



Algorithme d'interpolation polynomiale, issu du triangle de Pascal.

Aloïs Cusey

► To cite this version:

Aloïs Cusey. Algorithme d'interpolation polynomiale, issu du triangle de Pascal. . 2016. hal-01261380v3

HAL Id: hal-01261380

<https://hal.science/hal-01261380v3>

Preprint submitted on 6 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

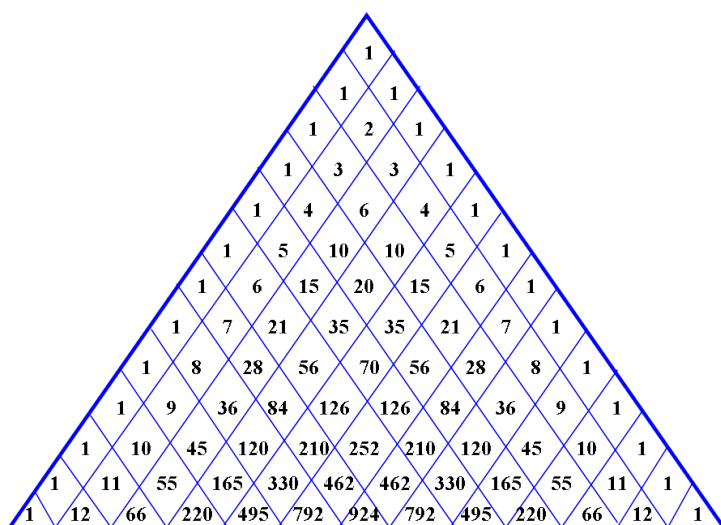
Algorithme d'interpolation polynomiale, issu du triangle de Pascal.

Aloïs Cusey

Définition:

Soit la fonction $\mathcal{L}(X(n)) = \sum_{p=0}^{p=n-1} \left[\binom{n-1}{p} X(n-p) (-1)^p \right]$

avec $X(n)$ une suite numérique quelconque et $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial tel que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$ pouvant être déterminé à partir du triangle de Pascal.



Le triangle de Pascal (ou de Yang Hui, pour nos amis chinois)

Exemple: $\mathcal{L}(X(4)) = X(4) - 3X(3) + 3X(2) - X(1)$

La fonction a pour propriétés : $\mathcal{L}(X(1)) = X(1)$, $\mathcal{L}(A(n) + B(n)) = \mathcal{L}(A(n)) + \mathcal{L}(B(n))$ et $\mathcal{L}(aX(n)) = a\mathcal{L}(X(n))$

Propriétés de monômes et polynômes:

Monôme

Soit le monôme de degré $d \geq 0$, $M(n) = n^d$

On obtient $\mathcal{L}(M(n)) = 0$ pour tout $n \geq d+2$

On a les propriétés suivantes: $\mathcal{L}(M(d+1)) = d!$, $\mathcal{L}(M(d)) = \frac{(d+1)!}{2}$

Polynôme

Soit un polynôme de degré $d \geq 0$, $P(n) = \sum_{q=0}^{q=d} a_q n^q$

On a $\mathcal{L}(P(n)) = 0$ pour tout $n \geq d+2$

On a les propriétés suivantes: $\mathcal{L}(P(d+1)) = d! a_d$, $\mathcal{L}(P(d)) = \frac{(d+1)!}{2} a_d + (d-1)! a_{d-1}$

Algorithme d'interpolation polynomiale:

Soit une suite $X(n)$ dont on connaît les n termes. On souhaite découvrir si cette suite peut s'écrire sous forme d'un polynôme de degré $d < n$, et définir ce dernier, si il existe.

1) On calcule les fonctions $\mathcal{L}(X(n))$ pour toutes les valeurs de 1 à n .

2) On observe si à partir d'une valeur k , tous les $\mathcal{L}(X(n))$ valent 0. Si ce n'est pas le cas, la suite ne peut s'écrire sous forme de polynôme de degré $d < n$.

Dans le cas affirmatif, cela suggère la présence d'un polynôme de degré $d=k-2$.

3) On résout le système de $(d+1)$ équations linéaires suivant (par la méthode de l'élimination de Gauss-Jordan, par exemple):

$$L1: a_d = \frac{\mathcal{L}(X(d+1))}{d!}$$

$$L2: a_{d-1} = \frac{\mathcal{L}(X(d))}{(d-1)!} - \frac{d(d+1)}{2} a_d$$

$$L3: \sum_{p=0}^{p=d} a_p (d-1)^p = X(d-1)$$

$$L4: \sum_{p=0}^{p=d} a_p (d-2)^p = X(d-2)$$

•
•
•

$$L(d+1): \sum_{p=0}^{p=d} a_p = X(1)$$

Exemple

→ Soit la suite $X(n)$, de valeurs 1; 2; 5; 10; 17; 26; 37 pour n valant de 1 à 7 (7 termes connus)

On trouve $\mathcal{L}(X(1))=1$, $\mathcal{L}(X(2))=1$, $\mathcal{L}(X(3))=2$, $\mathcal{L}(X(4))=\mathcal{L}(X(5))=\mathcal{L}(X(6))=\mathcal{L}(X(7))=0$

Les $\mathcal{L}(X(n))$ valent 0 à partir de $n=4$, par conséquent, le polynôme sera de degré $d=4-2=2$

On résout le système de 3 ($=d+1$) équations linéaires suivant:

$$L1: a_2 = \frac{\mathcal{L}(X(3))}{2!} = \frac{2}{2} = 1$$

$$L2: a_1 = \frac{\mathcal{L}(X(2))}{1!} - \frac{2(2+1)}{2} a_2 = 1 - 3 \times 1 = -2$$

$$L3: a_0 = X(1) - a_2 - a_1 = 1 - 1 - (-2) = 2$$

Ainsi, $X(n) = n^2 - 2n + 2$ pour $1 \leq n \leq 7$

Autres propriétés:

Fonction puissance, d'exposant n

Soit une fonction de la forme $X(n) = X^n$, X réel

On a alors $\mathcal{L}(X(n)) = X(X-1)^{n-1}$

On observe que pour $X(n) = 2^n$, $\mathcal{L}(X(n)) = 2$, constante

Fonction inverse

Pour $X(n) = 1/n$, on a alors $\mathcal{L}(X(n)) = \frac{1}{n} (-1)^{n+1}$

Algorithme d'interpolation, étendu:

Dans un premier temps, on observe si à partir d'une valeur $n=k$, les $\mathcal{L}(X(n))$ ont un comportement représentatif d'une fonction puissance d'exposant n , ou inverse, dont on détermine son équation, $F(n)$. On calcule les valeurs $\mathcal{L}'(X(n)) = \mathcal{L}(X(n)) - \mathcal{L}(F(n))$ pour chaque terme connu de $X(n)$. On passe ensuite aux étapes de l'algorithme d'interpolation polynomiale afin de déterminer le polynôme $P(n)$ de degré $d=k-2$.

L'équation complète sera $X(n) = F(n) + P(n)$

Exemple

→ Soit la suite $X(n)$ de valeurs 4; 11; 32; 91; 260; 755; 2224 pour n allant de 1 à 7 (7 termes connus)

On trouve $\mathcal{L}(X(1))=4$, $\mathcal{L}(X(2))=7$, $\mathcal{L}(X(3))=14$, $\mathcal{L}(X(4))=24$, $\mathcal{L}(X(5))=48$, $\mathcal{L}(X(6))=96$, $\mathcal{L}(X(7))=192$

On remarque que les $\mathcal{L}(X(n))$ valent $\mathcal{L}(F(n)) = 3 \times 2^{n-1}$ à partir de $n=4$, ce qui suggère $F(n) = 3^n$. Le polynôme sera de degré $d=4-2=2$.

On calcule les $\mathcal{L}'(X(n)) = \mathcal{L}(X(n)) - \mathcal{L}(F(n))$.

On trouve $\mathcal{L}'(X(1))=1$, $\mathcal{L}'(X(2))=1$, $\mathcal{L}'(X(3))=2$, $\mathcal{L}'(X(4))=\mathcal{L}'(X(5))=\mathcal{L}'(X(6))=\mathcal{L}'(X(7))=0$ résultat déjà analysé lors de l'exemple vu plus haut et qui nous donne ainsi $P(n) = n^2 - 2n + 2$ pour $1 \leq n \leq 7$.

Le résultat final est donc $X(n) = F(n) + P(n) = 3^n + n^2 - 2n + 2$ pour $1 \leq n \leq 7$.