



HAL
open science

Un calcul de Pi à l'aide d'une méthode géométrique discrète

Jaime Vladimir Torres-Heredia Julca

► **To cite this version:**

Jaime Vladimir Torres-Heredia Julca. Un calcul de Pi à l'aide d'une méthode géométrique discrète. 2015. hal-01249701

HAL Id: hal-01249701

<https://hal.science/hal-01249701>

Preprint submitted on 2 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

Un calcul de Pi à l'aide d'une méthode géométrique discrète

Par

Jaime Vladimir TORRES-HEREDIA JULCA¹

Décembre 2015

1.- RESUME

Cet article présente une méthode géométrique discrète qui permet de calculer des approximations du nombre Pi et des racines carrées des nombres naturels. Dans un premier temps la méthode de calcul de Pi est présentée, accompagnée d'explications graphiques simples. Puis, pour la démonstration, on bâtit les calculs de l'arithmétique de base à l'aide d'une méthode géométrique discrète connue en partie dans l'antiquité. Dans le cadre de cette méthode on rappellera les notions de nombre naturel et de rapport. Puis, grâce cette représentation et à l'aide de rapports on calculera la racine carrée de 2 et d'autres nombres naturels. On entamera enfin la preuve proprement dite du fait que le calcul exposé au début mène bien vers le nombre Pi.

Le but de cet article n'est pas de présenter des calculs optimaux et rapides, ce qui a déjà été réalisé par de nombreux chercheurs depuis des siècles, mais de présenter des notions qui permettent de réaliser certaines simplifications et de visualiser le développement de certains nombres. Ce sont aussi des notions et opérations dont on fait habituellement abstraction lors des calculs mathématiques avec les techniques de numérotation positionnelle et d'algèbre.

2.- INTRODUCTION

La notion de nombre s'est construite au fil des siècles en passant de la notion de nombre naturel à la notion de rapport et ensuite à celle de nombre réel². Pour la représentation des nombres on s'est servi aussi des nombres figurés, comme chez les anciens Grecs. Or, la notion de rapport a des liens avec des calculs géométriques simples. C'est justement ce genre de calculs que cet article vise à retrouver. Ainsi un calcul simple de Pi sera présenté et aussi celui de la racine carrée de 2.

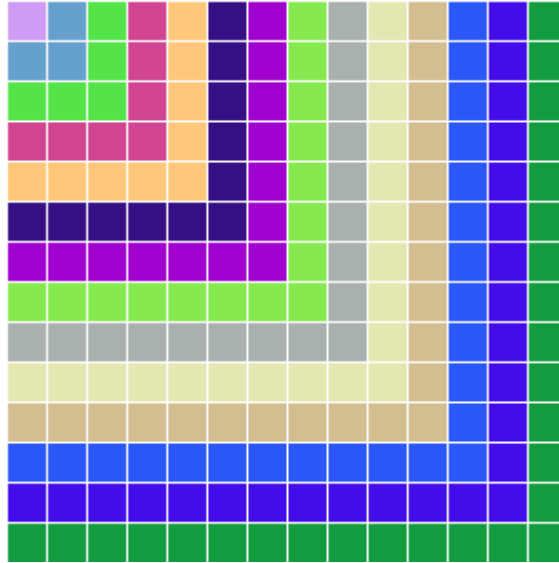
3.- Présentation de la méthode

On part d'un carré formé de $n \times n$ sous-carrés avec n gnomons³ indiqués avec des couleurs différentes comme on le voit ci-dessous :

¹ Chercheur indépendant

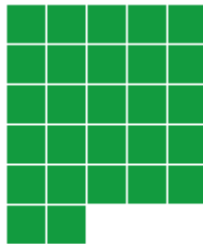
² Pour une histoire des rapports et des nombres voir Cousquer [1].

³ Dans ce cas, un gnomon est une figure géométrique constituée de sous-carrés formant une sorte d'équerre.



Dans ce cas $n = 14$ et il y a 14 gnomons de 14 couleurs différentes. Le premier gnomon est le petit carré pourpre clair en haut à gauche et le deuxième est celui de couleur turquoise constitué de 3 sous-carrés.

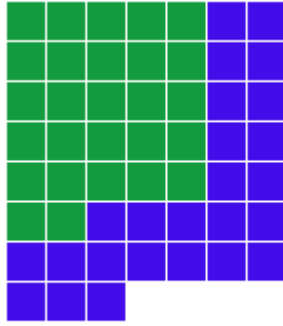
Ensuite on prend le dernier gnomon (vert dans ce cas) et on essaie de construire un deuxième carré incomplet avec les petit carrés ou sous-carrés qui composent le gnomon en question, comme on le voit ci-dessous :



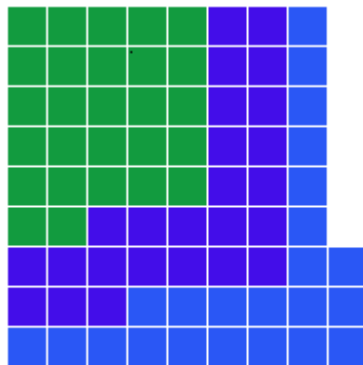
L'ordre de remplissage se fait en suivant le schéma suivant :

1	4	9	16
2	3	8	15
5	6	7	14
10	11	12	13

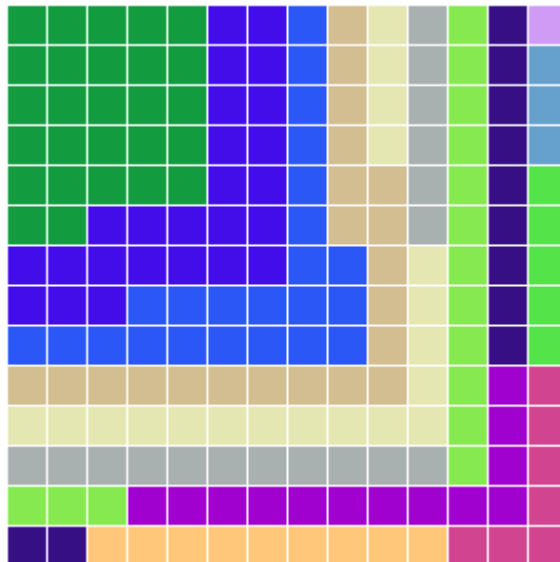
Après on prend l'avant-dernier gnomon du premier carré $n \times n$, le gnomon bleu foncé, et on distribue ses sous-carrés comme on le voit ci-dessous, avec le même ordre de remplissage précédent, en complétant le carré incomplet vert précédant, obtenant ainsi un carré incomplet plus grand:



On répète l'opération avec le gnomon suivant, bleu clair, du carré initial qui, ainsi, perd un gnomon à chaque étape :

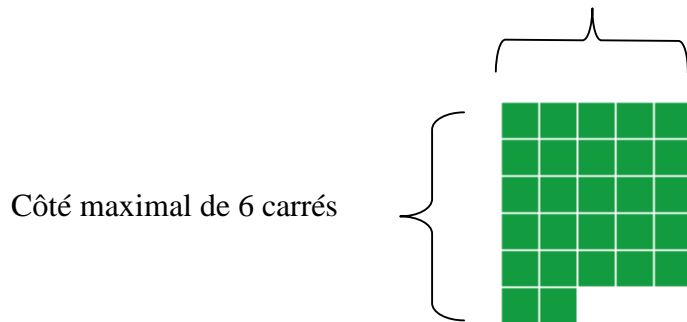


Et ainsi de suite jusqu'au résultat suivant :



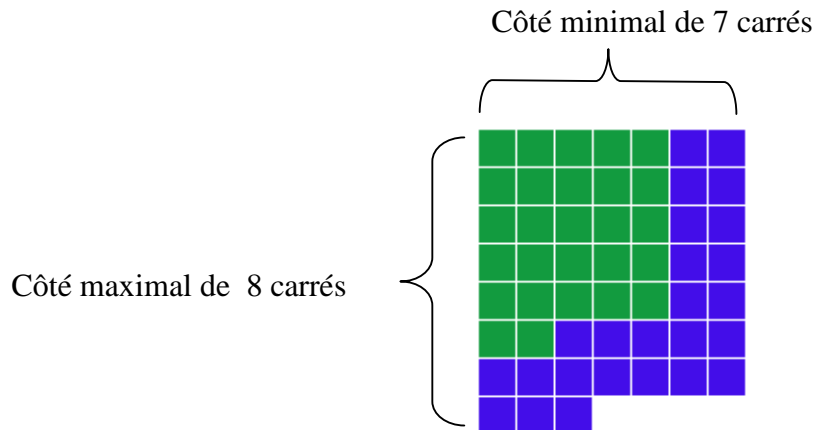
En fait, chaque carré incomplet créé à chaque étape possède un côté de longueur maximale et un côté de longueur minimale. Par exemple, le premier carré incomplet obtenu plus haut aura un côté de longueur minimale 5 et un côté de longueur maximale 6 :

Côté minimal de 5 carrés



Dans ce cas on écrit que $c_1 = 5$ et $C_1 = 6$.

Et le carré incomplet ci-dessous a une longueur minimale de 7 et une longueur maximale de 8



Dans ce cas on écrit que $c_2 = 7$ et $C_2 = 8$.

Or, nous pouvons faire l'addition des longueurs minimales et maximales des carrés incomplets obtenus plus haut à chaque étape. Soit $SommeMin_{14}$ la somme de toutes les longueurs minimales et $SommeMax_{14}$ la somme de toutes les longueurs maximales. Nous obtenons:

$$SommeMin_{14} = \sum_{i=1}^{14} c_{14} = 5+7+8+9+10+11+12+12+13+13+13+13+13+14=153$$

$$SommeMax_{14} = \sum_{i=1}^{14} C_{14} = 6+8+9+10+11+12+13+13+14+14+14+14+14+14=166$$

Puis on établit les relations suivantes :

$$\frac{SommeMin_{14}}{14^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{SommeMax_{14}}{14^2}$$

$$\frac{153}{14^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{166}{14^2}$$

ou :

$$\frac{\sum_{i=1}^n c_{14}}{14^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sum_{i=1}^n C_{14}}{14^2}$$

Et en généralisant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{SommeMin_n}{n^2} = \frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{SommeMax_n}{n^2}$$

ou :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n c_n}{n^2} = \frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n C_n}{n^2}$$

Si le nombre n est un multiple de 10, alors les chiffres de $SommeMin_n$ et de $SommeMax_n$ se rapprochent des chiffres du nombre $\frac{\pi}{4}$ en base décimale et c'est dans ce sens qu'on pourrait parler de calcul de Pi à l'aide de nombres naturels.

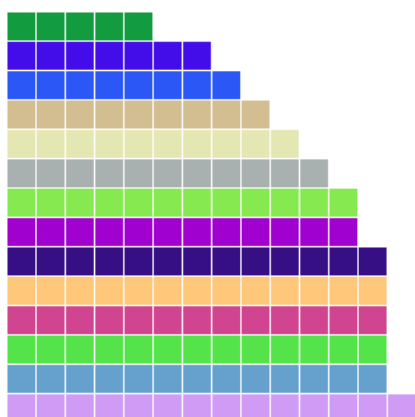
Maintenant, plus n sera grand, plus la valeur obtenue sera proche du nombre $\frac{\pi}{4}$ qui est égal à 0,785398163...

Voici une table de résultats obtenus à l'aide d'un petit programme informatique⁴:

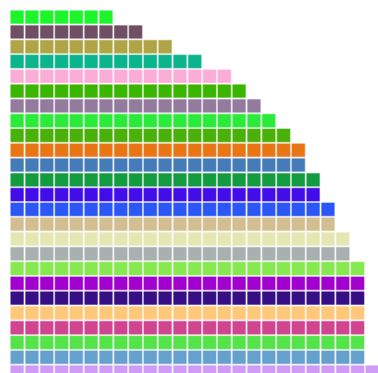
⁴ Vous trouverez en annexe 1 le code c/c++ pour le calcul des sommes maximales et minimales.

n	Approximation de $\frac{\pi}{4}$
30	$\frac{705}{30^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{732}{30^2}$
50	$\frac{1961}{50^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{2006}{50^2}$
100	$\frac{7854}{100^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{7949}{100^2}$
1000	$\frac{785'387}{1000^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{786'380}{1000^2}$
10000	$\frac{78'539'763}{10000^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{78'549'754}{10000^2}$

Il y a une explication graphique de ce calcul. Si l'on représente à chaque étape les nombres correspondant aux côtés minimaux à l'aide de barres, on obtiendra une surface se rapprochant de celle d'un quart de disque. Pour n=14 on aura :

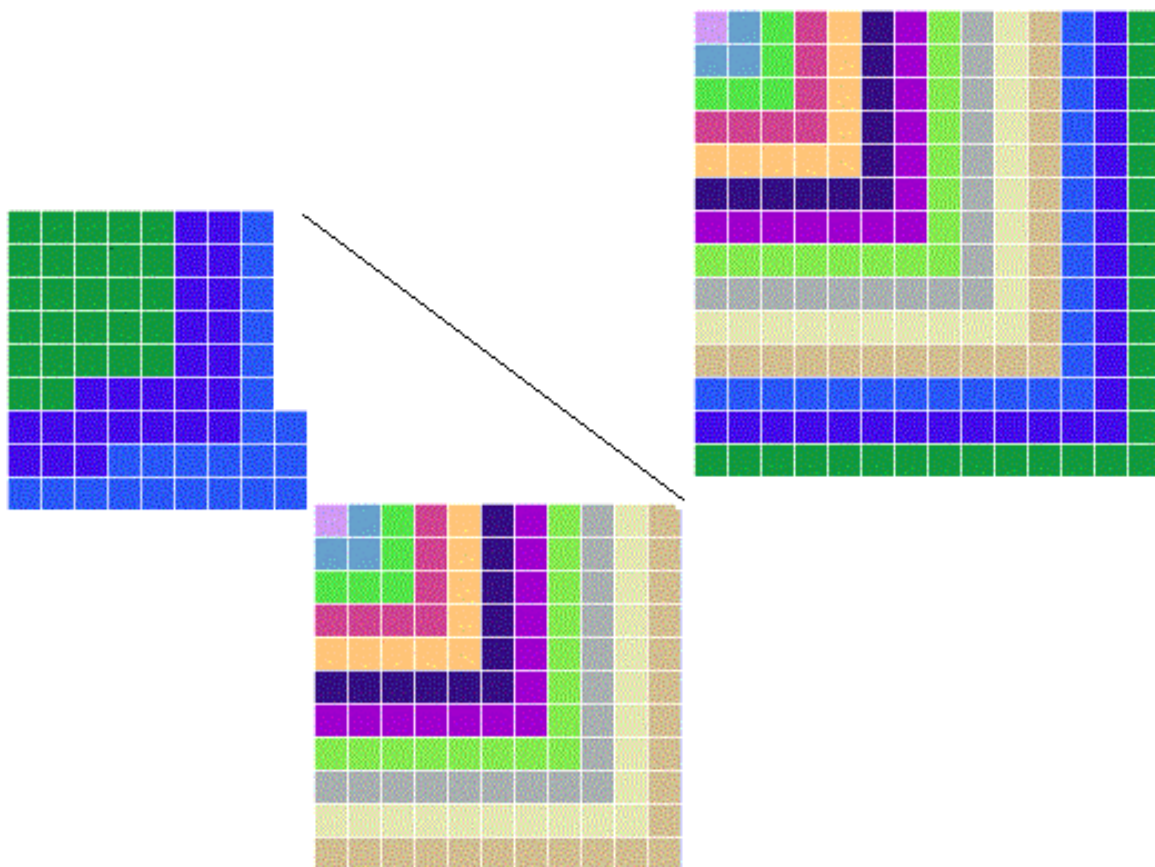


Pour n=25 on aura :



ce qui se rapproche davantage du quart de disque. On peut faire de même avec les côtés maximaux et on s'approcherait aussi de la surface du disque.

On peut expliquer aussi pourquoi on s'approche de la surface du disque grâce au théorème de pythagore. En effet, lorsque le carré de départ perd des gnomons, la longueur de son côté est diminuée tandis que le nouveau carré construit à l'aides gnomons enlevés voit la longueur de son côté augmenter. Or ces deux côtés, celui du carré de départ et celui du nouveau, sont presque (il faut n grand pour une grande précision) côtés d'un triangle rectangle dont l'hypothénuse a une longueur égale à n :



Sur l'image ci-dessus on voit, en haut à droite, le carré 14x14 de départ. En bas on voit le carré obtenu après que le carré de départ ait perdu ses trois derniers gnomons (vert, bleu et turquoise). En haut à gauche on voit le nouveau carré obtenu grâce au trois gnomons. Le trait noir indique l'approximation de l'hypoténuse qui s'approche de la longueur n, 14 dans ce cas. Etant que la longueur minimale du nouveau carré est de 8 et celle maximale 9, et que le carré qui a perdu ses trois derniers gnomons a un côté de longueur 11, on obtient l'encadrement suivant :

$$\sqrt{8^2 + 11^2} \leq 14 \leq \sqrt{9^2 + 11^2}$$

Ceci explique aussi que les nombres obtenus avec cette méthode correspondent aussi aux coordonnées cartésiennes du cercle unité centré à l'origine.

4.- Preuve du fait que cette méthode de calcul conduit bien au nombre Pi

4.1.- Le nombre

4.1.1.- Le nombre naturel

Habituellement on dit que les premiers nombres furent les nombres naturels. Ce sont des ensembles d'unités. Les nombres naturels peuvent être représentés à l'aide de longueurs et des surfaces comme les faisaient les anciens Grecs, entre autres.

4.1.2.- Le nombre naturel, les rapports et la géométrie

Puis vinrent ce qu'on appelle les *rapports*. Et Pi peut être défini à l'aide de rapports qui ont des origines géométriques comme on le voit ci-dessous avec une inégalité d'Archimède⁵ :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

4.1.3.- L'écriture positionnelle décimale

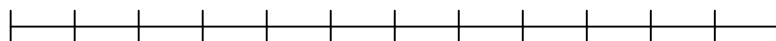
Or, avec L'écriture positionnelle décimale on ne travaille plus vraiment avec la notion de rapport même si cette notion est implicite. En effet, quand on écrit le nombre 0,0056, on symbolise le rapport $\frac{56}{10000}$. Et justement l'un des buts de cet article sera de montrer un calcul de la racine carrée de 2 et de Pi à l'aide du principe du rapport entre des nombres naturels. Et dorénavant par *rapport* on entendra le rapport entre des nombres naturels.

4.2.- Les nombres définis comme rapports entre lignes et surfaces

4.2.1.- Le nombre défini comme rapport de longueurs de lignes droites

Un rapport peut être vu comme un couple de nombres naturels. Le rapport joue un rôle important en géométrie et on parle alors aussi de proportions.

On peut définir les nombres comme étant des rapports entre des longueurs de lignes droites. Par exemple, la figure suivante montre une ligne dont le rapport à l'unité est de 12 sur 1, autrement dit 12 fois la ligne unité ou *unité-ligne*:



$$\text{Unité-ligne} = \text{—|}$$

⁵ Hairer, Wanner [3], page 52.

On peut aussi définir l'unité comme composée de 3 petits segments. Dans ce cas la ligne suivante représentera le rapport $\frac{18}{3} = 6$:



$$\text{Unité-ligne} = \text{---|---|---|}$$

Le nombre $\frac{3}{7}$ peut être représenté ainsi :

$$\text{Unité-ligne} = \text{---|---|---|---|---|---|}$$

$$3/7 = \text{---|---|---|}$$

L'unité peut donc être divisée en une multiplicité de parties. Chaque partie peut être appelée « part-d'unité ». Ainsi il y aura des unités à 1 une seule *part-d'unité* et des unités à 10 ou 100 *parts-d'unité*.

4.2.2 Le principe de l'expansion de l'unité :

L'unité peut être représentée par des lignes de longueurs différentes. Mais, en partant de la représentation d'un nombre avec une unité donnée, on peut modifier cette unité par un procédé qu'on va appeler « expansion de l'unité ». Ceci sera utile pour les divisions et racines carrées comme on le verra plus loin.

Soit par exemple le nombre 3 avec l'unité-ligne formée d'un seul segment :

$$\text{Unité-ligne} = \text{---|}$$

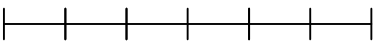
$$3 = \text{---|---|---|}$$

On peut étendre l'unité à 2 longueurs et alors le nombre 3 sera représenté par :

$$\text{Unité-ligne} = \text{---|---|}$$

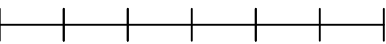
$$3 = \text{---|---|---|---|---|---|}$$

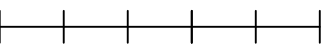
Or, on peut encore étendre l'unité de deux façons. Soit on part de l'unité de départ et on l'étend, soit on étend chacune des sous-parties de la nouvelle unité. Ainsi, si chacune des sous-parties de l'unité-ligne précédente est remplacée par trois segments, on aura :

Unité-ligne = 

3 = 

Et par rapport à cette même unité-ligne on peut représenter la fraction $\frac{5}{6}$ ainsi :


Unité-ligne = 

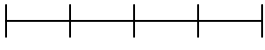
$\frac{5}{6}$ = 

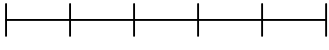
4.2.3 La multiplication des nombres :

Pour multiplier un nombre par un autre, on doit trouver une surface de forme rectangulaire qui aura comme côtés les deux nombres qu'on multiplie.

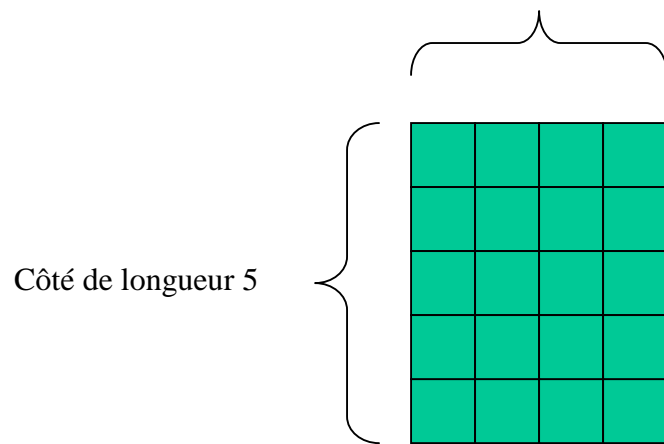
Par exemple, si l'on veut multiplier 4 fois 5, on part de deux lignes représentant 4 et 5 et le résultat sera une surface composée de 20 « unités-carrées » :


Unité-ligne = 

4 = 

5 = 

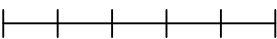
Côté de longueur 4



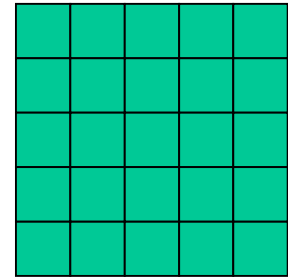
Unité de surface = 

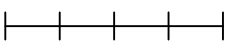
Donc $4 \times 5 = 20$

Pour multiplier des rationnels basés sur la même unité-ligne,

Unité-ligne = 

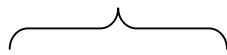
Unité de surface =



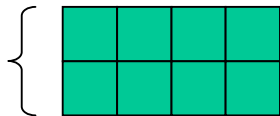
$\frac{4}{5}$ = 

$\frac{2}{5}$ = 

Côté de longueur $\frac{4}{5}$



Côté de longueur $\frac{2}{5}$

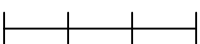


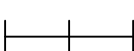
Donc $(\frac{4}{5}) \times (\frac{2}{5}) = \frac{8}{25}$

Pour trouver le résultat de la multiplication des deux fractions, on compte donc le nombre des carrés du rectangle obtenu, c'est à dire 8, et on le met en rapport au 25 qui correspond à l'unité de surface.

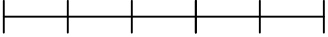
Mais si l'unité-ligne n'est pas la même pour chaque nombre rationnel, alors on doit étendre les unités-lignes de façon qu'on ait le même nombre de petits carrés pour les deux unités-ligne. Le plus simple est de faire une expansion croisée. Essayons par exemple de multiplier les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$.


D'abord la fraction $\frac{2}{3}$ est représentée par :

Unité-ligne = 

$\frac{2}{3}$ = 


Puis la fraction $\frac{4}{5}$ est représentée par :

Unité-ligne = 

$4/5 =$ 

Puis nous procédons à l'expansion des deux unités-lignes de façon croisée, c'est-à-dire que chacune des parties de la première unité-ligne va être multipliée par 5 et chacune des parties de la deuxième unité-ligne va être multipliée par 3. Nous obtenons d'abord pour $\frac{2}{3}$:

Unité-ligne = 

$2/3 = 10/15 =$ 

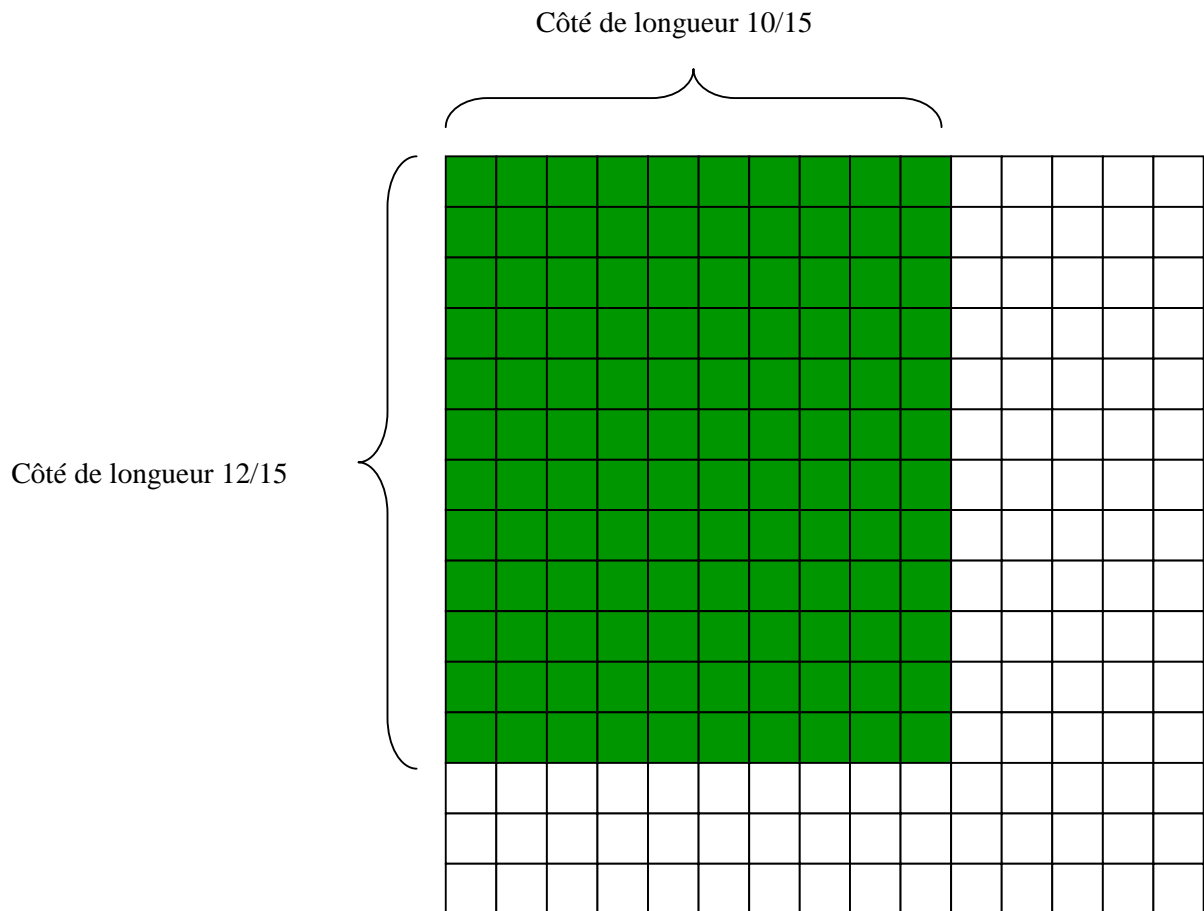
Puis nous obtenons pour $\frac{4}{5}$:

Unité-ligne = 

$4/5 = 12/15 =$ 

On peut maintenant multiplier, autrement dit obtenir une surface :

Unité-ligne = 



Enfin, avec la notation fractionnaire habituelle, on peut résumer les étapes de la multiplication avec la suite d'égalités suivante :

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{10}{15} \times \frac{12}{15} = \frac{10 \times 12}{15^2} = \frac{120}{225}$$

On divise par 15^2 car l'unité-surface dans ce cas est composée de 15^2 carrés.

Ce qu'il faut retenir ici est que le résultat d'une multiplication est interprété comme une surface.

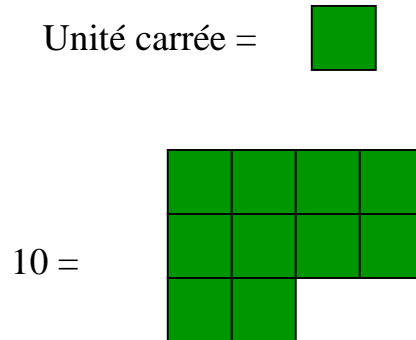
4.2.4 La division de nombres et l'expansion:

La division se fait à partir d'une surface. Le but est de retrouver des longueurs des côtés d'un rectangle. Et si nécessaire, on procédera à

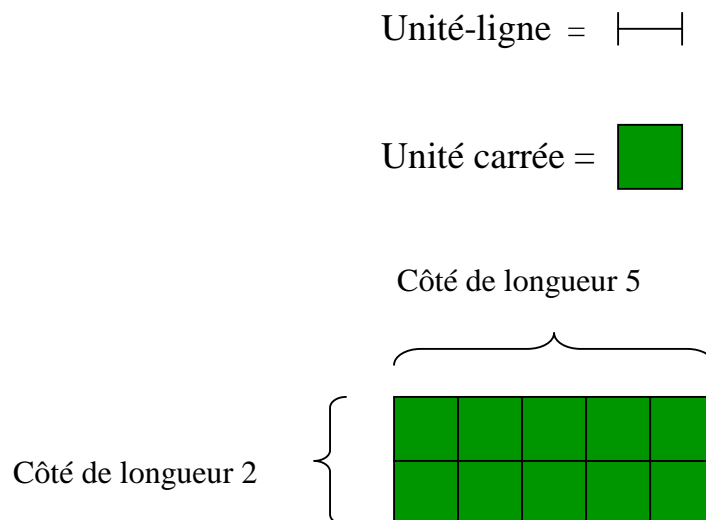
des expansions de l'unité pour avoir des solutions exactes ou plus précises⁶.

Imaginos que l'on doive diviser 10 par 2. En fait il s'agira de transformer une surface de 10 unités-carrées en un rectangle de côtés 2 et la solution recherchée.

Voici une représentation de la surface de 10 :

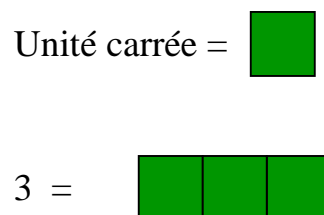


Puis avec cette surface on essaie de trouver une rectangle dont l'un des côtés vaut 2 :



La solution de la division est donc 5.

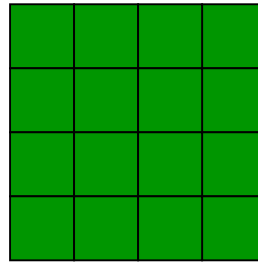
Maintenant, si l'on essaie de diviser 3 par 5, dans un premier temps on pourra représenter le nombre 3 par :



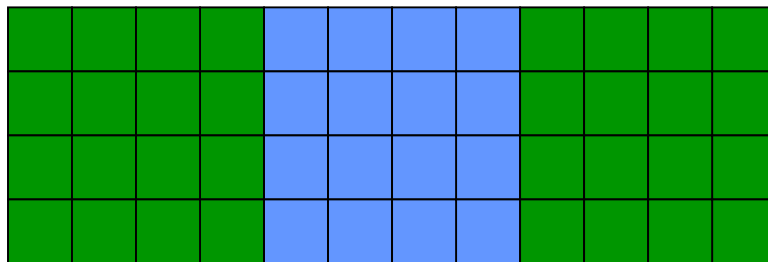
⁶ Pour un calcul semblable utilisé dans le passé, voir Ifrah [3], page 145.

Or, il est clair qu'on ne peut pas diviser cela par 5. On doit donc procéder à une expansion de l'unité-de-surface. Voici une nouvelle représentation de 3 avec une autre unité-de-surface :

Unité carrée =



3 =



Dans ce cas l'unité-ligne sera composée de 4 parties.

Ensuite, le but sera de redistribuer les petits-carrés de telle sorte qu'on ait un rectangle dont l'un des côtés aura une longueur de 5 (ce qui se traduira par 20 petits carrés car l'unité-ligne a 4 parties dans ce cas), et dont l'autre côté sera la solution recherchée.

En suivant l'ordre donné par ce tableau :

1	21	41
2	22	42
3	23	43
4	24	44
5	25	45
6	26	46
7	27	47
8	28	48
9	29	
10	30	
11	31	
12	32	
13	33	
14	34	
15	35	
16	36	
17	37	
18	38	
19	39	
20	40	

Le résultat de la division est donné par la largeur du rectangle obtenu. Or, il y a une largeur minimale, 2, et une largeur maximale, 3. On pourra donc écrire que :

$$\frac{2}{4} \leq \frac{3}{5} \leq \frac{3}{4}$$

On divise les longueurs obtenues par 4 car l'unité-ligne a 4 parties.

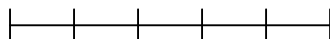
Mais comme on le voit, ceci est une approximation. Bien sûr, si on avait divisé l'unité-ligne en 10 parties, on aurait obtenu à la fin le développement décimal de la fraction 3/5.

4.3.1.- Le carré d'un nombre interprété comme une surface

Si un nombre est représenté par une ligne droite comme on l'a vu auparavant, la surface carrée obtenue en prenant comme côté la droite en question représentera le « carré » du premier nombre. Cela découle aussi de la présentation de la multiplication présentée plus haut.

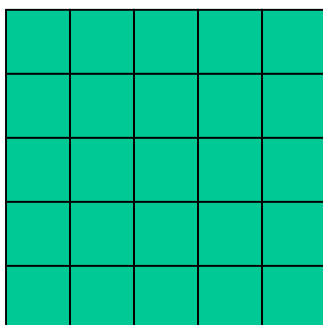
Exemple :

Soit le nombre 5 ainsi :



Unité-ligne = 

Son carré sera :



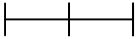
Unité-carrée = 

Mais si l'unité n'est pas composée d'un seul petit segment, alors en élevant le nombre au carré on obtiendra aussi une autre unité-carrée.

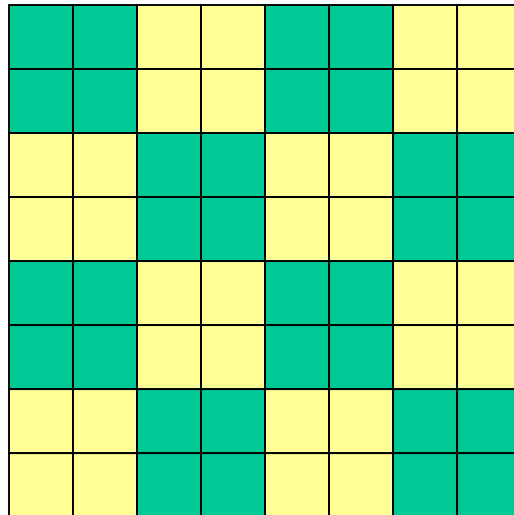
Exemple :


Soit le nombre 4 représenté ainsi :



Unité-ligne = 

Alors son carré sera représenté ainsi :



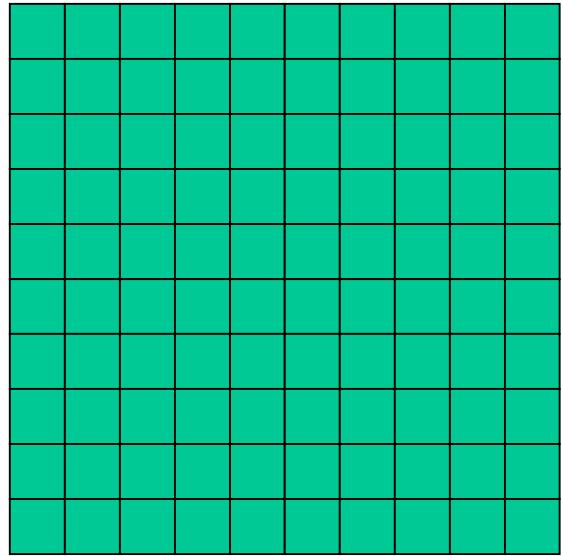
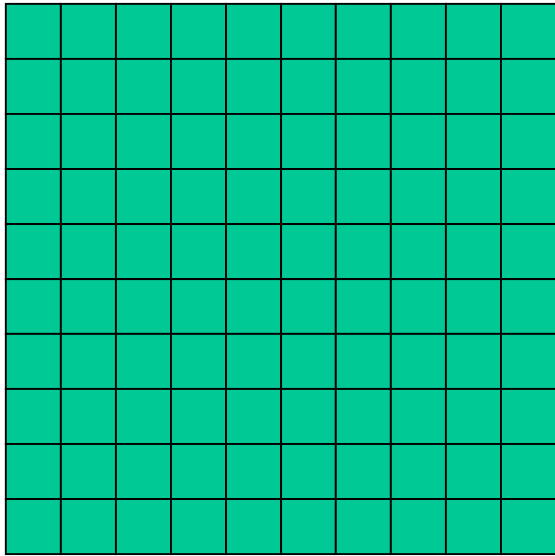
Unité-carrée = 


Le résultat sera donc le rapport $\frac{64}{2^2} = 16$

4.3.2.- Des approximations de la racine carrée interprétées comme des rapports

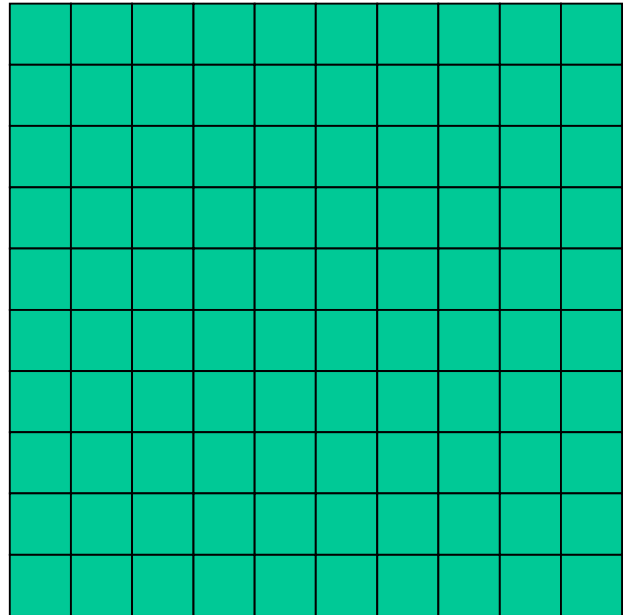
Pour obtenir une approximation de la racine carrée du nombre 2, on doit d'abord représenter le nombre 2 par une surface. Puis, à l'aide de cette surface, on essaiera de construire un carré dont les longueurs des côtés seront la solution du calcul.

Voici une représentation du nombre 2 à l'aide de deux carrés de $n \times n$ sous-carrés où $n=10$:

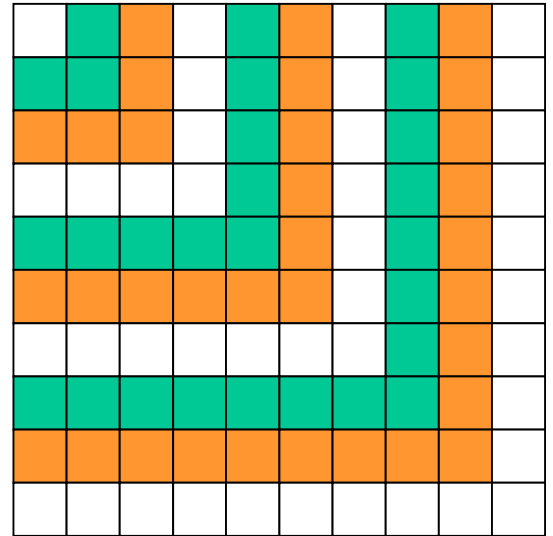
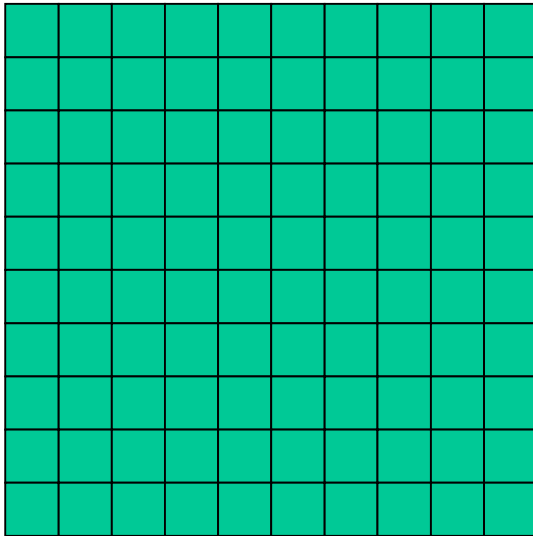


Unité-ligne = 

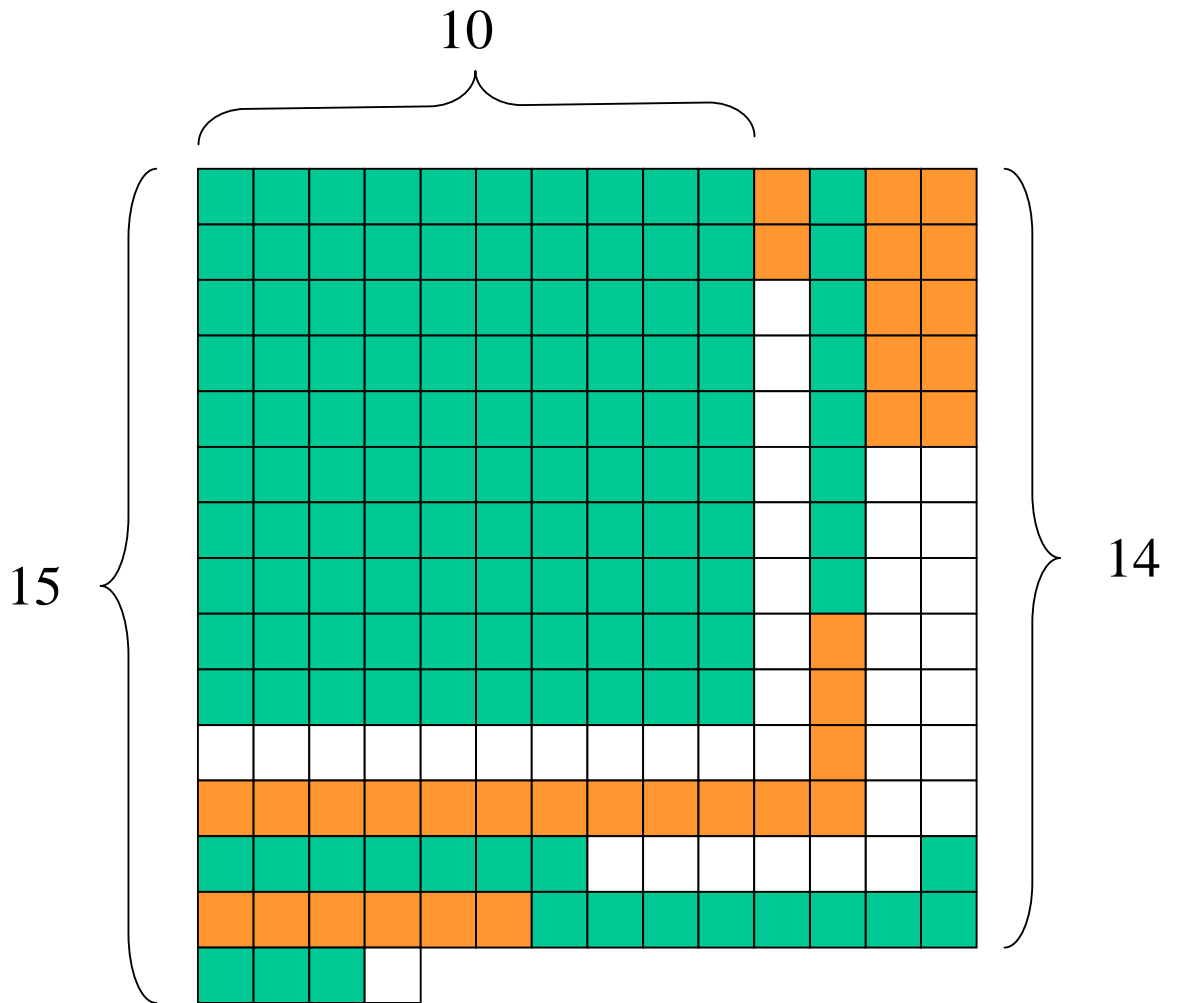
Unité-carrée =



Puis on peut mettre en évidence les gnomons du 1 de droite :



Ensuite on rajoute les gnomons du deuxième carré sur le premier en suivant l'ordre indiqué au point 3 :



Puis on observe les longueurs minimales et maximales obtenues. On établit la relation :

$$\frac{14}{10} \leq \sqrt{2} \leq \frac{15}{10}$$

On divise les longueurs obtenues par 10 car l'unité-ligne a 10 parties dans ce cas.

Comme on l'a vu, on a essayé de construire un carré à l'aide de deux carrés de départ.

En ce qui concerne l'erreur, il est clair que comme il s'agit de construire un carré, l'erreur sera plus petite que $1/n$.

Cependant, si l'on note c_n et C_n les côtés minimaux et maximaux du carré obtenu en fonction de n , on peut écrire, pour nous rapprocher de la notation actuelle des limites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} = \sqrt{2}$$

Erreur :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

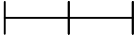
Pour avoir une bonne approximation de la racine carrée, il faudrait avoir le plus possible de petits carrés et changer les unités. Et pour calculer la racine carrée de 3, par exemple, il faudrait partir de 3 carrés. Par analogie, on peut imaginer un calcul tridimensionnel pour les racines cubiques et ainsi de suite.

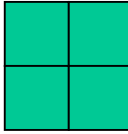
4.3.3 Approximation de la racine carrée de la somme des carrés de deux nombres

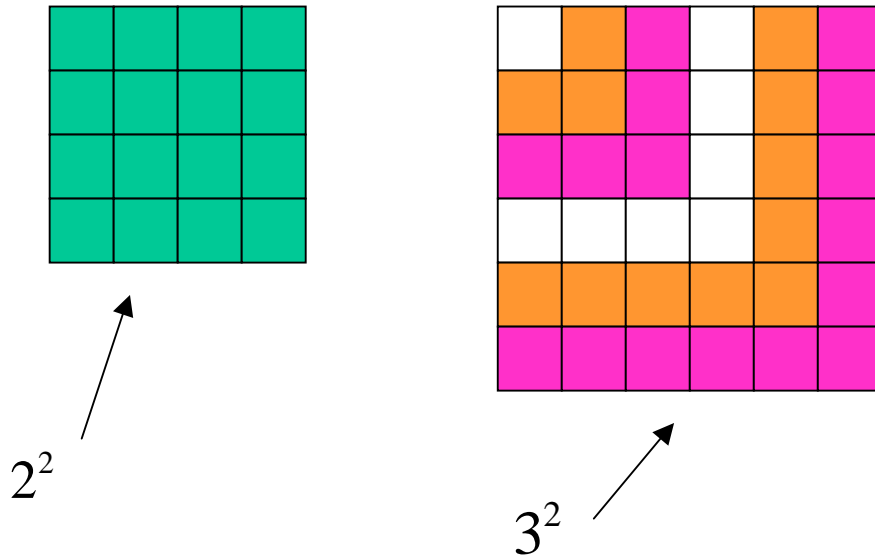
On utilise le principe de l'ajout des gnomons comme pour le calcul de la racine carrée de 2. Par exemple, si l'on veut une approximation de $\sqrt{2^2 + 3^2}$, on aura d'abord deux carrés représentant 2^2 et 3^2 (ici l'unité-ligne est représentée par 2 parties):

⁷ Cf Appendice..

⁸ Ceci a des liens avec la preuve de ...

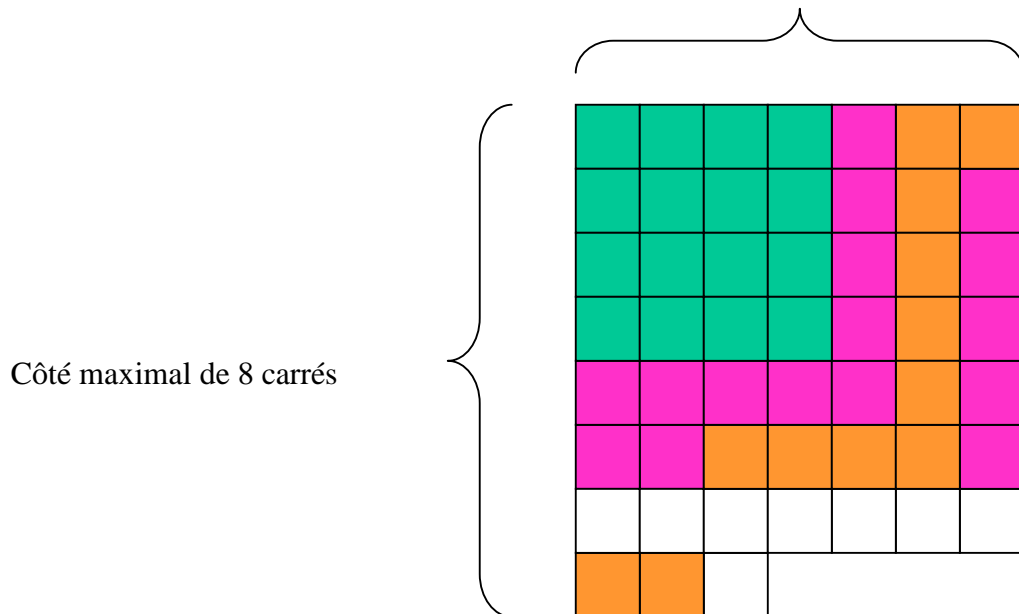
Unité-ligne = 

Unité-carrée = 



Puis on place les petits carrés du carré de gauche sur celui de droite avec la procédure montrée précédemment :

Côté minimal de 7 carrés



On peut alors établir cette relation :


$$\frac{7}{2} \leq \sqrt{2^2 + 3^2} \leq \frac{8}{2}$$


On divise les longueurs obtenues par 2 car l'unité-ligne a 2 parties dans ce cas.

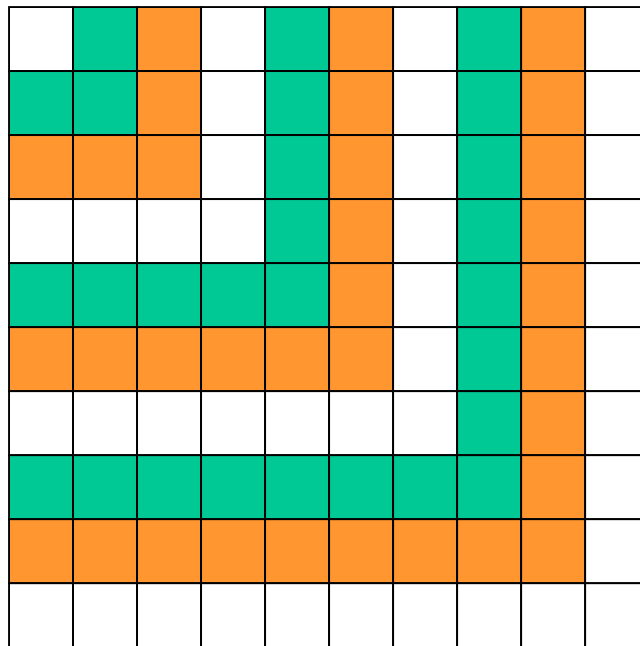
4.3.4 Approximation de la racine carrée de certaines différences successives.

Si on veut calculer d'abord $\sqrt{10^2 - 9^2}$, puis $\sqrt{10^2 - 8^2}$, $\sqrt{10^2 - 7^2}$ et ainsi de suite, on procèdera ainsi comme suit.

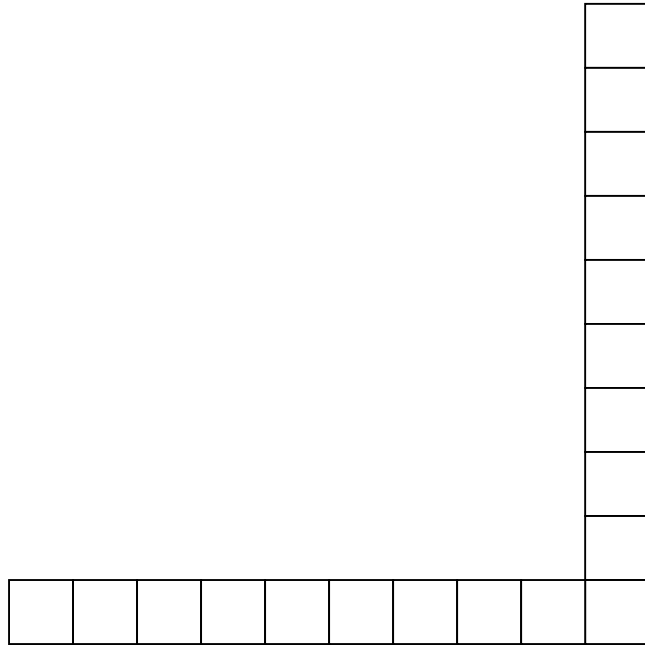
Tout d'abord on considère un carré représentant le nombre 10^2 :

Unité-ligne = 

Unité-carrée = 



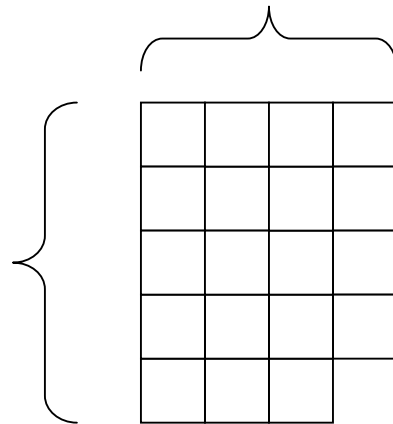
Puis, il est assez clair que le nombre $10^2 - 9^2$ est représenté par le dernier gnomom blanc, composé de 19 petits carrés blancs :



Maintenant, si l'on veut la racine de $10^2 - 9^2$, on doit utiliser la procédure décrite précédemment et on obtiendra :

Côté minimal de 4 carrés

Côté maximal de 5 carrés



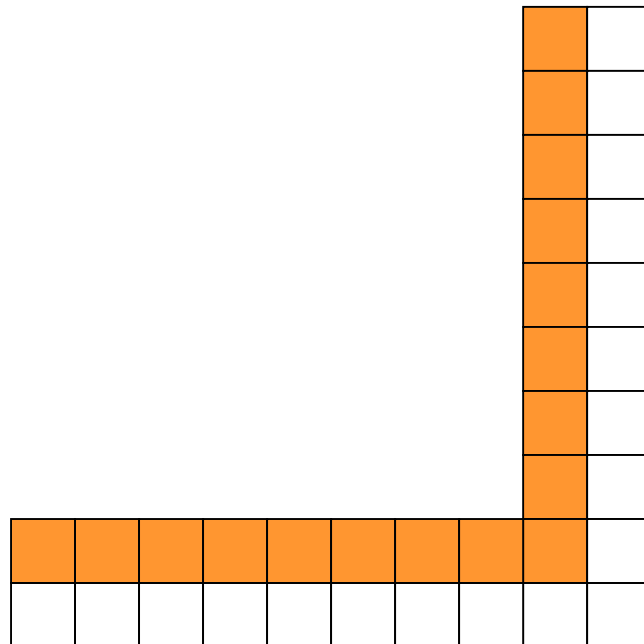
Ce qui nous permet d'établir la relation suivante :

$$\frac{4}{1} \leq \sqrt{10^2 - 9^2} \leq \frac{5}{1}$$

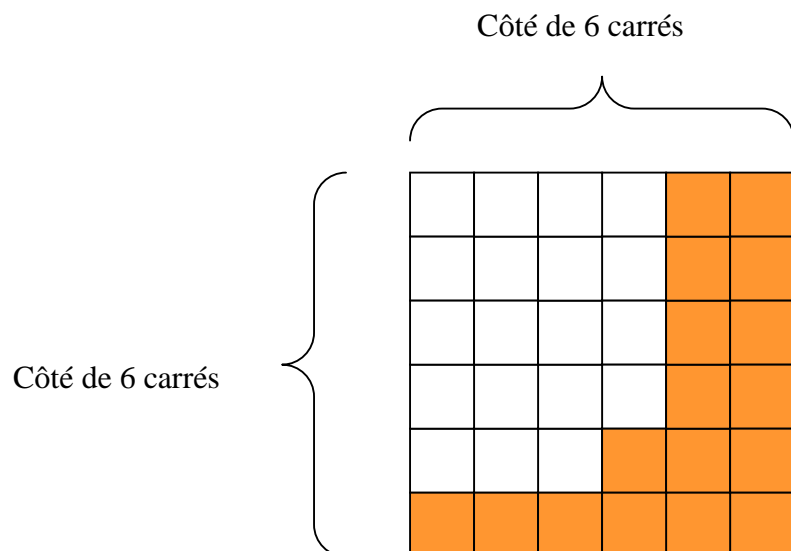
$$\frac{4}{1} \leq \sqrt{10^2 - \left(\frac{9}{1}\right)^2} \leq \frac{5}{1}$$

On divise les longueurs obtenues par 1 car l'unité-ligne a 1 seule partie dans ce cas.

Maintenant, si l'on veut calculer $\sqrt{10^2 - 8^2}$, on devrait d'abord prendre les deux derniers gnomons du carré initial représentant 10^2 car il est clair que cela représente $10^2 - 8^2$:



A présent, pour calculer la racine de ce nombre, on devrait encore procéder comme auparavant mais, c'est cela qui est intéressant, on a déjà fait l'opération pour le gnomon blanc ! On doit donc partir du carré blanc incomplet trouvé précédemment et rajouter les carrés de l'autre gnomon et l'on obtient :

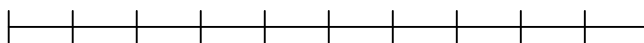


Ce qui nous permet d'établir la relation suivante :

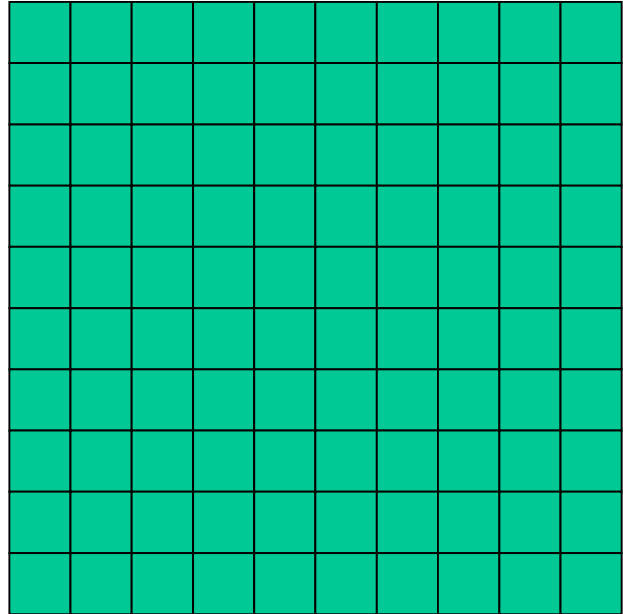
$$\frac{6}{1} \leq \sqrt{10^2 - 8^2} \leq \frac{6}{1}$$

Et l'on peut continuer ainsi jusqu'au calcul de $\sqrt{10^2 - 1^2}$

Or, on aurait pu calculer aussi $\sqrt{1^2-0.9^2}$, puis $\sqrt{1^2-0.8^2}$, $\sqrt{1^2-0.7^2}$, etc. Pour cela on aurait dû partir du même carré d'avant mais en changeant les unités :

Unité-ligne = 

Unité-de-surface =



Dans ce cas les résultats trouvés auraient été :

$$\frac{4}{10} \leq \sqrt{1^2 - 0.9^2} \leq \frac{5}{10}$$

$$\frac{4}{10} \leq \sqrt{1^2 - \left(\frac{9}{10}\right)^2} \leq \frac{5}{10}$$

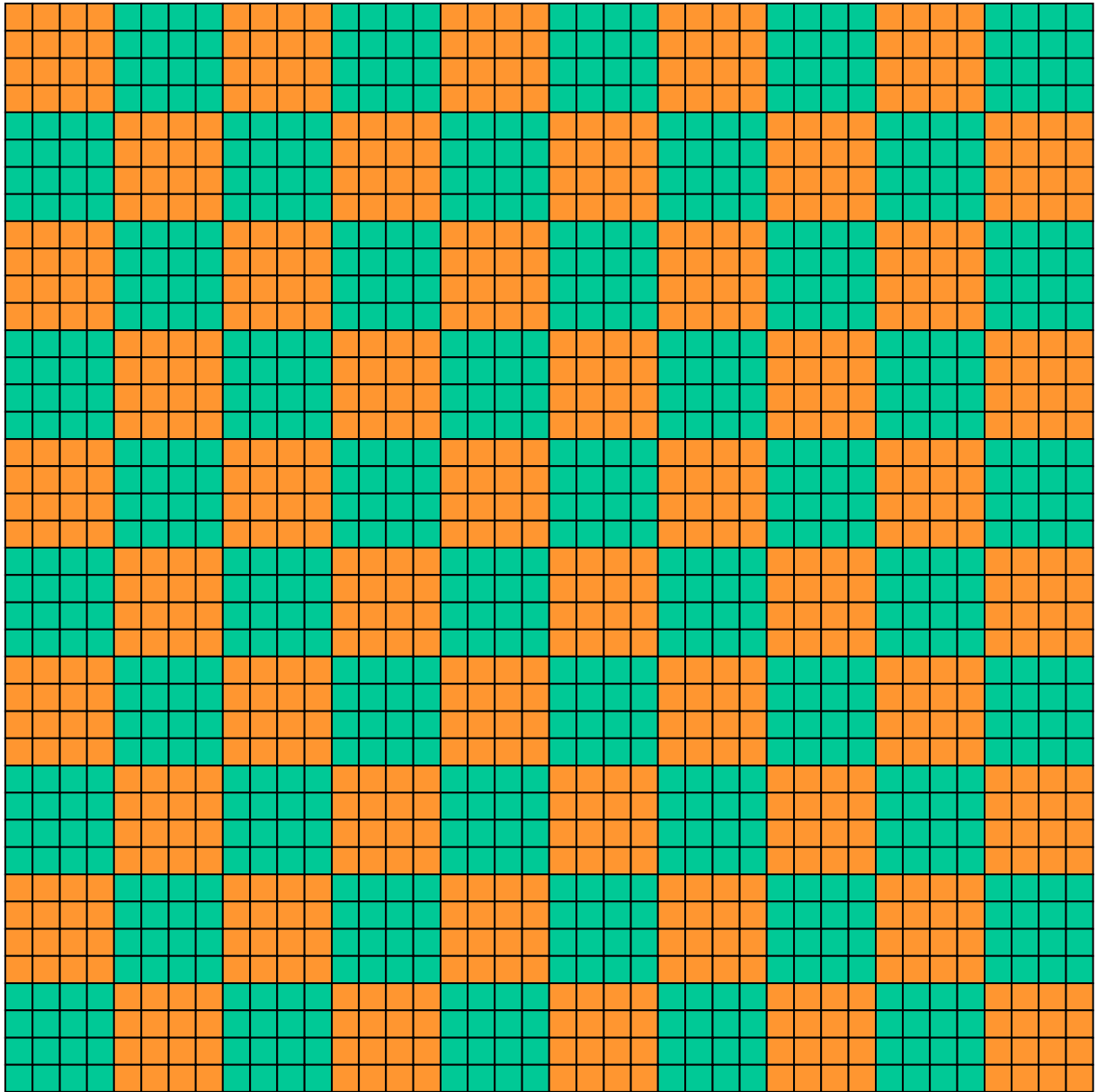
$$\frac{6}{10} \leq \sqrt{1^2 - 0.8^2} \leq \frac{6}{10}$$

$$\frac{6}{10} \leq \sqrt{1^2 - \left(\frac{8}{10}\right)^2} \leq \frac{6}{10}$$

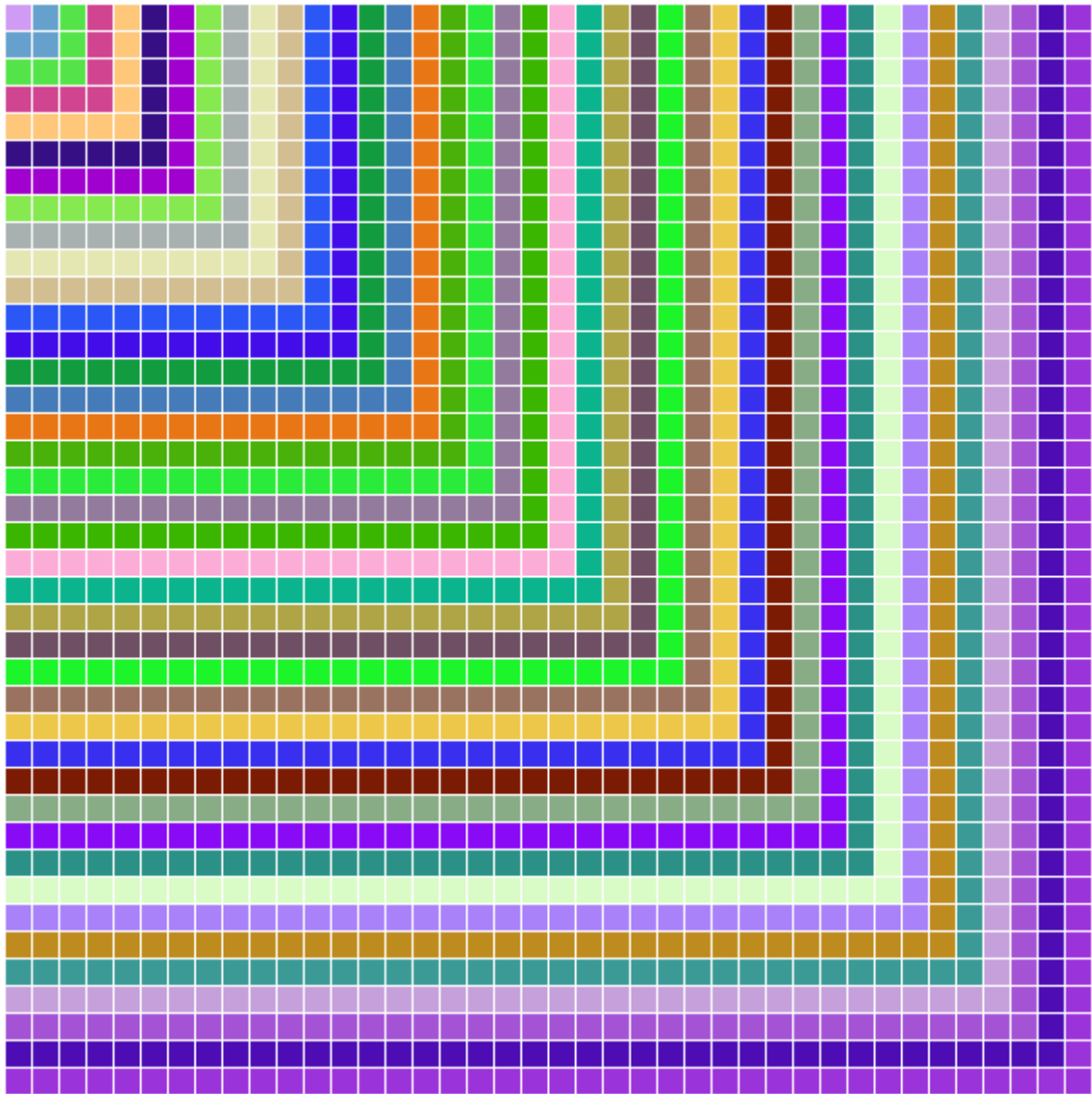
Comme on le voit, le calcul des approximations des racines différences dépend des calculs aux étapes précédentes.

Maintenant, si l'on veut de meilleures approximations des racines précédentes, on devra augmenter le nombre de petits carrés composant le grand carré de départ et on devra aussi changer l'unité.

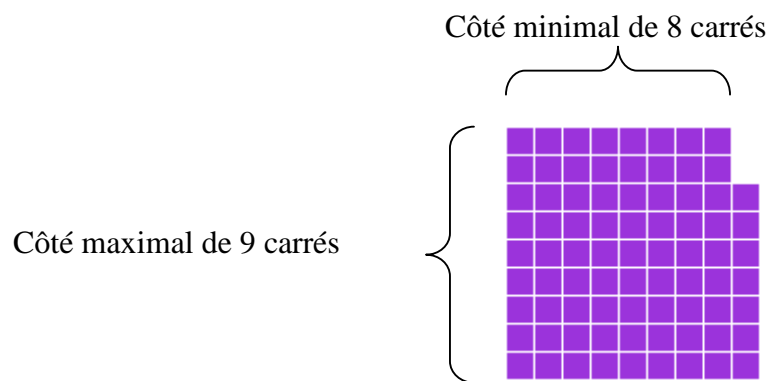
Voyons ce qui se passe si l'unité-ligne est de 40. Dans ce cas l'unité-de-surface sera composée de 1600 petits carrés. Le carré sera le suivant (on utilise les couleurs verte et orange pour distinguer les groupes de 16 petits carrés).



Voici le carré avec les gnomons indiqués avec des couleurs différentes :



Dans ce cas, si l'on prend le dernier gnomon, le 40^{ième}, on va former un carré comme on l'a exposé précédemment et les côtés maximal et minimal de ce carré vont donner une approximation non pas de $\sqrt{1^2 - 0.9^2}$ mais de $\sqrt{1^2 - 0.975^2}$:

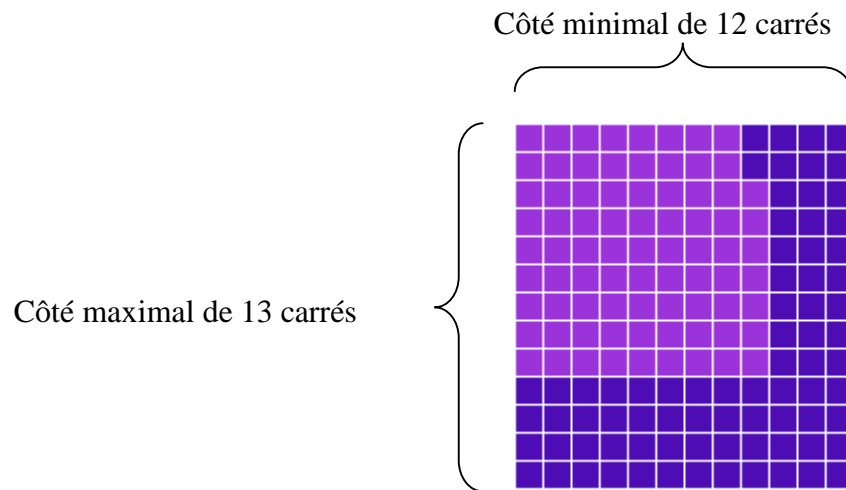


Ce qui nous permet d'établir la relation suivante :

$$\frac{8}{40} \leq \sqrt{1^2 - 0.975^2} \leq \frac{9}{40}$$

$$\frac{8}{40} \leq \sqrt{1^2 - \left(\frac{39}{40}\right)^2} \leq \frac{9}{40}$$

Puis, si l'on prend le 39^{ème} gnomon du carré de départ et qu'on distribue ses carrés comme on l'a montré plus haut, on obtiendra une approximation de $\sqrt{1^2 - 0.95^2}$:

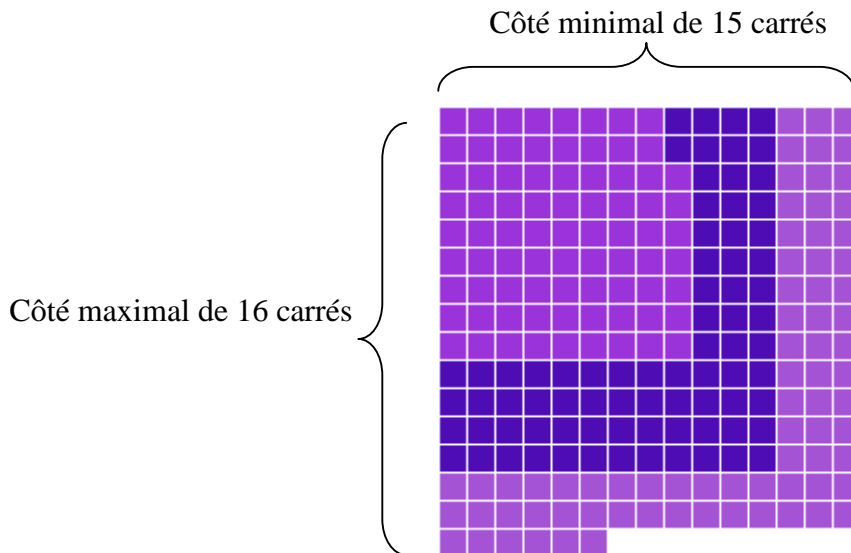


Ce qui nous permet d'établir la relation suivante :

$$\frac{12}{40} \leq \sqrt{1^2 - 0.95^2} \leq \frac{13}{40}$$

$$\frac{12}{40} \leq \sqrt{1^2 - \left(\frac{38}{40}\right)^2} \leq \frac{13}{40}$$

Puis, si l'on prend le 38^{ème} gnomon du carré de départ et qu'on distribue ses carrés comme on l'a montré plus haut, on obtiendra une approximation de $\sqrt{1^2 - 0.925^2}$:

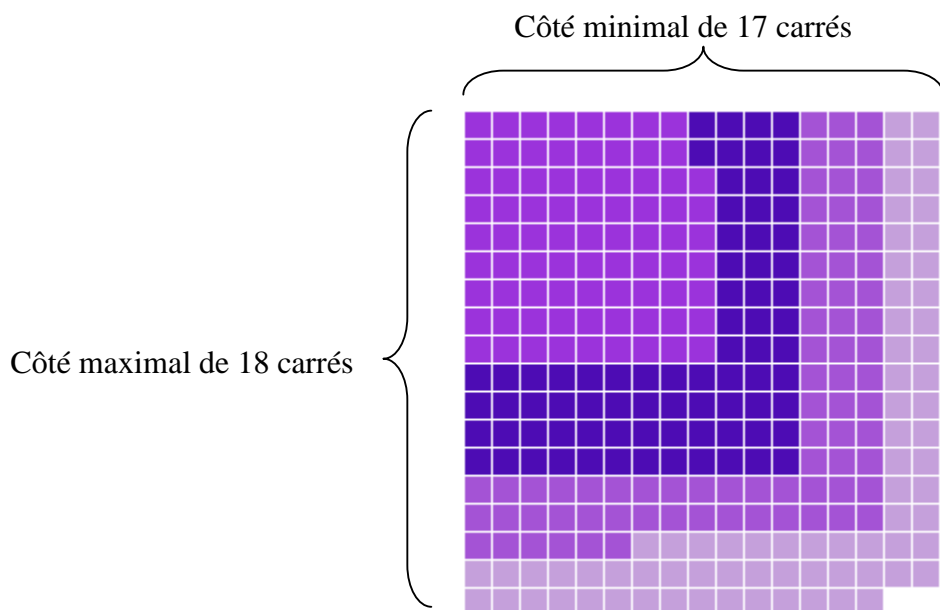


Ce qui nous permet d'établir la relation suivante :

$$\frac{15}{40} \leq \sqrt{1^2 - 0.925^2} \leq \frac{16}{40}$$

$$\frac{15}{40} \leq \sqrt{1^2 - \left(\frac{37}{40}\right)^2} \leq \frac{16}{40}$$

Enfin, pour avoir une approximation de $\sqrt{1^2 - 0.9^2}$ il faudra attendre que le 37^{ème} gnomon soit enlevé du carré de départ :



Ce qui nous permet d'établir la relation suivante :

$$\frac{17}{40} \leq \sqrt{1^2 - 0.9^2} \leq \frac{18}{40}$$

$$\frac{17}{40} \leq \sqrt{1^2 - \left(\frac{36}{40}\right)^2} \leq \frac{18}{40}$$

Si $n=1000$, avec le premier gnomon on aurait une approximation de $\sqrt{1^2 - 0.999^2}$ et il faudrait attendre le 901^{ème} gnomon pour avoir une approximation de $\sqrt{1^2 - 0.9^2}$. Mais dans ce cas l'approximation de $\sqrt{1^2 - 0.9^2}$ sera très précise.

Ce fait montre deux choses importantes. La première est qu'avec cette méthode, si l'on veut des calculs de plus en plus précis de $\sqrt{1^2 - \gamma^2}$, on aura aussi des calculs de plus en plus précis des $\sqrt{1^2 - \gamma^2}$ avec γ compris entre 0.9 et 1. Plus le nombre de petits carrés du carré de départ sera grand, plus on aura des calculs précis des nombres entre 0.9 et 1. Et il en sera de même pour les nombres entre 0.8 et 0.9, etc.

On peut formaliser ceci ainsi :

En fait, il est clair maintenant que selon le nombre n , on obtiendra des approximations des racines de $\sqrt{1^2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}$ avec i variant de n à 1. Plus n sera grand, plus l'approximation des $\sqrt{1^2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}$ sera précise.

4.4.- Preuve du fait que la méthode présentée au début de cet article, au point 3, correspond à une somme de Riemann pour la fonction

$f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$ entre 0 et 1 :

4.4.1 Somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$ entre 0 et 1 :

La somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$, entre 0 et 1, est la suivante pour n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1^2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right)$$

Maintenant, si on passe à la limite, on obtient l'intégrale de Riemann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1^2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right) \right) = \int_0^1 \sqrt{1^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1^2 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{n^2 - i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{n^2 - i^2} \cdot \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{n^2 - i^2} \right)}{n^2} \end{aligned}$$

Donc,


$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1^2 - x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{n^2 - i^2} \right)}{n^2} \right)$$


4.4.2 Lien entre la somme de Riemann du point 4.3.1 et les calculs avec la méthode exposée dans cet article

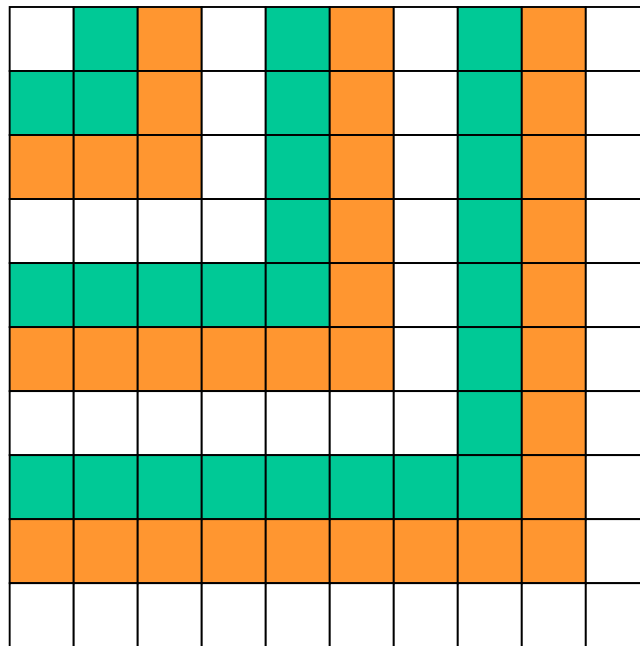
Comme on l'a montré à partir d'une somme de Riemann,

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{n^2 - i^2} \right)}{n^2} \right)$$

Or, l'expression $\sqrt{n^2 - i^2}$ correspond aux calculs de racines que l'on a effectués au point 4.3.4. En effet, soit par exemple $n=10$. Alors n^2 correspond à un carré composé de 100 petits sous-carrés. L'unité-ligne est n :

Unité-ligne = 

Unité-carrée = 



Si, par exemple $i=8$, alors on devra calculer $\sqrt{10^2 - 8^2}$ comme on l'a vu au point 4.2.4 et on obtiendra :

$$\frac{6}{1} \leq \sqrt{10^2 - 8^2} \leq \frac{6}{1}$$

Or, il est clair qu'en général on obtient une approximation de $\sqrt{n^2 - i^2}$. Si l'on veut une valeur plus précise de cette racine, il faudra prendre une unité carrée plus grande. Pour cela le carré de départ sera plus grand.

Plus le carré de départ sera grand, plus les $\sqrt{n^2 - i^2}$ seront précis. La différence entre la somme de Riemann et ce calcul est que dans la somme de Riemann on calcule des surfaces de rectangles tandis qu'ici on ne calcule que des racines.

Et finalement, l'expression :

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{n^2 - i^2} \right)}{n^2}$$

correspond au calcul fait au début de cette article, au point 3. En effet, en haut de la fraction nous avons ce qui correspond aux sommes des côtés maximaux et minimaux et en bas ce qui correspond à l'unité de surface choisie.

Dans la somme de Riemann les bases des rectangles tendent vers 0 et nous sommes censés avoir des valeurs précises pour les hauteurs. Or, cela est le cas idéal. Dans la pratique, on calcule les sommes de Riemann aussi avec des approximations successives des hauteurs.

Dans la méthode proposée dans cet article, la convergence se fait différemment. Alors dans l'intégrale de Riemann il faudrait avoir déjà le calcul exact des racines, dans cette méthode les racines sont calculés petit à petit à chaque étape. On peut montrer que lorsque n tend vers l'infini on aura l'ensemble des racines calculées et il y aura donc une réelle converge vers $\frac{\pi}{4}$.

5.- CONCLUSIONS

Comme on le voit, cette méthode est intéressante du point de vue historique et aussi informatique car grâce a ordinateurs on peut arriver à une assez bonne précision. Bien sûr, comme c'était écrit au départ, le but n'est pas d'atteindre une grande vitesse de calcul mais plutôt de visualiser la construction du nombre Pi et des racines carrées. Par une méthode discrète et itérative on arrive à construire des nombres irrationnels et aussi un nombre transcendant comme Pi. Ceci peut contribuer à continuer la réflexion sur la définition et la construction des nombres réels.

6.- Bibliographie

[1] Cousquer Eliane, « La mémoire des nombres. De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels », p. 295-318 in « La mémoire des nombres. Actes du 10ème colloque inter-IREM d'épistémologie & histoire des mathématiques » - université de Caen - Cherbourg, 27-28 mai 1994, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1997.

[2] Hairer E. et Wanner G., « L'analyse au fil de l'histoire », éditions Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2001

[3] Iffrah Georges, « Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention », éditions Robert Laffont, Paris, 1985

Annexe 1.- ALGORITHME ET CODE EN C/C++

```
/**
//      Voici le code qui permet de calculer les sommes minimales et
//maximales vues au point 3 de cet article. Dans ce programme, le mot
//« Equerre » fait référence aux gnomons. La variable iNbX correspond au
//nombre n qui est la longueur du côté du carré de départ. La variable
//iEquerre correspond au rang des gnomons ajoutés au nouveau carré.
//
//  © Jaime Vladimir TORRES-HEREDIA JULCA, 2015
//
**/
```

```
double iSommeMin = 0;

double iSommeMax = 0;

double iCompteurRajout = 0;

double iEquerre = 1;

double iCompteurEquerre=0;

double iTotalequerre;

double iARajouter = 0;

double iNbX = 14.0;

char lpszSomme[100];

bool bEquerreComplete;

while (iNbX >= 1) {

    iARajouter = 2*iNbX-1;

    iCompteurRajout = 0;

    while (iCompteurRajout < iARajouter) {

        iTotalequerre = iEquerre*2-1;
        bEquerreComplete = false;
        do {

            iCompteurEquerre++;
            iCompteurRajout++;
```

```

        } while ((iCompteurEquerre <
iTotalEquerre)&&(iCompteurRajout < iARajouter));

        if (iCompteurEquerre==iTotalEquerre) //&&(iCompteurRajout
< iARajouter)
        {
            iEquerre++;

            iCompteurEquerre = 0;

            bEquerreComplete = true;

        }
        if (iCompteurRajout == iARajouter)
        {

            if (bEquerreComplete) {
                iSommeMin+=iEquerre-1;
                iSommeMax+=iEquerre-1;

                bEquerreComplete = false;
            }
            else {
                iSommeMin+=iEquerre-1;
                iSommeMax+=iEquerre;
            }

        }

        }

        iNbX--;

    }

    gcvt(iSommeMin, 20, lpszSomme);

    pDC->TextOut(200,50,lpszSomme);

    gcvt(iSommeMax, 20, lpszSomme);

    pDC->TextOut(200,100,lpszSomme);

```

Cet article est protégé par IDDN (<http://www.iddn.org>)

Numéro IDDN :

IDDN.CH.010.0120892.000.R.P.2016.035.31235