



**HAL**  
open science

# Arithmétique et raisonnement mathématique en classe de Terminale C et E au Gabon

Véronique Battie

► **To cite this version:**

Véronique Battie. Arithmétique et raisonnement mathématique en classe de Terminale C et E au Gabon. RADISMA Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques, 2015, 12. hal-01253308

**HAL Id: hal-01253308**

**<https://hal.science/hal-01253308>**

Submitted on 17 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## ARITHMETIQUE ET RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE EN CLASSE DE TERMINALE C&E AU GABON

Véronique BATTIE

[vbattie@univ-lyon1.fr](mailto:vbattie@univ-lyon1.fr)

Laboratoire S2HEP – EA4148

Bâtiment " La Pagode" - 38 Boulevard Niels Bohr - Campus de la DOUA

Université Claude Bernard Lyon 1

43, Boulevard du 11 Novembre 1918

69622 Villeurbanne Cedex

*Résumé* : En s'appuyant sur l'exploitation d'un outil épistémologique spécifique au raisonnement en arithmétique, cet article vise à présenter les productions d'élèves gabonais de terminale C&E engagés dans l'étude de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Cette présentation est précédée d'une lecture détaillée du programme gabonais d'arithmétique de la classe de terminale C&E.

*Abstract*: This paper is based on an epistemological analysis of the research of Gabonese Grade 12-pupils involved in the study of irrationality of  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). We introduce this analysis by characterizing number theory in the Gabonese grade12-curriculum.

*Mots-clés* : didactique des mathématiques, arithmétique, preuve, terminale C&E, Gabon.

*Keywords*: didactic of mathematics, number theory, proof, grade 12, Gabon.

### Remerciements

Nous remercions vivement Madame Le Proviseur du Lycée JOSEPH AMBOUROUE AVARO, Mme Marie Claire OGOULA OZOUME, pour nous avoir ouvert les portes de son établissement ainsi que M. Léonard BALOGOUN, Chef du Département de Mathématiques, pour le temps qu'il a consacré à notre projet. Nous sommes très reconnaissante envers M. Boris ZOUGNON grâce à qui nous avons pu intervenir en toute liberté en classe de Terminale C&E. Je remercie chaleureusement ses élèves qui se sont pleinement investis dans les recherches et échanges que nous leur avons proposés.

### **INTRODUCTION**

En janvier 2011, nous sommes intervenue à plusieurs reprises auprès des élèves de la classe de terminale C&E du Lycée JOSEPH AMBOUROUE AVARO à Port-Gentil au Gabon. Il s'agissait des premières séances d'arithmétique (au sens de théorie élémentaire des nombres) et nous avons pu les mener en présence de leur enseignant sans qu'il n'intervienne. Les recherches de chaque groupe d'élèves gabonais ont pu être observées à partir de leurs productions communes et de leurs brouillons individuels.

Nos analyses, tant *a priori* qu'*aposteriori*, ont été menées en termes de dimensions organisatrice et opératoire (Battie, 2009). Dans le raisonnement en arithmétique, nous distinguons deux dimensions complémentaires (et en interaction dans l'action de la

recherche) que nous qualifions respectivement *dimension organisatrice* et *dimension opératoire*. La dimension organisatrice s'identifie au raisonnement global (on pourrait parler du « squelette » de la démonstration) qui traduit la mise en acte d'une visée. Par exemple, outre les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde, on identifie au niveau de cette composante le raisonnement par récurrence (et autres formes d'exploitation de la propriété de bon ordre de l'ensemble  $\mathbb{N}$ ), la réduction à l'étude d'un nombre fini de cas et le jeu d'extension-réduction (propre aux anneaux factoriels). La dimension opératoire quant à elle est relative à tout ce qui relève des manipulations calculatoires (au sens le plus large) opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice). Nous identifions par exemple les formes de représentation choisies pour les objets, l'utilisation de théorèmes-clefs, les manipulations algébriques et tous les traitements relatifs à l'articulation entre l'ordre divisibilité (anneau  $\mathbb{Z}$ ) et l'ordre naturel  $\leq$  (ensemble bien ordonné  $\mathbb{N}$ ).

L'enjeu de cet article est double. Avant de présenter notre expérimentation, il nous semble pertinent de présenter le programme d'arithmétique gabonais de la classe de terminale C&E. Ainsi, dans une première partie, nous décrivons le programme gabonais. Il est apparu méthodologiquement intéressant de croiser cette lecture avec une brève étude comparative avec les évolutions récentes du programme d'arithmétique français. Dans un second temps, nous nous centrons sur deux séances menées en classe de terminale C&E. Nous avons proposé aux élèves d'étudier l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et nous donnons au lecteur les éléments-clefs des analyses *a priori* et *a posteriori* de leurs productions.

## I. ARITHMETIQUE EN TERMINALE C&E DANS LE PROGRAMME OFFICIEL GABONAIS

La référence pour l'étude du programme actuel d'arithmétique est le texte intitulé « Programmes et commentaires, Mathématiques, Terminales C&E, 2002 » publié par le Ministère de l'Education Nationale<sup>1</sup>. Dans ce programme, l'arithmétique est une nouveauté, « La principale nouveauté est le chapitre sur l'arithmétique », à laquelle on associe une « démarche spécifique », au même titre que les probabilités, les nombres complexes et les coniques, mais sans que la nature de cette spécificité ne soit précisée. A noter que ce domaine n'est pas mentionné lorsque les auteurs soulignent l'importance de « faire ressortir l'unité » de ce programme. En particulier, il n'est pas fait référence à l'arithmétique lorsqu'il s'agit « d'étudier des situations discrètes » dans le cadre de l'analyse via les suites numériques. Soulignons que le raisonnement par récurrence apparaît exclusivement dans la partie propre aux suites numériques.

L'algèbre, en tant qu'étude des structures algébriques et des ensembles de nombres (Ravel, 2003), apparaît comme l'habitat<sup>2</sup> de l'arithmétique : « En algèbre, deux nouveaux chapitres apparaissent : l'étude des nombres complexes [...] et l'arithmétique ». Les principales niches<sup>3</sup> de l'arithmétique seraient ainsi en étroite relation avec l'habitat qu'elle occupe : étudier les structures algébriques (niche structurelle) et étudier les ensembles de nombres

<sup>1</sup> Dans la suite du texte, les citations entre guillemets sans référence sont extraites de ce document.

<sup>2</sup> « Un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour de [lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où l'on trouve [cet objet] et les objets avec lesquels [il] entre en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis, regarder en chacun de [ses] habitats, la niche écologique qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. » (Artaud, 1997)

<sup>3</sup> Voir note précédente.

(niche théorie des nombres). Cela semble être confirmé avec l'un des tableaux synoptiques qui sont donnés dans la première partie « Objectifs généraux » du programme :

<b>ENSEMBLES DE NOMBRES</b>	
<b>Nombres complexes</b> [...]	<b>Arithmétique</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Numération décimale et binaire</li> <li>• Anneau <math>Z</math></li> <li>• Sous-groupes de <math>Z</math></li> <li>• Division euclidienne dans <math>N</math> et <math>Z</math></li> <li>• Congruence, anneau <math>Z/nZ</math></li> <li>• Nombres premiers, corps <math>Z/pZ</math></li> <li>  Décomposition d'un entier naturel en produits de facteurs premiers (existence et unicité)</li> <li>• PGCD et PPCM</li> </ul>

Tableau 1

On serait donc tenté de mettre ce programme en parallèle avec le programme français de la classe de terminale C de la période de la réforme des mathématiques modernes (1971-1983) qui, en référence aux travaux de Ravel (2003), était axé sur l'étude des structures algébriques (thème transversal important dans le programme du lycée à cette époque) mises en œuvre en arithmétique. Néanmoins, en approfondissant la lecture du programme gabonais, la niche structurelle s'évapore ; nous reproduisons ci-dessous le tableau relatif aux « Contenus et commentaires » pour l'arithmétique :

<b>ARITHMETIQUE</b>	
<b>Contenus</b>	<b>Capacités attendues</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Les ensembles <math>N</math> et <math>Z</math>. Propriétés Addition, relations d'ordres Propriété d'Archimède</li> <li>• Diviseurs d'un nombre entier relatif</li> <li>• Multiples d'un entier relatif Ensemble <math>nZ</math></li> <li>• Congruence modulo <math>n</math>, <math>n</math> entier naturel</li> <li>• Division euclidienne dans <math>N</math>, dans <math>Z</math> Exercice TP Crible d'Eratosthène Système de numération Exercice TP Cryptographie</li> <li>• Nombres premiers, décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers : existence et unicité</li> <li>• PGCD de deux entiers naturels Divisions successives Algorithme d'Euclide Propriétés PGCD de plusieurs entiers naturels Nombres premiers entre eux</li> <li>• PPCM de deux entiers naturels non nuls Propriétés Relation entre PGCD et PPCM</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Trouver les diviseurs d'un nombre</li> <li>2. Reconnaître qu'un nombre est un multiple d'un entier relatif. Trouver les multiples d'un nombre</li> <li>3. Vérifier que deux entiers naturels sont congrus modulo <math>n</math>, <math>n</math> entier naturel</li> <li>4. Effectuer la division euclidienne d'un entier relatif <math>a</math> par un entier relatif non nul <math>b</math></li> <li>5. Connaître et utiliser les règles de divisibilité</li> <li>6. Etablir le crible d'Eratosthène. Décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers.</li> <li>7. Calculer le PGCD de deux entiers naturels. Démontrer que deux entiers naturels sont premiers entre eux.</li> <li>8. Calculer le PPCM de deux entiers naturels</li> <li>9. Utiliser le théorème de Gauss. Résoudre une équation du 1<sup>er</sup> degré dans <math>Z \times Z</math>.</li> <li>10. Connaître et utiliser les propriétés de congruence Détermination des restes.</li> <li>11. Connaître et utiliser les propriétés du PPCM et PGCD</li> </ol>

PPCM de plusieurs entiers naturels non nuls • Théorème de Gauss. Théorème de Bézout Théorème : $p$ est premier si et seulement si tout élément non nul de $Z/pZ$ est inversible.	12. Passer d'un système de numération à un autre 13. Connaître et utiliser le théorème de Bézout 14. Connaître et utiliser l'algorithme d'Euclide
--	---

Tableau 2

Contrairement au tableau 1, aucune structure algébrique n'est mentionnée dans le tableau 2. On lit en particulier en commentaires de ce tableau : « On évitera de parler des structures d'anneaux et de corps ».

Poursuivons en consultant le programme français de la classe de terminale scientifique (enseignement de spécialité) en vigueur lors de nos interventions au lycée JOSEPH AMBOUROUE AVARO<sup>4</sup>. On constate que l'ensemble de ses contenus est inclus dans celui des contenus du programme gabonais :

Contenus	Modalités de mise en œuvre
Divisibilité dans $Z$ . Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Congruences dans $Z$ . Entiers premiers entre eux.	On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.
Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. PPCM.	On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.
Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.	Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.

Tableau extrait du B.O. N°4 du 30/08/2001

Cette inclusion des contenus français dans l'ensemble des contenus gabonais est stricte. Soulignons en particulier que les notions d'ensemble et de relation ne sont pas abordées dans l'enseignement secondaire français. En termes de fonction(s) assignée(s) à l'arithmétique en tant que savoir à enseigner, ces programmes gabonais et français sont éloignés l'un de l'autre : alors qu'en France, depuis la réintroduction de l'arithmétique en

<sup>4</sup> L'analyse faite dans ce qui suit reste valable selon nous avec le changement de programme opéré à la rentrée 2012. Le lecteur pourra consulter le BO spécial n°8 du 13 octobre 2011 pour s'en convaincre. [http://cache.media.education.gouv.fr/file/special\\_8\\_men/98/4/mathematiques\\_S\\_195984.pdf](http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf)

1998<sup>5</sup>, on identifie de façon essentielle la niche algorithmique et la niche raisonnement<sup>6</sup> (Ravel, 2003), au Gabon c'est la niche théorie des nombres qui selon nous prédomine. Pour compléter cette lecture du programme gabonais, il est intéressant de regarder à la fois les sujets du baccalauréat (nous disposons des sujets de 2003 à 2012) et le manuel CIAM<sup>7</sup> intitulé « Mathématiques Terminale Sciences Mathématiques » (EDICEF, 1999) qualifié de « support du programme (et non la référence) » par les auteurs de ce programme. Dans les sujets du baccalauréat, les élèves ne sont aucunement évalués sur les structures algébriques en tant qu'objets théoriques ; on se place toujours dans  $Z$  ou dans  $N$  et aucun nom de structure n'est mentionné. Quant au manuel support, certains noms de structures algébriques apparaissent dans un paragraphe « Vocabulaire » une fois que les propriétés de l'addition dans  $Z$  (« groupe », « groupe commutatif ») et celles de la multiplication dans  $Z$  (« anneau commutatif unitaire ») aient été données. Néanmoins, aucune définition générale n'ait donnée et aucun exercice ne mentionne ces structures. On constate de plus que l'étude mentionnée dans le tableau 1 du cas particulier de la structure  $Z/pZ$  avec  $p$  nombre premier (« Nombres premiers, Corps  $Z/pZ$  ») et le dernier théorème cité dans la colonne « Contenus » du tableau 2 («  $p$  premier si et seulement si tout élément non nul de  $Z/pZ$  est inversible ») ne sont aucunement abordés dans ce manuel.

## II. ARITHMETIQUE ET RAISONNEMENT : UNE EXPERIMENTATION AU GABON EN CLASSE DE TERMINALE C&E

### II.1 Eléments d'analyse *a priori*

Les consignes données aux élèves lors d'une première séance ont été les suivantes :

On rappelle qu'un nombre est rationnel si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction  $\frac{a}{b}$  avec  $a$  entier et  $b$  entier naturel non nul.

- 1.1 Selon votre groupe, le nombre  $\sqrt{2}$  est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse le plus rigoureusement possible.
- 1.2 Selon votre groupe, le nombre  $\sqrt{3}$  est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse le plus rigoureusement possible.
- 1.3 A votre avis, pour quelles valeurs de  $n$  le nombre  $\sqrt{n}$  est-il rationnel ? Tenter de démontrer votre conjecture.

Une semaine après la première séance, nous avons fourni aux élèves quatre preuves de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  et, avant de les présenter au lecteur en les analysant, nous indiquons les questions posées aux élèves en référence à ces preuves pour avoir une première idée des tâches en jeu :

- 2.1 De quelle preuve vos idées du 18 janvier sont-elles les plus proches ?
- 2.2 Y a-t-il une preuve qui vous semble plus rigoureuse que les autres ?

---

<sup>5</sup> Durant la période de contre-réforme des mathématiques modernes (1983-1998), l'arithmétique ne fait plus partie ni des programmes du lycée (dès 1983), ni de ceux du collège (dès 1985).

<sup>6</sup> La séparation entre niche algorithmique et niche raisonnement n'est pas pertinente a priori puisque la première peut être considérée comme sous-partie de la deuxième ; c'est pour des raisons méthodologiques que Ravel a fait cette distinction dans son travail de thèse.

<sup>7</sup> Collection Inter Africaine de Mathématiques.

2.3 Choisir la preuve qui vous permet le plus facilement de démontrer l'irrationalité de  $\sqrt{3}$  et écrivez la démonstration associée.

2.4 On peut se demander pour quelles valeurs de n le nombre  $\sqrt{n}$  est rationnel ; Complétez la phrase suivante : «  $\sqrt{n}$  est rationnel si et seulement si n est ..... ». Tenter de démontrer cette équivalence en vous inspirant de la preuve qui vous semble la plus facile à adapter.

Nous allons centrer notre analyse *a priori* sur l'analyse des quatre preuves fournies en nous interrogeant principalement sur les adaptations à faire, en termes de dimensions organisatrice et opératoire, à la fois pour prouver l'irrationalité de  $\sqrt{3}$  et pour accéder à la généralisation en jeu. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à (Battie, 2003) et (Battie, 2007).

La première preuve fournie, parfois qualifiée de « preuve classique », a pour dimension organisatrice principale un raisonnement par l'absurde au sein duquel apparaît un raisonnement par contraposée ; cette complexification de la dimension organisatrice disparaîtrait bien-sûr si l'on admet le résultat « pour tout entier, si son carré est pair alors il l'est lui-même ».

**Preuve n°1** : Supposons par l'absurde que  $\sqrt{2}$  soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  ; on suppose de plus que la fraction  $\frac{a}{b}$  est irréductible. *Montrons que a et b sont pairs* : Avec l'égalité précédente on a  $2b^2 = a^2$  donc  $a^2$  est pair ; montrons par contraposée qu'alors a est pair : si a n'est pas pair, il existe un entier k tel que  $a = 2k + 1$  et donc  $a^2$  est impair car égal à  $4(k^2+k)+1$ . Il existe donc un entier a' non nul tel que  $a = 2a'$  ; d'où  $2b^2 = 4a'^2$ , ou encore  $b^2 = 2a'^2$ . De même que pour a on en conclut que b est pair. Ceci contredirait le caractère irréductible de la fraction  $\frac{a}{b}$ . En conclusion,  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

En spécifiant le raisonnement par l'absurde et non l'objet fraction en jeu du côté de la dimension opératoire, on peut parvenir autrement à une contradiction. Avec la deuxième preuve fournie aux élèves nous proposons l'exemple d'une preuve par descente infinie.

**Preuve n°2** : Supposons par l'absurde que  $\sqrt{2}$  soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ . *Montrons que a et b sont pairs* : Avec l'égalité précédente on a  $2b^2 = a^2$  donc  $a^2$  est pair ; montrons par contraposée qu'alors a est pair : si a n'est pas pair, il existe un entier k tel que  $a = 2k + 1$  et donc  $a^2$  est impair car égal à  $4(k^2+k)+1$ . Il existe donc un entier a' non nul tel que  $a = 2a'$  ; d'où  $2b^2 = 4a'^2$ , ou encore  $b^2 = 2a'^2$ . De même que pour a on en conclut que b est pair. Ainsi, à partir des entiers a et b, on obtient les entiers naturels non nuls a' et b' tels que :

- $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$ .
- $a' < a$
- $b' < b$

On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible puisque toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie. En conclusion,  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

Ainsi, les preuves n°1 et n°2 diffèrent au niveau de la dimension organisatrice principale tout en ayant en commun l'étape opératoire correspondant à la preuve du résultat « pour tout entier, si son carré est pair alors il l'est lui-même » (qui conduit à la même complexification de chacune des dimensions organisatrices principales des preuves n°1 et n°2). Pour exploiter ces deux preuves dans le cas du nombre  $\sqrt{3}$ , c'est cette étape opératoire qui est à adapter : le résultat à démontrer devient « pour tout entier, si son carré est divisible par 3 alors il l'est lui-même ». Si l'on conserve la même dimension organisatrice (raisonnement par contraposée), la dimension organisatrice se complexifie davantage : une disjonction de cas apparaît puisque deux cas (et non un seul dans le cas d'un entier impair) sont à envisager pour un entier non divisible par 3. On comprend ainsi que l'exploitation des preuves n°1 et n°2 pour traiter le cas général est problématique, même s'il est possible de les réécrire pour un autre entier donné (non carré) comme indiqué en passant de  $\sqrt{2}$  à  $\sqrt{3}$ . Soulignons que si on dispose du lemme d'Euclide<sup>8</sup>, on a directement l'implication « pour tout entier, si son carré est pair alors il l'est lui-même » et qu'aucune adaptation, tant au niveau de la dimension organisatrice que de la dimension opératoire des preuves n°1 et n°2, n'est à réaliser dans le passage de l'entier 2 à l'entier 3. Nous reviendrons sur ce point dans la suite de notre analyse *a priori*.

La troisième preuve fournie aux élèves est extraite d'un article de Rittaud (2006) (contrairement aux trois autres preuves, c'est la première fois que nous la proposons dans nos travaux).

**Preuve n°3 :** Supposons par l'absurde que  $\sqrt{2}$  soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  ainsi on a  $2 = \frac{a^2}{b^2}$  ; on suppose que la fraction  $\frac{a}{b}$  est irréductible : on en déduit que la fraction  $\frac{a^2}{b^2}$  l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun, alors  $a^2$  et  $b^2$  n'en ont pas non plus) et ainsi l'égalité  $\frac{a^2}{b^2} = 2$  impose  $b = 1$ , donc  $a^2 = 2$ , ce qui n'est pas possible car a est un entier. En conclusion,  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

De même que la preuve n°1, on suit un raisonnement par l'absurde en spécifiant l'objet fraction. Néanmoins, la contradiction à laquelle on aboutit n'est pas de même nature et surtout elle offre l'avantage de mettre sur la voie pour l'identification de la condition nécessaire et suffisante en jeu dans la généralisation. Contrairement aux preuves n°1 et n°2, son exploitation pour démontrer l'irrationalité de  $\sqrt{3}$  est immédiate (il y a juste à remplacer 2 par 3) et nous donne accès à une preuve du résultat général en jeu (la condition « n est un carré » est clairement suffisante pour que  $\sqrt{n}$  soit rationnel, il s'agit d'établir qu'elle est nécessaire) :

---

<sup>8</sup> Les élèves n'avaient pas connaissance de ce lemme lors de ces séances. L'exploitation des preuves n°1 et n°2 est donc a priori d'autant plus problématique.



Supposons que  $\sqrt{n}$  soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que  $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$  ainsi on a  $n = \frac{a^2}{b^2}$ ; on suppose que la fraction  $\frac{a}{b}$  est irréductible : on en déduit que la fraction  $\frac{a^2}{b^2}$  l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun, alors  $a^2$  et  $b^2$  n'en ont pas non plus) et ainsi l'égalité  $\frac{a^2}{b^2} = n$  impose  $b = 1$ , donc  $a^2 = n$ .

Il faut bien être conscient que cette aisance dans l'adaptation est toute relative au fait que dans la preuve n°3 une partie essentielle de la dimension opératoire est « encapsulée ». De façon explicite, un résultat-clef est utilisé en étant admis : « si a et b n'ont pas de facteur commun, alors  $a^2$  et  $b^2$  n'en ont pas non plus ». De façon implicite, l'unicité d'un représentant irréductible pour toute fraction est en jeu lorsque l'égalité  $\frac{a^2}{b^2} = n$  conduit à  $b = 1$  et  $a^2 = n$ .

La dernière preuve fournie aux élèves, que nous qualifions de fondamentale, est la suivante :

**Preuve n°4 :** Supposons par l'absurde que  $\sqrt{2}$  soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ . Ainsi on a  $2b^2 = a^2$ . On appelle  $\alpha$  l'exposant de 2 dans la décomposition en nombres premiers de a et  $\beta$  celui de b. D'après l'égalité précédente on a :  $1 + 2\beta = 2\alpha$ . D'où une contradiction (un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair). En conclusion,  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

Dans cette preuve, le raisonnement par l'absurde n'est pas spécifié (contrairement à la preuve n°2) et l'objet fraction ne l'est pas non plus (contrairement aux preuves n°1 et n°3). Aucune complexification de la dimension organisatrice n'apparaît et cela sans qu'aucun résultat-clef ne soit admis. L'élément essentiel de la dimension opératoire est d'écrire les entiers sous leur forme factorisée (pôle opératoire structuration autour des nombres premiers). De même que la preuve n°3, cette preuve permet de démontrer aisément l'irrationalité de  $\sqrt{3}$  (remplacer 2 par 3 sauf dans la dernière égalité relative à aux exposants du nombre 3) et donne l'idée du résultat général en jeu et d'une démonstration :

Supposons que  $\sqrt{n}$  soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que  $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ .

Ainsi on a  $nb^2 = a^2$ . Supposons que n ne soit pas un carré : il existe alors p premier tel que l'exposant de p dans la décomposition de n en nombres premiers est impair. En appelant  $\alpha$  l'exposant de p dans la décomposition en nombres premiers de a et  $\beta$  celui de b, on obtient  $1 + 2\beta = 2\alpha$ . D'où une contradiction. En conclusion, n est un carré.

Du point de vue de la dimension organisatrice, cette preuve est plus complexe que celle obtenue à partir de la preuve n°3 : un raisonnement par l'absurde apparaît. Néanmoins, cette différence de complexité est toute relative car, comme souligné précédemment, les éléments-clefs de la dimension opératoire de la preuve n°3, qui sont également ceux de la preuve générale qui en découle, sont admis : « l'encapsulation<sup>9</sup> » qui est faite au niveau de la dimension opératoire est la source de l'allègement au niveau de la dimension

---

<sup>9</sup> Nous employons ce mot en faisant l'analogie avec la programmation en informatique : « l'encapsulation de données est l'idée de cacher l'information » (Wikipédia) ; ici le caractère intentionnel n'entre pas en jeu.

organisatrice. L'implication « pour entiers  $a$  et  $b$ , si  $a$  et  $b$  n'ont pas de facteur commun, alors  $a^2$  et  $b^2$  n'en ont pas non plus » peut être démontrée par contraposée en utilisant le lemme d'Euclide. Quant à l'unicité d'un représentant irréductible, elle est équivalente au théorème de Gauss (Henry, 2001).

En conclusion, avec la preuve n°4, le ressort fondamental en jeu dans la généralisation (pôle opératoire « structuration autour des nombres premiers ») est explicité et directement exploité d'où cet accès aisé à une preuve pour  $\sqrt{3}$  et à une preuve générale. Dans la preuve n°3, ce ressort est présent (lien fort avec le théorème de Gauss) mais de façon indirecte et camouflée. Quant aux preuves n°1 et n°2, on s'en éloigne et on perd en potentiel de généralisation comme nous l'avons montré ; dans cette expérimentation, cet éloignement est d'autant plus significatif que le lemme d'Euclide, enseigné comme cas particulier du théorème de Gauss, n'a pas été abordé en classe.

Suite à cette analyse *a priori*, des questions émergent : quels éléments de preuve de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  peut-on identifier dans les productions écrites des élèves ? Quel éclairage nous apporte les tâches de comparaison de preuves (questions 2.1 et 2.2) ? Dans quelles mesures l'étude que les élèves ont menée pour  $\sqrt{2}$  et leur lecture des preuves fournies sont exploitées pour l'étude de  $\sqrt{3}$  ? Quels éléments de généralisation, tant pour un énoncé que pour une preuve de celui-ci, les élèves parviennent-ils à mettre à jour (question 2.4) ?

En cohérence avec l'analyse *a priori*, toutes ces questions seront abordées du point de vue de la distinction entre dimension organisatrice et dimension opératoire.

## II.2 Eléments d'analyse a posteriori

Comme annoncé en introduction, nous disposons pour chacun des sept groupes d'élèves de ses deux feuilles de groupe (sauf pour les groupes 6 et 7 créés lors de la 2<sup>ème</sup> séance avec l'arrivée de nouveaux élèves) et de brouillons. Plutôt que de viser l'exhaustivité dans la présentation de l'analyse *a posteriori*, nous choisissons d'en exposer dans le détail certains éléments-clefs.

### II.2.1 – Preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Pour l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ , nous nous arrêtons sur les preuves des groupes 2 et 3 :

1. le nombre  $\sqrt{2}$  est non rationnel. ~~est~~  
 Supposons que  $\sqrt{2}$  soit rationnel il peut s'écrire sous forme  $\frac{a}{b}$   
 avec  $a$  entier et  $b$  entier non nul tel que  $\frac{a}{b}$  non simplifiable  
 $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$  posons  $p = a^2$   
 $p = 2b^2$  donc  $p$  est divisible par 2 et est multiple de  $p$ . ainsi  $a^2$  multiple  
 de 2  $a^2$  multiple de  $a$ .  
 $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 4b^2 = 2a^2$  posons  $q = 4b^2$   $q$  multiple  
 de 2 donc  $q$  multiple de 2 ainsi  $b$  multiple de 2 ainsi  
 la fraction  $\frac{a}{b}$  peut être simplifiable par 2 ce qui est contradictoire  
 donc  $\frac{a}{b}$  non rationnel on peut conclure que  $\sqrt{2}$  est irrationnel

Preuve du groupe 2

Comme le groupe d'élèves le remarque en répondant à la question 2.1, leur preuve est à rapprocher de la preuve n°1. Plus précisément, elles sont identiques du point de vue de la dimension organisatrice principale. Par contre, l'étape opératoire consistant à établir que  $a$  et  $b$  sont pairs est problématique pour les élèves. L'élévation au carré apparaît (étape opératoire essentielle pour pouvoir utiliser les outils de l'arithmétique) et, après une première confusion entre multiple et diviseur (« 2 est multiple de  $p$  »), la relation divisibilité par 2 est bien interprétée. Néanmoins, le caractère pair de  $a$  reste implicite et n'est pas traduit de façon opératoire (existence d'un entier  $k$  tel que  $a = 2k$ ), ce qui empêche les élèves de démontrer que  $b^2$  l'est aussi et ils obtiennent abusivement la parité de  $b$  («  $q = 4b^2$  multiple de 2 ainsi  $b$  multiple de 2 »). La visée en jeu dans la dimension organisatrice (contredire le caractère « non simplifiable » de la fraction en jeu) semble guider prioritairement les élèves prêts à « saboter » l'étape opératoire, consciemment ou non.

1)  $\sqrt{2}$  est non rationnel.  
 Supposons que  $\sqrt{2}$  est rationnel.  
 $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{1} = a^2 \times \frac{1}{b^2}$   
 cela implique que soit  $a^2 = 2$  et  $\frac{1}{b^2} = 1$   
 ou  $a^2 = 1$  et  $\frac{1}{b^2} = 2$   
 or  $a^2 = 2$  équivaut  $a = -\sqrt{2}$  ou  $a = \sqrt{2}$  donc  $a \notin \mathbb{N}$   
 et  $\frac{1}{b^2} = 2$  pour tout  $b \in \mathbb{N}^*$   $\frac{1}{b^2} \neq 1$   
 absurde. On aboutissant à une contradiction  $\sqrt{2}$  est  
 non rationnel.

Preuve du groupe 3

Le groupe 3 associe de façon pertinente sa preuve à la preuve n°3. Ce qui est problématique dans cette preuve, c'est que l'objet fraction n'est pas spécifié : a et b ne sont pas supposés premiers entre eux et donc l'identification qui est faite (« cela implique que [...] ») est abusive. A travers la disjonction de cas qui est faite par les élèves (la dimension organisatrice se complexifie), on peut noter un certain souci d'exhaustivité de leur part. Leur 2<sup>ème</sup> cas n'est pas traité, sans doute parce qu'ils sont parvenus à établir une contradiction dès le 1<sup>er</sup> cas : c'est la visée en jeu dans la dimension organisatrice principale (raisonnement par l'absurde) qui semble primer dans leur travail opératoire.

### II.2.2 – Exploitation des preuves fournies

La preuve fournie n°3 est choisie par cinq groupes sur sept pour prouver l'irrationalité de  $\sqrt{3}$ . Une première lecture de leurs preuves conduit à conclure que l'exploitation de la preuve n°3 est réussie. Nous donnons l'exemple du groupe 3.

3) Supposons par l'absurde de  $\sqrt{3}$  soit rationnel  
~~3)  $\exists$~~   $\exists a$  et  $b \in \mathbb{N}^*$  tels que,  
 $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$  et que la fraction  $\frac{a}{b}$  est irréductible  
 $\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}$  est irréductible.  
 A l'inverse  $\frac{a^2}{b^2} = 3 \Rightarrow a^2 = 3$  et  $b^2 = 1$ , absurde car  
 $a$  et  $b$  en entier. En conclusion,  $\sqrt{3}$  est irrationnel.  
 La preuve n°3 nous facilite donc notre démonstration

#### Preuve du groupe 3

Néanmoins, nous formulons l'hypothèse suivante : au-delà de cette exploitation réussie pour l'écriture d'une preuve de l'irrationalité de  $\sqrt{3}$ , la compréhension du cœur de la dimension opératoire de la preuve n°3 est problématique (rôles du résultat « si a et b n'ont pas de facteur commun, alors  $a^2$  et  $b^2$  n'en ont pas non plus » et de l'unicité d'un représentant irréductible pour toute fraction). Plusieurs éléments viennent soutenir cette hypothèse.

Tout d'abord, nous rappelons que la preuve proposée par le groupe 3 pour l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  est à rapprocher de la preuve fournie n°3 et qu'elle est problématique du fait que l'objet  $\frac{a}{b}$  n'est pas supposé irréductible (cf. §II.2.1).

Nous avons un deuxième indice avec la preuve du groupe 1 qui est mot à mot la preuve fournie avec quelques adaptations nécessaires (remplacer 2 par 3) avec une erreur dans la dernière phrase : « En conclusion,  $\sqrt{2}$  est irrationnel ». On peut imaginer que l'auteur a rédigé la preuve du groupe en ayant sous les yeux la preuve fournie et en la consultant mot à mot, d'où la production d'une preuve correcte (mis à part le détail de l'erreur mentionnée) sans nécessairement une compréhension de la dimension opératoire.

En guise de troisième indice, regardons la preuve donnée par le groupe 5 pour répondre à la question 2.4 (nous étudierons plus loin leur preuve de l'irrationalité de  $\sqrt{3}$ ) :

Démonstration :  $a$  et  $b \in \mathbb{N}^*$   
 $\sqrt{n}$  étant un nombre rationnel alors  $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$  ainsi  $n = \frac{a^2}{b^2}$  avec une fraction irréductible et implique que  $\frac{a^2}{b^2}$  l'est aussi. En admettant que  $a$  et  $b$  n'ont pas de facteur commun, alors  $a^2$  et  $b^2$  n'en ont pas non plus et ainsi l'égalité  $\frac{a^2}{b^2} = n$  impose  $b=1$  donc  $a^2 = n$  ce qui est valide ssi  $n = k^2$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$

Preuve du groupe 5

On observe en effet la maladresse de l'emplacement du résultat admis « En admettant que  $a$  et  $b$  n'ont pas de facteur commun alors  $a^2$  et  $b^2$  n'en ont pas non plus [...] ». L'irréductibilité de la fraction  $\frac{a^2}{b^2}$  était précédemment mise en évidence.

Comme annoncé la preuve n°3 a été choisie par cinq groupes sur sept pour démontrer l'irrationalité de  $\sqrt{3}$ . Les deux groupes restants ont sélectionné la preuve n°4. Nous donnons ci-dessous la preuve de l'un d'eux (groupe 5).

Démonstration :  
 Supposons par l'absurde que  $\sqrt{3}$  soit rationnel, il alors  $a$  et  $b \in \mathbb{N}^*$   
 tels que  $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ , ainsi  $3b^2 = a^2$ .  
 Soit  $x$  et  $y$  les exposants de 3 dans la décomposition respective de  $a$  et  $b$ , on a :  
 $a = 3^x \Rightarrow a^2 = 3^{2x}$   
 et  $b = 3^y \Rightarrow b^2 = 3^{2y}$   
 $\Rightarrow 3b^2 = 3^{2y+1}$   
 or  $a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3^{2x} = 3^{2y+1} \Rightarrow 2x = 2y + 1$  doit être une contradiction (car un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair).  
 En conclusion,  $\sqrt{3}$  est irrationnel.

Preuve du groupe 5

L'exploitation de l'égalité  $3b^2 = a^2$  pour une lecture en termes d'exposants est problématique (particularisation des entiers  $a$  et  $b$ ). Cela révèle selon nous la fragilité avec laquelle le groupe s'est approprié la preuve n°4 : une certaine incompréhension réside au niveau de la dimension opératoire. L'étude de la preuve du groupe 6 vient appuyer cette analyse.

Pour la généralisation (question 2.4), la condition nécessaire et suffisante « être un carré » n'est donnée que par deux groupes sur sept. Les éléments de preuve donnés par le groupe 5 ont été reproduits précédemment. Au-delà de la maladresse que nous avons pointée et de ce qu'elle est susceptible de révéler, leur choix de la preuve n°3 est à souligner (choix spécifique à cette question) et son exploitation pour étudier la généralisation est assez remarquable. Quant au deuxième groupe concerné (groupe 4), il ne donne que des éléments de preuve relatifs au caractère suffisant de la condition en jeu.

**CONCLUSION**

En guise de conclusion, revenons sur le principal type de tâches en jeu à savoir *produire une preuve à partir de preuves fournies* (des éléments des dimensions organisatrices et/ou

opératoires de ces preuves pouvant être exploitées via une décontextualisation consciente ou non). Nos analyses montrent que ce type de tâches est susceptible d'une part d'enrichir le milieu des élèves (prévoir un travail préalable sans les preuves fournies en jeu) et faire avancer leur recherche et, d'autre part, de favoriser une lecture active des preuves fournies (lecture où les élèves s'investissent pour une compréhension non superficielle). Cependant, nos analyses indiquent également qu'une transcription de surface est possible et que l'enseignant(e) doit être vigilant(e) pour, le cas échéant, proposer un prolongement révélant cette fragilité.

## BIBLIOGRAPHIE

ARTAUD, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul et al. (eds.), *Actes de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 101-139).

BATTIE, V. (2009). Proving in number theory at the transition from the secondary level to the tertiary level: between organizing and operative dimensions, in Lin F., Hsieh F.-J., Hanna G., De Villiers M. (Eds) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 71-76). The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan. [http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume\\_1.pdf](http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_1.pdf)

BATTIE, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse des raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27/1, 9-43.

BATTIE, V. (2003). Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique, Thèse de Doctorat, Université Paris7, Paris. [http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/14/10/80/PDF/BATTIE\\_These.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/14/10/80/PDF/BATTIE_These.pdf)

HENRY, M. (2001). Le théorème de Gauss dans les Eléments d'Euclide ?! *Bulletin de l'APMEP*, 433.

RAVEL, L. (2003). Des programmes à la classe : Etude de la transposition didactique interne. L'exemple d'un enseignement d'arithmétique en terminale S spécialité mathématique, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

RITTAUD, B. (2006). Le fabuleux destin de  $\sqrt{2}$ . *Gazette des mathématiciens*, 107, 27-38.