cherche également une solution vérifiant la contrainte de positivité (11) dont une condition nécessaire d'après (15)(a) est la contrainte

$$h_s > h_e. \quad (17)$$

Soulignons qu'à $h(z)$ imposé, l'étude de (14) se justifie par le fait que le comportement en temps long de la solution $\phi(t, z)$ de (2) est entièrement caractérisée par la valeur de k_{eff} [19, 20]. Plus précisément, trouver une solution de (14) à $k_{eff} = 1$ revient à trouver une solution critique c'est-à-dire un régime permanent de (2), et trouver une solution de (14) à $k_{eff} > 1$ (respectivement $0 < k_{eff} < 1$) revient à trouver une solution sur-critique (respectivement sous-critique) c'est-à-dire un régime pour lequel la solution de (2) tend vers l'infini (respectivement vers zéro) en temps long. Dans cette Note, on appellera indifféremment "Le modèle de neutronique (stationnaire)" les équations (12)(b) ou (15)(b).

Selon que l'on résout (12)(b) ou (15)(b), le couplage thermohydraulique-neutronique doit être perçu sous deux angles différents puisque les inconnues et contraintes du problème ne sont pas les mêmes. Nous résumons ci-dessous ces deux approches :

⁴Des conditions simples sur $D[h(z)]$, $\Sigma_a[h(z)]$ et $\Sigma_f[h(z)]$ permettent d'assurer l'existence et l'unicité de k_{eff} [18]. Ici, nous établirons ce résultat d'existence et d'unicité en construisant des solutions explicites lorsque $D(h)$ et $\Sigma_f(h)$ sont des constantes D et Σ_f et sous une hypothèse de régularité appliquée à une fonction $h \mapsto W(h)$ construite à partir de $\Sigma_a(h)$ (voir le Théorème 3.4).

1. Recherche de l'enthalpie de sortie h_s :

C'est le point de vue des utilisateurs de codes de thermohydraulique pour lesquels l'enthalpie interne de sortie (et donc la température de sortie) est une inconnue du problème. Dans ce cas, on évalue la solution $(h, \phi)(z)$ de (12)(13) et l'enthalpie de sortie est donnée par

$$h_s = h(z = L).$$

D'après (8), la puissance du cœur \mathcal{P} – qui est ici une inconnue du problème – est obtenue avec la relation

$$\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz \quad (18)$$

soit donc

$$\mathcal{P} = S \times D_e \times (h_s - h_e) \quad (19)$$

en intégrant (12)(a). Notons qu'en tenant compte de (18), l'on peut réécrire (12) avec

$$\begin{cases} S D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathcal{P} \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}, & (a) \\ -\frac{d}{dz} \left[D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + [\Sigma_a(h) - \nu\Sigma_f(h)]\phi(z) = 0 & (b) \end{cases} \quad (20)$$

où \mathcal{P} est une constante positive inconnue vérifiant la condition de compatibilité (19). La formulation (20) trouve son intérêt lorsque \mathcal{P} est connue. On a en effet :

Lemme 2.1.

(a) Soit (h, ϕ) une solution de (12)(13) et soit $\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz$. Alors $(h, \mu\phi)$ est solution de (16)(20) pour toute constante $\mu > 0$.

(b) Soit (h, ϕ) une solution quelconque de (16)(20) et soit $\mu = \frac{D_e(h_s - h_e)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}$. Alors $(h, \mu\phi)$ est solution de (12)(13).

2. Recherche du coefficient multiplicateur k_{eff} :

C'est le point de vue des utilisateurs de codes de neutronique pour lesquels la puissance du cœur \mathcal{P} est connue (et bien sûr strictement positive). Par voie de conséquence, l'enthalpie interne de sortie h_s (et donc la température de sortie) est également connue d'après la relation (19). Dans cette approche, on résout (15)(16) et le niveau de flux neutronique est fixé puisque

$$\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz = S \times D_e \times (h_s - h_e). \quad (21)$$

Le flux neutronique est donc un élément particulier du noyau de l'opérateur de diffusion neutronique avec k_{eff} . La puissance \mathcal{P} étant une donnée, il est maintenant possible de modifier (15) pour obtenir le modèle équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} S D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathcal{P} \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}, \quad (a) \\ -\frac{d}{dz} \left[D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + \left[\Sigma_a(h) - \frac{\nu\Sigma_f(h)}{k_{eff}} \right] \phi(z) = 0 \quad (b) \end{array} \right. \quad (22)$$

où \mathcal{P} est une constante strictement positive connue, et ainsi revenir à un cadre classique en neutronique où le niveau de flux neutronique est arbitraire [13]. On a en effet :

Lemme 2.2.

- (a) Soit (h, ϕ) une solution de (15)(16). Alors $(h, \mu\phi)$ est solution de (16)(22) pour toute constante $\mu > 0$.
- (b) Soit (h, ϕ) une solution quelconque de (16)(22) et soit $\mu = \frac{D_e(h_s - h_e)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}$. Alors $(h, \mu\phi)$ est solution de (15)(16).

Dans la suite de ce travail, nous privilégions les formulations (12)(13) (pour le point de vue des utilisateurs de codes de thermohydraulique) et (16)(22) (pour le point de vue des utilisateurs de codes de neutronique). Notons qu'il serait *a priori* plus légitime d'étudier (15)(16) que (16)(22), (15)(16) possédant une unique solution.

2.4. Lien entre les deux approches

Les méthodes numériques pour traiter les deux approches que sont (12)(13) (approche "thermohydraulique") et (16)(22) (approche "neutronique") sont *a priori* différentes puisque, d'une part, la nature de la constante pour laquelle le problème a une solution est différente (cf. h_s versus k_{eff}) et que, d'autre part, (12)(13) admet *a priori* une unique solution alors que (16)(22) admet nécessairement une infinité de solution (lorsqu'au moins une solution existe).

On peut cependant établir un lien entre (12)(13) et (16)(22) via une réécriture du Lemme 2.1 :

Lemme 2.3.

1. Soit (h, ϕ) une solution de (12)(13) et soit $\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, z)dz$. Alors $(h, \mu\phi)$ est solution de (16)(22) avec $k = 1$ pour toute constante $\mu > 0$.
2. Soit (h, ϕ) une solution quelconque de (16)(22) et soit $\mu = \frac{D_e(h_s - h_e)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}$. Alors $(h, \mu\phi)$ est solution de (12)(13) lorsque $\Sigma_a(h)$ dans (12) est remplacé par

$$\tilde{\Sigma}_a(h) := \Sigma_a(h) + \left(1 - \frac{1}{k_{eff}}\right) \nu\Sigma_f(h).$$

Le second point souligne que trouver la valeur de k_{eff} dans (16)(22) conduit à résoudre (12)(13) en augmentant (respectivement diminuant) la section efficace d'absorption quand $k_{eff} > 1$ (respectivement $k_{eff} < 1$). Autrement dit, $k_{eff} > 1$ (respectivement $k_{eff} < 1$) sous-entend que pour trouver une solution stationnaire non nulle du couplage thermohydraulique–neutronique (1)(2), il est nécessaire d'augmenter (respectivement diminuer) l'absorption des neutrons. Dans les situations réelles, cela se fera *via* des moyens technologiques appropriés telles que l'introduction de barres de contrôle ou l'injection de bore dans le cœur.

3. Construction d'une solution stationnaire

Dans cette section, nous considérons le cas où D et Σ_f sont deux constantes strictement positives⁵. Le cas où D et Σ_f dépendent de h fera l'objet d'une étude ultérieure. Par contre, $\Sigma_a(h)$ n'est pas supposée constante *ce qui permet le couplage non linéaire du problème sur (h, ϕ)* . Sous ces hypothèses simplificatrices, on construit dans un premier temps une solution explicite du problème monodimensionnel (12)(13) – qui correspond au problème de *recherche de l'enthalpie de sortie h_s* – c'est-à-dire de

$$\begin{cases} D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathbb{E} \Sigma_f \phi(z), & \text{(a)} \\ -D \frac{d^2}{dz^2} \phi(z) + [\Sigma_a(h) - \nu \Sigma_f] \phi(z) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (23)$$

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Rappelons que dans (23)(24), la puissance du cœur

$$\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E} \Sigma_f \phi(z) dz \quad (25)$$

et l'enthalpie interne de sortie h_s sont inconnues et reliées par la relation

$$\mathcal{P} = S \times D_e \Delta h \quad \text{où} \quad \Delta h := h_s - h_e, \quad (26)$$

S étant la surface de la section de passage du cœur dans lequel circule le fluide caloporteur (voir (18) et (19)). Remarquons que (23) est un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires d'ordre 3 muni des 3 conditions aux limites (24) (soit deux en $z = 0$ et une en $z = L$).

Dans un second temps, on construit une solution de (16)(22) – qui correspond au problème de *recherche du coefficient multiplicateur k_{eff}* – c'est-à-dire de

$$\begin{cases} S D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathcal{P} \times \frac{\mathbb{E} \Sigma_f \phi(z)}{\int_0^L \mathbb{E} \Sigma_f \phi(z) dz} = \mathcal{P} \times \frac{\phi(z)}{\int_0^L \phi(z) dz}, & \text{(a)} \\ -D \frac{d^2}{dz^2} \phi(z) + \left[\Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f}{k_{eff}} \right] \phi(z) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (27)$$

⁵Rappelons que les coefficients \mathbb{E} et ν sont forcément des constantes, également strictement positives.

muni des conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} h|_{z=0} = h_e, \\ h|_{z=L} = h_s, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{array} \right. \quad (28)$$

Dans (27)(28), h_s et \mathcal{P} sont des données reliées par (26). Soulignons que k_{eff} est une inconnue et que (27)(28) admet *a priori* une infinité de solutions. Rappelons d'autre part que le Lemme 2.3 établit le lien entre les modèles de couplage thermohydraulique-neutronique (23)(24) et (27)(28). Notons que dans ce problème, nous avons toujours un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires d'ordre 3. Ce système est cependant maintenant muni de 4 conditions aux limites, la condition aux limites supplémentaire sur l'enthalpie de sortie étant compensée par la présence du paramètre k_{eff} dans (27)(b).

Enfin, dans les deux cas, on cherche une solution vérifiant l'hypothèse de positivité (11). Dans le cas du couplage (23)(24), ceci implique en particulier que la valeur de h_s calculée est telle que $h_s > h_e$; alors que dans le cas du couplage (27)(28), ceci se traduit par la contrainte $h_s > h_e$ sur la donnée h_s (h_e étant une donnée dans les deux cas). Par souci de lisibilité, nous ne rappellerons pas systématiquement cette contrainte de positivité par la suite.

3.1. Cas général

Dans le cas général (au sens où la section efficace d'absorption $\Sigma_a(h)$ est une fonction continue et strictement positive sur $[h_e, +\infty[$ mais qui n'est pas explicitée), l'on construit des solutions de (23)(24) et de (27)(28) en nous ramenant à une équation différentielle ordinaire sur h (voir les Théorèmes 3.1 et 3.3). Puis l'on obtient un résultat d'existence et d'unicité lorsque $\Sigma_a(h)$ vérifie certaines hypothèses (voir les Théorèmes 3.2 et 3.4). Enfin, des solutions analytiques et des résultats numériques sont proposés lorsque $\Sigma_a(h)$ est une fonction affine.

3.1.1. Recherche de l'enthalpie de sortie h_s

On s'intéresse ici au système couplé (23)(24). On donne une formulation générale de la solution lorsqu'elle existe. Puis, on établit un résultat d'existence et d'unicité sous certaines hypothèses. Pour cela, l'on définit la fonction $V(h)$ avec

$$V(h) = \frac{E(h)}{h - h_e} \quad (29)$$

où la fonction $E(h)$ définie sur $[h_e, +\infty[$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} E''(h) = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a(h)}{D}, \quad (a) \\ E'(h_e) = E(h_e) = 0. \quad (b) \end{array} \right. \quad (30)$$

Remarquons qu'en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à $E(h)$ et en tenant compte de (30), on obtient

$$E(h) = (h - h_e)^2 \int_0^1 (1-t) \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]}{D} dt.$$

En divisant par $h - h_e$, on obtient donc

$$V(h) = (h - h_e) \int_0^1 (1-t) \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]}{D} dt. \quad (31)$$

On a d'autre part $V'(h) = \frac{E'(h)}{h-h_e} - \frac{E(h)}{(h-h_e)^2}$. Donc, en utilisant le fait que $E'(h) = (h - h_e) \int_0^1 \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]}{D} dt$, on trouve

$$V'(h) = \int_0^1 t \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]}{D} dt. \quad (32)$$

Les formules (31) et (32) montrent que $V(h)$ est dans $C^1([h_e, h_1])$ lorsque $\Sigma_a(h)$ est dans $C^0([h_e, h_1])$ (pour tout $h_1 > h_e$). Et on obtient en particulier que

$$\begin{cases} V(h_e) = 0, & \text{(a)} \\ V'(h_e) = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a(h_e)}{2D}. & \text{(b)} \end{cases} \quad (33)$$

Par contre, ces mêmes formules ne permettent pas d'affirmer que $V(h)$ est dans $C^2([h_e, h_1])$ du fait de la singularité potentielle de $V''(h)$ en $h = h_e$: on obtient seulement $V(h) \in C^2([h_e, h_1])$ sauf cas particulier.

Par exemple, si $\Sigma_a(h)$ est affine, on a $V(h) \in C^2([h_e, h_1])$ (et même $V(h) \in C^\infty([h_e, h_1])$). En effet, lorsque

$$\Sigma_a(h) = \Sigma_{a,e} + \sigma_a(h - h_e) \quad (34)$$

avec $\Sigma_{a,e} = \Sigma_a(h_e) > 0$, on trouve

$$\begin{cases} V(h) = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{2D} (h - h_e) - \frac{\sigma_a}{6D} (h - h_e)^2, & \text{(a)} \\ E(h) = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{2D} (h - h_e)^2 - \frac{\sigma_a}{6D} (h - h_e)^3. & \text{(b)} \end{cases} \quad (35)$$

Le résultat suivant établit la forme de la solution lorsqu'elle existe :

Théorème 3.1. *On suppose qu'une solution (h, ϕ) de (23)(24) existe. Alors :*

i) h_s est solution de

$$\int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)] \cdot (h - h_e)}} = L \quad (36)$$

qui s'écrit aussi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{2 \int_0^1 V'[h_e + (h_s - h_e)(1 - t \cos^2 f)] dt}} = L \quad (37)$$

Cette relation permet de trouver h_s quand cela est possible.

ii) $h(z)$ est solution de

$$\int_{h_e}^{h(z)} \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)] \cdot (h - h_e)}} = z \quad (38)$$

où h_s est solution de (36), relation qui est équivalente à

$$h(z) = h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f(z) \quad (39)$$

où $f(z)$ est la fonction réciproque de

$$z = 2 \int_0^f \frac{df'}{\sqrt{2 \int_0^1 V'[h_e + (h_s - h_e)(1 - t \cos^2 f')] dt}}. \quad (40)$$

iii) $\phi(z)$ est déduite de $h(z)$ par la relation

$$\phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} \sqrt{2[V(h_s) - V(h(z))] \cdot [h(z) - h_e]}, \quad (41)$$

relation qui est équivalente à

$$\phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} (h_s - h_e) \sin(2f(z)) f'(z). \quad (42)$$

Notons que l'enthalpie de sortie h_s solution de (36) ne dépend ni du flux neutronique $\phi(z)$, ni de la constante de couplage \mathbb{E} , ni du débit d'entrée D_e . En conséquence, $h(z)$ solution de (38) ne dépend ni du flux neutronique $\phi(z)$, ni de la constante de couplage \mathbb{E} , ni du débit d'entrée D_e , ce qui peut sembler paradoxal. Cette propriété remarquable est vérifiée parce que le terme source dans (23)(a) est proportionnel au flux neutronique $\phi(z)$ via la constante de couplage $\mathbb{E}\Sigma_f$. La fonction $h(z)$ et la valeur h_s dépendent cependant des sections efficaces Σ_f et $\Sigma_a(h)$ ainsi que du coefficient de diffusion D via la fonction $V(h)$. Par contre, le niveau de flux neutronique dépend de h_s , \mathbb{E} et D_e puisque

$$\int_0^L \phi(z) dz = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} (h_s - h_e).$$

Cette remarque serait encore vraie en remplaçant la constante Σ_f par une fonction $\Sigma_f(h)$. Par contre, elle ne serait plus vérifiée si le terme de couplage $\mathbb{E}\Sigma_f\phi$ était remplacé par une fonction positive $\mathcal{S}_{h,\phi}$ non linéaire en ϕ .

Afin d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité, on suppose que $V(h)$ vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1. *On suppose qu'il existe $h_1 > h_e$ pour lequel $V(h) \in C^p([h_e, h_1])$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et que $V(h)$ admet dans $]h_e, h_1[$ un premier point critique⁶ noté h_* d'ordre p . De plus, on suppose que $V(h)$ est croissante^{7,8} sur $[h_e, h_*]$ et que $V'(h)$ est décroissante sur $[h_e, h_*]$.*

⁶En ce point h_* , $V(h)$ vérifie par définition $V^{(p)}(h_*) \neq 0$ et $V^{(k)}(h_*) = 0$ pour $k \leq p - 1$.

⁷ h_* est dès lors un maximum local, ce qui implique que $V'(h_*) = 0$ et que p est pair.

⁸Par définition de h_* , $V(h)$ est forcément *strictement* croissante sur $[h_e, h_*]$ c'est-à-dire pas uniquement croissante sur $[h_e, h_*]$.

Remarquons que sous cette hypothèse, dans tout voisinage suffisamment petit $\mathcal{V}(h_*) \subset]h_e, h_1[$ de h_* , $V(h)$ est dans $C^p(\overline{\mathcal{V}(h_*)})$.

L'Hypothèse 3.1 implique en particulier que $V(h)$ est concave sur $[h_e, h_*]$ (puisque $V'(h)$ est décroissante sur $[h_e, h_*]$). Elle implique également que $V'(h_e) > 0$ ($V'(h_e) = 0$ imposerait que $V(h)$ soit convexe dans un voisinage $[h_e, h_e + \alpha[$ puisque $V(h)$ est croissante). Ainsi,

$$\forall h \in [h_e, h_*[: V'(h) > 0 \quad \text{et} \quad V'(h_*) = 0, \quad (43)$$

et l'Hypothèse 3.1 couplée à (33)(b) impose que

$$v\Sigma_f - \Sigma_a(h_e) > 0.$$

On a de plus

$$\forall h \in]h_e, h_*] : V(h) > 0 \quad \text{et} \quad V(h_e) = 0 \quad (44)$$

(puisque $V(h_e) = 0$ d'après (33)(a) et $V(h)$ croissante sur $[h_e, h_*]$). De (31), (32), (43) et (44), on obtient donc que sous l'Hypothèse 3.1, la section efficace d'absorption $\Sigma_a(h)$ vérifie

$$\forall h \in [h_e, h_*[: 0 < \int_0^1 t \{v\Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]\} dt < \int_0^1 \{v\Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]\} dt.$$

Soulignons que cette inégalité n'est pas triviale car nous n'avons pas *a priori* $v\Sigma_f - \Sigma_a(h) > 0$ pour tout $h \in [h_e, h_*[$. Nous pouvons par contre affirmer qu'il y a existence d'un voisinage de h_e pour lequel $v\Sigma_f - \Sigma_a(h) > 0$. En effet, la fonction $V(h)$ étant strictement croissante sur $[h_e, h_*]$, $E(h)$ est donc aussi strictement croissante sur $[h_e, h_*]$. Comme $E'(h_e) = 0$, la fonction $E(h)$ est alors convexe dans un voisinage de h_e , ce qui implique que la section efficace d'absorption doit satisfaire

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall h \in [h_e, h_e + \alpha] : v\Sigma_f - \Sigma_a(h) > 0$$

en utilisant (30).

Par exemple, lorsque $\Sigma_a(h)$ est affine c'est-à-dire donnée avec (34), $V(h)$ et $E(h)$ sont données avec (35). La fonction $V(h)$ est alors concave sous la condition nécessaire et suffisante $\sigma_a > 0$. Et la fonction $E(h)$ est convexe dans un voisinage de h_e sous la condition nécessaire et suffisante $v\Sigma_f > \Sigma_{a,e}$. Sous les conditions $\sigma_a > 0$ et $v\Sigma_f > \Sigma_{a,e}$, l'Hypothèse 3.1 est alors vérifiée ($p = 2$ dans ce cas). De plus, on trouve

$$h_* = h_e + \frac{3}{2\sigma_a} \cdot (v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}). \quad (45)$$

On obtient alors $h_* > h_e$ lorsque $\sigma_a > 0$ et $v\Sigma_f - \Sigma_{a,e} > 0$, ce qui est cohérent. Rappelons que nous ne considérons pas ici le cas d'une section efficace d'absorption $\Sigma_a(h)$ constante (ce qui correspondrait au cas $\sigma_a = 0$) puisque dans ce cas, le couplage entre (23)(a) et (23)(b) disparaît.

Sous cette hypothèse supplémentaire, le résultat suivant donne l'existence et l'unicité de la solution :

Théorème 3.2. *Sous l'Hypothèse 3.1, l'équation (36) admet une unique solution $h_s \in [h_e, h_*[$ si et seulement si $L \in [L_*, +\infty[$ où*

$$L_* := \frac{\pi}{\sqrt{4V'(h_e)}}. \quad (46)$$

Les fonctions $h(z)$ et $\phi(z)$ solutions de (23)(24) existent donc, sont uniques et respectivement données par (39) et (42). De plus, on a

$$L_* = \pi \sqrt{\frac{D}{v\Sigma_f - \Sigma_a(h_e)}}. \quad (47)$$

La hauteur L_* est donc minorée par $l_* := \pi \sqrt{\frac{D}{v\Sigma_f}}$.

Rappelons que l'on sait déjà que sous l'Hypothèse 3.1, on a $V'(h_e) > 0$ (voir (43)).

Via la fonction $V(h)$, les données des sections efficaces $v\Sigma_f$ et $\Sigma_a(h)$ ainsi que du coefficient de diffusion D induisent donc la limite supérieure

$$\mathcal{P}_{\max} := S D_e (h_* - h_e)$$

à la puissance du cœur et la limite inférieure L_* à la hauteur du cœur. Dans le cas d'une section efficace $\Sigma_a(h)$ affine et donnée avec (34), h_* est donné avec (45), ce qui permet d'obtenir

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{3S D_e}{2\sigma_a} \cdot (v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}).$$

Soulignons que l'existence d'une hauteur minimale L_* du cœur à partir de laquelle existe un état stationnaire solution de (23)(24), elle-même minorée par l_* , suggère que pour un cœur trop petit (au sens $L \in]0, L_*[$), il est nécessaire d'augmenter Σ_f ou de diminuer $\Sigma_a(h_e)$ pour obtenir un état stationnaire. Remarquons que la relation (47) s'écrit également

$$\frac{\pi^2 D}{L_*^2} + \Sigma_a(h_e) - v\Sigma_f = 0 \quad (48)$$

qui est une formulation classique en neutronique [13].

Enfin, le corollaire qui suit établit un lien entre la solution du système couplé (23)(24) et le mode fondamental de (23)(b) :

Corollaire 3.1. *Lorsque L tend vers L_* , le couple (h, ϕ) converge uniformément vers $(h_e, 0)$ alors que le flux normalisé $\frac{\phi(z)}{\int_0^L \phi(z) dz}$ converge uniformément vers $\frac{\pi}{2L_*} \sin(\frac{\pi z}{L_*})$ qui est le mode fondamental normalisé pour l'équation de diffusion (23)(b) à coefficients constants obtenue pour $h = h_e$.*

Notons que lorsque L tend vers $+\infty$, on montre que h_s tend vers h_* (voir le début de la preuve du Corollaire 3.1). Cependant, il ne semble pas aisé d'établir un résultat similaire à celui du Corollaire 3.1 pour cette limite.

Preuve du Théorème 3.1 : Nous avons déjà noté à la suite de l'Hypothèse 3.1 que celle-ci entraîne en particulier $V'(h_e) > 0$. Par ailleurs, en tenant compte de (23)(a), l'équation (23)(b) s'écrit

$$h'''(z) + E''(h)h'(z) = 0.$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$h''(z) + E'(h) = C_1 \quad (49)$$

où C_1 est une constante d'intégration. En multipliant (49) par h' puis en intégrant à nouveau, on obtient alors

$$\frac{1}{2}(h')^2(z) + E(h) = C_1 h + C_2$$

où C_2 est une seconde constante d'intégration. On a par ailleurs $h'(0) = h'(L) = 0$, $h(0) = h_e$ et $h(L) = h_s$. Donc $E(h_e) = C_1 h_e + C_2$ et $E(h_s) = C_1 h_s + C_2$. D'où $C_1 = \frac{E(h_s) - E(h_e)}{h_s - h_e}$ et $C_2 = \frac{E(h_e) h_s - E(h_s) h_e}{h_s - h_e}$. Ce qui permet d'obtenir

$$\frac{1}{2}(h')^2(z) + E(h) = \frac{E(h_s)}{h_s - h_e} \cdot (h - h_e) \quad (50)$$

puisque $E(h_e) = 0$ soit encore

$$(h')^2(z) = 2[V(h_s) - V(h)] \cdot (h - h_e). \quad (51)$$

D'où $dz = \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)] \cdot (h - h_e)}}$ ce qui donne (36) et (38) en intégrant cette équation sur respectivement $[0, L]$ et $[0, z]$. La relation (41) s'obtient en dérivant (38) par rapport à z puis en utilisant (23)(a).

Soit maintenant le changement d'inconnue difféomorphe de $[0, L]$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$h(z) = h_e + \Delta h \sin^2 f(z) \quad (52)$$

où $\Delta h := h_s - h_e$ et pour lequel $f(0) = 0$ et $f(L) = \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\begin{cases} [h(z) - h_e] \times [h_s - h(z)] = (\Delta h)^2 \sin^2 f(z) \cos^2 f(z), & (a) \\ h'(z) = 2\Delta h \sin f(z) \cos f(z) f'(z). & (b) \end{cases} \quad (53)$$

On a d'autre part

$$V(h_s) - V(h) = (h_s - h) \int_0^1 V'[h_s + t(h - h_s)] dt. \quad (54)$$

Ces relations injectées dans (51) impliquent

$$\begin{aligned} 4(\Delta h)^2 \sin^2 f(z) \cos^2 f(z) (f'(z))^2 &= 2(h(z) - h_e)(h_s - h) \int_0^1 V'[h_s + t(h - h_s)] dt \\ &= 2(\Delta h)^2 \sin^2 f(z) \cos^2 f(z) \int_0^1 V'[h_s + t(h - h_s)] dt \end{aligned}$$

soit donc

$$\forall z \in]0, L[: \quad 2(f'(z))^2 = \int_0^1 V'[h_s + t(h - h_s)] dt$$

qui s'écrit également

$$\forall z \in]0, L[: \quad 2(f'(z))^2 = \int_0^1 V'[h_e + \Delta h(1 - t \cos^2 f(z))] dt.$$

D'où l'égalité

$$\forall z \in]0, L[: \quad 2f'(z) = \sqrt{2 \int_0^1 V'[h_e + \Delta h(1 - t \cos^2 f(z))] dt}. \quad (55)$$

En utilisant $L = \int_0^L dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{f'(z(f))}$ et en posant

$$J(h) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{2 \int_0^1 V'[h_e + (h - h_e)(1 - t \cos^2 f)] dt}}, \quad (56)$$

on obtient donc

$$L = 2J(h_s), \quad (57)$$

ce qui correspond à (37). Enfin, connaissant h_s , l'on peut calculer $z \mapsto f(z)$ à partir de la fonction réciproque de $f \mapsto z(f)$ où $z(f)$ est obtenu en utilisant (55) c'est-à-dire

$$z(f) = 2 \int_0^f \frac{df'}{\sqrt{2 \int_0^1 V'[h_e + (h_s - h_e)(1 - t \cos^2 f')] dt}}. \quad (58)$$

D'où (39) en utilisant (52). La relation (42) s'obtient en utilisant (23)(a) et (53)(b). Enfin, il suffit d'utiliser (33)(b) et (46) pour obtenir (47). \square

Preuve du Théorème 3.2 : La fonction $V'(h)$ est par hypothèse décroissante sur $[h_e, h_*]$ et strictement positive sur $[h_e, h_*[$ (voir (43)). Donc pour tout $h_s \in [h_e, h_*[$, on a

$$0 < \sqrt{2 \int_0^1 V'[h_e + \Delta h(1 - t \cos^2 f)] dt} \leq \sqrt{2V'(h_e)},$$

ce qui permet d'obtenir $J(h_s) \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2V'(h_e)}}$ soit donc

$$L \geq \frac{\pi}{\sqrt{2V'(h_e)}} =: L_*$$

pour toute valeur de $h_s < h_*$. D'autre part, la limite de $2J(h)$ lorsque h tend vers h_e est $L_* := \frac{\pi}{\sqrt{2V'(h_e)}}$. Le minorant L_* est donc bien la borne inférieure pour L . En outre, le Lemme 3.3 prouve que $J(h)$ tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers h_* . De plus, $J(h)$ est une fonction strictement croissante sur $[h_e, h_*]$. En effet, la fonction $V'(h)$ étant décroissante sur $[h_e, h_*]$ par hypothèse, pour tout $h_{s,1} > h_{s,2}$ (éléments de $[h_e, h_*]$), on a $V'[h_e + (h_{s,1} - h_e)(1 - t \cos^2 f)] < V'[h_e + (h_{s,2} - h_e)(1 - t \cos^2 f)]$ (puisque $1 - t \cos^2 f \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$), ce qui permet d'obtenir $J(h_{s,1}) > J(h_{s,2})$ après double intégration. L'existence et l'unicité de h_s dans $[h_e, h_*[$ s'obtient alors en notant que $J(h)$ définit une bijection strictement croissante de $[h_e, h_*[$ dans $[\frac{L_*}{2}, +\infty[$. \square

Preuve du corollaire 3.1 : La fonction $h_s(L)$, fonction réciproque de $L = 2J(h_s)$ donnée par (56)(57), définit une bijection croissante de $[L_*, +\infty[$ dans $[h_e, h_*[$, et vérifie en particulier $\lim_{L \rightarrow L_*} h_s(L) = h_e$ soit encore $\lim_{L \rightarrow L_*} \Delta h = 0$ où $\Delta h := h_s - h_e$. Lorsque L tend vers L_* , la fonction $f(z)$ solution de (55), définie sur $[0, L]$ pour tout $L \in [L_*, +\infty[$, converge donc uniformément vers $f_0(z)$ définie sur $[0, L_*]$ avec $f_0(z) := \frac{\pi z}{2L_*}$ (qui vérifie bien $f_0(0) = 0$ et $f_0(L_*) = \frac{\pi}{2}$ à l'instar de $f(z)$). En utilisant la relation (52) entre $h(z)$ et $f(z)$, on trouve donc que la fonction $h(z)$ converge uniformément vers la fonction constante h_e lorsque L tend vers L_* . Par ailleurs, on déduit de (46) et (55) que $f'(z)$ converge uniformément vers la constante $\frac{\pi}{2L_*}$ (qui est en outre la dérivée de $f_0(z)$). Donc, en utilisant (53)(b), on obtient que $h'(z)$ converge uniformément vers la fonction nulle lorsque L tend vers L_* . Donc, en utilisant (23)(a), on obtient que $\phi(z)$ converge uniformément vers la fonction nulle lorsque L tend vers L_* . D'autre part, en utilisant (41) et (53)(a), on trouve

$$\phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} \sqrt{2 \frac{V(h_s) - V(h(z))}{h_s - h(z)}} \Delta h \sin f(z) \cos f(z).$$

Le flux normalisé est donc

$$\frac{\phi(z)}{\int_0^L \phi(z) dz} = \frac{\sqrt{\frac{V(h_s)-V(h(z))}{h_s-h(z)}} \sin f(z) \cos f(z)}{\int_0^L \sqrt{\frac{V(h_s)-V(h(z))}{h_s-h(z)}} \sin f(z) \cos f(z) dz} \quad (59)$$

définie sur $[0, L]$. Comme $h(z)$ converge uniformément vers la fonction constante h_e lorsque L tend vers L_* , la fonction $\sqrt{\frac{V(h_s)-V(h(z))}{h_s-h(z)}}$ converge uniformément vers $\sqrt{\frac{V(h_s)-V(h_e)}{h_s-h_e}}$ lorsque L tend vers L_* . Ainsi, la fonction $\frac{\phi(z)}{\int_0^L \phi(z) dz}$ converge uniformément vers la fonction $\frac{\sin f_0(z) \cos f_0(z)}{\int_0^{L_*} \sin f_0(z) \cos f_0(z) dz}$ définie sur $[0, L_*]$ lorsque L tend vers L_* , soit donc vers le flux normalisé $\frac{\pi}{2L_*} \sin\left(\frac{\pi z}{L_*}\right)$. Soulignons que le point clé utilisé pour obtenir cette dernière limite uniforme est le fait qu'en normalisant le flux, on fait disparaître dans (59) le coefficient Δh qui tend vers zéro lorsque L tend vers L_* . \square

3.1.2. Recherche du coefficient multiplicateur k_{eff}

On cherche maintenant à construire une solution du système couplé (27)(28) pour lequel l'enthalpie de sortie h_s et la puissance du cœur \mathcal{P} sont des données reliées par (26). On donne une formulation générale de cette solution lorsqu'elle existe. Puis, on établit un résultat d'existence et d'unicité sous certaines hypothèses.

Rappelons que l'enthalpie de sortie du cœur h_s étant fixée contrairement à celle du système (23)(24), on doit introduire une nouvelle inconnue. Celle-ci correspond au coefficient multiplicateur $k_{eff} > 0$ dans (27). Pour construire cette solution, on introduit la fonction $W(h)$ définie avec

$$W(h) = \frac{G(h)}{(h-h_e)(h_s-h)} \quad (60)$$

où la fonction $G(h)$ définie sur $[h_e, h_s]$ est solution de

$$\begin{cases} G''(h) = -\frac{\Sigma_a(h)}{D}, & \text{(a)} \\ G(h_e) = G(h_s) = 0. & \text{(b)} \end{cases} \quad (61)$$

Les fonctions $W(h)$ et $G(h)$ ainsi définies sont pour le système (27)(28) le pendant des fonctions $V(h)$ et $E(h)$ définies avec (29) et (30) pour le système (23)(24). Remarquons que la fonction $W(h)$ vérifie

$$W(h) = \frac{1}{D} \int_0^1 \int_0^1 t \Sigma_a[h_e + t(h_s - h_e) + tu(h - h_s)] dudt. \quad (62)$$

Lorsque $\Sigma_a(h)$ est dans $C^0([h_e, h_s])$, $G(h)$ est dans $C^2([h_e, h_s])$. On déduit par ailleurs de (60) et (61)(b) que

$$\begin{cases} W(h_e) = \frac{G'(h_e)}{h_s - h_e}, \\ W(h_s) = \frac{G'(h_s)}{h_e - h_s} \end{cases} \quad (63)$$

(on rappelle que $h_s > h_e$: voir (17)). On peut donc affirmer que $W(h)$ est dans $C^0([h_e, h_s]) \cap C^2(]h_e, h_s[)$ lorsque $\Sigma_a(h)$ est dans $C^0([h_e, h_s])$. Dans la suite, on supposera plus de régularité pour la fonction $W(h)$ (voir l'Hypothèse 3.2). On peut également noter que

$$\forall h \in [h_e, h_s] : W(h) > 0 \quad (64)$$

et

$$\forall h \in]h_e, h_s[: G(h) > 0. \quad (65)$$

En effet, la fonction $G(h)$ est strictement concave sur $[h_e, h_s]$ et nulle en h_e et en h_s (car $\Sigma_a(h) > 0$ sur $[h_e, h_s]$ et $D > 0$). D'où la stricte positivité de $G(h)$ sur $]h_e, h_s[$. La fonction $W(h)$ est donc également strictement positive sur $]h_e, h_s[$. Par ailleurs, du fait de la stricte concavité de $G(h)$ sur $[h_e, h_s]$, on a en particulier $G'(h_e) > 0$ et $G'(h_s) < 0$. D'où $W(h_e) > 0$ et $W(h_s) > 0$ en utilisant (63).

Par exemple, lorsque $\Sigma_a(h)$ est affine c'est-à-dire définie avec (34), on trouve

$$\begin{cases} W(h) = \frac{\Sigma_{a,e}}{2D} + \frac{\sigma_a}{6D} \cdot (h - 2h_e + h_s), & (a) \\ G(h) = (h - h_e)(h_s - h) \left[\frac{\Sigma_{a,e}}{2D} + \frac{\sigma_a}{6D} (h - 2h_e + h_s) \right]. & (a) \end{cases} \quad (66)$$

À l'instar du Théorème 3.1, le résultat suivant établit la forme de la solution lorsqu'elle existe :

Théorème 3.3. *On suppose qu'une solution (h, ϕ_0, k_{eff}) de (27)(28) existe. Alors :*

i) $k_{eff} \in [0, k_\infty]$ où

$$k_\infty = \frac{v_{\Sigma_f}}{2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h)}. \quad (67)$$

De plus, k_{eff} est solution de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{\frac{v_{\Sigma_f}}{Dk_{eff}} - 2W[h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f]}} = \frac{L}{2}. \quad (68)$$

ii) (h, ϕ_0) est donnée par

$$\begin{cases} h(z) = h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f(z), & (a) \\ \phi_0(z) = (h_s - h_e) \sin(2f(z)) \sqrt{\frac{v_{\Sigma_f}}{Dk_{eff}} - 2W[h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f(z)]} & (b) \end{cases} \quad (69)$$

où $f(z)$ est la fonction réciproque de

$$z(f) := 2 \int_0^f \frac{df'}{\sqrt{\frac{v_{\Sigma_f}}{Dk_{eff}} - 2W[h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f']}} \quad (70)$$

qui définit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, L]$.

La relation (68) peut s'interpréter de la façon suivante : L'enthalpie $h(z)$ est solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 3 à laquelle on impose 4 conditions aux limites (à savoir $h(0) = h_e$, $h(L) = h_s$, $h'(0) = h'(L) = 0$). Elle est donc surdéterminée. La contrainte (68) compense alors la surdétermination.

Afin d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité, on suppose que $W(h)$ vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.2. *La fonction $W(h)$ est dans $C^p([h_e, h_s])$ et son maximum est atteint en un nombre fini (non nul) de points de $[h_e, h_s]$. De plus, en au moins un de ces points noté h_\bullet , $W^{(p)}(h_\bullet) \neq 0$ et $W^{(k)}(h_\bullet) = 0$ pour $k \leq p - 1$, p étant un entier naturel supérieur ou égal⁹ à 2.*

On sait que la fonction $W(h)$ définie avec (60) est dans $C^0([h_e, h_s]) \cap C^2(]h_e, h_s[)$ lorsque $\Sigma_a(h)$ est dans $C^0([h_e, h_s])$. Ceci dit, l'Hypothèse 3.2 suggère que l'on a besoin que¹⁰ $W(h) \in C^p([h_e, h_s])$ avec $p \geq 2$. Soulignons qu'en supposant que $\Sigma_a(h) \in C^{p-2}([h_e, h_s])$, on obtient $G(h) \in C^p([h_e, h_s])$ et donc $W(h) \in C^p(]h_e, h_s[)$. Mais, on n'est pas assuré que $W(h) \in C^p([h_e, h_s])$ à cause du dénominateur dans (60). On a cependant $W(h) \in C^{p-1}([h_e, h_s])$.

À l'instar du Théorème 3.2, le résultat suivant donne alors l'existence et l'unicité de la solution :

Théorème 3.4. *Soit $k_\infty := \frac{\nu \Sigma_f}{2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h)}$. Alors, sous l'Hypothèse 3.2, il existe un unique $k_{eff} \in]0, k_\infty[$ tel que le système (27)(28) ait une solution (h, ϕ) vérifiant $\phi(z) > 0$ pour tout $z \in]0, L[$. Ce k_{eff} solution de (68) étant unique, l'enthalpie $h(z)$ est également unique et est définie avec (69)(a). Le flux neutronique $\phi(z)$ est par contre défini à une constante multiplicative près et donné par $\mu \phi_0(z)$ où μ est une constante strictement positive quelconque et où $\phi_0(z)$ est défini avec (69)(b).*

Notons que k_∞ est une quantité strictement positive et bornée. En effet, la fonction $W(h)$ est strictement positive sur $[h_e, h_s]$. D'où $0 \leq k_\infty < +\infty$ (rappelons que $\nu \Sigma_f > 0$ et $D > 0$). De plus, $W(h)$ est bornée puisque $W(h) \in C^0([h_e, h_s])$. D'où $k_\infty > 0$.

Soulignons que le k_{eff} obtenu au Théorème 3.4 peut être relié à un problème de recherche de plus petite valeur propre. On a en effet :

Lemme 3.1. *La constante $\frac{\nu \Sigma_f}{k_{eff}}$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur $\mathcal{L}(h)$ défini avec*

$$\mathcal{L}(h)\phi := -D \frac{d^2}{dz^2} \phi + \Sigma_a(h)\phi.$$

De plus, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{eff} < \frac{\nu \Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h)} \quad \text{lorsque } \Sigma_a(h) \text{ n'est pas constante sur } [h_e, h_s], \quad (a) \\ k_{eff} = \frac{\nu \Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + \Sigma_a} \quad \text{lorsque } \Sigma_a(h) \text{ est une constante } \Sigma_a \text{ sur } [h_e, h_s]. \quad (b) \end{array} \right. \quad (71)$$

⁹L'entier naturel p est forcément pair puisque h_\bullet est un maximum local.

¹⁰En supposant $h_\bullet \in]h_e, h_s[$, on peut restreindre l'hypothèse de régularité sur $W(h)$ à $W(h) \in C^p(]h_e, h_s[)$.

Le flux neutronique $\phi(z)$ obtenu au Théorème 3.4 correspond donc au mode fondamental de $\mathcal{L}(h)$. Il est important de noter ici que l'opérateur $\mathcal{L}(h)$ étant un opérateur de Sturm-Liouville avec $z \mapsto \Sigma_a[h(z)]$ continue sur $[0, L]$ (puisque $h \mapsto \Sigma_a(h)$ est continue sur $[h_e, h_s]$ par hypothèse et que $z \mapsto h(z)$ définie avec (69)(a) est continue sur $[0, L]$), selon la théorie de ces opérateurs [18, 19], $\mathcal{L}(h)$ admet un spectre discret et dénombrable dont seuls les vecteurs propres associés au mode fondamental sont de signe constant sur $]0, L[$ (voir par exemple le Théorème 2.1 du Chapitre 8 dans [18]). Ce point justifie le fait que la contrainte de positivité (11) soit respectée par le vecteur propre ϕ associé à la plus petite valeur propre $\frac{\nu}{k_{eff}}$ de $\mathcal{L}(h)$.

Enfin, on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.

1. Le coefficient multiplicateur k_∞ défini avec (67) est égal au coefficient k_{eff} obtenu en milieu infini.
2. Le coefficient multiplicateur sans couplage obtenu pour une enthalpie égale à $h_* \in [h_e, h_s]$ est donné par

$$k_{eff,0}(h_*) = \frac{\nu \Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + \Sigma_a(h_*)}. \quad (72)$$

On a donc en particulier $\lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff,0}(h_*) = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a(h_*)}$.

3. Le coefficient multiplicateur $k_{eff,0}(h_*)$ vérifie

$$\begin{cases} \Sigma_a(h) \text{ croissante} & \implies 0 < k_{eff} < k_{eff,0}(h_e), \quad (a) \\ \Sigma_a(h) \text{ décroissante} & \implies 0 < k_{eff} < k_{eff,0}(h_s). \quad (b) \end{cases} \quad (73)$$

Le second point du Lemme 3.2 est une application directe de (71)(b) dont la preuve utilise l'inégalité de Poincaré écrite avec une constante optimale (voir (77) dans la preuve du Lemme 3.1). Néanmoins, nous proposons deux autres preuves utilisant certains résultats établis précédemment, ce qui permet de vérifier la cohérence de ces résultats entre eux.

Soulignons qu'il est impossible d'affirmer *a priori* que $0 < k_{eff,0}(h_e) < k_\infty$ ou que $0 < k_\infty < k_{eff,0}(h_e)$ lorsque $\Sigma_a(h)$ est croissante, ou que $0 < k_{eff,0}(h_s) < k_\infty$ ou que $0 < k_\infty < k_{eff,0}(h_s)$ lorsque $\Sigma_a(h)$ est décroissante. La validité d'une de ces inégalités dépend en effet explicitement des données D, L, h_e et h_s du problème ainsi que du type de fonction $h \mapsto \Sigma_a(h)$ (voir par exemple la formule (100) qui donne k_∞ dans le cas affine : la comparaison de (100) avec (72) confirme qu'il est en effet impossible de statuer *a priori*).

Preuve du Théorème 3.3 : En utilisant la même approche que pour obtenir (50), on trouve

$$(h')^2 = \left[\frac{\Sigma}{D} - 2W(h) \right] (h - h_e)(h_s - h)$$

avec $\Sigma = \frac{\nu \Sigma_f}{k_{eff}}$. Par ailleurs, en posant $\Delta h := (h_s - h_e)$ et en utilisant le changement de variable (52) c'est-à-dire

$$h(z) = h_e + \Delta h \sin^2 f(z) \quad (74)$$

pour lequel $f(0) = 0$ et $f(L) = \frac{\pi}{2}$ (et qui existe uniquement si $h(z) \in [h_e, h_s]$) ainsi que les relations (53) (qui demeurent valables), on obtient

$$\forall z \in]0, L[: \quad 4(f'(z))^2 = \frac{\Sigma}{D} - 2W[h_e + \Delta h \sin^2 f(z)].$$

On en déduit que

$$\forall z \in]0, L[: \quad \frac{f'(z)}{\sqrt{\frac{\Sigma}{D} - 2W[h_e + \Delta h \sin^2 f(z)]}} = \frac{1}{2}. \quad (75)$$

Une condition nécessaire est donc

$$I(\Sigma) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{\frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f)}} = \frac{L}{2}. \quad (76)$$

D'où k_{eff} solution de $I\left(\frac{v_{\Sigma f}}{k_{eff}}\right) = \frac{L}{2}$ c'est-à-dire de (68). En outre, une condition nécessaire d'existence de $I(\Sigma)$ est que $\frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f) \geq 0$ pour tout $f \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui s'écrit aussi $\Sigma \geq 2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h)$ soit encore $k_{eff} \leq k_{\infty}$. La fonction $W(h)$ étant positive sur $[h_e, h_s]$ (ce qui est une conséquence de la concavité de la fonction $G(h)$ sur $[h_e, h_s]$ et de la nullité de $G(h)$ en h_e et en h_s), on a aussi $k_{eff} \geq 0$. On a donc finalement $k_{eff} \in [0, k_{\infty}]$.

Soit maintenant $z(f)$ définie avec (70). La fonction $z(f)$ est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et vérifie $z(0) = 0$ et $z(\frac{\pi}{2}) = L$. Sachant que $h(z)$ est donnée avec (74), on obtient

$$\phi_0(z) = \Delta h \sin(2f(z))f'(z) = \Delta h \sin(2f(z)) \sqrt{\frac{\Sigma}{D} - 2W[h_e + \Delta h \sin^2 f(z)]}$$

en utilisant (27)(a) et (75). D'où (69).□

Preuve du Théorème 3.4 : Pour tout $h \in [h_e, h_s]$, on a $\frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f) \geq \frac{\Sigma - \Sigma_{\infty}}{D}$ où

$$\Sigma_{\infty} := 2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h).$$

D'où

$$\forall \Sigma > \Sigma_{\infty} : \quad 0 \leq I(\Sigma) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{D}{\Sigma - \Sigma_{\infty}}}$$

où $I(\Sigma)$ est définie avec (76). On en déduit que $\lim_{\Sigma \rightarrow +\infty} I(\Sigma) = 0$. Le point 2 du Lemme 3.3 s'écrit $\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma_{\infty}^+} I(\Sigma) = +\infty$. On vérifie par ailleurs que $I(\Sigma)$ est une fonction strictement décroissante sur $[\Sigma_{\infty}, +\infty[$. Ainsi, $I(\Sigma)$ définit une bijection strictement décroissante de $[\Sigma_{\infty}, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, ce qui permet d'établir l'existence d'un unique $\Sigma > \Sigma_{\infty}$ tel que $I(\Sigma) = \frac{L}{2}$ avec $L > 0$. On conclut en notant que $k_{eff} = \frac{v_{\Sigma f}}{\Sigma}$.□

Preuve du Lemme 3.1 : Le coefficient $\frac{v_{\Sigma f}}{k_{eff}}$ est par construction une valeur propre de $\mathcal{L}(h)$ puisque $\phi(z)$ obtenu au Théorème 3.4 est non nul. C'est de plus la plus petite valeur propre de $\mathcal{L}(h)$ puisque $\phi(z)$ est strictement positive sur $]0, L[$. En effet, les vecteurs propres de $\mathcal{L}(h)$ associés aux autres valeurs propres changent de signe sur $]0, L[$ d'après la théorie des opérateurs de Sturm-Liouville [18, 19]. Par ailleurs, on a

$$\langle \mathcal{L}(h)\phi, \phi \rangle > D\|\phi'\|_{L^2}^2 + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h) \cdot \|\phi\|_{L^2}^2$$

lorsque $\Sigma_a(h)$ n'est pas constante sur $[h_e, h_s]$ (rappelons que $\Sigma_a(h)$ est strictement positive sur $[h_e, h_s]$). Or, d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\|\phi'\|_{L^2} \geq \frac{\pi}{L} \|\phi\|_{L^2} \quad (77)$$

et cette inégalité est optimale. D'où $\langle \mathcal{L}(h)\phi, \phi \rangle \geq \left[\frac{\pi^2 D}{L^2} + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h) \right] \|\phi\|_{L^2}^2$ soit encore

$$\frac{\nu \Sigma_f}{k_{eff}} > \frac{\pi^2 D}{L^2} + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h).$$

D'où l'inégalité (71)(a). On obtient l'égalité (71)(b) en notant que l'inégalité de Poincaré est une égalité pour la fonction $\phi(z) = \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$. \square

Preuve du Lemme 3.2 :

Preuve du premier alinéa : Le point 2 du Lemme 3.3 s'écrit aussi $\lim_{k_{eff} \rightarrow k_{\infty}^-} I\left(\frac{\nu \Sigma_f}{k_{eff}}\right) = +\infty$, qui est équivalent à $\lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff} = k_{\infty}$ en utilisant (76) et le fait que $I(\Sigma)$ est une bijection (voir la preuve du Théorème 3.4).

Preuve du deuxième alinéa : La relation (72) peut être vue comme une application directe de (71)(b). Nous pouvons cependant obtenir (72) de deux autres façons. En effet, on obtient de suite (72) en utilisant le Corollaire 3.1 et en remplaçant L_* et $\nu \Sigma_f$ dans (48) par respectivement L et $\frac{\nu \Sigma_f}{k_{eff,0}}$. On peut aussi obtenir (72) en utilisant (68) lorsque h_s tend vers h_e puisque (68) s'écrit alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{\frac{\nu \Sigma_f}{D k_{eff,0}} - 2 \lim_{h_s \rightarrow h_e^+} W(h_e)}} = \frac{L}{2}$$

soit encore

$$k_{eff,0} = \frac{\nu \Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + 2D \lim_{h_s \rightarrow h_e^+} W(h_e)}$$

(la fonction $W(h)$ dépend des paramètres h_e et h_s : voir (60)). D'autre part, en utilisant (61) et en appliquant un développement de Taylor à l'ordre 3, on obtient que lorsque h_s est dans un voisinage de h_e

$$0 = (h_s - h_e)G'(h_e) - \frac{(h_s - h_e)^2}{2D} \Sigma_a(h_e) + O[(h_s - h_e)^3]$$

soit encore

$$\lim_{h_s \rightarrow h_e^+} \frac{G'(h_e)}{h_s - h_e} = \frac{\Sigma_a(h_e)}{2D}.$$

On conclut en utilisant le fait que $W(h_e) = \frac{G'(h_e)}{h_s - h_e}$ (voir (63)).

Preuve du troisième alinéa : Ce point est une application de l'inégalité (71)(a). \square

3.1.3. Résultat clé utilisé dans les preuves des Théorèmes 3.2 et 3.4

Les Théorèmes 3.2 et 3.4 utilisent le résultat clé suivant :

Lemme 3.3.

1. On suppose que $V(h)$ satisfait l'Hypothèse 3.1. Alors, l'intégrale

$$J(h_s) := \frac{1}{2} \int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)](h - h_e)}}$$

tend vers $+\infty$ lorsque h_s tend vers h_* par valeurs inférieures, h_* étant le maximum local défini dans l'Hypothèse 3.1.

2. On suppose que $W(h)$ satisfait l'Hypothèse 3.2. Alors, l'intégrale

$$I(\Sigma) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{\frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f)}}$$

tend vers $+\infty$ lorsque Σ tend vers $\Sigma_\infty := 2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h)$ par valeurs supérieures.

Preuve du Lemme 3.3 :

Preuve du premier alinéa : En appliquant la formule de Taylor-Lagrange dans un voisinage $[h_* - \alpha, h_*] \subset]h_e, h_*]$ ($\alpha > 0$), on a

$$V(h) = V(h_*) + \frac{(h - h_*)^p}{p!} V^{(p)}[\tilde{h}(h, h_*)]$$

où $\tilde{h}(h, h_*) \in [h_* - \alpha, h_*]$ et $V^{(p)}[\tilde{h}(h, h_*)] \neq 0$. D'où¹¹

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_*] : \quad V(h_s) - V(h) = V(h_s) - V(h_*) - \frac{(h - h_*)^p}{p!} V^{(p)}(\tilde{h}).$$

En outre, $V(h)$ atteint son maximum en h_* . Donc, on peut aussi écrire que $\frac{(h - h_*)^p}{p!} V^{(p)}(\tilde{h}) < 0$ sur $[h_* - \alpha, h_*]$, ce qui permet d'écrire

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_*] : \quad V(h_s) - V(h) = V(h_s) - V(h_*) + \frac{|h - h_*|^p}{p!} |V^{(p)}(\tilde{h})|. \quad (78)$$

Par ailleurs, la fonction $V^{(p)}$ étant par hypothèse continue dans $]h_e, h_*]$, il existe $m > 0$ et $M > 0$ tel que

$$\forall \tilde{h} \in [h_* - \alpha, h_*] : \quad m \leq \frac{1}{p!} |V^{(p)}(\tilde{h})| \leq M. \quad (79)$$

D'où en particulier

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_*] : \quad V(h_s) - V(h) \leq V(h_s) - V(h_*) + M|h - h_*|^p. \quad (80)$$

¹¹Dans la suite, on notera $\tilde{h} := \tilde{h}(h, h_*)$ sauf lorsque $h = h_s$ où on conservera la notation $\tilde{h}(h_s, h_*)$.

On a par ailleurs

$$\frac{1}{2\sqrt{2}(\Delta h - \alpha/2)} \int_{h_s - \alpha/2}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{V(h_s) - V(h)}} \leq \frac{1}{2} \int_{h_s - \alpha/2}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)](h - h_e)}} \leq J(h_s)$$

où $\Delta h := h_s - h_e$. D'où en utilisant (80)

$$\forall h_s \in [h_* - \alpha/2, h_*] : \frac{1}{2\sqrt{2}(\Delta h - \alpha/2)} \int_{h_s - \alpha/2}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{V(h_s) - V(h_*) + M|h - h_*|^p}} \leq J(h_s).$$

En effectuant le changement d'inconnue $h = h_* - \left[\frac{V(h_*) - V(h_s)}{M} \right]^{\frac{1}{p}} t$, on obtient donc

$$\forall h_s \in [h_* - \alpha/2, h_*] : \frac{1}{2\sqrt{2}(\Delta h - \alpha/2)} \left(\frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot [V(h_*) - V(h_s)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t^p - 1}} \leq J(h_s)$$

avec $a = \left[\frac{M}{V(h_*) - V(h_s)} \right]^{\frac{1}{p}} (h_* - h_s)$ et $b = \left[\frac{M}{V(h_*) - V(h_s)} \right]^{\frac{1}{p}} (h_* - h_s + \alpha/2)$. On a par ailleurs

$$a = \left[\frac{p!M}{|V^{(p)}[\tilde{h}(h_s, h_*)]|} \right]^{\frac{1}{p}} \leq \gamma$$

avec $1 \leq \gamma := \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{p}}$ en utilisant (79). Et en utilisant (80), on obtient par ailleurs

$$V(h_*) - V(h_s) \leq M|h_s - h_*|^p$$

ce qui implique $b \geq 1 + \frac{\alpha/2}{h_* - h_s}$. On peut donc écrire que

$$\forall h_s \in [h_* - \alpha/2, h_*] : \frac{1}{2\sqrt{2}(\Delta h - \alpha/2)} \left(\frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot [V(h_*) - V(h_s)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \int_{\gamma}^{1 + \frac{\alpha/2}{h_* - h_s}} \frac{dt}{\sqrt{t^p - 1}} \leq J(h_s).$$

Quand $p = 2$, l'intégrale $\int_{\gamma}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^p - 1}}$ diverge. Quand $p \geq 3$, l'intégrale $\int_{\gamma}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^p - 1}}$ converge mais le coefficient tend vers $+\infty$ lorsque h_s tend vers h_* . D'où le résultat.

Preuve du deuxième alinéa : Soit $\mathcal{W}(f) := W(h(f))$ où $h(f) = h_e + \Delta h \sin^2 f$ est le changement de variable (difféomorphe) déduit de (69)(a) qui transforme $[0, \frac{\pi}{2}]$ en $[h_e, h_s]$. On définit également $f_{\bullet} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $h(f_{\bullet}) = h_{\bullet}$ où $h_{\bullet} \in [h_e, h_s]$ est l'enthalpie définie dans l'Hypothèse 3.2. On vérifie facilement que $\left| \frac{d^k h(f)}{df^k} \right| \leq 2^{k-1} \Delta h$ pour tout $k \in \mathbb{N}_*$. D'où

$$\mathcal{W}^{(p)}(f_{\bullet}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{W}^{(k)}(f_{\bullet}) = 0 \quad \text{pour} \quad k \leq p - 1$$

où p est l'entier naturel défini dans l'Hypothèse 3.2.

On suppose maintenant que $h_{\bullet} \neq h_e$ et $h_{\bullet} \neq h_s$. On peut alors écrire en appliquant la formule de Taylor-Lagrange que dans un voisinage $[f_{\bullet} - \alpha, f_{\bullet} + \alpha] \subset]h_e, h_s[$ ($\alpha > 0$), on a

$$\mathcal{W}(f) = \mathcal{W}(f_{\bullet}) + \frac{(f - f_{\bullet})^p}{p!} \mathcal{W}^{(p)}(\tilde{f})$$

où $\tilde{f}(f, f_\bullet) \in]f_\bullet - \alpha, f_\bullet + \alpha[$ et $\mathcal{W}^{(p)}(\tilde{f}) \neq 0$. D'où¹²

$$\forall f \in [f_\bullet - \alpha, f_\bullet + \alpha] : \quad \frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f) = \frac{\Sigma}{D} - 2\mathcal{W}(f_\bullet) - 2\frac{(f - f_\bullet)^p}{p!}\mathcal{W}^{(p)}(\tilde{f}).$$

En outre, $\mathcal{W}(f)$ atteint son maximum en f_\bullet puisque $W(h)$ atteint son maximum en h_\bullet . Donc, on peut aussi écrire que $\frac{(f - f_\bullet)^p}{p!}\mathcal{W}^{(p)}(\tilde{f}) < 0$ sur $[f_\bullet - \alpha, f_\bullet + \alpha]$ avec p pair, ce qui permet d'écrire

$$\forall f \in [f_\bullet - \alpha, f_\bullet + \alpha] : \quad \frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f) = \frac{\Sigma}{D} - 2\mathcal{W}(f_\bullet) + 2\frac{(f - f_\bullet)^p}{p!}|\mathcal{W}^{(p)}(\tilde{f})|.$$

Par ailleurs, la fonction $W^{(p)}$ étant par hypothèse continue dans $[h_e, h_s]$, il existe $m > 0$ et $M > 0$ tel que

$$\forall f \in [f_\bullet - \alpha, f_\bullet + \alpha] : \quad m \leq \frac{2}{p!}|\mathcal{W}^{(p)}(\tilde{f})| \leq M. \quad (81)$$

On a donc en particulier

$$\forall f \in [f_\bullet - \alpha, f_\bullet + \alpha] : \quad \frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f) \leq \frac{\Sigma - \Sigma_\infty}{D} + M(f - f_\bullet)^p$$

avec $\Sigma_\infty := 2D\mathcal{W}(f_\bullet) = 2DW(h_\bullet)$. D'où

$$\int_{f_\bullet - \alpha}^{f_\bullet + \alpha} \frac{df}{\sqrt{\frac{\Sigma - \Sigma_\infty}{D} + M(f - f_\bullet)^p}} \leq \int_{f_\bullet - \alpha}^{f_\bullet + \alpha} \frac{df}{\sqrt{\frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f)}}.$$

En effectuant le changement d'inconnue $f = f_\bullet + \left(\frac{\Sigma - \Sigma_\infty}{DM}\right)^{\frac{1}{p}} t$, on obtient donc

$$\mathcal{K}_p(\Sigma) \cdot \mathcal{I}_p(\Sigma) \leq \int_{f_\bullet - \alpha}^{f_\bullet + \alpha} \frac{df}{\sqrt{\frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f)}}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{K}_p(\Sigma) := \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{\Sigma - \Sigma_\infty}{D}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & \text{(a)} \\ \mathcal{I}_p(\Sigma) := \int_{-\beta(\Sigma)}^{\beta(\Sigma)} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^p}} = 2 \int_0^{\beta(\Sigma)} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^p}} & \text{(b)} \end{cases} \quad (82)$$

où $\beta(\Sigma) := \alpha \left(\frac{\Sigma - \Sigma_\infty}{DM}\right)^{-\frac{1}{p}}$. Lorsque $p = 2$, $\mathcal{K}_p(\Sigma) = \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\mathcal{I}_p(\Sigma)$ tend vers $+\infty$ lorsque Σ tend vers Σ_∞ par valeurs supérieures. Supposons maintenant que $p \geq 3$. Alors, l'intégrale $\mathcal{I}_p(\Sigma)$ converge mais $\mathcal{K}_p(\Sigma)$ tend vers $+\infty$ lorsque Σ tend vers Σ_∞ par valeurs supérieures. D'où le résultat lorsque $h_\bullet \neq h_e$ et $h_\bullet \neq h_s$ puisque $I(\Sigma) \geq \mathcal{K}_p(\Sigma) \cdot \mathcal{I}_p(\Sigma)$.

On suppose maintenant que $h_\bullet = h_e$ (resp. $h_\bullet = h_s$). La preuve est la même que précédemment en remplaçant l'intervalle $[f_\bullet - \alpha, f_\bullet + \alpha]$ par $[f_\bullet, f_\bullet + \alpha]$ (resp. $[f_\bullet - \alpha, f_\bullet]$) et en remplaçant l'intégrale $\mathcal{I}(\Sigma)$ définie avec (82)(b) par $\mathcal{I}_p(\Sigma) := \int_0^{\beta(\Sigma)} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^p}}$. Remarquons que p peut ici être impair puisque l'on suppose que le maximum local est sur la frontière de $[h_e, h_s]$. Lorsque $h_\bullet = h_s$, il faut cependant légèrement modifier la preuve en introduisant des valeurs absolues. On aboutit alors à la même intégrale $\mathcal{I}_p(\Sigma)$. \square

¹²Dans la suite, on notera $\tilde{f} := \tilde{f}(f, f_\bullet)$.

3.2. Cas affine

On particularise les résultats de la Section 3.1 en supposant que

$$\Sigma_a(h) = \Sigma_{a,e} + \sigma_a(h - h_e) \quad (83)$$

où $\Sigma_{a,e}$ et σ_a sont des constantes strictement positives connues.

3.2.1. Recherche de l'enthalpie de sortie h_s

La proposition qui suit est une application des Théorèmes 3.1 et 3.2 lorsque $\Sigma_a(h)$ est donnée par la relation (83) :

Proposition 3.1. *L'enthalpie de sortie h_s est nécessairement solution de*

$$\frac{2F_m(h_s-h_e)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{q(h_s-h_e)}} = L \quad (84)$$

où $F_m(f)$ est l'intégrale elliptique de Jacobi définie avec

$$F_m(f) = \int_0^f \frac{df'}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 f'}} \quad (85)$$

et où

$$\begin{cases} q(s) = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{D} - \frac{\sigma_a}{3D}s, & (a) \\ q(s)m^2(s) = \frac{\sigma_a}{3D}s. & (b) \end{cases} \quad (86)$$

Lorsque $L > L_*$ où

$$L_* := \pi \sqrt{\frac{D}{\nu\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}}, \quad (87)$$

l'équation (84) admet une unique solution. De plus, celle-ci est telle que

$$h_e < h_s < h_*$$

où

$$h_* = h_e + \frac{3}{2\sigma_a}(\nu\Sigma_f - \Sigma_{a,e}). \quad (88)$$

Notons que l'intégrale elliptique de Jacobi $F_m(f)$ est étudiée dans [21] (cf. expression 17.3.1) et peut être évaluée avec MAPLE (voir plus loin le §3.2.3).

On a de plus le corollaire :

Corollaire 3.2. *L'inconnue m est solution de*

$$G_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{L_*} \quad (89)$$

avec

$$G_m(f) := F_m(f) \sqrt{1+m^2}. \quad (90)$$

L'enthalpie h_s est alors donnée par

$$h_s(m) = h_e + \frac{3m^2}{\sigma_a(1+m^2)}(v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}) \quad (91)$$

et vérifie donc

$$\lim_{m \rightarrow 1} h_s(m) = h_*. \quad (92)$$

D'autre part, les fonctions $h(z)$ et $\phi(z)$ sont données avec

$$\begin{cases} h(z) = h_e + [h_s(m) - h_e] \sin^2[f(z)], & (a) \\ \phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} [h_s(m) - h_e] \sin[2f(z)] f'(z) & (b) \end{cases} \quad (93)$$

où $f(z)$ est la fonction réciproque de

$$z(f) = \frac{2L_*}{\pi} G_m(f). \quad (94)$$

Soulignons que $m \mapsto G_m\left(\frac{\pi}{2}\right)$ définit une fonction strictement croissante de $[0, 1[$ dans $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ (puisque $m \mapsto F_m\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est strictement croissante). On en déduit l'existence d'un unique $m \in]0, 1[$ pour tout $L > L_*$, ce qui est cohérent avec le résultat d'existence et d'unicité énoncé dans la Proposition 3.1 et vu comme un cas particulier du Théorème 3.2. Remarquons par ailleurs que le cas particulier $L = L_*$ conduit à $m = 0$, donc à $h(z) = h_e$.

Preuve de la Proposition 3.1 : Lorsque $\Sigma_a(h)$ est donnée avec (83), la fonction $V(h)$ est donnée avec (35). Donc

$$V'(h) = a - b(h - h_e)$$

avec $a := \frac{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{2D}$ et $b := \frac{\sigma_a}{3D}$. En utilisant (56) et (57), on obtient alors que

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{2 \int_0^1 [a - b(h - h_e)(1 - t \cos^2 f)] dt}} = L.$$

Donc, en utilisant le fait que

$$\int_0^1 [a - bx(1 - t \cos^2 f)] dt = a - bx + \frac{bx}{2} \cos^2 f = a - \frac{bx}{2}(1 + \sin^2 f),$$

on obtient

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{2a - b(h - h_e)(1 + \sin^2 f)}} = L$$

soit encore

$$\frac{2}{\sqrt{2a - b(h - h_e)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{1 - \frac{b(h - h_e)}{2a - b(h - h_e)} \sin^2 f}} = L$$

ce qui correspond à (84) en tenant compte de (85), (86) et de la définition de a et b . L'existence et l'unicité de $h \in]h_e, h_*[$ lorsque $L > L_*$ est une conséquence directe du Théorème 3.2 en notant que L_* et h_* sont définis avec (47) et (45). \square

Preuve du Corollaire 3.2 : On déduit de (86) que

$$q = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{D(1 + m^2)}. \quad (95)$$

D'où

$$2F_m\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{D(1 + m^2)}{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}} = L$$

en utilisant (84), soit encore

$$F_m\left(\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{1 + m^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{L_*}$$

en utilisant $L_* := \pi \sqrt{\frac{D}{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}}$, ce qui correspond à l'équation (89). La relation (91) s'obtient en injectant (95) dans (86)(a). Les formules (93)(a) et (93)(b) sont respectivement déduites de (39) et (42) en notant que la fonction $z(f)$ définie avec (40) est dans le cas affine donnée par (94). \square

3.2.2. Recherche du coefficient multiplicateur k_{eff}

La solution du problème de recherche du coefficient multiplicateur k_{eff} se déduit de la Proposition 3.1 et du Corollaire 3.2 en notant que (84) et (86)(b) s'écrivent respectivement $F_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{L}{2} \sqrt{q}$ et $qm^2 = \frac{\sigma_a}{3D}(h_s - h_e)$, en remplaçant $v\Sigma_f$ par $\frac{v\Sigma_f}{k_{eff}}$ dans (87) et (91), puis en considérant que $h_s(m)$ est une donnée h_s dans (91) et (93). On obtient alors :

Corollaire 3.3. Soit $m \in]0, 1[$ l'unique solution de

$$mF_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\sigma_a}{3D}(h_s - h_e)}. \quad (96)$$

Le coefficient multiplicateur k_{eff} est alors donné par

$$k_{eff} = \frac{v\Sigma_f}{\frac{\sigma_a(1 + m^2)}{3m^2}(h_s - h_e) + \Sigma_{a,e}}. \quad (97)$$

D'autre part, les fonctions $h(z)$ et $\phi(z)$ sont données avec

$$\begin{cases} h(z) = h_e + (h_s - h_e) \sin^2[f(z)], & (a) \\ \phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} (h_s - h_e) \sin[2f(z)] f'(z) & (b) \end{cases} \quad (98)$$

où $f(z)$ est la fonction réciproque de

$$z(f) = 2 \sqrt{\frac{D}{\frac{v\Sigma_f}{k_{eff}} - \Sigma_{a,e}}} G_m(f). \quad (99)$$

Remarquons que de (97), on obtient que le coefficient de réactivité $\gamma := \frac{d}{d\Delta h} \left(\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}} \right)$ (où $\Delta h := h_s - h_e$) est donné par¹³

$$\gamma = -\frac{\sigma_a(1+m^2)}{3\nu\Sigma_f m^2},$$

$\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$ étant par définition la réactivité du cœur¹⁴. Le coefficient de réactivité γ est donc strictement négatif lorsque $\sigma_a > 0$, ce qui contribue à assurer la stabilité du cœur.

On a par ailleurs :

Lemme 3.4. *Le coefficient multiplicateur k_∞ en milieu infini, obtenu avec (67), est donné par*

$$k_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\frac{2\sigma_a}{3}(h_s - h_e) + \Sigma_{a,e}} \quad (100)$$

et vérifie

$$\lim_{m \rightarrow 1} k_{eff} = k_\infty. \quad (101)$$

Et on montre que :

Lemme 3.5. *Le coefficient multiplicateur k_{eff} vérifie*

$$0 < k_{eff} < k_\infty \quad (102)$$

et

$$0 < k_{eff} < k_{eff,0}(h_e) \quad (103)$$

où $k_{eff,0}(h_*)$ défini avec (72) est le coefficient multiplicateur sans couplage obtenu pour une enthalpie égale à $h_* \in [h_e, h_s]$. On a de plus

$$\lim_{m \rightarrow 0} k_{eff} = k_{eff,0}(h_e). \quad (104)$$

Ce lemme est une application directe au cas affine du Théorème 3.4 et du Lemme 3.2. Dans la preuve de ce lemme, nous nous proposons cependant de retrouver ces inégalités à partir des formules explicites obtenues précédemment afin de souligner la cohérence de ces formules avec les résultats obtenus dans le cas général. Ajoutons que la limite (104) est cohérente avec le fait que $m = 0$ dans (96) correspond à $h_s = h_e$ (puisque $F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $L > 0$, $\sigma_a > 0$ et $D > 0$).

¹³Dans notre modèle simplifié de couplage thermohydraulique–neutronique, le combustible fissile est également le fluide caloporteur. Le coefficient de réactivité γ est donc ici à la fois le coefficient de température du combustible (qui caractérise l’effet de la température du combustible fissile sur la réactivité par effet Doppler) et le coefficient modérateur (qui caractérise l’effet de la température du fluide caloporteur sur la réactivité).

¹⁴ Dans des situations réelles, la réactivité du cœur $\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$ doit être inférieure pour des raisons de sûreté à la proportion β de neutrons retardés par fission pour que le cœur puisse être stabilisé avec des moyens technologiques dont l’échelle caractéristique d’évolution en temps est celle des neutrons retardés et pas celle des neutrons prompts. Soulignons que dans notre modèle simplifié, β intervient dans l’équation instationnaire (2).

Soulignons que les formules (72) et (100) qui donnent respectivement $k_{eff,0}(h_e)$ et k_∞ montrent qu'il est impossible d'établir *a priori* que $0 < k_{eff,0}(h_e) < k_\infty$ ou que $0 < k_\infty < k_{eff,0}(h_e)$. La validité d'une de ces inégalités dépend en effet explicitement des données D , L , h_e , h_s et σ_a . On peut par contre affirmer que dans le cas affine, on a

$$k_\infty < \lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff,0}(h_e) \quad (105)$$

puisque $\lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff,0}(h_e) = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_{a,e}}$ (on rappelle que l'on a $h_s > h_e$ et $\sigma_a > 0$).

Preuve du Lemme 3.4 : En utilisant (66)(a), on obtient que $\max_{h \in [h_e, h_s]} W(h) = \frac{\Sigma_{a,e}}{2D} + \frac{2\sigma_a}{6D}(h_s - h_e)$ ce qui permet de conclure en utilisant (67). On peut aussi déduire ce résultat de (97) en faisant tendre m vers 1 puisque la solution de (96) est $m = 1$ lorsque L tend vers $+\infty$. \square

Preuve du Lemme 3.5 : L'inégalité (102) se déduit immédiatement de (97) et (100) puisque $m \in]0, 1[$. Pour obtenir (103), on doit montrer que $\frac{\sigma_a(1+m^2)}{3m^2}(h_s - h_e) > \frac{\pi^2 D}{L^2}$ pour tout $m \in]0, 1[$. Or, en utilisant (96), on obtient que

$$\frac{\sigma_a(1+m^2)}{3m^2}(h_s - h_e) = \frac{4D}{L^2} G_m^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

où $G_m\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est défini avec (90). Donc, établir l'inégalité précédente est équivalent à montrer que $G_m\left(\frac{\pi}{2}\right) > \frac{\pi}{2}$ pour tout $m \in]0, 1[$, ce qui est le cas puisque $m \mapsto G_m\left(\frac{\pi}{2}\right)$ définit une fonction strictement croissante de $]0, 1[$ dans $]\frac{\pi}{2}, +\infty[$. La limite (104) s'obtient en notant que $\lim_{m \rightarrow 0} G_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. \square

3.2.3. Quelques profils du flux neutronique $\phi(z)$ obtenus via MAPLE

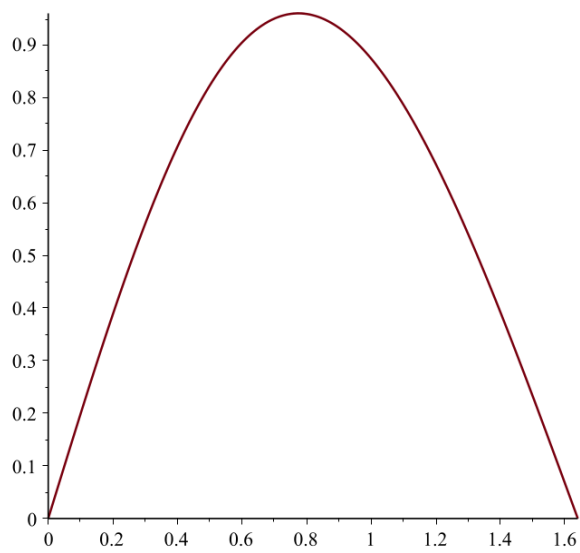
On se propose ici de visualiser le flux neutronique $\phi(z)$ obtenu avec (93)(b) en utilisant la fonction `InverseJacobiAM` de MAPLE pour évaluer l'inverse de l'intégrale de Jacobi $F_m(f)$ définie avec (85) et donc pour évaluer $z(f)$ défini avec (40). On représente $\phi(z)$ pour 4 valeurs de m différentes. Soulignons que le couplage est d'autant plus faible que le paramètre m est proche de 0 (voir (91) dans le cas de la recherche de h_s et (104) dans le cas de la recherche de k_{eff}). Inversement, plus m est proche de 1, plus le couplage est important (voir (92) dans le cas de la recherche de h_s et (101) dans le cas de la recherche de k_{eff}).

Les différents profils de $\phi(z)$ représentés sur la Figure 1 confirment que le couplage est d'autant plus faible que m est proche de 0 – le profil de $\phi(z)$ se rapprochant du mode fondamental de l'équation de diffusion à coefficient constant (voir le Corollaire 3.1) –, et qu'il est d'autant plus fort que m est proche de 1 avec en particulier un maximum du flux se rapprochant de l'entrée du cœur, profil caractéristique des profils rencontrés dans les cas réels. Le déplacement vers l'entrée du cœur du maximum du flux neutronique dû au couplage est lié à la section efficace d'absorption qui est ici d'autant plus importante que l'enthalpie interne (et donc la température) du fluide caloporteur est importante puisque σ_a est strictement positif dans (83). Ce phénomène correspond à l'effet Doppler qui est ici une contre-réaction stabilisant le cœur et qui trouve son origine dans l'augmentation des captures stériles de neutrons dans le cœur lorsque la température augmente.

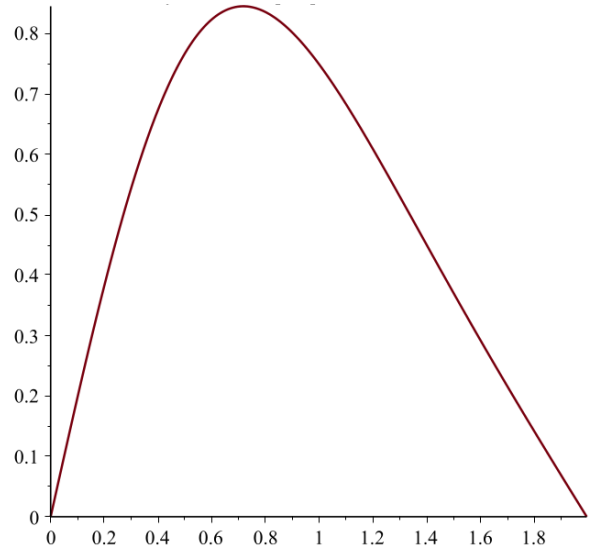
3.3. Application numérique dans le cas affine

On considère les données suivantes¹⁵ :

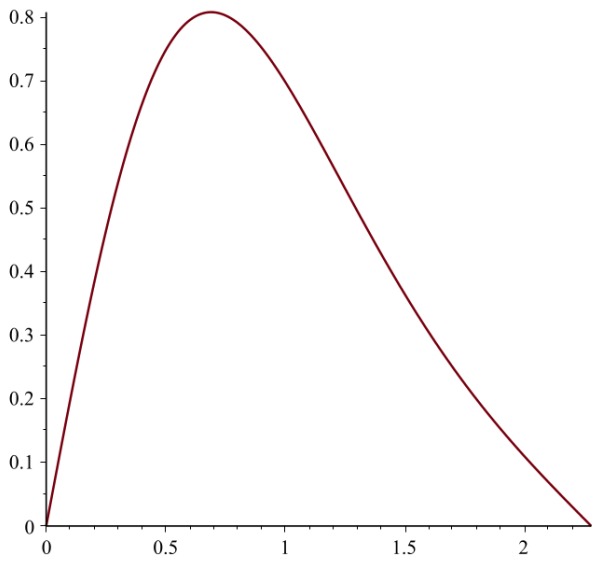
¹⁵Ces données réalistes nous ont été fournies par J. Ragusa qui nous a également fourni le code MATLAB de couplage thermohydraulique–neutronique basé sur l'algorithme itératif présenté et analysé à la Section 4.



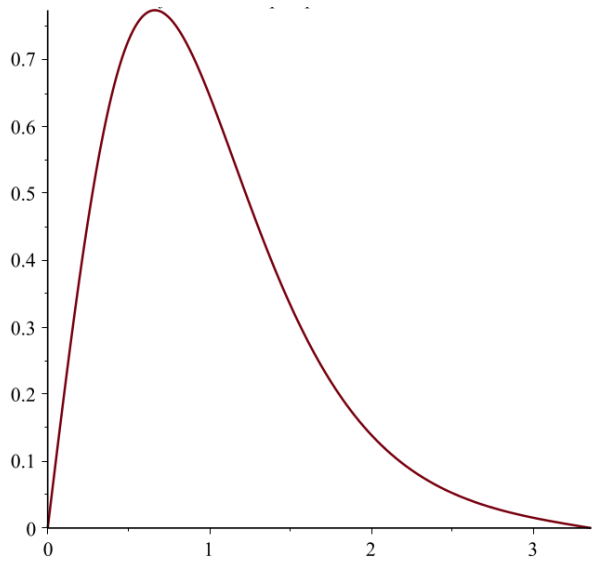
$m = 0.40$



$m = 0.80$



$m = 0.90$



$m = 0.99$

Figure 1: Flux neutronique $\phi(z)$ pour différentes valeurs de m . Plus m est proche de 0, plus le couplage est faible et plus $\phi(z)$ est proche du mode fondamental qui est ici un sinus. À l'opposée, plus m est proche de 1, plus le couplage est important, plus $\phi(z)$ est différent du mode fondamental et plus le maximum de $\phi(z)$ se rapproche de l'entrée du cœur du fait de l'effet Doppler.

$$\left\{ \begin{array}{l} SD_e = 14660 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \\ L = 400 \text{ cm}, \\ D = 1 \text{ cm}, \\ \Sigma_{a,e} = 0.45 \text{ cm}^{-1}, \\ \nu\Sigma_f = 0.5 \text{ cm}^{-1}, \\ \sigma_a(1480 \times 10^3 - h_e) = 0.0004 \text{ cm}^{-1}, \\ h_e = 1283 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}. \end{array} \right.$$

Le coefficient σ_a caractérise dans le cas affine la dépendance de la section efficace d'absorption avec l'enthalpie h du fluide caloporteur. Autrement dit, plus σ_a est important, plus le couplage entre la thermohydraulique et la neutronique est important. Ici, σ_a est de l'ordre de $2.03 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{J}^{-1} \cdot \text{kg}$.

3.3.1. Recherche de l'enthalpie de sortie h_s

On utilise le Corollaire 3.2 pour évaluer h_s . En utilisant (87), on trouve

$$L_* = 14.05 \text{ cm}.$$

En notant que $L/L_* \simeq 28.5$, on peut supposer qu'en première approximation, le paramètre m solution de (89) est égal à 1. D'où

$$h_s = 38220.50 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad (106)$$

en utilisant (91), ce qui, en utilisant (26), correspond à une puissance du cœur donnée par

$$\mathcal{P} = 541.50 \text{ GW}.$$

Cette puissance est bien évidemment irréaliste¹⁶. Cela vient de ce que l'enthalpie de sortie h_s donnée par (106) est très importante et que celle-ci correspond aussi à la solution du problème de recherche du coefficient multiplicateur k_{eff} pour lequel $k_{eff} = 1$.

3.3.2. Recherche du coefficient multiplicateur k_{eff}

Lorsque l'enthalpie de sortie h_s est imposée de telle sorte que la puissance \mathcal{P} du cœur déduite de (26) soit réaliste, k_{eff} est différent de 1. En utilisant le Corollaire 3.3 et en approchant à nouveau m avec 1, on obtient pour les puissances successives 2.75 GW, 3.75 GW et 5.5 GW¹⁷ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = 2.75 \text{ GW} \Rightarrow \Delta h = 187.58 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow h_s = 1470.58 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow k_{eff} = 1.11048, \\ \mathcal{P} = 3.75 \text{ GW} \Rightarrow \Delta h = 255.80 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow h_s = 1538.8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow k_{eff} = 1.11025, \\ \mathcal{P} = 5.5 \text{ GW} \Rightarrow \Delta h = 375.17 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow h_s = 1658 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow k_{eff} = 1.10986. \end{array} \right.$$

¹⁶La puissance \mathcal{P} d'un cœur de réacteur à eau pressurisée classique est de l'ordre de quelques GW.

¹⁷Le fait d'approcher m solution de (96) avec 1 se justifie par le fait que la valeur de $\frac{L}{2} \sqrt{\frac{\sigma_a}{3D}(h_s - h_e)}$ est pour ces 3 cas supérieure à 2 et par la forme de la courbe $m \mapsto F_m\left(\frac{\pi}{2}\right)$ lorsque m tend vers 1.

Soulignons que compte tenu de (101), ces k_{eff} sont approchés ici par k_{∞} défini avec (100) puisque l'on fait les calculs avec $m = 1$ (on a en toute rigueur $0 < k_{eff} < k_{\infty}$: voir (102)).

Ces k_{eff} sont strictement supérieurs à 1. Cela sous-entend que pour trouver une solution stationnaire non nulle du couplage thermohydraulique–neutronique (1)(2) avec ces données, il est nécessaire d'augmenter l'absorption des neutrons *via* des moyens technologiques appropriés¹⁸ (voir le point 2 du Lemme 2.3).

En outre, la réactivité $\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$ est de l'ordre de 9900 pcm¹⁹ pour ces 3 cas, ce qui est une réactivité très importante par rapport aux réactivités usuelles qui sont entre 50 pcm et 100 pcm. Il faudrait en effet ici une proportion β de neutrons retardés par fission strictement supérieure à de l'ordre de 10^4 pcm, ce qui est bien supérieur au β usuel qui est de l'ordre de 660 pcm (pour un réacteur à eau pressurisée classique)²⁰. Les 3 réacteurs étudiés ici sont donc difficilement contrôlables.

Enfin, $k_{eff,0}(h_e)$ défini avec (72) prend la valeur

$$k_{eff,0}(h_e) = 1.11095$$

qui est bien supérieure aux valeurs de k_{eff} obtenues plus haut (voir l'inégalité (103)). Notons qu'ici, on a $\lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff,0}(h_e) = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_{a,e}} = 1.11111$: l'inégalité (105) est donc satisfaite (on rappelle que les k_{eff} évalués ci-dessus sont obtenus en utilisant k_{∞}).

Ces résultats suggèrent que bien que m soit proche de 1, l'influence de la thermohydraulique sur la neutronique n'est pas très importante pour les données choisies puisque l'ensemble des k_{eff} obtenus sont proches de $k_{eff,0}(h_e)$. Pour augmenter l'influence de la thermohydraulique sur la neutronique, il faudrait augmenter le coefficient σ_a (qui est ici de l'ordre de $2.03 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{J}^{-1} \cdot \text{kg}$).

4. Étude de l'algorithme de couplage pour le calcul du k_{eff}

On présente dans cette section l'algorithme de couplage classique [6] pour résoudre le problème de couplage avec recherche du k_{eff} (27)(28). On pourra aussi consulter [15] où cet algorithme de couplage restreint au modèle de couplage étudié dans ce travail est également explicité. Puis, on propose des conditions de convergence de l'algorithme lorsque Σ_f est une constante strictement positive.

4.1. Description de l'algorithme

On rappelle que l'on a introduit au Lemme 3.1 l'opérateur $\mathcal{L}(h)$ défini par

$$\mathcal{L}(h)\phi := -\frac{d}{dz} \left[D(h) \frac{d}{dz} \phi \right] + \Sigma_a(h)\phi$$

¹⁸Ces moyens technologiques pourront être l'introduction de barres de contrôle ou l'injection de bore dans le cœur.

¹⁹pcm est l'acronyme de *pour cent mille*.

²⁰On rappelle que pour des raisons de sûreté, la réactivité du cœur $\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$ doit être inférieure à la la proportion β de neutrons retardés par fission intervenant dans l'équation instationnaire (2) : voir la note de bas de page 14.

(lorsque $D(h)$ n'est pas *a priori* une constante). On introduit dans cette section les opérateurs suivants:

$$\begin{cases} R(h)\psi = \frac{1}{\sqrt{\Sigma_f(h)}}\psi, \\ P(h)\psi = R(h)\mathcal{L}(h)R(h)\psi. \end{cases}$$

L'équation (22)(b) est alors équivalente à trouver ψ solution de

$$P(h)\psi = \frac{\nu}{k_{eff}}\psi$$

et à en déduire ϕ avec

$$\phi = R(h)\psi.$$

La fonction intermédiaire ψ est donc un vecteur propre de l'opérateur $P(h)$ associé à la valeur propre $\frac{\nu}{k_{eff}}$. Traditionnellement, les codes de neutronique trouvent des solutions de (27)(28) via une procédure qui résout itérativement l'équation sur l'enthalpie interne puis l'équation sur le flux neutronique qui est résolue par l'intermédiaire d'un problème de recherche de plus petite valeur propre.

On note n l'indice de l'itération de cet algorithme de couplage itératif. Et on introduit les opérateurs de Sturm-Liouville

$$P_n := P(h_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_n := \mathcal{L}(h_n)$$

qui sont connus lorsque l'enthalpie h_n à l'itération n l'est. Chaque itération n se décompose en 4 étapes :

- **Étape 1 :** On suppose connue l'enthalpie h_n . On cherche alors le couple $(k_n, \tilde{\psi}_n)$ où $\frac{\nu}{k_n}$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur P_n avec conditions de Dirichlet homogènes et telle que $\tilde{\psi}_n$ soit l'unique vecteur propre normalisé dans $L^2([0, L])$. Soulignons à nouveau que selon la théorie des opérateurs de Sturm-Liouville [18, 19], le vecteur propre $\tilde{\psi}_n$ est strictement positif ou strictement négatif sur $]0, L[$. Ici, on le choisit strictement positif pour respecter la contrainte de positivité (11). Selon cette même théorie, les vecteurs propres associés aux autres valeurs propres ne sont pas de signe constant sur $]0, L[$, ce qui justifie la recherche de plus petite valeur propre.

- **Étape 2 :** On calcule

$$\tilde{\phi}_n = R(h_n)\tilde{\psi}_n$$

qui vérifie donc

$$\mathcal{L}_n\tilde{\phi}_n = \mathcal{L}_nR(h_n)\tilde{\psi}_n = (R(h_n))^{-1}P_n\tilde{\psi}_n = \frac{\nu}{k_n}(R(h_n))^{-2}\tilde{\phi}_n = \frac{\nu\Sigma_f(h_n)}{k_n}\tilde{\phi}_n.$$

- **Étape 3 :** On calcule ϕ_n via la normalisation

$$\phi_n = \frac{\tilde{\phi}_n(x)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h_n(x))\tilde{\phi}_n(x)dx}.$$

Cette fonction est alors l'unique solution positive de $\mathcal{L}_n \phi_n = \frac{v \Sigma_f}{k_n} \phi_n$ telle que

$$\int_0^L \mathbb{E} \Sigma_f(h_n(x)) \phi_n(x) dx = 1.$$

- **Étape 4** : On met à jour l'enthalpie *via* la résolution de

$$\begin{cases} S D_e \frac{d}{dx} h_{n+1} = \mathcal{P} \mathbb{E} \Sigma_f(h_n(x)) \phi_n, \\ h_{n+1}(0) = h_e. \end{cases} \quad (107)$$

Puis on passe à l'Étape 1 de l'itération $n + 1$ en fonction du niveau de convergence souhaité, celui-ci pouvant se mesurer par la quantité $\|h_{n+1} - h_n\|_\infty$. L'objet de la section suivante est d'établir des conditions de convergence de cet algorithme lorsque la section efficace Σ_f est constante à partir de l'étude de $\|h_{n+1} - h_n\|_\infty$.

4.2. Estimations de convergence dans le cas où Σ_f est une constante

Lorsque Σ_f est une constante strictement positive, l'algorithme précédent se simplifie puisque les opérateurs P_n et \mathcal{L}_n sont proportionnels (nous conserverons cependant l'opérateur P_n dans l'analyse). On a en effet dans ce cas

$$P(h) = \frac{1}{\Sigma_f} \mathcal{L}(h)$$

(et donc $P_n = \frac{1}{\Sigma_f} \mathcal{L}_n$) ainsi que

$$\mathbb{E} \Sigma_f \phi_n = \frac{\tilde{\phi}_n}{\int_0^L \tilde{\phi}_n(z) dz} = \frac{\tilde{\psi}_n}{\int_0^L \tilde{\psi}_n(z) dz}.$$

Dans ce cas simplifié, nous explicitons des conditions assurant la convergence de l'algorithme. Bien qu'il s'agisse d'un couplage thermohydraulique-neutronique simplifié, nous constaterons que ces conditions sont extrêmement fortes.

Nous supposons tout d'abord que la section efficace vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1. *La section efficace d'absorption $\Sigma_a(h)$ est K -lipschitzienne.*

Puis nous supposons que l'algorithme satisfait :

Hypothèse 4.2. *Il existe une constante α strictement positive telle que, à partir d'un certain rang n_0 , on ait*

$$\alpha^{-1} \leq \int_0^L \tilde{\psi}_n(z) dz. \quad (108)$$

Soulignons qu'il est nécessaire de contrôler le terme source $\mathcal{P} \frac{\tilde{\psi}_n}{\int_0^L \tilde{\psi}_n(z) dz}$ dans le processus itératif. Or, il n'y a pas de minoration de la norme L^1 de $\tilde{\psi}$ quand la norme de $\tilde{\psi}$ est égale à 1 dans L^2 . D'où la nécessité de la minoration (108) de l'Hypothèse 4.2²¹. Enfin, on définit

$$H_{0,0}^1([0, L]) := \{f \in H^1([0, L]) \text{ tel que } f(0) = 0\}$$

²¹On peut même construire une suite de fonctions continues sur $[0, L]$ telle que la norme dans L^2 soit égale à 1 et la norme dans L^1 tende vers 0. C'est par exemple le cas de la suite de fonction $\tilde{\psi}_n$ définie sur $[0, 1]$ par $\tilde{\psi}_n(z) = \sqrt{\frac{2}{3}} n^{\frac{3}{2}} z$ sur $[0, \frac{1}{n}]$, par $\tilde{\psi}_n(z) = \sqrt{\frac{2}{3}} n^{\frac{3}{2}} (\frac{2}{n} - z)$ sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ et par $\tilde{\psi}_n(z) = 0$ sur $[\frac{2}{n}, 1]$. En d'autres termes, les normes L^1 et L^2 ne sont pas équivalentes pour des fonctions de $H_0^1([0, L])$.

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{H_{0,0}^1} := \|f'\|_{L^2} \quad (109)$$

qui est équivalente à la norme H^1 du fait de l'inégalité de Poincaré.

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 4.1. *On appelle*

$$\kappa = \frac{4K}{\Sigma_f} \cdot \frac{\sqrt{L}\mathcal{P}}{SD_e} \alpha (1 + \alpha \sqrt{L}) \quad (110)$$

et on note $\beta_n > 0$ l'écart entre la seconde et la première valeur propre de P_n . Sous les Hypothèses 4.1 et 4.2, on obtient simultanément

$$\|h_{n+1} - h_n\|_\infty \leq \frac{\kappa}{\beta_n} \|h_n - h_{n-1}\|_\infty \quad (111)$$

et

$$\|h_{n+1} - h_n\|_{H_{0,0}^1} \leq \frac{\kappa}{\beta_n} \|h_n - h_{n-1}\|_{H_{0,0}^1}. \quad (112)$$

On déduit du Théorème 4.1 :

Corollaire 4.1. *Sous les Hypothèses 4.1 et 4.2, et si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\delta_0 \in]0, 1]$ tels que*

$$\forall n \geq n_0 : \quad \kappa \leq \beta_n(1 - \delta_0), \quad (113)$$

alors $h_n - h_e$ converge vers $h - h_e$ dans $L^\infty([0, L])$ et dans $H_{0,0}^1([0, L])$, et (ϕ_n, k_n) converge vers (ϕ, k_{eff}) dans $H_0^1([0, L]) \times \mathbb{R}_+^*$. De plus, (h, ϕ, k_{eff}) ainsi construit est solution de (27)(28).

Les Hypothèses 4.1 et 4.2 ainsi que la condition (113) définissent donc des conditions suffisantes assurant la convergence de l'algorithme. Si l'Hypothèse 4.1 peut sembler naturelle²², l'Hypothèse 4.2 et la condition (113) sont extrêmement fortes. En particulier, la condition (113) dépend du terme source $\frac{\mathcal{P}}{SD_e}$, de la longueur du cœur L , de la constante α (introduite à l'Hypothèse 4.2) et de l'écart β_n entre les deux premières valeurs propres de P_n . On remarque également que la condition (113) est vérifiée si K est assez petit, c'est-à-dire si le couplage est très faible. Ce point est cohérent avec le fait que K petit implique que le spectre de P_{n+1} est proche de celui de P_n puisque $P_{n+1} = P_n + \Sigma_a(h_{n+1}) - \Sigma_a(h_n)$ et que $\|\Sigma_a(h_{n+1}) - \Sigma_a(h_n)\|_\infty$ est majoré par $K\|h_{n+1} - h_n\|_\infty$ donc par $K\sqrt{L}\|h_{n+1} - h_n\|_{H_{0,0}^1}$ (en utilisant l'inégalité (114)(a) introduite ci-dessous).

4.3. Preuves du Théorème 4.1 et du Corollaire 4.1

Les preuves du Théorème 4.1 et du Corollaire 4.1 utilisent les trois lemmes suivants :

Lemme 4.1. *Les valeurs propres de l'opérateur P_n sont strictement positives et minorées par $\frac{\pi^2 D}{\Sigma_f L^2}$.*

Preuve du Lemme 4.1 : Ce lemme est une application directe de l'inégalité (71)(a). \square

²²L'existence de très fortes oscillations de la section efficace d'absorption au milieu de zones très régulières – phénomène correspondant au concept de *résonances* de la section efficace – implique cependant que la constante K peut être très grande, rendant la convergence de l'algorithme éventuellement difficile.

Lemme 4.2. Pour toute fonction $\phi \in H_{0,0}^1([0, L])$, on a :

$$\begin{cases} \|\phi\|_\infty \leq \sqrt{L}\|\phi\|_{H_{0,0}^1}, & (a) \\ \|\phi\|_{L^2} \leq \frac{L}{\pi}\|\phi\|_{H_{0,0}^1}. & (b) \end{cases} \quad (114)$$

Notons que ce lemme ne permet pas de déduire la seconde inégalité (112) du Théorème 4.1 de la première inégalité (111). La démonstration doit être faite pour chaque inégalité, et le fait que la même constante κ intervienne dans les inégalités (111) et (112) est non trivial.

Preuve du Lemme 4.2 : L'inégalité (114)(a) s'obtient en notant que pour tout ϕ dans $H_{0,0}^1$, on a $\phi(z) = \int_0^z \phi'(x)dx$ puis par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'inégalité (114)(b) correspond à l'inégalité de Poincaré (77). \square

Lemme 4.3. Sous les Hypothèses 4.1 et 4.2, on obtient :

$$\forall (\varphi, \theta) \in \left(L^2([0, L])\right)^2 : \quad |\langle (P_{n+1} - P_n)\varphi, \theta \rangle| \leq \frac{K}{\Sigma_f} \|h_{n+1} - h_n\|_\infty \cdot \|\varphi\|_{L^2} \cdot \|\theta\|_{L^2} \quad (115)$$

et

$$\left| \frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n} \right| \leq \frac{K}{\Sigma_f} \|h_{n+1} - h_n\|_\infty. \quad (116)$$

Preuve du Lemme 4.3 : On remarque que

$$(P_{n+1} - P_n)\varphi = \frac{1}{\Sigma_f} (\Sigma_a(h_{n+1}) - \Sigma_a(h_n))\varphi$$

(la section efficace Σ_f ne dépendant pas de h). D'où

$$\forall (\varphi, \theta) \in \left(L^2([0, L])\right)^2 : \quad |\langle (P_{n+1} - P_n)\varphi, \theta \rangle| \leq \frac{1}{\Sigma_f} \|\Sigma_a(h_{n+1}) - \Sigma_a(h_n)\|_\infty \cdot \|\varphi\|_{L^2} \cdot \|\theta\|_{L^2}$$

soit encore

$$\forall (\varphi, \theta) \in \left(L^2([0, L])\right)^2 : \quad |\langle (P_{n+1} - P_n)\varphi, \theta \rangle| \leq \frac{K}{\Sigma_f} \|h_{n+1} - h_n\|_\infty \cdot \|\varphi\|_{L^2} \cdot \|\theta\|_{L^2}$$

en utilisant l'Hypothèse 4.1, ce qui correspond à l'estimation (115). Comme nous étudions la plus petite valeur propre $\frac{\nu}{k_n}$ (resp. $\frac{\nu}{k_{n+1}}$) de l'opérateur P_n (resp. P_{n+1}), on a d'autre part

$$\frac{\nu}{k_n} = \inf_{\|\tilde{\psi}\|_{L^2}=1} \langle P_n \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \rangle \leq \langle P_n \tilde{\psi}_{n+1}, \tilde{\psi}_{n+1} \rangle = \frac{\nu}{k_{n+1}} + \langle (P_n - P_{n+1}) \tilde{\psi}_{n+1}, \tilde{\psi}_{n+1} \rangle$$

et

$$\frac{\nu}{k_{n+1}} = \inf_{\|\tilde{\psi}\|_{L^2}=1} \langle P_{n+1} \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \rangle \leq \langle P_{n+1} \tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n \rangle = \frac{\nu}{k_n} + \langle (P_{n+1} - P_n) \tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n \rangle.$$

D'où les deux inégalités

$$\frac{\nu}{k_n} - \frac{\nu}{k_{n+1}} \leq \frac{K}{\Sigma_f} \|h_{n+1} - h_n\|_\infty$$

et

$$\frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n} \leq \frac{K}{\Sigma_f} \|h_{n+1} - h_n\|_\infty$$

en utilisant (115), ce qui donne finalement

$$\left| \frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n} \right| \leq \frac{K}{\Sigma_f} \|h_{n+1} - h_n\|_\infty$$

qui correspond à l'estimation (116). \square

Preuve du Théorème 4.1 : Considérons la projection de $\tilde{\psi}_{n+1} - \tilde{\psi}_n$ sur la base de diagonalisation de P_n . Il existe alors $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $V_n \perp \tilde{\psi}_n$ pour le produit scalaire de $L^2([0, L])$ noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tels que

$$\tilde{\psi}_{n+1} - \tilde{\psi}_n = \mu_n \tilde{\psi}_n + V_n. \quad (117)$$

Par orthogonalité de $\tilde{\psi}_n$ avec V_n et comme $\tilde{\psi}_{n+1}$ et $\tilde{\psi}_n$ sont de norme 1, on a donc

$$1 = (1 + \mu_n)^2 + \|V_n\|_{L^2}^2 \quad (118)$$

ainsi que $-2 \leq \mu_n \leq 0$ et $0 \leq \|V_n\|_{L^2}^2 \leq 1$. Comme $\tilde{\psi}_n$ (resp. $\tilde{\psi}_{n+1}$) est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de P_n (resp. P_{n+1}), $\tilde{\psi}_n(z)$ (resp. $\tilde{\psi}_{n+1}(z)$) est de signe constant sur $]0, L[$: ici, $\tilde{\psi}_n(z)$ (resp. $\tilde{\psi}_{n+1}(z)$) est strictement positif sur $]0, L[$. Par contre, les vecteurs propres associés aux autres valeurs propres de P_n changent de signe sur $]0, L[$ (voir la théorie des opérateurs de Sturm-Liouville [18, 19]). De plus, $\tilde{\psi}_n$, $\tilde{\psi}_{n+1}$ et V_n sont continues car éléments de $H_0^1([0, L])$. Il existe donc un intervalle non vide $]\alpha, \beta[\subset]0, L[$ sur lequel $\tilde{\psi}_n$ et $\tilde{\psi}_{n+1}$ sont strictement positives et sur lequel V_n est strictement négatif. Or, on a par construction $(1 + \mu_n)\tilde{\psi}_n = \tilde{\psi}_{n+1} - V_n$. En restreignant l'étude de ce terme à l'intervalle $]\alpha, \beta[$, on obtient donc $1 + \mu_n \geq 0$ soit donc en réutilisant (118)

$$0 \leq 1 + \mu_n \leq 1 \quad (119)$$

et $1 + \mu_n = \sqrt{1 - \|V_n\|_{L^2}^2}$, ce qui permet d'écrire également

$$0 \leq -\mu_n = 1 - \sqrt{1 - \|V_n\|_{L^2}^2} = \frac{\|V_n\|_{L^2}}{1 + \sqrt{1 - \|V_n\|_{L^2}^2}}$$

soit encore

$$0 \leq -\mu_n \leq \|V_n\|_{L^2} \leq 1. \quad (120)$$

D'où en utilisant (117) puis (120)

$$\|\tilde{\psi}_{n+1} - \tilde{\psi}_n\|_{L^2} \leq -\mu_n + \|V_n\|_{L^2} \leq 2\|V_n\|_{L^2}. \quad (121)$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$\left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right)V_n = \left(P_n - P_{n+1} + \frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n}\right)\tilde{\psi}_{n+1}.$$

On a alors pour tout ψ

$$\left\langle \left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right)V_n, \psi \right\rangle = \left\langle \left(P_n - P_{n+1} + \frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n}\right)\tilde{\psi}_{n+1}, \psi \right\rangle. \quad (122)$$

Choisissons maintenant $\psi = V_n$ dans (122). Puisque $V_n = \tilde{\psi}_{n+1} - (1 + \mu_n)\tilde{\psi}_n$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right) V_n, V_n \right\rangle &= \left\langle \left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right) \tilde{\psi}_{n+1} - (1 + \mu_n)\tilde{\psi}_n, V_n \right\rangle \\
&= \left\langle \left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right) \tilde{\psi}_{n+1}, V_n \right\rangle \\
&= \left\langle \left(P_n - P_{n+1} + \frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n}\right) \tilde{\psi}_{n+1}, V_n \right\rangle \\
&= \langle (P_n - P_{n+1})\tilde{\psi}_{n+1}, V_n \rangle + \left(\frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n}\right) \langle \tilde{\psi}_{n+1}, V_n \rangle.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left\langle \left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right) V_n, V_n \right\rangle = \left| \left\langle \left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right) V_n, V_n \right\rangle \right| \leq |\langle (P_n - P_{n+1})\tilde{\psi}_{n+1}, V_n \rangle| + \left| \frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n} \right| \cdot \|\tilde{\psi}_{n+1}\|_{L^2} \cdot \|V_n\|_{L^2}$$

soit encore

$$\left\langle \left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right) V_n, V_n \right\rangle \leq \frac{2K}{\Sigma_f} \|h_{n+1} - h_n\|_{\infty} \cdot \|V_n\|_{L^2} \quad (123)$$

en utilisant (115), (116) et le fait que $\|\tilde{\psi}_{n+1}\|_{L^2} = 1$. D'autre part, on a

$$\left\langle \left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right) V_n, V_n \right\rangle = \langle P_n V_n, V_n \rangle - \frac{\nu}{k_n} \|V_n\|_{L^2}^2$$

et la seconde valeur propre de P_n – notée λ_2 – vérifie

$$\lambda_2 = \inf_{\begin{cases} \tilde{\psi} \in (\mathcal{V}_1)^\perp, \\ \|\tilde{\psi}\|_{L^2} = 1 \end{cases}} \langle P_n \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \rangle$$

où \mathcal{V}_1 est l'espace propre associé à la première valeur propre $\frac{\nu}{k_n}$. D'où en particulier

$$\lambda_2 \|V_n\|_{L^2}^2 \leq \langle P_n V_n, V_n \rangle,$$

ce qui permet d'écrire

$$\beta_n \|V_n\|_{L^2}^2 \leq \left\langle \left(P_n - \frac{\nu}{k_n}\right) V_n, V_n \right\rangle$$

où β_n est la différence entre la seconde valeur propre et la première valeur propre de P_n . En utilisant (123), on obtient donc

$$\beta_n \|V_n\|_{L^2}^2 \leq \frac{2K}{\Sigma_f} \|h_{n+1} - h_n\|_{\infty} \cdot \|V_n\|_{L^2}$$

soit encore

$$\|V_n\|_{L^2} \leq \frac{2K}{\Sigma_f \beta_n} \|h_{n+1} - h_n\|_{\infty}. \quad (124)$$

On déduit alors de (121)

$$\|\tilde{\psi}_{n+1} - \tilde{\psi}_n\|_{L^2} \leq \frac{4K}{\Sigma_f \beta_n} \|h_{n+1} - h_n\|_{\infty}. \quad (125)$$

En utilisant le Lemme 4.2, on en déduit

$$\|\tilde{\psi}_{n+1} - \tilde{\psi}_n\|_{L^2} \leq \frac{4K}{\Sigma_f \beta_n} \sqrt{L} \|h_{n+1} - h_n\|_{H_{0,0}^1}. \quad (126)$$

On a d'autre part

$$SD_e(h'_{n+1} - h'_n) = \mathcal{P} \mathbb{E} \Sigma_f(\phi_n - \phi_{n-1}).$$

La définition (109) de la norme $H_{0,0}^1$ permet donc d'écrire

$$\|h_{n+1} - h_n\|_{H_{0,0}^1} = \frac{\mathcal{P}}{SD_e} \|\mathbb{E} \Sigma_f(\phi_n - \phi_{n-1})\|_{L^2} \quad (127)$$

(rappelons ici que $h_{n+1}(0) - h_n(0) = 0$). D'après le Lemme 4.2, on en déduit

$$\|h_{n+1} - h_n\|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{L} \mathcal{P}}{SD_e} \|\mathbb{E} \Sigma_f(\phi_n - \phi_{n-1})\|_{L^2}. \quad (128)$$

On a de plus

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \Sigma_f(\phi_n - \phi_{n-1}) &= \frac{\tilde{\phi}_n}{\int_0^L \tilde{\phi}_n(z) dz} - \frac{\tilde{\phi}_{n-1}}{\int_0^L \tilde{\phi}_{n-1}(z) dz} \\ &= u_n \tilde{\psi}_n - u_{n-1} \tilde{\psi}_{n-1} \\ &= u_n (\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_{n-1}) + u_n u_{n-1} \tilde{\psi}_{n-1} (u_{n-1}^{-1} - u_n^{-1}) \\ &= u_n (\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_{n-1}) + u_n u_{n-1} \tilde{\psi}_{n-1} \int_0^L (\tilde{\psi}_{n-1} - \tilde{\psi}_n) dx \end{aligned}$$

avec $u_n := \frac{1}{\int_0^L \tilde{\psi}_n(x) dx}$. On en déduit ainsi

$$\|\mathbb{E} \Sigma_f(\phi_n - \phi_{n-1})\|_{L^2} \leq \alpha(1 + \alpha \sqrt{L}) \|\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_{n-1}\|_{L^2} \quad (129)$$

en utilisant l'Hypothèse 4.2 sur la suite u_n et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le deuxième terme. Et en utilisant les inégalités (128) et (129), on obtient

$$\|h_{n+1} - h_n\|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{L} \mathcal{P}}{SD_e} \alpha(1 + \alpha \sqrt{L}) \|\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_{n-1}\|_{L^2}.$$

Finalement, en appliquant (125) pour majorer le terme $\|\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_{n-1}\|_{L^2}$, on obtient

$$\|h_{n+1} - h_n\|_{\infty} \leq \frac{4K}{\Sigma_f \beta_n} \cdot \frac{\sqrt{L} \mathcal{P}}{SD_e} \alpha(1 + \alpha \sqrt{L}) \|h_n - h_{n-1}\|_{\infty}.$$

D'où l'inégalité (111).

De manière similaire, en utilisant les inégalités (127) et (129), on obtient

$$\|h_{n+1} - h_n\|_{H_{0,0}^1} \leq \frac{\mathcal{P}}{SD_e} \alpha(1 + \alpha \sqrt{L}) \|\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_{n-1}\|_{L^2}.$$

Et en appliquant cette fois (126) pour majorer le terme $\|\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_{n-1}\|_{L^2}$, on obtient

$$\|h_{n+1} - h_n\|_{H_{0,0}^1} \leq \frac{4K}{\Sigma_f \beta_n} \cdot \frac{\sqrt{L} \mathcal{P}}{SD_e} \alpha(1 + \alpha \sqrt{L}) \|h_n - h_{n-1}\|_{H_{0,0}^1}.$$

D'où l'inégalité (112). \square

Preuve du Corollaire 4.1 : Sous la condition (113), la suite de fonction $(h_n - h_e)_{n \geq n_0}$ est contractante dans $L^\infty([0, L])$ (resp. $H_{0,0}^1([0, L])$) et donc convergente dans $L^\infty([0, L])$ (resp. $H_{0,0}^1([0, L])$). Donc, h_n est aussi convergente dans $L^\infty([0, L])$ (mais h_n n'est pas convergente dans $H_{0,0}^1([0, L])$ lorsque $h_e \neq 0$).

D'autre part, par l'inégalité (126) et l'égalité (127), on obtient que

$$\|\tilde{\psi}_{n+1} - \tilde{\psi}_n\|_{L^2} \leq \frac{4K}{\Sigma_f \beta_n} \cdot \frac{\sqrt{L} \mathcal{P}}{SD_e} \|\mathbb{E} \Sigma_f(\phi_n - \phi_{n-1})\|_{L^2}.$$

En utilisant (129), on obtient alors

$$\|\tilde{\psi}_{n+1} - \tilde{\psi}_n\|_{L^2} \leq \frac{K}{\beta_n} \|\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_{n-1}\|_{L^2}.$$

La suite $\tilde{\psi}_n$ est dès lors contractante dans $L^2([0, L])$, et donc convergente dans $L^2([0, L])$. Comme $L^2([0, L]) \subset L^1([0, L])$, on en déduit que u_n^{-1} est une suite convergente. Et comme $u_n \leq \alpha < +\infty$ (d'après l'Hypothèse 4.2), u_n converge vers une limite finie. Donc $\phi_n = (\mathbb{E} \Sigma_f)^{-1} u_n \tilde{\psi}_n$ converge dans $L^2([0, L])$ vers une fonction ϕ . On peut donc écrire que ϕ_n'' converge vers ϕ'' dans $H^{-2}([0, L])$.

On sait aussi que pour $n \geq n_0$, $\|h_{n+1} - h_n\|_{H_{0,0}^1} \leq (1 - \delta_0)^{n-n_0} \|h_{n_0+1} - h_{n_0}\|_{H_{0,0}^1}$. Donc, on obtient

$$\left| \frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n} \right| \leq \frac{K \sqrt{L}}{\Sigma_f} (1 - \delta_0)^{n-n_0} \|h_{n_0+1} - h_{n_0}\|_{H_{0,0}^1}$$

en utilisant (114)(a) et (116). La série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\nu}{k_{n+1}} - \frac{\nu}{k_n} \right)$ est donc convergente, ce qui permet d'affirmer que la suite k_n converge vers une limite que l'on note k_{eff} . Cette limite est par ailleurs strictement positive du fait du Lemme 4.1.

De plus, $\Sigma_a(h_n)$ converge vers $\Sigma_a(h)$ dans $L^\infty([0, L])$ car Σ_a est Lipschitz du fait de l'Hypothèse 4.1 et puisque h_n tend vers h dans $L^\infty([0, L])$. Comme le produit $L^\infty([0, L]) \times L^2([0, L])$ est continu dans $L^2([0, L])$, $\Sigma_a(h_n) \phi_n$ converge vers $\Sigma_a(h) \phi$ dans $L^2([0, L])$. Ainsi, on obtient que $-D\phi_n'' + \Sigma_a(h_n) \phi_n$ converge vers $-D\phi'' + \Sigma_a(h) \phi$ dans $H^{-2}([0, L])$.

Enfin, comme $-D\phi_n'' + \Sigma_a(h_n)\phi_n = \frac{\nu\Sigma_f}{k_n}\phi_n$ et que la suite k_n converge vers une limite non nulle k_{eff} , on obtient que $-D\phi'' + \Sigma_a(h)\phi = \frac{\nu}{k_{eff}}\phi$ par unicité de la limite.

Montrons ensuite la convergence dans $H_0^1([0, L])$ de la suite ϕ_n . On a, pour n et m , l'égalité

$$\begin{aligned} D \int_0^L (\phi_n' - \phi_m')^2 dx &= D \int_0^L \phi_n'(\phi_n' - \phi_m') dx - D \int_0^L \phi_m'(\phi_n' - \phi_m') dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{\nu\Sigma_f}{k_n} - \Sigma_a(h_n) \right) (\phi_n - \phi_m) dx - \int_0^L \left(\frac{\nu\Sigma_f}{k_m} - \Sigma_a(h_m) \right) (\phi_n - \phi_m) dx \\ &= \int_0^L \left[\left(\frac{\nu\Sigma_f}{k_n} - \frac{\nu\Sigma_f}{k_m} \right) + (\Sigma_a(h_m) - \Sigma_a(h_n)) \right] (\phi_n - \phi_m) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (114)(b), on en déduit que ϕ_n' est une suite de Cauchy dans $L^2([0, L])$. Comme on sait déjà que ϕ_n converge dans $L^2([0, L])$, on en déduit que ϕ_n est une suite de Cauchy dans $H_0^1([0, L])$. Par unicité de la limite, on en déduit qu'elle converge vers ϕ dans $H_0^1([0, L])$.

Finalement, comme ϕ_n converge vers ϕ dans $L^2([0, L])$, $\mathbb{E}\Sigma_f\phi_n$ converge vers $\mathbb{E}\Sigma_f\phi$ dans $L^2([0, L])$. Par ailleurs, on sait que $SD_e h_n'$ converge vers $SD_e h'$ dans $L^2([0, L])$ puisque $h_n - h_e$ converge vers $h - h_e$ dans $H_{0,0}^1([0, L])$. Donc, de $SD_e h_n' = \mathcal{P}\mathbb{E}\Sigma_f\phi_n$, on obtient

$$SD_e h' = \mathcal{P}\mathbb{E}\Sigma_f\phi.$$

On a donc montré que la fonction ϕ de $H_0^1([0, L])$ est une fonction propre de $P(h)$ associée à la valeur propre $\frac{\nu}{k_{eff}}$ et que h est solution de $SD_e h' = \mathcal{P}\mathbb{E}\Sigma_f\phi$, ce qui achève la preuve du corollaire. \square

5. Conclusion

Nous avons étudié dans ce travail le couplage monodimensionnel stationnaire dans un domaine borné $[0, L]$ correspondant à un cœur nucléaire (L étant la hauteur du cœur) de deux systèmes modélisant de façon simplifiée respectivement les équations de la thermohydraulique dans un fluide caloporteur et l'équation de la neutronique dans l'approximation par la diffusion à un groupe en énergie, le couplage intervenant en considérant d'une part que le terme source (qui est le dépôt d'énergie dû aux fissions) de l'équation de transport de l'enthalpie interne est proportionnel à la densité de flux de neutrons, et en considérant d'autre part que certains des coefficients de l'équation de diffusion pour les neutrons dépendent de l'enthalpie interne du fluide.

Ce faisant, nous avons identifié deux problèmes d'intérêt. Le premier problème est un problème de recherche de l'enthalpie interne en $x = L$ (enthalpie de sortie du cœur) connaissant l'enthalpie interne en $x = 0$ (enthalpie en entrée du cœur). La puissance du cœur est alors une inconnue du problème, et sa recherche est équivalente à la recherche de l'enthalpie de sortie. Ce premier problème serait plutôt l'objectif de personnes surtout habituées aux équations de la thermohydraulique. Le deuxième problème est un problème de recherche d'un coefficient noté k_{eff} et appelé coefficient multiplicateur, coefficient par lequel on doit diviser la section efficace de fission pour obtenir une solution du problème couplé à enthalpie de sortie imposée. La puissance du cœur est alors une donnée du problème. Ce second problème serait plutôt l'objectif de personnes surtout habituées aux équations de la neutronique.

Dans un cadre très général, ces deux problèmes se ramènent à une équation différentielle ordinaire non linéaire autonome avec un paramètre qui est l'enthalpie de sortie dans le premier cas et le coefficient multiplicateur k_{eff} dans le deuxième cas. Nous montrons alors plusieurs résultats théoriques (*e.g.* existence et unicité d'une solution pour le premier problème lorsque la hauteur du cœur L est supérieure à une hauteur minimale L_* ; existence et unicité d'une solution pour le second problème pour toute hauteur du cœur L , k_{eff} appartenant à un intervalle $]0, k_\infty[$ où k_∞ est le coefficient multiplicateur en milieu infini).

Des calculs explicites (utilisant les intégrales de Jacobi) sont possibles pour les deux problèmes lorsque la section efficace d'absorption dépend de l'enthalpie interne de façon affine. Ces calculs explicites permettent de vérifier les résultats théoriques obtenus dans le cas général. De plus, dans le cas de la recherche du k_{eff} (qui correspond au second problème), ces calculs explicites corroborent des résultats numériques obtenus avec un algorithme de couplage thermohydraulique–neutronique classique, algorithme basé sur une recherche à chaque itération de la plus petite valeur propre d'un opérateur linéaire déduit du couplage non linéaire.

Enfin, nous analysons l'algorithme de couplage utilisé pour calculer le k_{eff} lorsque la section efficace de fission est constante, le coefficient de diffusion et la section efficace d'absorption dépendant de l'enthalpie. Nous montrons ainsi que les conditions dans lesquelles on sait démontrer la convergence de cet algorithme sont extrêmement fortes, et que ces conditions suffisantes de convergence sont d'autant plus fortes que le couplage est important.

La suite de ce travail consistera à étudier numériquement ce modèle de couplage en instationnaire et en 2D/3D, à complexifier le modèle de thermohydraulique en utilisant un modèle bas Mach de thermohydraulique cœur [10, 11, 12] et à enrichir également le modèle de diffusion utilisé pour la neutronique en ajoutant plusieurs groupes en énergie. L'étude de l'algorithme de couplage lorsque la section efficace de fission dépend de l'enthalpie pourra aussi être envisagée ainsi qu'une amélioration de celui-ci lorsque le couplage est fort.

Remerciements : Ce travail a été financé en 2014 et en 2015 par le défi NEEDS du CNRS que nous remercions. Nous remercions également Jean Ragusa qui nous a fourni un code MATLAB permettant de résoudre le problème de recherche de k_{eff} pour notre problème de couplage simplifié thermohydraulique-neutronique ainsi qu'Emmanuel Audusse qui nous a aidé à réaliser certains calculs à l'aide de ce code.

References

- [1] A.-M. Baudron, N. Crouzet, C. Döderlein, A. Geay, J.-J. Lautard, E. Richebois, E. Royer, P. Siréta, Unstructured 3D MINOS/FLICA4 coupling in SALOME. Application to JHR transient analysis International Conference on the Physics of Reactors "Nuclear Power: A Sustainable Resource", Casino-Kursaal Conference Center, Interlaken, Switzerland, September 14-19, 2008. [2](#)
- [2] G. Bruna, F. Dubois, F. Fouquet, E. Mury, B. Normand, A. Sargeni, F. Scarcelli, R. Touillo, J.-C. Le Pallec, E. Hourcade, E. Richebois, C. Poinot-Salanon, HEMERA: a 3D computational chain for PWR safety analysis International Conference on the Physics of Reactors "Nuclear Power: A Sustainable Resource", Casino-Kursaal Conference Center, Interlaken, Switzerland, September 14-19, 2008. [2](#)
- [3] J.-C. Le Pallec, Étude bibliographique sur les schémas en temps dans les modélisations couplés en physique des réacteurs, Technical report DEN/DANS/DM2S/SERMA/LPEC/NT/15-5778/A, CEA, 2015. [2](#)
- [4] N. Capellan, Couplage 3D neutronique thermohydraulique. Développement d'outils pour les études de sûreté des réacteurs innovants, Thèse de doctorat de l'Université d'Orsay. [2](#)

- [5] J. Ragusa, A. Siegel, J.-M. Ruggieri, Neutronic / thermalhydraulic coupling techniques for sodium cooled fast reactor simulations, Technical report DE-FC07-07ID14837, NERI Final Progress Report, 2010. [2](#)
- [6] F. Vaïana, Couplage Neutronique–Thermohydraulique. Application au Réacteur à Neutrons Rapides Refroidis à l’Hélium, Thèse de doctorat de l’Institut Polytechnique de Grenoble . [2](#), [3](#), [34](#)
- [7] H. Wu, Rizwan-uddin, A tightly coupled scheme for neutronics and thermalhydraulics using open-source software, *Annals of Nuclear Energy* 87 (2016) 16–22. [2](#), [4](#)
- [8] N. Greiner, Prise en compte d’un couplage fin neutronique–thermique dans les calculs d’assemblage pour les réacteurs à eau pressurisée, Mémoire de maîtrise de l’École Polytechnique de Montréal . [2](#)
- [9] J. Shan, W. Chen, B. Thee, L. Leung, Coupled neutronics/thermalhydraulics analysis of CANDUSCWR fuel channel, *Annals of Nuclear Energy* 37 (2010) 58–65. [2](#)
- [10] M. Bernard, S. Dellacherie, G. Faccanoni, B. Grec, O. Lafitte, T.-T. Nguyen, Y. Penel, Study of low Mach nuclear core model for single-phase flow, in: *ESAIM:Proc*, vol. 38, 118–134, 2012. [2](#), [5](#), [44](#)
- [11] M. Bernard, S. Dellacherie, G. Faccanoni, B. Grec, Y. Penel, Study of a low Mach nuclear core model for two-phase flows with phase transition I: stiffened gas law, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 48 (2014) 1639–1679. [2](#), [5](#), [44](#)
- [12] S. Dellacherie, On a low Mach nuclear core model, *ESAIM:PROC* 35 (2012) 79–106. [2](#), [5](#), [44](#)
- [13] P. Reuss, in: *Précis de neutronique, Génie atomique*, EDP Sciences, 2003. [2](#), [4](#), [9](#), [15](#)
- [14] M. Pope, V. Mousseau, Accuracy and Efficiency of a Coupled Neutronics and Thermal Hydraulics Model, Technical report INL/CON-07-12487, Idaho National Report, paru aussi dans les actes de la conférence NURETH-12, 2007. [2](#)
- [15] J. Erell, O. Lafitte, Différents modèles analytiques ou simplifiés pour le couplage Thermohydraulique-Neutronique, Technical report DEN/DANS/DM2S/SERMA/LLPR/NT/15-5884/A, CEA, 2015. [2](#), [34](#)
- [16] D. Kotlyar, E. Shwageraus, Numerically stable Monte Carlo-burnup-thermal hydraulic coupling schemes, *Annals of Nuclear Energy* 63 (2014) 371–381. [3](#)
- [17] D. Kotlyar, E. Shwageraus, Monitoring and preventing numerical oscillations in 3D simulations with coupled Monte Carlo codes, *Annals of Nuclear Energy* 71 (2014) 198–205. [3](#)
- [18] E. Coddington, N. Levinson, in: *Theory of ordinary differential equations*, International series in pure and applied mathematics, chap. 8, McGraw-Hill, 1955. [7](#), [21](#), [22](#), [35](#), [39](#)
- [19] R. Dautray, J.-L. Lions, in: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol. Volume 3 Spectral Theory and Applications, Springer, 2000. [7](#), [21](#), [22](#), [35](#), [39](#)
- [20] S. Dellacherie, O. Lafitte, Study of a simplified time dependant neutronic model In preparation. [7](#)
- [21] M. Abramovitz, I. Stegun, in: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, vol. 55 of *Applied Mathematics Series*, National Bureau of Standards, 1972. [27](#)