



**HAL**  
open science

# Contrôle optimal pour l'équation de diffusion à l'aide de la PGD

Pierre Joyot, Nicolas Bur, Pierre Villon, Francisco Chinesta, Joseph Canou

► **To cite this version:**

Pierre Joyot, Nicolas Bur, Pierre Villon, Francisco Chinesta, Joseph Canou. Contrôle optimal pour l'équation de diffusion à l'aide de la PGD. 12e colloque national en calcul des structures, May 2015, Giens, France. hal-01254369

**HAL Id: hal-01254369**

**<https://hal.science/hal-01254369>**

Submitted on 12 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

# Contrôle optimal pour l'équation de diffusion à l'aide de la PGD



Giens 2015



P. Joyot<sup>(a,\*)</sup>, N. Bur<sup>(a)</sup>, P. Villon<sup>(b)</sup>, F. Chinesta<sup>(c)</sup>, J. Canou<sup>(a)</sup>

<sup>(a)</sup> ESTIA-Recherche, Technopôle Izarbel, 64210 Bidart, France

<sup>(b)</sup> UTC, Département GSM, Centre de Recherches de Royallieu, CS 60319, 60203 Compiègne cedex, France

<sup>(c)</sup> GeM Institute, École Centrale de Nantes, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes cedex 3, France

<sup>(\*)</sup> p.joyot@estia.fr

## Problématique

Nous considérons le problème de contrôle optimal gouverné par une équation de diffusion sur le domaine  $\Omega$  :

$$\min_u J(u(x, z)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x, z) - y_d(x, z))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} u(x, z)^2 dx$$

contraint par

$$\begin{cases} -\Delta y(x, z) = u(x, z) + f(x, z) & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où  $y$  est la variable d'état,  $y_d$  la consigne,  $u$  la commande et  $\alpha > 0$ .

Conditions d'optimalités

$$\begin{aligned} -\Delta y(x, z) - \frac{1}{\alpha} p(x, z) &= f(x, z) \\ -\Delta p(x, z) + y(x, z) &= y_d(x, z) \\ p(x, z) &= \alpha u(x, z) \end{aligned}$$

avec  $y = 0$  et  $p = 0$  sur  $\Gamma$

Forme faible des conditions d'optimalités

$$\int_{\Omega} \nabla p^* \cdot \nabla p dx + \int_{\Omega} p^* y dx = \int_{\Omega} p^* y_d dx \quad \forall p^*$$

$$\int_{\Omega} \nabla y^* \cdot \nabla y dx - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} y^* p dx = \int_{\Omega} y^* f dx \quad \forall y^*$$

## Formulation PGD

L'espace peut se séparer suivant les coordonnées  $x, z$ , i.e.  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_z$ . Le vecteur inconnu  $\Psi$  qui regroupe à la fois les valeurs nodales de  $p$  et de  $y$ , prend la forme

$$\Psi = \begin{bmatrix} Y \\ P \end{bmatrix} = \sum_{\alpha} \begin{bmatrix} Y_x^{\alpha} \otimes Y_z^{\alpha} \\ P_x^{\alpha} \otimes P_z^{\alpha} \end{bmatrix}$$

Ainsi la formulation PGD du système est donnée par la définition suivante de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  :

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^6 A_x^j \otimes A_z^j$$

$$\begin{aligned} A_x^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_x^p \end{bmatrix} & A_x^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_x^p \end{bmatrix} \\ A_x^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_x^p \end{bmatrix} & A_x^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_x^y \end{bmatrix} \\ A_x^5 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} M_x^{yp} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_x^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_x^7 &= \begin{bmatrix} 0 & M_x^{yp} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_x^8 &= \begin{bmatrix} M_x^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_x^9 &= \begin{bmatrix} M_x^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_x^{10} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_x^{py} & 0 \end{bmatrix} \\ A_x^{11} &= \begin{bmatrix} K_x^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_x^{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_x^{13} &= \begin{bmatrix} K_x^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_x^{14} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_x^{py} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B} = \sum_{j=1}^2 B_x^j \otimes B_z^j \quad \left| \quad \begin{aligned} B_x^1 &= \begin{bmatrix} M_x^y F \\ 0 \end{bmatrix} & B_x^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ M_x^p Y_d \end{bmatrix} \\ B_z^1 &= \begin{bmatrix} M_z^y F \\ 0 \end{bmatrix} & B_z^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ M_z^p Y_d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Formulation PGD paramérique

Nous considérons maintenant que la consigne s'écrit  $\beta y_d$  ou  $\beta$  est un paramètre. Nous allons construire la solution du problème pour une plage de valeurs de  $\beta$  définie par le domaine  $\Omega_{\beta}$ . Le vecteur solution s'écrit maintenant :

$$\Psi = \sum_{\alpha} \begin{bmatrix} Y_x^{\alpha} \otimes Y_z^{\alpha} \otimes Y_{\beta}^{\alpha} \\ P_x^{\alpha} \otimes P_z^{\alpha} \otimes P_{\beta}^{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_x \otimes Y_z \otimes Y_{\beta} \\ P_x \otimes P_z \otimes P_{\beta} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont maintenant définis par

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^6 A_x^j \otimes A_z^j \otimes A_{\beta}^j$$

avec

$$\begin{aligned} A_{\beta}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{\beta}^p \end{bmatrix} & A_{\beta}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{\beta}^p \end{bmatrix} & A_{\beta}^3 &= \begin{bmatrix} 0 & M_{\beta}^{py} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{\beta}^4 &= \begin{bmatrix} M_{\beta}^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_{\beta}^5 &= \begin{bmatrix} M_{\beta}^y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & A_{\beta}^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{\beta}^{py} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B} = \sum_{j=1}^2 B_x^j \otimes B_z^j \otimes B_{\beta}^j$$

avec

$$B_{\beta}^1 = \begin{bmatrix} M_{\beta}^y F \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{\beta}^p Y_{\beta} \end{bmatrix}$$

où

$$\overline{M}_{\beta}^y = \int_{\Omega_{\beta}} x_{\beta} N_{\beta}^y N_{\beta}^{yT} dx_{\beta}$$

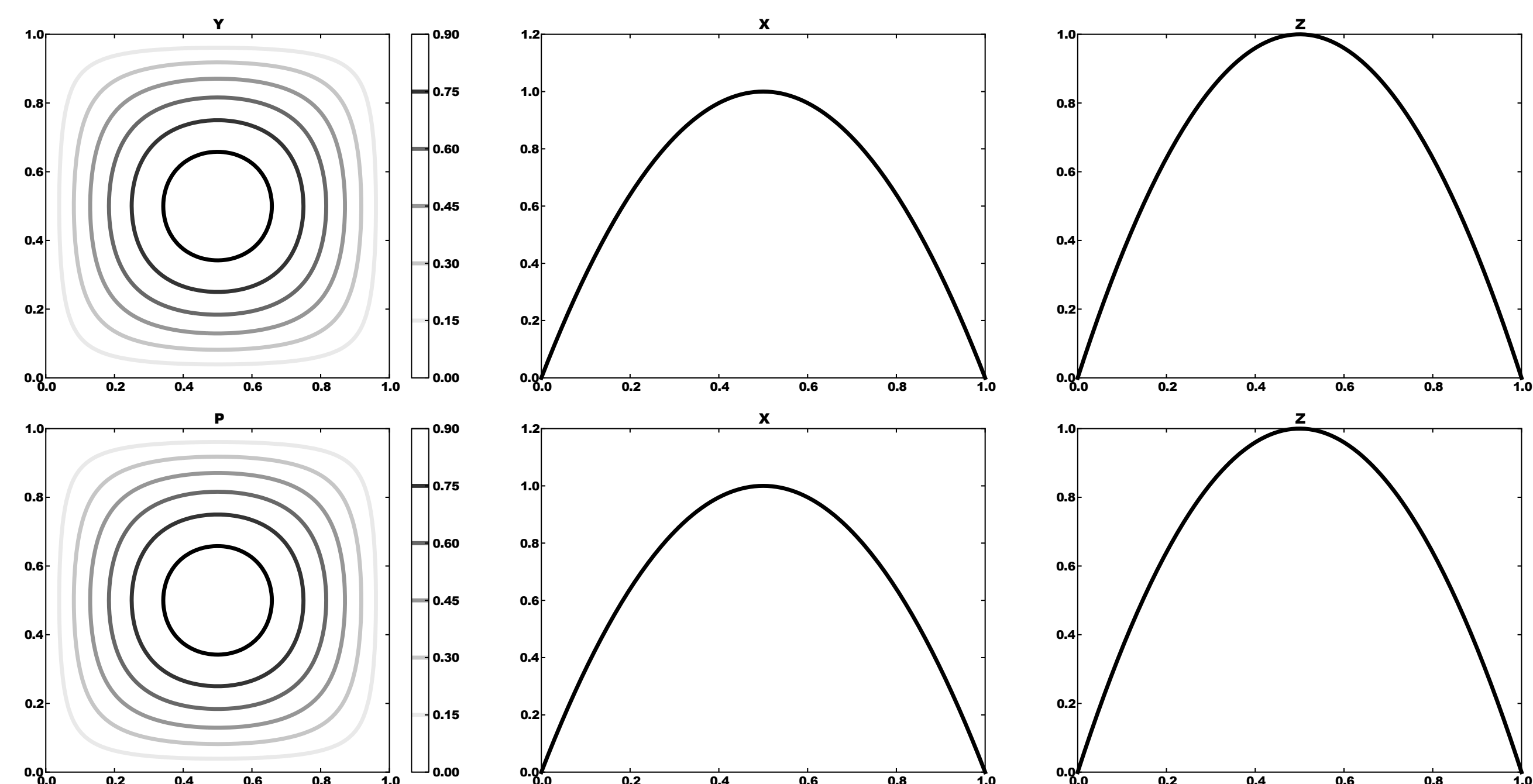
## Résultats numériques

Nous validons notre démarche sur l'exemple suivant :

$$f(x, z) = -\frac{1}{\alpha} 16x(1-x)z(1-z) + 32x(1-x) + 32z(1-z)$$

$$y_d(x, z) = 16x(1-x)z(1-z) + 32x(1-x) + 32z(1-z)$$

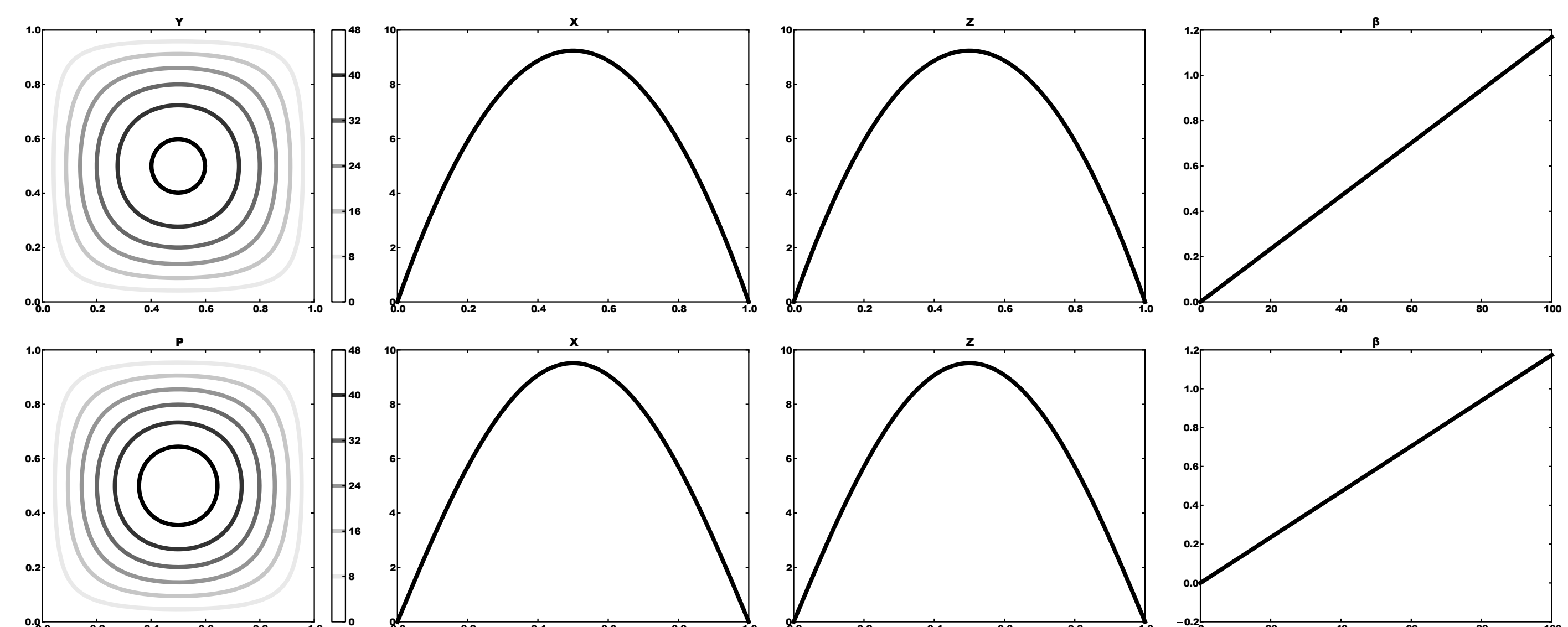
dans ces conditions la solution de notre problème est  $y(x, z) = p(x, z) = 16x(1-x)z(1-z)$ . Le résultat est indépendant de  $\alpha$ .



Dans le cas paramétrique, nous prenons

$$y_d(x, z) = \beta (16x(1-x)z(1-z) + 32x(1-x) + 32z(1-z))$$

avec  $\alpha = 0.05$



Dans tous les cas la solution exacte est obtenue par le calcul d'un seul couple.