



HAL
open science

KAM POUR L'ÉQUATION DES ONDES NON LINÉAIRE SUR LE CERCLE

Moudhaffar Bouthelja

► **To cite this version:**

Moudhaffar Bouthelja. KAM POUR L'ÉQUATION DES ONDES NON LINÉAIRE SUR LE CERCLE. 2016. hal-01249664

HAL Id: hal-01249664

<https://hal.science/hal-01249664>

Preprint submitted on 2 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

KAM POUR L'ÉQUATION DES ONDES NON LINÉAIRE SUR LE CERCLE.

MOUDHAFFAR BOUTHELJA

RÉSUMÉ. Dans cet article on considère l'équation des ondes sur le cercle donnée par :

$$u_{tt} - u_{xx} + mu = g(x, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{T},$$

avec $m \in [1, 2]$ une masse et $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$. Cette équation va être traitée comme une perturbation d'un hamiltonien intégrable donné par :

$$(*) \quad u_t = v, \quad v_t = -u_{xx} + mu.$$

Proche de l'origine, on prouve l'existence de solutions quasi-périodiques de faible amplitude, proches de la solution de l'équation linéaire (*). La preuve fait appel à un résultat KAM en dimension infinie démontré dans la première partie de cet article, Un résultat de forme normale.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction et résultats	1
1.1. Introduction	1
1.2. Résultats	3
2. Petits diviseurs	6
2.1. Non résonance des fréquences	6
2.2. Estimations des petits diviseurs	8
3. Forme normale	12
3.1. Notations	12
3.2. Résonance	20
3.3. Procédure de Birkhoff	21
3.4. Forme normale sur les ensembles admissibles	28
3.5. Passage aux variables action-angle	29
3.6. Re-scaling des variables	30
3.7. Passage aux variables réelles	32
4. Théorème KAM pour l'équation des ondes	33
4.1. Hypothèses et énoncé du théorème KAM	33
4.2. Vérifications des hypothèses du théorème KAM	34
5. Preuve du Théorème 1.3	41
Références	42

1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS

1.1. **Introduction.** Dans cet article on considère l'équation des ondes cubique sur le cercle donnée par :

$$(1.1) \quad u_{tt} - u_{xx} + mu = g(x, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{S}^1,$$

avec $m \in [1, 2]$ la masse et g est une fonction holomorphe réelle sur un voisinage de $\mathbb{S}^1 \times J$, avec J un voisinage de zero de \mathbb{R} . On suppose que g est de la forme :

$$(1.2) \quad g(x, u) = 4u^3 + O(u^4).$$

On prouve l'existence de solutions quasi-périodiques de faibles amplitudes proche de la solution de l'équation linéaire.

Vu que la variable espace appartient au cercle, on peut diagonaliser la partie linéaire de l'équation dans la base de Fourier. Ainsi on ramène notre problème à l'étude d'un hamiltonien intégrable perturbé sous la forme :

$$(\square) \quad H = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \text{Perturbation},$$

avec $\lambda_s = \sqrt{s^2 + m}$. Afin de montrer l'existence de solutions quasi-périodiques, on fera appel à un résultat KAM en dimension infinie adapté à notre situation et prouvé dans [6]. En effet la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) nous dit que, sous l'effet d'une petite perturbation, un hamiltonien intégrable continue à exhiber des tores invariants de dimension finie dans un espace de dimension infinie. Et cela sous certaines conditions de non résonance. L'existence des ces tores invariants, nous donne l'existence de solutions quasi-périodiques. Le principal problème qu'on rencontre ici est que les fréquences λ_s ne vérifient pas les hypothèses de non résonance standards¹. Dans le cas de Dirichlet, la somme dans (\square) est restreinte aux indices positifs (voir [15]). Dans ce cas on peut vérifier les conditions de non résonance standards grâce à la masse m . Dans le cas périodique on s'autorise à la fois des indices positifs et négatifs. On remarque que $\lambda_s = \lambda_{-s}$. On obtient donc un système hamiltonien résonant. Pour cela le théorème KAM auquel on fera appel, doit traiter le cas de valeurs propres multiples.

L'existence de solutions quasi-périodiques pour des EDPs hamiltoniennes non linéaires a suscité l'intérêt de nombreux auteurs. Le premier résultat de préservation de tels solutions, après la perturbation d'un hamiltonien intégrable de dimension infinie, a été donné par Kuksin en 1987 dans [11, 10] pour l'équation de Schrödinger en dimension 1 avec condition de Dirichlet.

Concernant l'équation des ondes le premier résultat est dû à Wayne en 90 dans [15]. Il a considéré l'équation des ondes cubique en dimension 1 avec potentiel extérieur dans $L^2([0, 1])$ non nul et avec conditions de Dirichlet (ce qui entraîne la simplicité du spectre).

On peut aussi citer le travail de Pöschel dans [13]. Dans cet article, L'auteur a considéré l'équation des ondes en dimension 1 avec masse, condition de Dirichlet homogène et une non-linéarité cubique analytique mais qui ne dépend pas de la variable d'espace.

En 1998 Chierchia et You considèrent dans [7] l'équation des ondes en dimension 1 avec potentiel périodique analytique et une perturbation quadratique analytique qui ne dépend pas de la variable espace. Dans ce cas le potentiel joue le rôle de paramètre extérieure. Ce qui permet de vérifier les contions de non résonance. En particulier les auteurs ne s'autorisent pas le cas où le potentiel est nul.

Le travail le plus récent est dû à Berti, Biasco et Procesi en 2013 dans [5]. Dans cet article ils considèrent l'équation des ondes dérivative donnée par :

$$u_{tt} - u_{xx} + mu + f(Du) = 0, \quad m > 0, \quad D := \sqrt{-\partial_{xx}^2 + m}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T},$$

avec $f(s)$ est une non-linéarité réelle analytique de la forme

$$f(s) = as^3 + \sum_{k \geq 5} f_k s^k, \quad a \neq 0.$$

1. Du type : $|k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}$, $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

On remarque ici que la non-linéarité est indépendante de la variable espace x . Ce qui implique que le moment $-i \int_{\mathbb{T}} \bar{u} \partial_x u dx$ est conservé. Cette symétrie simplifie un peu la preuve du théorème KAM.

Dans notre cas, il n'y a pas de paramètres extérieurs. La variable espace appartient au cercle, donc on est dans le cas périodique. La non-linéarité g dépend de la variable d'espace.

Le plan de l'article est le suivant :

- Dans la première section on donne le résultat principal de l'article (voir Théorème 1.3).
- Dans la deuxième section on montre que, pour un ensemble admissible (voir définition 1.2), les petits diviseurs de l'équation des ondes (1.1) sont non nuls. Ceci est montré pour $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{U}$ avec \mathcal{U} est de mesure de Lebesgue nulle.
- Dans la troisième section, grâce à une forme normale de Birkhoff, on transforme l'hamiltonien résonant associé à l'équation (1.1) en un hamiltonien qui vérifie les hypothèses du théorème KAM (voir Théorème 3.7).
- Dans la quatrième section on énonce le théorème KAM, (voir Théorème 4.1), et on vérifie les hypothèses de non résonance (voir Lemme 4.2-4.8).
- Dans la dernière partie on prouve l'existence de solutions quasi-périodiques de faibles amplitudes pour l'équation (1.1).

1.2. Résultats. On considère l'équation des ondes sur le cercle (1.1) avec g de la forme (1.2). En considérant le changement de variable $v = \dot{u}$, l'équation (1.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\Lambda^2 u + g(x, u), \end{cases}$$

avec $\Lambda := (\sqrt{-\Delta + m})$.

Soit $\psi := \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda^{\frac{1}{2}}u - i\Lambda^{-\frac{1}{2}}v)$. On note $\dot{\psi}$ la dérivée de ψ par rapport à t , donnée par :

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Lambda^{1/2} \dot{u} - i\Lambda^{-1/2} \dot{v} \right).$$

En remarquant que $u = \Lambda^{-1/2} \left(\frac{\psi + \bar{\psi}}{\sqrt{2}} \right)$ et en remplaçant \dot{u} et \dot{v} par leurs expressions on obtient :

$$\frac{1}{i} \dot{\psi} = \Lambda \psi - \frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda^{-1/2} g \left(x, \Lambda^{-1/2} \left(\frac{\psi + \bar{\psi}}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Munissons $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ de la forme symplectique réelle classique $-id\psi \wedge d\bar{\psi} = -du \wedge dv$. On considère l'hamiltonien suivant :

$$H(\psi, \bar{\psi}) = \int_{\mathbb{S}^1} (\Lambda \psi) \bar{\psi} dx + \int_{\mathbb{S}^1} G \left(x, \Lambda^{-1/2} \left(\frac{\psi + \bar{\psi}}{\sqrt{2}} \right) \right) dx,$$

où G est une primitive de g par rapport à u , c'est-à-dire :

$$g = \partial_u G, \quad G(x, u) = u^4 + \mathcal{O}(u^5).$$

On peut alors écrire (1.1) sous la forme du système hamiltonien suivant :

$$\dot{\psi} = i \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}}.$$

Considérons à présent la base orthonormée de Fourier complexe donnée par : $\{\varphi_s(x) = e^{isx}/\sqrt{2\pi}, s \in \mathbb{Z}\}$. Dans cette base l'opérateur Λ est diagonal et on a :

$$\Lambda \varphi_s = \lambda_s \varphi_s,$$

avec $\lambda_s = \sqrt{s^2 + m}$. Décomposons ψ et $\bar{\psi}$ dans cette base, alors

$$\psi = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \xi_s \varphi_s \quad \text{et} \quad \bar{\psi} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \eta_s \varphi_{-s}.$$

En injectant cette décomposition dans l'expression de H , on obtient :

$$(1.3) \quad H = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \int_{\mathbb{S}^1} G \left(x, \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \right) dx.$$

Soit $\mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \times \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ muni de la forme symplectique complexe $-i \sum_{s \in \mathbb{Z}} d\xi_s \wedge d\eta_s$. De plus on définit

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} := \{(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}} \mid \eta_s = \bar{\xi}_s\}.$$

Alors l'équation des ondes (1.1) est équivalente au système Hamiltonien suivant sur $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_s = i \frac{\partial H}{\partial \eta_s}, \\ \dot{\eta}_s = -i \frac{\partial H}{\partial \xi_s}, \end{cases}$$

avec $s \in \mathbb{Z}$.

Posons $H = H_2 + P$, avec

$$(1.5) \quad H_2 = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s, \quad \text{et} \quad P = \int_{\mathbb{S}^1} G \left(x, \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \right) dx.$$

Remarque 1.1. On a $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$ et $g = \partial_u f$. Donc on peut écrire $P = P_4 + R_5$ avec :

$$P_4(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{S}^1} u^4 dx = \int_{\mathbb{S}^1} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \right)^4 dx,$$

$$R_5(\xi, \eta, x) = P(\xi, \eta, x) - P_4(\xi, \eta) = O(\|(\xi, \eta)\|^5).$$

De plus on peut écrire P_4 sous la forme :

$$P_4 = \sum_{i, j, k, l \in \mathbb{Z}} C(i, j, k, l) (\xi_i + \eta_{-i})(\xi_j + \eta_{-j})(\xi_k + \eta_{-k})(\xi_l + \eta_{-l}),$$

avec

$$C(i, j, k, l) := \int_{\mathbb{S}^1} \varphi_i(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } i + j + k + l = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit \mathcal{A} un ensemble fini de \mathbb{Z} de cardinal n . Fixons $I = (I_a)_{a \in \mathcal{A}}$ avec :

$$I_a > 0, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Soit T_I^n le tore réel de dimension n défini par :

$$T_I^n = \begin{cases} \xi_a = \bar{\eta}_a, |\xi_a|^2 = I_a & \text{si } a \in \mathcal{A} \\ \xi_s = \eta_s = 0 & \text{si } s \in \mathcal{L} = \mathbb{Z} \setminus \mathcal{A}. \end{cases}$$

Ce tore est stable par le flot Hamiltonien quand la perturbation P est nulle. On peut même donner l'expression analytique de la solution de l'équation des ondes linéaire.

Notre but dans tout ce qui suit est de démontrer la persistance du tore T_I^n quand la perturbation P n'est plus nulle, en faisant l'hypothèse cruciale que ce tore soit admissible. Un tore est dit admissible s'il est construit à partir d'un ensemble \mathcal{A} admissible.

Définition 1.2. Soit \mathcal{A} un ensemble fini de \mathbb{Z} . \mathcal{A} est admissible si pour tout $j \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, on a $-j \notin \mathcal{A} \setminus \{0\}$.

Notons $\mathcal{L} = \mathbb{Z} \setminus \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^- = \{j \in \mathcal{L} \mid -j \in \mathcal{A}\}$.

Dans un voisinage du tore invariant T_I^n dans \mathbb{C}^{2n} , on définit les variables action-angle $(r_a, \theta_a)_{\mathcal{A}}$ par :

$$\begin{cases} \xi_a = \sqrt{(I_a + r_a)} e^{i\theta_a}, \\ \eta_a = \bar{\xi}_a. \end{cases}$$

Pour $s \in \mathcal{A}$ on notera ω_s (au lieu de λ_s) les fréquences internes. Dans ces nouvelles variables et notations, la partie quadratique H_2 de H est égale à une constante près à

$$H_2 = \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a r_a + \sum_{s \in \mathcal{L}} \lambda_s \xi_s \eta_s.$$

La perturbation devient :

$$P(r, \theta, \xi, \eta) = \int_{\mathbb{S}^1} G(x, \hat{u}_{I,m}(r, \theta, \xi, \eta)) dx,$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{u}_{I,m}(r, \theta, \xi, \eta) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \sqrt{(I_a + r_a)} \frac{e^{-i\theta_a} \varphi_a(x) + e^{i\theta_a} \varphi_{-a}(x)}{\sqrt{2}(a^2 + m)^{1/4}} \\ &+ \sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{\xi_s \varphi_s(x) + \eta_{-s} \varphi_s(x)}{\sqrt{2}(s^2 + m)^{1/4}}. \end{aligned}$$

Posons $u_{I,m}(\theta, x) = \hat{u}_{I,m}(0, \theta, 0, 0)$. Alors, pour tout $I \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$, $m \in [1, 2]$ et $\theta_0 \in \mathbb{S}^1$, la fonction $(t, x) \mapsto u_{I,m}(\theta_0 + t\omega, x)$ est solution de l'équation des ondes linéaire. Dans ce cas, le tore est stable par le flot Hamiltonien.

Notre but est de démontrer un résultat similaire quand la perturbation n'est pas nulle.

Théorème 1.3. *Soit $\alpha > 1/2$. Supposons que \mathcal{A} est un ensemble admissible de \mathbb{Z} , de cardinal n . Supposons que la perturbation g est holomorphe réelle sur un voisinage de $\mathbb{S}^1 \times J$ avec J un voisinage de zéro de \mathbb{R} et qu'elle est de la forme $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$. Alors il existe un Borélien $\mathcal{U} \subset [1, 2]$ de mesure de Lebesgue nulle, tel que pour tout $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$, il existe ν_0 qui dépend de \mathcal{A} , m , et de la non linéarité g , tel que :*

- (1) *Pour tout $0 < \nu \leq \nu_0$ il existe un Borélien $\mathcal{D}' \subset [\nu, 2\nu]^n$ de mesure de Lebesgue asymptotiquement pleine, c'est-à-dire :*

$$\text{mes}([\nu, 2\nu]^n \setminus \mathcal{D}') \leq \nu^{\gamma+n}$$

avec $\gamma > 0$ et dépend de n .

- (2) *Pour tout $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$ et $I \in \mathcal{D}'$ il existe une fonction $u(\theta, x)$ analytique en θ et de classe H^α en $x \in \mathbb{S}^1$ telle que :*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \|u(\theta, \cdot) - u_{I,m}(\theta, \cdot)\|_{H^\alpha} \leq C\nu^{4/5},$$

avec C est une constante absolue.

- (3) *De plus, il existe $\omega' : ([1, 2] \setminus \mathcal{U}) \times [\nu, 2\nu]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant :*

$$\omega' = \omega + \nu M\rho + O(\nu^{3/2}),$$

telle que pour tout $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$ et $I \in \mathcal{D}'$ la fonction

$$t \mapsto u(\theta + t\omega', x)$$

soit solution de l'équation des ondes (1.1).

Tout le reste de l'article sera consacré à la preuve de ce théorème.

2. PETITS DIVISEURS

2.1. Non résonance des fréquences. Dans cette section, on suppose que \mathcal{A} est un ensemble admissible comme dans la Définition 1.2.

On considère le vecteur fréquence

$$\omega \equiv \omega(m) = (\omega_a(m))_{a \in \mathcal{A}},$$

avec $\omega_a(m) = \sqrt{a^2 + m}$. Le principal et unique résultat de cette section est le suivant :

Proposition 2.1. *Supposons que \mathcal{A} est un ensemble admissible de \mathbb{Z} . Notons $n := \text{Card}(\mathcal{A})$. Supposons que $\mathcal{A} \subset \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq N, N \geq 1\}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}^{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$ et pour tout $\chi > 0$ et tout $c \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\text{mes} \left\{ m \in [1, 2] \mid \left| \sum_{a \in \mathcal{A}} k_a \omega_a(m) + c \right| \leq \chi \right\} \leq C \frac{N^{2n^2} \chi^{1/n}}{|k|},$$

avec $|k| := \sum_{a \in \mathcal{A}} |k_a|$ et $C > 0$ est une constante qui dépend seulement de n .

La preuve utilise les mêmes arguments que ceux du théorème 6.5 de [2] (voir aussi [1] et [3]). Pour plus de clarté, on rappelle les principales étapes de la preuve.

Lemme 2.2. *Supposons que $\mathcal{A} \subset \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq N\}$. Pour tout $p \leq n := \text{Card}(\mathcal{A})$, on considère $a_1, \dots, a_p \in \mathcal{A}$. Alors le déterminant suivant*

$$D := \begin{vmatrix} \frac{d\omega_{a_1}}{dm} & \frac{d\omega_{a_2}}{dm} & \dots & \dots & \frac{d\omega_{a_p}}{dm} \\ \frac{d^2\omega_{a_1}}{dm^2} & \frac{d^2\omega_{a_2}}{dm^2} & \dots & \dots & \frac{d^2\omega_{a_p}}{dm^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^p\omega_{a_1}}{dm^p} & \frac{d^p\omega_{a_2}}{dm^p} & \dots & \dots & \frac{d^p\omega_{a_p}}{dm^p} \end{vmatrix}$$

vérifie la minoration

$$(2.1) \quad |D| \geq CN^{-2p^2},$$

avec $C = C(p) > 0$ est une constante qui dépend seulement de p .

Démonstration. Un calcul rapide nous donne

$$(2.2) \quad \frac{d^j \omega_i}{dm^j} = \frac{(2j-2)!}{2^{2j-1}(j-1)!} \frac{(-1)^{j+1}}{(a_i^2 + m)^{j-\frac{1}{2}}}.$$

En insérant cette formule dans D , en mettant dans la l -ième colonne $(a_l^2 + m)^{-1/2}$ en facteur, et dans la j -ième ligne $\frac{(2j-2)!}{2^{2j-1}(j-1)!}$ en facteur, notre déterminant est égal au signe près à :

$$\left[\prod_{l=1}^p \omega_{a_l}^{-1} \right] \left[\prod_{j=1}^p \frac{(2j-2)!}{2^{2j-1}(j-1)!} \right] \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_{a_1} & x_{a_2} & x_{a_3} & \dots & \dots & x_{a_p} \\ x_{a_1}^2 & x_{a_2}^2 & x_{a_3}^2 & \dots & \dots & x_{a_p}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{a_1}^p & x_{a_2}^p & x_{a_3}^p & \dots & \dots & x_{a_p}^p \end{vmatrix},$$

avec $x_a := (a^2 + m)^{-1} \equiv \omega_a^{-2}$. Le déterminant ci-dessous est un déterminant de Vandermonde, valant :

$$\prod_{1 \leq l < k \leq p} (x_{a_l} - x_{a_k}) = \prod_{1 \leq l < k \leq p} \frac{a_k^2 - a_l^2}{\omega_{a_l}^2 \omega_{a_k}^2}.$$

Puisque \mathcal{A} est un ensemble admissible, $\left| \prod_{1 \leq l < k \leq p} (a_k^2 - a_l^2) \right| \geq 1$. De plus on a $|a| \leq N$, donc pour tout $a \in \mathcal{A}$ on a $|\omega_a| \leq 2N$. Donc :

$$\prod_{l=1}^p \omega_{a_l}^{-1} \prod_{1 \leq l < k \leq p} \frac{1}{\omega_{a_l}^2 \omega_{a_k}^2} \geq \frac{1}{2^{p(2p-1)}} \frac{1}{N^{p(2p-1)}} \geq \frac{1}{2^{p(2p-1)}} \frac{1}{N^{2p^2}},$$

ce qui conduit à (2.1). \square

On a besoin de la proposition suivante, présente dans l'appendice B de [4].

Lemme 2.3. *Soit $(u^{(1)}, \dots, u^{(p)})$ une famille de p vecteurs libres de \mathbb{R}^n tel que $\|u^{(j)}\|_{\ell^1} \leq K$ pour $j \in [1, \dots, p]$. Soit w un vecteur de \mathbb{R}^n s'écrivant comme une combinaison linéaire de $u^{(1)}, \dots, u^{(p)}$. Alors il existe $j \in [1, \dots, p]$ tel que :*

$$(2.3) \quad |u^{(j)} \cdot w| \geq \frac{\|w\|_{\ell^2} \mathcal{V}_p(u^{(1)}, \dots, u^{(p)})}{pK^{p-1}},$$

avec $\mathcal{V}_p(u^{(1)}, \dots, u^{(p)})$ le volume euclidien du parallélépipède en dimension p engendré par les vecteurs $u^{(1)}, \dots, u^{(p)}$.

Rappelons que le vecteur fréquence interne est donné pour $m \in [1, 2]$ par :

$$\omega(m) \equiv (\omega_a(m))_{a \in \mathcal{A}} = (\sqrt{a^2 + m})_{a \in \mathcal{A}}.$$

Corollaire 2.4. *Posons $n = \text{Card}(\mathcal{A})$ et soit w un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . Alors pour tout $m \in [1, 2]$, il existe (un indice) $j \in [1, \dots, n]$ tel que :*

$$\left| w \cdot \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right| \geq CN^{-2n^2} \|w\|_{\ell^1},$$

avec $C > 0$ qui dépend seulement de n .

Preuve. D'après le lemme 2.2, $(\frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m))$ est une famille libre donc elle forme une base de \mathbb{R}^n . Donc w peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs. D'après le Lemme 2.3 il existe un indice $j \in [1, \dots, n]$ tel que :

$$\begin{aligned} \left| w \cdot \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right| &\geq \frac{\|w\|_{\ell^2} \mathcal{V}_n(\frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m))}{nK^{n-1}} \\ &\geq \frac{\|w\|_{\ell^1} \mathcal{V}_n(\frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m))}{n^{3/2} K^{n-1}}. \end{aligned}$$

Or $(\frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m))$ est une famille de n vecteurs de \mathbb{R}^n . Donc :

$$\mathcal{V}_n\left(\frac{d\omega}{dm}(m), \dots, \frac{d^n \omega}{dm^n}(m)\right) = D,$$

où D est le déterminant défini dans le Lemme 2.2. Donnons à présent l'expression de K . Pour $j \in [1, \dots, n]$ on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right\|_{\ell^1} &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{(2j-2)!}{2^{2j-1}(j-1)!} \frac{(-1)^{j+1}}{(k^2+m)^{j-\frac{1}{2}}} \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{n(2n-2)!}{(n-1)!} =: K. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\left| w \cdot \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right| \geq \frac{(n-1)!}{n^{5/2}(2n-2)!} D \|w\|_{\ell^1} \geq CN^{-2n^2} \|w\|_{\ell^1},$$

ce qui termine la preuve du corollaire. \square

Pour conclure on a besoin du lemme suivant de [16] :

Lemme 2.5. (Lemme 2.1 de [16]) Supposons que $g(\tau)$ est p fois différentiable sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$. Pour $h > 0$ on définit l'ouvert J_h par :

$$J_h := \{\tau \in J \mid |g(\tau)| < h\}.$$

Sur J , si on a $|g^{(p)}(\tau)| \geq d > 0$, alors

$$(2.4) \quad \text{mes}(J_h) \leq Mh^{1/p},$$

avec $M := 2(2 + 3 + \dots + p + d^{-1})$.

A présent on a tous les outils nécessaire pour donner la preuve de la Proposition 2.1.

Preuve de la Proposition 2.1. Pour $k \in \mathbb{R}^n$, avec $n = \text{Card}(\mathcal{A})$, on considère la fonction $g \in \mathcal{C}^\infty([1, 2], \mathbb{R})$ définie par :

$$g(m) = k \cdot \omega(m) + c.$$

D'après le Corollaire 2.4, il existe $j \in [1, \dots, n]$ tel que

$$\left| k \cdot \frac{d^j \omega}{dm^j}(m) \right| \geq CN^{-2n^2} |k|.$$

En appliquant le Lemme 2.5 avec $h = CN^{-2n^2} |k|$, on obtient :

$$\text{mes} \{m \in [1, 2] \mid |k \cdot \omega(m) + c| \leq \chi\} \leq M\chi^{1/n},$$

avec $M \leq \tilde{C}N^{2n^2} |k|^{-1}$. La constante \tilde{C} est une constante strictement positive qui dépend que de n . La proposition est donc prouvée \square

2.2. Estimations des petits diviseurs. Pour $m \in [1, 2]$, rappelons que les fréquences internes sont notées par $\omega \equiv \omega(m) = (\sqrt{a^2 + m})_{a \in \mathcal{A}}$, alors que les fréquences externes sont notées par $\lambda_s \equiv \lambda_s(m) = \sqrt{s^2 + m}$ avec $s \in \mathcal{L} = \mathbb{Z} \setminus \mathcal{A}$. Remarquons que pour $s \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ on a :

$$(2.5) \quad |\lambda_s(m) - |s|| \leq \frac{m}{2|s|}.$$

Rappelons aussi que :

$$\mathcal{A}^- := \{s \in \mathcal{L} \mid -s \in \mathcal{A}\}.$$

On note \mathcal{L}^∞ le complémentaire de \mathcal{A}^- dans \mathcal{L} et n le cardinal de \mathcal{A} .

Dans cette partie, on va faire des estimées sur les petits diviseurs suivants :

$$\begin{aligned} D_0 &= \omega \cdot k, & k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \\ D_1 &= \omega \cdot k + \lambda_a, & k \in \mathbb{Z}^n, a \in \mathcal{L} \\ D_2 &= \omega \cdot k + \lambda_a + \lambda_b, & k \in \mathbb{Z}^n, a, b \in \mathcal{L} \\ D_3 &= \omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b, & k \in \mathbb{Z}^n, a, b \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Définition 2.6. Soient $k \in \mathbb{Z}^n$, $a, b \in \mathcal{L}$.

- (i) L'entier k est D_0 résonant si $k = 0$.
- (ii) Le couple $(k; a)$ est D_1 résonant si $|a| = |s|$ avec $s \in \mathcal{A}$ et $\omega \cdot k = -\omega_s$.
- (iii) Le triplet $(k; a, b)$ est D_2 résonant si $|a| = |s|$, $|b| = |s'|$ avec $s, s' \in \mathcal{A}$ et $\omega \cdot k = -\omega_s - \omega_{s'}$.
- (iv) Le triplet $(k; a, b)$ est D_3 résonant si $|a| = |s|$, $|b| = |s'|$ avec $s, s' \in \mathcal{A}$ et $\omega \cdot k = -\omega_s + \omega_{s'}$.

Remarque 2.7. Notons que $(k; a, b)$ peuvent être D_2 ou D_3 résonant que quand $(a, b) \in \mathcal{A}^- \times \mathcal{A}^-$. De même, $(k; a)$ peut être D_1 résonant seulement quand $a \in \mathcal{A}^-$.

Notre but est de donner une borne inférieure aux petits diviseurs D_0 , D_1 , D_2 et D_3 quand ils ne sont pas résonants, et cela pour $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}$, avec \mathcal{C} un ouvert de mesure de Lebesgue nulle.

Dans cette section C , est une constante qui dépend seulement de l'ensemble admissible \mathcal{A} .

Commençons par minorer les petits diviseurs D_0 , D_1 et D_2 .

Proposition 2.8. *Soient $\kappa > 0$, soit $N > 1$ un entier. Alors il existe un ouvert $\mathcal{C} \subset [1, 2]$ qui vérifie :*

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C\kappa^\tau N^\iota,$$

avec $\tau, \iota > 0$ et dépendent seulement de $n = \text{Card}(\mathcal{A})$, tel que pour tout $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{C})$, tout $0 < |k| \leq N$ et tout $a, b \in \mathcal{L}$ on a :

$$(2.6) \quad |\omega \cdot k| \geq \kappa,$$

sauf quand k est D_0 résonant, c'est-à-dire $k = 0$;

$$(2.7) \quad |\omega \cdot k + \lambda_a| \geq \kappa \langle a \rangle,$$

sauf quand $(k; a)$ est D_1 résonant ;

$$(2.8) \quad |\omega \cdot k + \lambda_a + \lambda_b| \geq \kappa (\langle a \rangle + \langle b \rangle),$$

sauf quand $(k; a, b)$ est D_2 résonant. La constante C dépend seulement de l'ensemble admissible \mathcal{A} .

Preuve. On commence par montrer (2.6). Soient $\kappa > 0$, et $N > 1$ un entier. Posons

$$\mathcal{U} = \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k| < \kappa, k \in \mathbb{Z}^n \text{ avec } 0 < |k| \leq N\}.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}^n$ on pose :

$$\mathcal{U}_k = \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k| < \kappa\}$$

et

$$\mathcal{B}_0 = \{k \in \mathbb{Z}^n \mid |k| \leq N\}.$$

On a alors

$$\mathcal{U} = \bigcup_{k \in \mathcal{B}_0} \mathcal{U}_k.$$

Grâce à la Proposition 2.1, on a $\text{mes}(\mathcal{U}_k) \leq C \frac{\kappa^{1/n}}{|k|}$. Remarquons qu'il y a au plus N^n points dans \mathcal{B}_0 . Donc on obtient :

$$\text{mes}(\mathcal{U}) \leq C\kappa^{1/n} N^n.$$

Regardons maintenant le deuxième petit diviseur (2.7). Posons :

$$C_{\mathcal{A}} = (\max\{|a| \mid a \in \mathcal{A}\})^{1/2}.$$

On distingue deux cas : si $|a| \geq 2C_{\mathcal{A}}N$, alors on a :

$$|\omega \cdot k + \lambda_a| \geq \lambda_a - |\omega \cdot k| \geq |a| - C_{\mathcal{A}}|k| \geq |a| - \frac{1}{2}|a| \geq \kappa \langle a \rangle,$$

pour $0 < \kappa \leq 1/2$.

Si $|a| < 2C_{\mathcal{A}}N$, on pose

$$\mathcal{V} = \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k + \lambda_a| < \kappa \langle a \rangle, (k; a) \in \mathcal{L} \times \mathbb{Z}^n \\ \text{avec } 0 \leq |k| \leq N \text{ et } (k; a) \text{ non } D_1 \text{ résonant}\}.$$

On veut donner une borne supérieure de la mesure de Lebesgue de \mathcal{V} . Pour cela, on pose, pour $k \in \mathbb{Z}^n$ et $a \in \mathcal{L}$

$$\mathcal{V}_{k,a} = \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k + \lambda_a| < \kappa \langle a \rangle, (k; a) \text{ non } D_1 \text{ résonant}\}$$

En posant

$$\mathcal{B}_1 = \{(k, a) \in \mathbb{Z}^n \times \mathcal{L} \mid |k| \leq N \text{ et } |a| < 2C_{\mathcal{A}}N\},$$

on a :

$$(2.9) \quad \mathcal{V} \subset \bigcup_{(k,a) \in \mathcal{B}_1} \mathcal{V}_{k,a}.$$

On remarque que dans \mathcal{B}_1 il existe au plus $4C_{\mathcal{A}}N^{n+1}$ points. Il reste à donner une majoration de la mesure de Lebesgue de $\mathcal{V}_{k,a}$. Pour cela on distingue deux cas :

— Si $\{a, -a\} \not\subset \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{a\}$ est encore un ensemble admissible de cardinal $n+1$. De plus on a $\mathcal{A}' \subset \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq CN\}$. En appliquant la Proposition 2.1 avec ce nouvel ensemble admissible, on a :

$$\text{mes}(\mathcal{V}_{k,a}) \leq C \frac{\kappa^{1/(n+1)} N^{2(n+1)^2+1/(n+1)}}{|k+1|}.$$

— Si $|a| \in \mathcal{A}$ mais $(k; a)$ n'est pas D_1 résonant, alors en appliquant la Proposition 2.1 sans changer \mathcal{A} on a :

$$\text{mes}(\mathcal{V}_{k,a}) \leq C \frac{\kappa^{1/n} N^{2n^2+1/n}}{|k|}.$$

Ceci nous donne que :

$$\text{mes}(\mathcal{V}) \leq C \kappa^{1/(n+1)} N^{(n+1)(2n+3)+1/(n+1)}.$$

De la même manière on montre (2.8). On termine la preuve de la Proposition 2.8 en posant $\mathcal{C} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ où \mathcal{W} est l'ouvert où (2.8) n'est pas vérifiée. \square

Il nous reste à contrôler $D_3 = \omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b$.

Lemme 2.9. Soient $\tilde{\kappa} \in]0, 1]$ et N un entier non nul. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{mes}\{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k - e| < 2\tilde{\kappa}, (k, e) \in \mathbb{Z}^{n+1}, \\ \text{avec } 0 < |k| \leq N\} \leq C \tilde{\kappa}^{\frac{1}{n}} N^{n+1}, \end{aligned}$$

avec $C > 0$ et dépendant seulement de l'ensemble admissible \mathcal{A} .

Preuve. Soit $(k, e) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ tel que $0 < |k| \leq N$. En utilisant la Proposition 2.1, on a :

$$\text{mes}\{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k - e| < 2\tilde{\kappa}, \} \leq C \frac{\tilde{\kappa}^{\frac{1}{n}}}{|k|}.$$

D'après l'hypothèse $\kappa \leq 1$, on peut se restreindre à :

$$|e| \leq |\omega \cdot k - e| + |\omega \cdot k| \leq CN.$$

Donc

$$\text{mes} \bigcup_{\substack{|k| \leq N \\ (k,e) \in \mathbb{Z}^{n+1}}} \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k - e| < 2\tilde{\kappa}\} \leq CN^{n+1} \tilde{\kappa}^{\frac{1}{n}}.$$

\square

Proposition 2.10. Soient $\kappa > 0$ et N un entier non nul. Alors il existe un ouvert $\mathcal{C} \subset [1, 2]$ tel que :

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C \kappa^\tau N^\iota,$$

avec τ et ι deux exposants strictement positifs qui dépendent seulement de $n = \text{Card}(\mathcal{A})$, tels que pour tout $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{C})$, tout $0 < |k| \leq N$ et tout $a, b \in \mathcal{L}$ on a :

$$(2.10) \quad |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| \geq \kappa(1 + ||a| - |b||),$$

sauf quand $(k; a, b)$ est D_3 résonant. La constante C dépend seulement de l'ensemble admissible \mathcal{A} .

Preuve. Pour $|b| \geq |a| > 0$, remarquons que en utilisant (2.5) on a :

$$|\lambda_a - \lambda_b - (|a| - |b|)| \leq \frac{m}{|a|} \leq 2|a|^{-1}.$$

Donc on obtient :

$$|\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| \geq |\omega \cdot k + |a| - |b|| - 2|a|^{-1}.$$

Dans le Lemme 2.9, on pose $\tilde{\kappa} = \bar{\kappa}^\varrho$ avec ϱ un exposant dans $]0, 1[$ qui sera déterminé ultérieurement. Il existe, d'après ce lemme, un ouvert $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1(N, \bar{\kappa}^\varrho)$ dont la mesure de Lebesgue est plus petite que $C\bar{\kappa}^{\frac{\varrho}{n}}N^{n+1}$ avec C est une constante qui dépend de \mathcal{A} . Pour tout $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{C}_1)$, tout $0 < |k| \leq N$ et tout $a, b \in \mathcal{L}$ avec $|b| \geq |a| \geq 2\bar{\kappa}^{-\varrho}$ on a :

$$(2.11) \quad |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| \geq \bar{\kappa}^\varrho \geq \bar{\kappa}.$$

Regardons les cas restants où l'estimation précédente est mise en défaut. Ces cas sont inclus dans l'ensemble :

$$\mathcal{C}_2 = \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| < \bar{\kappa}, (a, b) \in \mathcal{L}^2, |a| \leq 2\bar{\kappa}^{-\varrho}, 0 < |k| \leq N\}$$

Remarquons que si $|\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| < \bar{\kappa}$, $|a| \leq 2\bar{\kappa}^{-\varrho}$ et $|k| \leq N$, alors on a :

$$\begin{aligned} |b| &\leq \lambda_b \leq |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| + |\omega \cdot k| + \lambda_a \\ &\leq 2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N, \end{aligned}$$

avec $C_{\mathcal{A}} = (\max\{|a| \mid a \in \mathcal{A}\})^{1/2}$.

Posons

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a| \leq |b| \leq 2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N\}$$

Il y a au plus $4(2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N)^2$ points dans l'ensemble \mathcal{B} . Il s'ensuit que :

$$\mathcal{C}_2 \subset \{m \in [1, 2] \mid |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| < \bar{\kappa}, (a, b) \in \mathcal{B}, 0 < |k| \leq N\} := \mathcal{C}_3$$

Rappelons que $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L} \setminus \mathcal{A}^-$ avec $\mathcal{A}^- = -\mathcal{A}$. Pour $a \in \mathcal{L}$, on définit l'ensemble $]a[$ par $]a[= \{a\}$ si $a \in \mathcal{L}^\infty$ et $]a[= \emptyset$ si $a \in \mathcal{A}^-$. Soit

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup]a[\cup]b[.$$

Par définition, \mathcal{A}' est un ensemble admissible. De plus on a :

$$\mathcal{A}' \subset \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| \leq C(2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N)\}.$$

Puisque $(k; a, b)$ est D_3 non résonant, alors l'application de la Proposition 2.1 à l'ensemble admissible \mathcal{A}' donne :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\mathcal{C}_2) &\leq \text{mes}(\mathcal{C}_3) \leq C\bar{\kappa}^{1/(n+2)}N^n (2\bar{\kappa}^{-\varrho} + (C_{\mathcal{A}} + 3)N)^{2(n+2)^2} \text{Card } \mathcal{B} \\ &\leq C\bar{\kappa}^{1/(n+2)}\bar{\kappa}^{-2\varrho((n+2)^2+1)}N^{(n+2)(2n+5)}. \end{aligned}$$

En choisissant

$$\varrho = \frac{1}{4((n+2)^2+1)(n+2)}, \quad \tau = \frac{1}{2(n+2)}, \quad \iota' = (n+2)(2n+5),$$

et en posant $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, on obtient :

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C\bar{\kappa}^\tau N^{\iota'}.$$

De plus pour tout $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}_4$, tout $0 < |k| \leq N$ et tout $a, b \in \mathcal{L}$ non D_3 résonant l'estimation (2.11) est satisfaite.

Pour terminer la preuve de la proposition, on étudie la différence $||a| - |b||$. Sans perte de généralité supposons que $|a| > |b|$.

— Si $|a| - |b| \geq 8C_{\mathcal{A}}N \geq 8|\omega \cdot k|$, alors pour tout $m \in [1, 2]$ et tout $0 < |k| \leq N$, on a :

$$\begin{aligned} |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| &\geq \lambda_a - \lambda_b - |\omega \cdot k| \geq \frac{1}{4}(|a| - |b|) - |\omega \cdot k| \\ &\geq \frac{1}{8}(|a| - |b|) \geq \frac{1}{16}(1 + |a| - |b|) \geq \kappa(1 + |a| - |b|), \end{aligned}$$

si on suppose que $\kappa \leq \frac{1}{16}$.

— Si $|a| - |b| < 8C_{\mathcal{A}}N$, alors on a, pour $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| &\geq \frac{\bar{\kappa}}{1 + 8C_{\mathcal{A}}N}(1 + |a| - |b|) \\ &\geq \kappa(1 + |a| - |b|). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}$, tout $0 < |k| \leq N$ et tout $a, b \in \mathcal{L}$ non D_3 résonant, l'estimation (2.10) est vérifiée. De plus,

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C\kappa^\tau N^{\ell'+\tau} = C\kappa^\tau N^\ell.$$

□

Il reste à traiter le cas où $k = 0$ dans D_3 .

Lemme 2.11. Soient $m \in [1, 2]$ et $a, b \in \mathcal{L}$ tel que $|a| \neq |b|$. On a alors

$$|\lambda_a - \lambda_b| \geq \frac{1}{8}(1 + ||a| - |b||).$$

Preuve. Sans perdre de généralité, supposons que $|a| > |b|$. Alors pour tout $m \in [1, 2]$, on a :

$$\lambda_a - \lambda_b = \frac{(|a| - |b|)(|a| + |b|)}{\sqrt{a^2 + m} + \sqrt{b^2 + m}} \geq \frac{1}{4}(|a| - |b|) \geq \frac{1}{8}(1 + ||a| - |b||).$$

□

3. FORME NORMALE

Dans cette section on construit un changement de variable symplectique qui met l'hamiltonien (1.5) sous forme normale à laquelle on peut appliquer notre théorème KAM.

3.1. Notations. Dans cette partie on commence par rappeler quelques notations introduites dans [6]. Pour \mathcal{L} une partie de \mathbb{Z} et $\alpha \geq 0$, on considère l'espace ℓ_2 à poids défini par :

$$Y_\alpha := \left\{ \zeta = \left(\zeta_s = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \eta_s \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, s \in \mathcal{L} \right) \mid \|\zeta\|_\alpha < \infty \right\},$$

avec

$$\|\zeta\|_\alpha^2 = \sum_{s \in \mathcal{L}} |\zeta_s|^2 \langle s \rangle^{2\alpha}, \text{ où } \langle s \rangle = \max(|s|, 1).$$

On munit \mathbb{C}^2 de la norme euclidienne, c'est-à-dire si $\zeta_s = {}^t(\xi_s, \eta_s)$ alors $|\zeta_s| = \sqrt{|\xi_s|^2 + |\eta_s|^2}$.

Pour $\beta \geq 0$ on définit l'espace ℓ_∞ à poids :

$$L_\beta = \left\{ \left(\zeta_s = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \eta_s \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, s \in \mathcal{L} \right) \mid |\zeta|_\beta < \infty \right\},$$

avec

$$|\zeta|_\beta = \sup_{s \in \mathcal{L}} |\zeta_s| \langle s \rangle^\beta.$$

On rappelle que pour, $\beta \leq \alpha$, on a $Y_\alpha \subset L_\beta$.

Matrices infinies. On considère le projecteur orthogonal Π défini sur l'ensemble des matrices carrées par

$$\Pi : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{S},$$

où \mathbb{S} est défini comme suit :

$$\mathbb{S} = \mathbb{C}I + \mathbb{C}\sigma_2, \quad \text{avec} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit l'ensemble \mathcal{M} des matrices infinies symétriques $A : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui vérifient, pour tous $s, s' \in \mathcal{L}$:

$$A_s^{s'} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad A_s^{s'} = {}^t A_{s'}^s, \quad \text{et} \quad \Pi A_s^{s'} = A_s^{s'},$$

Soit \mathcal{M}_α le sous-ensemble de \mathcal{M} défini par :

$$A \in \mathcal{M}_\alpha \Leftrightarrow |A|_\alpha := \sup_{s, s' \in \mathcal{L}} \langle s \rangle^\alpha \langle s' \rangle^\alpha \|A_s^{s'}\|_\infty < \infty.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$ et B un espace de Banach. On définit :

$$\mathbb{T}_\rho^n = \{\theta \in \mathbb{C}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n \mid |\operatorname{Im}\theta| < \rho\},$$

et

$$\mathcal{O}_\rho(B) = \{x \in B \mid \|x\|_B < \rho\}.$$

Pour $\sigma, \mu \in]0, 1[$, on définit

$$\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu) = \mathbb{T}_\sigma^n \times \mathcal{O}_{\mu^2}(\mathbb{C}^n) \times \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha) = \{(\theta, r, \zeta)\},$$

$$\mathcal{O}^{\alpha, \mathbb{R}}(\sigma, \mu) = \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu) \cap \{\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times Y_\alpha^{\mathbb{R}}\},$$

avec $Y_\alpha^{\mathbb{R}} = \left\{ \zeta \in Y_\alpha \mid \zeta = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \eta_s \end{pmatrix}, \xi_s = \bar{\eta}_s, s \in \mathcal{L} \right\}$.

Un point de $\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$ sera noté par $x = (\theta, r, \zeta)$. Une fonction de $\mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$, est dite réelle si elle est à valeur réelle pour x réel. On définit :

$$\|(r, \theta, \zeta)\|_\alpha = \max(|r|, |\theta|, \|\zeta\|_\alpha).$$

Classe des fonctions Hamiltoniennes. Soit \mathcal{D} un ouvert borné de \mathbb{R}^p (l'ensemble des paramètres). Soit $f : \mathcal{O}^\alpha(\delta, \mu) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , réelle et holomorphe par rapport à la première variable, et telle que tout $\rho \in \mathcal{D}$, les applications

$$\mathcal{O}^\alpha(\delta, \mu) \ni x \mapsto \nabla_\zeta f(x, \rho) \in Y_\alpha \cap L_\beta$$

et

$$\mathcal{O}^\alpha(\delta, \mu) \ni x \mapsto \nabla_\zeta^2 f(x, \rho) \in \mathcal{M}_\beta$$

soient holomorphes. On définit :

$$\begin{aligned} |f(x, \cdot)|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} |f(x, \rho)|, & \left\| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} \|\nabla_\zeta f(x, \rho)\|_\alpha, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} |\nabla_\zeta f(x, \rho)|_\beta, & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} &= \sup_{\rho \in \mathcal{D}} |\nabla_\zeta^2 f(x, \rho)|_\beta. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ l'ensemble des fonctions f vérifiant pour tout $x \in \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$:

$$|f(x, \cdot)|_{\mathcal{D}} \leq C, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \zeta}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu}, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}(x, \cdot) \right|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C}{\mu^2},$$

Pour $f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ on note $\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}$ la plus petite constante C qui satisfaisant les relations précédentes. Si $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$, avec $j \in \{0, 1\}$, alors pour $\gamma > 0$ on définit :

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \gamma} = \llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta} + \gamma \llbracket \partial_\rho f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta}.$$

On définit aussi :

$$\mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mu) = \{f(\zeta) | f \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)\},$$

c'est à dire que f ne dépend pas de r, θ et ρ . Pour une telle fonction, sa norme sera noté tout simplement $\llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta}$.

Enfin, on termine cette partie d'introduction des notations en définissant l'espace $\mathcal{T}^{\alpha,\beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$. Rappelons que les espaces $L_{\beta+}$ et $\mathcal{M}_{\beta+}$ sont donné par :

$$L_{\beta+} = \{\zeta = (\zeta_s = (p_s, q_s), s \in \mathcal{L}) \mid |\zeta|_{\beta+} < \infty\},$$

avec $|\zeta|_{\beta+} = \sup_{s \in \mathcal{L}} |\zeta_s| \langle s \rangle^{\beta+1}$, et

$$\mathcal{M}_{\beta+} = \{A \in \mathcal{M} \mid |A|_{\beta+} < \infty\}$$

avec $|A|_{\beta+} = \sup_{s, s' \in \mathcal{L}} (1 + ||s| - |s'|) \langle s \rangle^{\beta} \langle s' \rangle^{\beta} \|A_s^{s'}\|_{\infty}$.

On remarque que $L_{\beta+} \subset L_{\beta}$ et $\mathcal{M}_{\beta+} \subset \mathcal{M}_{\beta}$. On définit $\mathcal{T}^{\alpha,\beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ de la même façon qu'on a défini $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ mais en remplaçant L_{β} par $L_{\beta+}$ et \mathcal{M}_{β} par $\mathcal{M}_{\beta+}$. Ainsi on a $\mathcal{T}^{\alpha,\beta+}(\mathcal{D}, \sigma, \mu) \subset \mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$.

Rappelons que pour $f, g \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mu)$, le crochet de Poisson est donnée par :

$$\{f, g\} = i \langle \nabla_{\zeta} f, J \nabla_{\zeta} g \rangle.$$

Lemme 3.1. Soient $f \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mu)$ et $g \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta+}(\mu)$, alors pour tout $0 < \mu' < \mu$, $\{f, g\} \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mu')$, on a :

$$\llbracket \{f, g\} \rrbracket_{\mu'}^{\alpha,\beta} \leq \frac{C}{\mu(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta} \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta+}.$$

La constante C dépend de α et β .

Pour la preuve, on rappelle le lemme suivant, démontré dans [14] (annexe A).

Lemme 3.2. Soient E et F deux espaces de Banach complexes, $f : E \rightarrow F$ et $v \in E$. Supposons que qu'il existe $r > 0$ tel que f est holomorphe sur la boule ouverte de centre v et de rayon r et que $\|f\|_F \leq M$ sur cette boule. Alors $d_v f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on a :

$$\|d_v f\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \frac{M}{r}.$$

Preuve du lemme 3.1. Soit $x \in \mathcal{O}_{\mu'}(Y_{\alpha})$, il faut montrer que :

- (i) $|\{f, g\}(x)| \leq \frac{C}{\mu(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta} \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta+}$;
- (ii) $\|\nabla_{\zeta} \{f, g\}(x)\|_{\alpha} \leq \frac{C}{\mu\mu'(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta} \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta+}$;
- (iii) $|\nabla_{\zeta} \{f, g\}(x)|_{\beta} \leq \frac{C}{\mu\mu'(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta} \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta+}$;
- (iv) $|\nabla_{\zeta}^2 \{f, g\}(x)|_{\beta} \leq \frac{C}{\mu\mu'^2(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta} \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta+}$.

Démontrons (i). On a :

$$\begin{aligned} |\{f, g\}(x)| &= |\langle \nabla_{\zeta} f(x), J \nabla_{\zeta} g(x) \rangle| \leq \|\nabla_{\zeta} f(x)\|_{\alpha} \|J \nabla_{\zeta} g(x)\|_{\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\mu^2} \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta} \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta+} \\ &\leq \frac{1}{\mu(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta} \llbracket g \rrbracket_{\mu}^{\alpha,\beta+}. \end{aligned}$$

Intéressons-nous à présent au gradient en ζ du crochet de Poisson :

$$\nabla_{\zeta} \{f, g\}(x) = \langle \nabla_{\zeta}^2 f(x), J \nabla_{\zeta} g(x) \rangle + \langle \nabla_{\zeta} f(x), J \nabla_{\zeta}^2 g(x) \rangle =: \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Pour Σ_1 on sait que $\nabla_\zeta f : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha) \rightarrow Y_\alpha$. De plus $x \mapsto \nabla_\zeta f(x)$ est holomorphe : alors $\nabla_\zeta^2 f(x) \in \mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)$ pour tout $x \in \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha)$. D'après le lemme 3.2, on a donc :

$$\begin{aligned} \|\Sigma_1\|_\alpha &\leq \|\nabla_\zeta^2 f(x)\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, Y_\alpha)} \|J\nabla_\zeta g(x)\|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu - \mu'} \sup_{y \in \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)} (\|\nabla_\zeta f(y)\|_\alpha) \|\nabla_\zeta g(x)\|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu^2(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+} \\ &\leq \frac{1}{\mu\mu'(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+}. \end{aligned}$$

On procède de la même manière pour Σ_2 , ce qui termine la preuve de (ii). Pour montrer (iii), on utilise les estimations 3 et 4 démontrées dans le lemme 2.2 dans [6]. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} |\nabla_\zeta \{f, g\}(x)|_\beta &\leq |\langle \nabla_\zeta^2 f(x), J\nabla_\zeta g(x) \rangle|_\beta + |\langle \nabla_\zeta f(x), J\nabla_\zeta^2 g(x) \rangle|_\beta \\ &\leq C |\nabla_\zeta^2 f(x)|_\beta |J\nabla_\zeta g(x)|_{\beta+} + C |\nabla_\zeta f(x)|_\beta |J\nabla_\zeta^2 g(x)|_{\beta+} \\ &\leq \frac{C}{\mu^3} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+} \\ &\leq \frac{C}{\mu\mu'(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+}. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer (iv). On commence par calculer la dérivée seconde du crochet de Poisson :

$$\begin{aligned} \nabla_\zeta^2 \{f, g\}(x) &= \langle \nabla_\zeta^3 f(x), J\nabla_\zeta g(x) \rangle + \langle \nabla_\zeta^2 f(x), J\nabla_\zeta^2 g(x) \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_\zeta^2 f(x), J\nabla_\zeta^2 g(x) \rangle + \langle \nabla_\zeta f(x), J\nabla_\zeta^3 g(x) \rangle \\ &=: \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4. \end{aligned}$$

Pour Γ_1 , on sait que $\nabla_\zeta^2 f : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha) \rightarrow \mathcal{M}_\beta$. De plus, $x \mapsto \nabla_\zeta^2 f(x)$ est holomorphe : alors $\nabla_\zeta^3 f(x) \in \mathcal{L}(Y_\alpha, \mathcal{M}_\beta)$ pour tout $x \in \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha)$. D'après le lemme 3.2, on a donc :

$$\begin{aligned} |\Gamma_1| &\leq \|\nabla_\zeta^3 f(x)\|_{\mathcal{L}(Y_\alpha, \mathcal{M}_\beta)} \|J\nabla_\zeta g(x)\|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu - \mu'} \sup_{y \in \mathcal{O}_\mu(\mathcal{M}_\beta)} |\nabla_\zeta^2 f(y)|_\beta \|\nabla_\zeta g(x)\|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\mu^3(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+} \\ &\leq \frac{1}{\mu\mu'^2(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+}. \end{aligned}$$

On procède de même pour Γ_4 . Il reste à étudier Γ_2 et Γ_3 . Les deux cas se traitent de la même façon. Regardons par exemple Γ_3 . En utilisant la première estimation démontrée dans le lemme 2.2 dans [6], on obtient :

$$\begin{aligned} |\Gamma_3| &\leq C |\nabla_\zeta^2 f(x)|_\beta |\nabla_\zeta^2 g(x)|_{\beta+} \\ &\leq \frac{C}{\mu^4} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+} \\ &\leq \frac{C}{\mu\mu'^2(\mu - \mu')} \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta} \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha, \beta+}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de lemme. □

Soit g une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)$. On note Φ_g le flot hamiltonien de g à $t = 1$, c'est-à-dire :

$$\zeta = \zeta(1) = \Phi_g(\zeta_0) = \Phi_g^{t=1}(\zeta_0),$$

avec

$$\dot{\zeta} = iJ\nabla_\zeta g(\zeta) \quad \text{et} \quad \zeta(0) = \zeta_0.$$

Corollaire 3.3. Soient $f \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mu)$, $g \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta+}(\mu)$ et $0 < \mu' < \mu$ tels que :

$$\llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha,\beta+} \leq \frac{1}{C} \mu(\mu - \mu').$$

Alors $\Phi_g : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha) \rightarrow \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)$ et $f \circ \Phi_g \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mu')$. De plus on a :

$$(3.1) \quad \llbracket f \circ \Phi_g \rrbracket_{\mu'}^{\alpha,\beta} \leq C' \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha,\beta}.$$

La constante C dépend de α et β tandis que C' est une constante absolue.

Preuve. Montrons d'abord que Φ_g est bien défini et que $\Phi_g : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha) \rightarrow \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)$. Soit :

$$\bar{t} = \sup\{t > 0 \mid \zeta(a) \text{ définie pour } 0 \leq a \leq t \text{ et } \|\zeta(a)\|_\alpha < \mu\}.$$

Montrons que $\bar{t} \geq 1$. On sait que :

$$\zeta(a) = \zeta_0 + i \int_0^a J\nabla_\zeta g(\zeta(s)) ds.$$

Or $g \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta+}(\mu)$, donc pour tout $\zeta \in \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)$ on a :

$$\|\nabla_\zeta g(\zeta)\|_\alpha \leq \frac{\llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha,\beta+}}{\mu} \leq \frac{1}{C}(\mu - \mu').$$

Il s'ensuit, pour $a = 1$, que :

$$\begin{aligned} \|\zeta(a)\|_\alpha &\leq \|\zeta_0\|_\alpha + \frac{a}{C}(\mu - \mu') \\ &\leq \mu' + \frac{a}{C}(\mu - \mu') < \mu, \end{aligned}$$

On déduit que $\bar{t} \geq 1$, que Φ_g est bien défini et que $\Phi_g : \mathcal{O}_{\mu'}(Y_\alpha) \rightarrow \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)$. Montrons à présent que $f \circ \Phi_g \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mu')$, ainsi que l'estimation (3.1). Rappelons que pour f et g holomorphes, on a :

$$\begin{aligned} f \circ \Phi_g &= f + \{f, g\} + \frac{1}{2!} \{\{f, g\}, g\} + \frac{1}{3!} \{\{\{f, g\}, g\}, g\} + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} P_g^n f, \end{aligned}$$

avec $P_g^0 f = f$, $P_g^1 f = \{f, g\}$ et $P_g^2 f = \{\{f, g\}, g\} \dots$

Grâce au Lemme 3.1 on a :

$$\llbracket P_g^n f \rrbracket_{\mu'}^{\alpha,\beta} \leq C^n \llbracket f \rrbracket_\mu^{\alpha,\beta} (\mu(\mu - \mu') \llbracket g \rrbracket_\mu^{\alpha,\beta+})^n.$$

En utilisant l'hypothèse faite sur g , on obtient que $f \circ \Phi_g$ est une série convergente. Donc $f \circ \Phi_g \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}(\mu')$ et on obtient l'estimation (3.1). \square

On définit le tore réel de dimension finie :

$$(3.2) \quad T_\rho = \left\{ \zeta = ((\xi_s, \eta_s), s \in \mathbb{Z}) \mid \xi_s = \bar{\eta}_s, |\zeta_a|^2 = \nu \rho_a \text{ si } a \in \mathcal{A}, \xi_s = 0 \text{ si } s \in \mathcal{L} \right\},$$

avec $\nu > 0$ petit et $\rho = (\rho_a, a \in \mathcal{A})$ le vecteur paramètre appartenant au domaine $\mathcal{D} = [1, 2]^{\mathcal{A}}$.

Ce tore de dimension $n = \text{Card}(\mathcal{A})$ est invariant pour l'équation d'onde linéaire. Notre but est de mettre l'Hamiltonien $H_2 + P$ sous forme normale à laquelle on appliquera le théorème KAM 4.1. Cette forme normale sera définie sur des tores construits sur l'espace Y_α et voisins du tore réel T_ρ .

Au voisinage du tore T_ρ , on passe des variables $(\zeta_a, a \in \mathcal{A})$ aux variables action-angle définies par :

$$\xi_a = \sqrt{I_a} e^{i\theta_a}, \quad \eta_a = \sqrt{I_a} e^{-i\theta_a}, \quad a \in \mathcal{A}.$$

On passe donc des variables (ξ, η) au variables (I, θ, ξ, η) avec $I = (I_a, a \in \mathcal{A})$, $\theta = (\theta_a, a \in \mathcal{A})$, $\xi = (\xi_s, s \in \mathcal{L})$ et $\eta = (\eta_a, a \in \mathcal{L})$. Le nouveau vecteur variable est dit réel si $I = \bar{I}$, $\theta = \bar{\theta}$, et $\xi = \bar{\eta}$.

À présent, on définit un voisinage torique complexe du tore réel T_ρ par :

$$(3.3) \quad \mathfrak{T}_\rho = \mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha) = \left\{ (I, \theta, \xi, \eta) \mid |I - \nu\rho| < \nu\mu^2, |Im\theta| < \sigma, \|\zeta^\mathcal{L}\|_\alpha < \nu^{1/2}\mu \right\},$$

avec $I = (I_a, a \in \mathcal{A})$, $\theta = (\theta_a, a \in \mathcal{A})$, $\zeta^\mathcal{L} = (\zeta_s, s \in \mathcal{L})$.

Lemme 3.4. *Supposons que g est holomorphe réelle sur $\mathbb{S}^1 \times J$ avec J un voisinage de l'origine de \mathbb{R} . Soit $\alpha > 0$ et $\nu > 0$ petit. Alors il existe $\sigma^* > 0$ et $\mu^* > 0$ tels que la perturbation P est bien définie et analytique sur $\mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha)$ pour $0 < \sigma \leq \sigma^*$ et $0 < \mu \leq \mu^*$. Les paramètres σ^* et μ^* dépendent de la non-linéarité g , de l'ensemble admissible \mathcal{A} , de ν et de α .*

Remarque 3.5.

- On peut fixer à titre d'exemple $\sigma^* = 1$ et déterminer explicitement μ^* .
- Pour ν petit, on a :

$$\mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha) \subset \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu^*)$$

Preuve. La non-linéarité (1.2) est holomorphe réelle sur $\mathbb{S}^1 \times J$, avec J un voisinage de l'origine de \mathbb{R} . Supposons que $I = [-M, M]$ avec $M > 0$. On peut étendre g de manière holomorphe sur $\mathbb{S}^1 \times I_\mathbb{C}$, avec $I_\mathbb{C}$ de la forme :

$$I_\mathbb{C} = \{u \in \mathbb{C} \mid |Re(u)| \leq M, |Im(u)| < K\}.$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} u(\zeta)(x) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\xi_a \varphi_a + \eta_a \varphi_{-a}}{\sqrt{2\lambda_a}} + \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}}. \end{aligned}$$

On veut avoir un contrôle sur ces deux sommes. Pour la première, on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\xi_a \varphi_a + \eta_a \varphi_{-a}}{\sqrt{2\lambda_a}} \right| &\leq \sum_{a \in \mathcal{A}} (|\xi_a| + |\eta_a|) \\ &\leq 2 \sum_{a \in \mathcal{A}} \sqrt{I_a} e^{|Im(\theta_a)|} \leq C_{\mathcal{A}} |I|^{1/2} e^{|Im(\theta)|}, \end{aligned}$$

avec $C_{\mathcal{A}}$ une constante qui dépend de \mathcal{A} . Regardons à présent la deuxième somme. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\left| \sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{\xi_s \varphi_s + \eta_s \varphi_{-s}}{\sqrt{2\lambda_s}} \right| \leq \sum_{s \in \mathcal{L}} \frac{|\xi_s| + |\eta_s|}{\sqrt{2\lambda_s}} \leq C(\alpha) \|\zeta\|_\alpha.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} |u(\zeta)| &\leq C(\alpha) \|\zeta\|_\alpha + C_{\mathcal{A}} |I|^{1/2} e^{|Im(\theta)|}, \\ &\leq C(\alpha) \|\zeta\|_\alpha + C_{\mathcal{A}} |I - \nu\rho|^{1/2} e^{|Im(\theta)|} + C_{\mathcal{A}} (\nu\rho)^{1/2} e^{|Im(\theta)|}. \end{aligned}$$

On veut que, si (I, θ, ζ) appartient à $\mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha)$, alors $u(\zeta)(x) \in I_\mathbb{C}$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$. Ceci est vrai si on pose :

$$C(\alpha) \nu^{1/2} \mu + C_{\mathcal{A}} \nu^{1/2} \mu e^\sigma + C_{\mathcal{A}} \sqrt{2\nu} e^\sigma \leq \min(M, K).$$

On peut poser à titre d'exemple $\sigma^* = 1$, ce qui nous donne que :

$$\mu^* \leq \frac{\min(M, K) - C_{\mathcal{A}}\sqrt{2}\nu^{1/2}e}{\nu^{1/2}(C(\alpha) + C_{\mathcal{A}})}.$$

□

À présent on s'intéresse à la perturbation P , afin de déterminer si elle appartient à la bonne classe de fonctions hamiltoniennes. Rappelons que :

$$P(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^1} G(x, u(\zeta)(x)) dx,$$

avec $g = \partial_u G$ et $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$.

Lemme 3.6. *Supposons que $(x, u) \mapsto g(x, u)$ est réelle holomorphe sur un voisinage de $\mathbb{S}^1 \times J$, avec J est un voisinage de zero dans \mathbb{R} . Alors pour tout $\alpha > 0$ il existe $\mu^* > 0$ tel que pour $0 < \mu \leq \mu^*$ la perturbation*

$$\begin{aligned} P : \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\mapsto P(\zeta) \end{aligned}$$

appartient à $\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mu)$.

Preuve. Rappelons d'abord que pour $x \in \mathbb{S}^1$ on a :

$$u(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_s \varphi_s(x) + \eta_s \varphi_{-s}(x)}{\sqrt{2\lambda_s}} = u(\zeta)(x).$$

Remarquons que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au fait que $\alpha > 0$, il existe une constante C_α qui ne dépend que de α , telle que pour $\zeta \in \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)$, on a :

$$|u(\zeta)(x)| \leq C_\alpha \|\zeta\|_\alpha \leq C_\alpha \mu.$$

Pour montrer que $P \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mu)$, il suffit de montrer que :

$$\nabla P \in Y^\alpha \cap L_{1/2} \quad \text{et} \quad \nabla^2 P \in \mathcal{M}_{1/2}.$$

On commence par définir pour $\alpha \geq 0$ l'espace suivant :

$$Z_\alpha = \{v = (v_s \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{Z}) \mid (|v_s| \langle s \rangle^\alpha)_s \in \ell^2(\mathbb{Z})\}.$$

Pour $v \in Z_\alpha$, on définit la transformée de Fourier $\mathcal{F}(v)$ de v , donnée par $u(x) = \mathcal{F}(v) := \sum v_s e^{isx}$. On définit aussi l'espace de Sobolev discret par :

$$H^\alpha(\mathbb{S}^1) = \left\{ u \mid u(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{u}(s) e^{isx} \mid (|\hat{u}(s)| \langle s \rangle^\alpha)_s \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors

$$H^\alpha(\mathbb{S}^1) = \left\{ u \mid u(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \hat{u}(s) e^{isx} \mid (\widehat{\partial^\alpha u}(s))_s \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Ainsi on a l'équivalence suivante :

$$(3.4) \quad u \in H^\alpha(\mathbb{S}^1) \iff (\hat{u}(s))_s \in Z_\alpha.$$

— Pour montrer que $\nabla_\zeta P \in Y_\alpha$, il suffit de montrer par exemple que $\frac{\partial P}{\partial \xi} \in Z_\alpha$.

On a,

$$\frac{\partial P}{\partial \xi_s}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_s}} \int_{\mathbb{S}^1} \partial_u G(x, u(\zeta)(x)) \varphi_s(x) dx.$$

Or $(x, u) \mapsto g(x, u)$ est réelle holomorphe sur un voisinage de $\mathbb{S}^1 \times J$, donc $x \mapsto \partial_u f(x, u(\zeta)(x)) \in H^\alpha(\mathbb{S}^1)$. On déduit de l'équivalence (3.4) que $\frac{\partial P}{\partial \xi} \in Z_\alpha$.

— Montrons à présent que $\nabla^2 P \in \mathcal{M}_{1/2}$. Rappelons d'abord que :

$$|\nabla^2 P|_{1/2} = \sup_{s, s' \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{1/2} \langle s' \rangle^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta_s \partial \zeta_{s'}} \right\|_{\infty}.$$

On a :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta_s \partial \zeta_{s'}} = \frac{1}{2\lambda_s^{1/2} \lambda_{s'}^{1/2}} \int_{\mathbb{S}^1} \partial_u^2 G(x, u(\zeta)(x)) \varphi_s(x) \varphi_{s'}(x) dx.$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta_s \partial \zeta_{s'}} = \frac{1}{2\lambda_s^{1/2} \lambda_{s'}^{1/2}} \begin{pmatrix} \widehat{\partial_u^2 G}(s+s') & \widehat{\partial_u^2 G}(s-s') \\ \widehat{\partial_u^2 G}(-s+s') & \widehat{\partial_u^2 G}(-s-s') \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne :

$$|\nabla^2 P|_{1/2} = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\partial_u^2 G}(s) \right| < \infty.$$

— Il reste à montrer que $\nabla P \in L_{1/2}$. On rappelle que pour $\beta \leq \alpha$ on a $Y_\alpha \subset L_\beta$. Or $\nabla P \in Y_1 \subset L_{1/2}$. \square

A présent, on est en mesure de donner le changement de variable symplectique qui met l'hamiltonien (1.5) sous forme normale qui satisfait les hypothèses du théorème KAM 4.1.

Soit $0 < \mu < \mu^*$ et $0 < \sigma < \sigma^*$ avec μ^* et σ^* données par le Lemme 3.2.

Théorème 3.7. *Soit \mathcal{A} un ensemble admissible. Il existe un Borélien $\mathcal{U} \subset [1, 2]$ de mesure de Lebesgue nulle tel que pour tout $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$ il existe ν_0 qui dépend de \mathcal{A} , m et g tel que :*

(i) *Pour $0 < \nu \leq \nu_0$, $\alpha > 1/2$ et $\rho \in \mathcal{D}$ il existe un changement de variable symplectique réel holomorphe*

$$\Psi_\rho : \mathcal{O}^\alpha \left(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2} \right) \rightarrow \mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha),$$

qui transforme la forme symplectique $-id\xi \wedge d\eta$ sur $\mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha)$ en :

$$-\nu \sum_{a \in \mathcal{A}} dr_a \wedge d\theta_a - i\nu \sum_{s \in \mathcal{L}} d\xi_s \wedge d\eta_s.$$

(ii) *Pour $c > \frac{1}{2}$, le changement de variable Φ_ρ s'étend de manière holomorphe sur le domaine complexe*

$$\mathcal{D}_c = \left\{ \rho \in \mathbb{C}^{\mathcal{A}} \mid \left| \rho_j - \frac{3}{2} \right| \leq c, 1 \leq j \leq \text{Card}(\mathcal{A}) \right\}.$$

Il transforme l'Hamiltonien perturbé $H = H_2 + P$ en une forme normale donnée par :

$$(3.5) \quad \nu^{-1} H \circ \Psi_\rho = \Omega(\rho) \cdot r + \sum_{a \in \mathcal{L}} \Lambda_a(\rho) \xi_a \eta_a + f(r, \theta, \zeta, \rho),$$

pour tout $\rho \in \mathcal{D}_c$. Le vecteur fréquence interne Ω et les fréquences externes Λ_a , $a \in \mathcal{L}$, sont données par (3.22) et (3.23). De plus elles sont linéaires en ρ et vérifient :

$$(3.6) \quad |\Omega(\rho) - \omega(\rho)| \leq C\nu, \quad |\Lambda_a(\rho) - \lambda_a(\rho)| \leq C\nu|a|^{-1},$$

pour tout $\rho \in \mathcal{D}_c$. La constante C est strictement positive et dépend de l'ensemble admissible \mathcal{A} .

(iii) La perturbation f est réelle holomorphe en ρ sur \mathcal{D}_c . De plus elle appartient à $\mathcal{T}^{\alpha,1/2}(\mathcal{D}, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$ et vérifie :

$$\begin{aligned} \llbracket f \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha,1/2,\gamma} &\leq C_1(1+\gamma)\nu\mu^4, \\ \llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha,1/2,\gamma} &\leq C_1(1+\gamma)\nu^{3/2}\mu^5. \end{aligned}$$

avec C_1 une constante qui dépend de l'ensemble admissible \mathcal{A} , de la masse m et de la non-linéarité g .

Remarque 3.8. Dans (iii) on a besoin d'estimer la dérivée de la perturbation f par rapport au paramètre ρ . Ceci est possible grâce à l'estimation de Cauchy. On a donc on a besoin d'étendre Ψ_ρ sur \mathcal{D}_c de manière holomorphe, (voir 3.6).

Tout le reste de cette section sera dédié à la preuve du théorème suivant :

3.2. Résonance. On considère la partie quartique H_4 de l'Hamiltonien H dans les variables complexes. Elle est définie par :

$$H_4 = H_2 + P_4,$$

avec

$$H_2 = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \lambda_s \xi_s \eta_s,$$

et

$$P_4 = \sum_{(i,j,k,l) \in \mathbb{Z}} C(i,j,k,l) \frac{(\xi_i + \eta_{-i})(\xi_j + \eta_{-j})(\xi_k + \eta_{-k})(\xi_l + \eta_{-l})}{4\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}},$$

où $C(i,j,k,l)$ est une constante définie par :

$$C(i,j,k,l) := \int_{\mathbb{S}^1} \varphi_i(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } i+j+k+l=0, \\ 0 & \text{si } i+j+k+l \neq 0. \end{cases}$$

On définit le sous ensemble suivant de \mathbb{Z}^4 :

$$\mathcal{J} := \{(i,j,k,l) \in \mathbb{Z}^4 \mid i+j = k+l\}.$$

Donc

$$P_4 = \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}} \frac{(\xi_i + \eta_{-i})(\xi_j + \eta_{-j})(\xi_k + \eta_{-k})(\xi_l + \eta_{-l})}{4\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}.$$

On peut décomposer P_4 en trois parties $P_4 = P_4^0 + P_4^1 + P_4^2$ avec :

$$\begin{aligned} P_4^0 &= \frac{1}{8\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ P_4^1 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l + \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ P_4^2 &= \frac{3}{4\pi} \sum_{(i,j,-k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}. \end{aligned}$$

Pour $(i,j,k,l) \in \mathbb{Z}^4$ on définit les petits diviseurs

$$\begin{aligned} \Omega_0(i,j,k,l) &= \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l, \\ \Omega_1(i,j,k,l) &= \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k - \lambda_l, \\ \Omega_2(i,j,k,l) &= \lambda_i + \lambda_j - \lambda_k - \lambda_l. \end{aligned}$$

Définition 3.9. Un monôme $\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l$ ou $\eta_i \eta_j \eta_k \xi_l$ est dit résonant si $\Omega_1(i,j,k,l) = 0$. Dans ce cas, on note $\mathcal{R}_1 = \{(i,j,k,l) \in \mathbb{Z}^4 \mid \Omega_1(i,j,k,l) = 0\}$. Un monôme $\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l$ est dit résonant si $\Omega_2(i,j,k,l) = 0$. Dans ce cas, on note $\mathcal{R}_2 = \{(i,j,k,l) \in \mathbb{Z}^4 \mid \Omega_2(i,j,k,l) = 0\}$. Soit \mathcal{R} la réunion de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 .

On définit aussi

$$\mathcal{J}_2 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J} \mid \#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{A} \geq 2\},$$

et

$$\mathcal{J}_2^c = \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_2 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J} \mid \#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{L} \geq 3\}$$

Lemme 3.10. *Il existe un Borélien $\mathcal{U} \subset [1, 2]$ de mesure de Lebesgue pleine tel, que pour tout $m \in \mathcal{U}$ on a :*

- (i) $\mathcal{R}_1 = \emptyset$,
- (ii) $\mathcal{R}_2 \subset \{(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4 \mid \{|i|, |j|\} = \{|k|, |l|\}\}$,
- (iii) *il existe une constante $\gamma(m) > 0$ telle que pour tout $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}$, on a :*

$$|\Omega_1(i, j, k, l)|, \quad |\Omega_2(i, j, k, l)| \geq \gamma(m).$$

Preuve. On commence par prouver les assertions (i) et (ii). On fixe $(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4$. Définissons pour $\delta = \pm 1$ la fonction :

$$f(m) = \sqrt{i^2 + m} + \sqrt{j^2 + m} + \delta\sqrt{k^2 + m} - \sqrt{l^2 + m}.$$

La fonction f est analytique sur $[1, 2]$, et prolongeable en une fonction multivaluée sur \mathbb{C} . Si $j = k = l = 0$, alors $-i^2$ est un point de branchement pour f . Les points de branchements de f sont donc $-i^2, -j^2, -k^2$ et $-l^2$.

Si $\delta = 1$ alors f n'est pas identiquement nulle sur $[1, 2]$, et elle admet un nombre fini de zéros. Ainsi, il existe un Borélien \mathcal{U}_1 , de $[1, 2]$ de mesure de Lebesgue pleine, tel que pour tout $m \in \mathcal{U}_1$, on a $\mathcal{R}_1 = \emptyset$.

Maintenant, pour $\delta = -1$, si $f|_{[1, 2]} \equiv 0$ alors $f \equiv 0$, et on a forcément $\{i^2, j^2\} = \{k^2, l^2\}$. Si f n'est pas identiquement nulle sur $[1, 2]$ alors f admet un nombre fini de zéros. Il existe donc un Borélien \mathcal{U}_2 , de $[1, 2]$ de mesure de Lebesgue pleine, tel que pour tout $m \in \mathcal{U}_2$, on a $\mathcal{R}_2 \subset \{(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}^4 \mid \{|i|, |j|\} = \{|k|, |l|\}\}$.

Il reste à prouver la dernière assertion. On commencera par contrôler Ω_2 . D'après la Proposition 2.10, pour $\kappa > 0$, il existe un ouvert \mathcal{C}_κ de $[1, 2]$ tel que

$$mes(\mathcal{C}_\kappa) < C\kappa^\tau,$$

avec $\tau > 0$ dépendant de $\text{Card}(\mathcal{A})$ et C dépendant de l'ensemble admissible \mathcal{A} lui-même. Pour tout $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{C}_\kappa)$ et tout $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}$, on a :

$$|\Omega_2(i, j, k, l)| > \kappa.$$

On sait que, si $\kappa' \leq \kappa$, alors $\mathcal{C}_{\kappa'} \subset \mathcal{C}_\kappa$. Donc $\mathcal{C} := \bigcap_{0 < \kappa < 1} \mathcal{C}_\kappa$ est un Borélien, et on a :

$$mes(\mathcal{C}) = 0.$$

De plus, pour tout $m \in \mathcal{U}_3 \equiv ([1, 2] \setminus \mathcal{C}) = \bigcup_{0 < \kappa < 1} ([1, 2] \setminus \mathcal{C}_\kappa)$, il existe une constante $\gamma(m)$ telle que pour tout $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}$, on a :

$$|\Omega_2(i, j, k, l)| > \gamma(m).$$

On procède de la même façon pour contrôler $\Omega_1(i, j, k, l)$ mais en utilisant la Proposition 2.8 au lieu d'utiliser la Proposition 2.10. Finalement, on pose $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4$, avec \mathcal{U}_4 le Borélien de mesure de Lebesgue pleine obtenu après le contrôle de $\Omega_1(i, j, k, l)$. \square

3.3. Procédure de Birkhoff. Pour un $\alpha > 0$ on rappelle la définition de l'espace suivant :

$$Z_\alpha = \{v = (v_s \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{Z}) \mid (|v_s| \langle s \rangle^\alpha)_s \in \ell^2(\mathbb{Z})\}.$$

On munit Z_α de la norme :

$$\|v\|_\alpha^2 = \sum_{s \in \mathbb{Z}} |v_s|^2 \langle s \rangle^{2\alpha}, \quad \langle s \rangle = \max(|s|, 1).$$

On note par $v * y$ le produit de convolution dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ défini par $(v * w)_l = \sum_{i+j=l} v_i w_j$.

On rappelle le Lemme 2 énoncé dans [12].

Lemme 3.11. *Soient v et w dans Z_α avec $\alpha > \frac{1}{2}$. Le produit de convolution $v * w$ est alors dans Z_α , et on a :*

$$(3.7) \quad \|v * w\|_\alpha < C(\alpha) \|v\|_\alpha \|w\|_\alpha,$$

avec C une constante qui ne dépend que de α .

Preuve. Soient $v, w \in Z_\alpha$. On a :

$$\begin{aligned} \|v * w\|_\alpha^2 &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{2\alpha} \left| \sum_{i+j=s} v_i w_j \right|^2 \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{2\alpha} \left| \sum_{i+j=s} \frac{\langle s \rangle^\alpha}{\langle i \rangle^\alpha \langle j \rangle^\alpha} \frac{\langle i \rangle^\alpha \langle j \rangle^\alpha}{\langle s \rangle^\alpha} v_i w_j \right|^2 \\ &\leq \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{2\alpha} \left(\sum_{i+j=s} \left(\frac{\langle s \rangle}{\langle i \rangle \langle j \rangle} \right)^{2\alpha} \right) \left(\sum_{i+j=s} \frac{\langle i \rangle^{2\alpha} \langle j \rangle^{2\alpha}}{\langle s \rangle^{2\alpha}} |v_i|^2 |w_j|^2 \right) \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{i+j=s} \left(\frac{\langle s \rangle}{\langle i \rangle \langle j \rangle} \right)^{2\alpha} \leq \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\langle i \rangle + \langle j \rangle}{\langle i \rangle \langle j \rangle} \right)^{2\alpha} \leq 4^\alpha \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\langle i \rangle^{2\alpha}} + \frac{1}{\langle j \rangle^{2\alpha}} \leq C^2(\alpha).$$

Donc

$$\begin{aligned} \|v * w\|_\alpha^2 &\leq C(\alpha)^2 \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{i+j=s} \langle i \rangle^{2\alpha} |v_i|^2 \langle j \rangle^{2\alpha} |w_j|^2 \\ &\leq \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \langle i \rangle^{2\alpha} |v_i|^2 \langle j \rangle^{2\alpha} |w_j|^2 \\ &= C(\alpha)^2 \|v\|_\alpha^2 \|w\|_\alpha^2. \end{aligned}$$

□

On considère l'espace de phase Y_α muni de la structure symplectique $-i \sum d\xi_k \wedge d\eta_k$. Pour $\alpha > 1/2$, Y_α est une algèbre pour le produit de convolution.

Lemme 3.12. *Soient $\alpha > 1/2$. Soit P^4 un polynôme homogène réel sur Y_α , de degré 4, construit sur \mathcal{J} . On suppose que P^4 est de la forme :*

$$P^4(\zeta) = \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}} \sum_{1 \leq r \leq 4} a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_r} \eta_{j_{r+1}} \cdots \eta_{j_4},$$

avec $|a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r| < M$ pour tout $(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}$. Alors on a :

$$\|\nabla P^4\|_\alpha \leq C(\alpha, M) \|\zeta\|_\alpha^3.$$

En particulier pour $t \leq 1$, le flot $\Phi_{P^4}^t$ engendré par le champ de vecteur Hamiltonien $X_{P^4} = iJ\nabla P^4$ est bien défini, réel et analytique sur la boule :

$$\mathcal{O}_\delta(Y_\alpha) = \{\zeta \in Y_\alpha \mid \|\zeta\|_\alpha < \delta = \delta(M)\}.$$

De plus, pour tout $\zeta \in \mathcal{O}_\delta(Y_\alpha)$,

$$\|\Phi_{P^4}^t(\zeta) - \zeta\|_\alpha \leq C(M) \|\zeta\|_\alpha^3.$$

Preuve. On rappelle que X_{P^4} est de la forme $i \left(\frac{\nabla_{\xi} P^4}{\nabla_{\eta} P^4} \right)$. Puisque $|a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r| < M$, on a :

$$\left| \frac{\partial P}{\partial \eta_l} \right| \leq M \sum_{(i, j, k, l) \in \mathcal{J}} |\xi_i \xi_j \xi_k| + |\xi_i \xi_j \eta_k| + |\xi_i \eta_j \eta_k| + |\eta_i \eta_j \eta_k|.$$

Or

$$\sum_{(i, j, k, l) \in \mathcal{J}} |\xi_i \xi_j \xi_k| = (\xi \star \xi \star \xi)_l + (\xi \star \xi \star \tilde{\xi})_l + (\xi \star \tilde{\xi} \star \tilde{\xi})_l + (\tilde{\xi} \star \tilde{\xi} \star \tilde{\xi})_l + (\xi \star \tilde{\xi} \star \xi)_l + (\tilde{\xi} \star \tilde{\xi} \star \xi)_l,$$

où $\tilde{\xi}$ est défini par $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ avec $\tilde{\xi}_j = \xi_{-j}$. En utilisant le Lemme 3.11, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial P^4}{\partial \eta} \right\|_{\alpha}^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle l \rangle^{2\alpha} \left| \frac{\partial P^4}{\partial \eta_l} \right|^2 \\ &\leq C(M) (\|\xi \star \xi \star \xi\|_{\alpha}^2 + \|\xi \star \xi \star \eta\|_{\alpha}^2 + \|\xi \star \eta \star \eta\|_{\alpha}^2 + \|\eta \star \eta \star \eta\|_{\alpha}^2) \\ &\leq C(\alpha, M) (\|\xi\|_{\alpha}^6 + \|\xi\|_{\alpha}^4 \|\eta\|_{\alpha}^2 + \|\xi\|_{\alpha}^2 \|\eta\|_{\alpha}^4 + \|\eta\|_{\alpha}^6) \\ &\leq C(\alpha, M) (\|\xi\|_{\alpha}^2 + \|\eta\|_{\alpha}^2)^3 = C(\alpha, M) \|\zeta\|_{\alpha}^6. \end{aligned}$$

De la même façon, on montre que :

$$\left\| \frac{\partial P^4}{\partial \xi} \right\|_{\alpha}^2 \leq C(\alpha, M) \|\zeta\|_{\alpha}^6.$$

Ainsi, on obtient :

$$\|\nabla_{\zeta} P^4\|_{\alpha} = \left(\left\| \frac{\partial P^4}{\partial \xi} \right\|_{\alpha}^2 + \left\| \frac{\partial P^4}{\partial \eta} \right\|_{\alpha}^2 \right)^{1/2} \leq C(\alpha, M) \|\zeta\|_{\alpha}^3,$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Lemme 3.13. Soit D^- l'opérateur borné de Y_{α} donné par :

$$D^- = \text{diag} \left\{ \lambda_s^{-1/2} I_2, s \in \mathcal{Z} \right\}.$$

On définit $Q^4(\zeta) := P^4(D^-(\zeta))$, avec P^4 le polynôme défini dans le Lemme 3.12. Alors $\nabla_{\zeta}^2 Q^4 \in \mathcal{M}_{1/2}$, et on a :

$$|\nabla_{\zeta}^2 Q^4|_{1/2} \leq C(\alpha, M) \|\zeta\|_{\alpha}^2.$$

Preuve. On rappelle que

$$P^4(\zeta) = \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}} \sum_{1 \leq r \leq 4} a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_r} \eta_{j_{r+1}} \cdots \eta_{j_4},$$

avec $|a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r| < M$ pour tout $(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}$. On a donc

$$Q^4(\zeta) = \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \mathcal{J}} \sum_{1 \leq r \leq 4} \frac{a_{j_1, j_2, j_3, j_4}^r}{\sqrt{\lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \lambda_{j_3} \lambda_{j_4}}} \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_r} \eta_{j_{r+1}} \cdots \eta_{j_4}.$$

On a aussi

$$|\nabla_{\zeta}^2 Q^4|_{1/2} = \sup_{s, s' \in \mathbb{Z}} \langle s \rangle^{1/2} \langle s' \rangle^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 Q^4}{\partial \zeta_s \partial \zeta_{s'}} \right\|_{\infty}.$$

Pour tous s et s' dans \mathbb{Z} , on a :

$$\langle s \rangle^{1/2} \langle s' \rangle^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 Q^4}{\partial \zeta_s \partial \zeta_{s'}} \right\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty},$$

avec A une matrice réelle carrée de taille 2, dont les coefficients sont des polynômes homogènes de Y_α de degré 2, de la forme :

$$P^2(\zeta) = \sum_{\bar{j} \in \mathcal{J}} \sum_{k,l=1}^4 \frac{1}{\sqrt{\lambda_{j_{\sigma(k)}} \lambda_{j_{\sigma(l)}}}} (a_1 \xi_{j_{\sigma(k)}} \xi_{j_{\sigma(l)}} + a_2 \xi_{j_{\sigma(k)}} \eta_{j_{\sigma(l)}} + a_3 \eta_{j_{\sigma(k)}} \eta_{j_{\sigma(l)}}),$$

avec $\bar{j} = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, j_{\sigma(3)}, j_{\sigma(4)})$ où σ est une permutation appartenant au groupe de permutation $S(\{1, 2, 3, 4\})$. Par le Lemme 3.11 on a :

$$|P^2(\zeta)| \leq C(\alpha, M) \|\zeta\|_\alpha^2,$$

et donc

$$|\nabla_\zeta^2 Q|_{1/2} \leq C(\alpha, M) \|\zeta\|_\alpha^2.$$

□

Remarque 3.14. On rappelle que $P_4 = P_4^0 + P_4^1 + P_4^2$ avec

$$\begin{aligned} P_4^0 &= \frac{1}{8\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ P_4^1 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l + \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ P_4^2 &= \frac{3}{4\pi} \sum_{(i,j,-k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}. \end{aligned}$$

Les coefficients de chaque monôme sont majorés pas $3/4\pi$. En appliquant les lemmes 3.12 et 3.13, on obtient que la partie quartique P_4 de la perturbation P est dans $\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mu)$ pour $\alpha > 1/2$ et $\zeta \in \mathcal{O}_\mu(Y_\alpha)$.

Soit $\mathcal{U} \subset [1, 2]$ le Borélien de mesure de Lebesgue pleine construit dans le Lemme 3.10. Pour tout $m \in \mathcal{U}$, on veut construire un changement de variable symplectique réel holomorphe au voisinage de l'origine de Y_α qui transforme la partie quartique de l'hamiltonien H en une forme normale de Birkhoff d'ordre 5. Cette transformation exhibe de la partie quartique de la perturbation P les termes intégrables ainsi que les termes d'ordre au moins 3 dans la direction de $\mathcal{L} = \mathbb{Z} \setminus \mathcal{A}$.

Proposition 3.15. Pour tout $m \in \mathcal{U}$, il existe un changement de variable symplectique τ réel holomorphe défini sur $\mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha)$ pour un certain $\delta(m)$ et $\alpha > 1/2$. Ce changement de variable vérifie :

$$(3.8) \quad \|\tau(\zeta) - \zeta\|_\alpha \leq C(m) \|\zeta\|_\alpha^3, \quad \forall \zeta \in \mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha).$$

Il transforme l'hamiltonien $H = H_2 + P = H_2 + P_4 + R_5$ en :

$$(3.9) \quad H \circ \tau = (H_2 + P) \circ \tau = H_2 + Z_4 + Q_4 + R_6 + R_5 \circ \tau,$$

avec

$$Z_4 = \frac{3}{\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\lambda_i \lambda_j},$$

et $Q_4 = Q_{4,1} + Q_{4,2}$ avec

$$\begin{aligned} Q_{4,1} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,-k,l) \in \mathcal{J}_2^c} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l + \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}, \\ Q_{4,2} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2^c} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}. \end{aligned}$$

Le polynôme Z_4 contient des termes intégrables alors que Q_4 est cubique ou quartique dans la direction de \mathcal{L} . De plus, Z_4 , Q_4 , R_6 et $R_5 \circ \tau$ sont réels holomorphes

sur $\mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha)$. Les restes $R_5 \circ \tau$ et R_6 sont respectivement d'ordre 5 et 6 au voisinage de l'origine de Y_α . De plus, pour tout $0 < \mu \leq \delta(m)$, Z_4 , Q_4 , $R_5 \circ \tau$ et R_6 sont dans $\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mu)$ et vérifient :

$$(3.10) \quad \llbracket Z_4 \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} + \llbracket Q_4 \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq C\mu^4,$$

$$(3.11) \quad \llbracket R_6 \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq C\mu^6,$$

$$(3.12) \quad \llbracket R_5 \circ \tau \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq C\mu^5,$$

avec C une constante strictement positive qui dépend de la masse m , de la non-linéarité g et de l'ensemble admissible \mathcal{A} .

Rappelons que le crochet de Poisson associé à la forme symplectique $-i \sum_{s \in \mathbb{Z}} d\xi_s \wedge d\eta_s$ est donné par :

$$\{f, g\}(\xi, \eta) = i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} - \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial \eta_j},$$

pour $f, g \in \mathcal{C}^1(Z_\alpha \times Z_\alpha)$.

Lemme 3.16. Soit P un polynôme homogène de degré 4 défini par :

$$P(\xi, \eta) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=4} a_{\alpha, \beta} \xi^\alpha \eta^\beta,$$

avec $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \xi_4^{\alpha_4}$. On a alors :

$$\{H_2, P\}(\xi, \eta) = i \sum_{|\alpha|+|\beta|=4} a_{\alpha, \beta} \Omega_{\min(|\alpha|, |\beta|)}(\alpha, \beta) \xi^\alpha \eta^\beta.$$

Preuve. On démontre le lemme précédent en utilisant l'expression de l'hamiltonien H_2 , du crochet de Poisson et des fréquences $\Omega_p(\alpha, \beta)$ pour $0 \leq p \leq 2$. \square

Preuve de la Proposition 3.15. On cherche à construire un changement de variable symplectique τ réel holomorphe défini au voisinage de l'origine de Y_α avec $\alpha > 1/2$ qui transforme l'hamiltonien H en une forme normale de Birkhoff à l'ordre 5. Pour ce faire, on utilise une méthode classique : τ sera le flot induit par un Hamiltonien χ_4 à $t = 1$. En effet, $\tau = \Phi_{\chi_4}^1$ avec $\Phi_{\chi_4}^t$ le flot induit par χ_4 à l'instant t . On ramène notre problème à la recherche d'un Hamiltonien χ_4 qui sera solution d'une certaine équation homologique.

Grâce à la formule de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} (H_2 + P_4 + R_5) \circ \tau &= (H_2 + P_4) \circ \tau + R_5 \circ \tau \\ &= H_2 + P_4 + \{H_2, \chi_4\} + \{P_4, \chi_4\} \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) \{ \{H_2 + P_4, \chi_4\}, \chi_4 \} \circ \Phi_{\chi_4}^t dt + R_5 \circ \tau. \end{aligned}$$

On veut que :

$$(H_2 + P_4 + R_5) \circ \tau = H_2 + Z_4 + Q_4 + R_6 + R_5 \circ \tau.$$

Donc, en posant

$$R_6 = \{P_4, \chi_4\} + \int_0^1 (1-t) \{ \{H_2 + P_4, \chi_4\}, \chi_4 \} \circ \Phi_{\chi_4}^t dt,$$

il suffit que χ_4 vérifie l'équation homologique suivante :

$$(3.13) \quad \{H_2, \chi_4\} = Z_4 + Q_4 - P_4.$$

D'après le Lemme 3.16, il suffit de prendre χ_4 de la forme :

$$\begin{aligned}\chi_4 &= \frac{i}{8\pi} \sum_{(i,j,-k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l - \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l}{\Omega_0(i,j,k,l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \\ &+ \frac{i}{2\pi} \sum_{(i,j,-k,l) \in \mathcal{J}_2} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l - \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\Omega_1(i,j,k,l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \\ &+ \frac{3i}{4\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}_2} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\Omega_2(i,j,k,l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.10, il existe un Borélien $\mathcal{U} \subset [1, 2]$ de mesure de Lebesgue pleine tel que pour tout $m \in \mathcal{U}$, il existe une constante strictement positive $\gamma(m) > 0$ qui minore $|\Omega_1(i,j,k,l)|$ et $|\Omega_2(i,j,k,l)|$. De plus, $\Omega_0(i,j,k,l) > 4$. Ainsi χ_4 est un polynôme homogène de degré 4 construit sur J , avec des coefficients bornés. Il s'ensuit que le champ de vecteur Hamiltonien X_{χ_4} est réel holomorphe sur Y_α . De plus, d'après le Lemme 3.12, pour tout $m \in \mathcal{U}$ et $\alpha > 1/2$, il existe $C(\alpha, m) > 0$ tels que :

$$\|X_{\chi_4}\|_\alpha \leq C(\alpha, m) \|\zeta\|_\alpha^3.$$

Ainsi il existe $\delta(m) > 0$ tel que τ est un changement de variable symplectique holomorphe réel défini sur $\mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha)$

En utilisant le Lemme 3.16, on a

$$\begin{aligned}\{H_2, \chi_4\} &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{(i,j,-k,-l) \in \mathcal{J}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{(i,j,-k,l) \in \mathcal{J}_2} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \eta_l + \eta_i \eta_j \eta_k \xi_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \\ &- \frac{3}{4\pi} \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{R}_2} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}}.\end{aligned}$$

Donc

$$(H_2 + P_4) \circ \tau = H_2 + Z_4 + Q_4 + R_6,$$

avec Z_4, Q_4 définis comme dans la proposition. On voit directement qu'ils sont deux polynômes homogènes de degrés 4 réels à coefficients bornés. Donc, en appliquant les lemmes 3.11 et 3.12, on obtient pour $\alpha > 1/2$ et $0 < \mu \leq \delta(m)$, que ces

Regardons à présent les propriétés des restes R_6 et $R_5 \circ \tau$. Commençons par R_6 . Par construction, R_6 est un Hamiltonien holomorphe d'ordre 6 au voisinage de l'origine de Y_α . On rappelle que

$$R_6 = H \circ \tau - H_2 - Z_4 - Q_4 - R_5 \circ \tau.$$

Le membre de droite est réel et donc R_6 l'est aussi. Démontrons que R_6 est dans $\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mu)$ avec $0 < \mu \leq \delta(m)$.

On commence d'abord par démontrer que $\chi_4 \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2+}(\mu)$. On remarque que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tel que $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}$, on a :

$$\frac{\langle i \rangle^{3/2}}{|\Omega_\iota(i, j, k, l)| \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \leq C(\mathcal{A}, m), \quad \iota = 0, 1, 2.$$

En utilisant cette estimation et la même méthode que dans la preuve du Lemme 3.12, on obtient que $\nabla_\zeta \chi_4 \in L_{\frac{1}{2}+}$.

Il reste à montrer que $\nabla_\zeta^2 \chi_4 \in \mathcal{M}_{\frac{1}{2}+}$. Les premiers termes de χ_4 sont construits sur

\mathcal{J} . Pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{\langle i \rangle^{1/2} \langle j \rangle^{1/2} (1 + ||i| - |j||)}{\Omega_0(i, j, k, l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \leq 1.$$

Les termes suivants de χ_4 sont construits sur \mathcal{J}_2 . En appliquant la Proposition 2.8 on obtient donc :

$$\frac{\langle i \rangle^{1/2} \langle j \rangle^{1/2} (1 + ||i| - |j||)}{\Omega_\iota(i, j, k, l) \sqrt{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l}} \leq C'(m, \mathcal{A}), \quad \iota = 1, 2.$$

En utilisant ces deux dernières estimations et la même méthode que dans la preuve du Lemme 3.13, on obtient que $\nabla_\zeta^2 \chi_4 \in \mathcal{M}_{\frac{1}{2}+}$. Ceci nous permet de montrer que $\chi_4 \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2+}(\mu)$ pour $\alpha > 1/2$ et $0 < \mu \leq \delta(m)$. D'après le Lemme 3.1 on a $\{\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\delta(m)), \mathcal{T}^{\alpha, 1/2+}(\delta(m))\} \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\frac{1}{2}\delta(m))$. Donc $\{P_4, \chi_4\} \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\frac{1}{2}\delta(m))$ et pour $0 < \mu \leq \frac{1}{2}\delta(m)$, on a :

$$\llbracket \{P_4, \chi_4\} \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq C\mu^{-2} \llbracket P_4 \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \llbracket \chi_4 \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2+} \leq C\mu^6.$$

Grâce à l'équation homologique (3.13), on a :

$$\{H_2 + P_4, \chi_4\} = Z_4 + Q_4 - P_4 + \{P_4, \chi_4\} \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\frac{1}{2}\delta(m)).$$

En appliquant encore une fois le Lemme 3.1, on obtient pour $0 < \mu \leq \frac{1}{4}\delta(m)$:

$$\{\{H_2 + P_4, \chi_4\}, \chi_4\} \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\frac{1}{4}\delta(m)) \quad \text{et} \quad \llbracket \{\{H_2 + P_4, \chi_4\}, \chi_4\} \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq C\mu^6.$$

Puisque $\chi_4 \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2+}(\delta(m))$ et comme $\llbracket \chi_4 \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2+} \leq C\mu^4$, le Corollaire 3.3 donne :

$$\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\frac{1}{4}\delta(m)) \circ \Phi_{\chi_4}^t \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\frac{1}{8}\delta(m)).$$

Ainsi, $R_6 \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mu)$ et vérifie l'estimation (3.11) pour $0 < \mu \leq \frac{1}{8}\delta(m)$.

À présent, on s'intéresse au reste $R_5 \circ \tau$. Rappelons que $R_5 = P - P_4$, donc R_5 est réel holomorphe d'ordre 5 au voisinage de l'origine de Y_α et appartient à $\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\delta(m))$. Encore une fois, grâce au Corollaire 3.3, on obtient que $R_5 \circ \tau \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\frac{1}{2}\delta(m))$, donc $R_5 \circ \tau \in \mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mu)$ et vérifie pour $0 < \mu \leq \frac{1}{2}\delta(m)$:

$$\llbracket R_5 \circ \tau \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq \llbracket P - P_4 \rrbracket_\mu^{\alpha, 1/2} \leq C\mu^5.$$

On termine la preuve en remplaçant $\frac{1}{8}\delta(m)$ par $\delta(m)$. □

Lemme 3.17. *Pour $m \in \mathcal{U}$ et $\alpha > 1/2$, le changement de variable τ défini dans la Proposition 3.15 vérifie :*

$$\tau\left(\mathfrak{T}_\rho(\nu, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \alpha)\right) \subset \mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha),$$

pour $0 < \sigma \leq 1$, $0 < \mu \leq 1$ et $\nu \leq 4\mu^{-2}e^{-\sigma}\delta^2(m)$.

Preuve. Pour $m \in \mathcal{U} \subset [1, 2]$ et $\alpha > 1/2$, le changement de variable τ vérifie :

$$\|\tau(\zeta) - \zeta\|_\alpha \leq C(m) \|\zeta\|_\alpha^3, \quad \forall \zeta \in \mathcal{O}_{\delta(m)}(Y_\alpha).$$

Rappelons que :

$$\mathfrak{T}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha) = \left\{ (I, \theta, \xi, \eta) \mid |I - \nu\rho| < \nu\mu^2, |Im\theta| < \sigma, \|\zeta^\mathcal{L}\|_\alpha < \nu^{1/2}\mu \right\}.$$

Posons $\tilde{\zeta} = \tau(\zeta)$. Alors, pour $\nu \leq 4\mu^{-2}e^{-\sigma}\delta^2(m)$, on a :

$$(3.14) \quad \|\tilde{\zeta} - \zeta\|_\alpha \leq C'(m) \mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}} \nu^{\frac{3}{2}},$$

où $C'(m)$ est une constante, multiple de $C(m)$. Montrons en utilisant cette estimation que :

$$\tau\left(\mathfrak{F}_\rho\left(\nu, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \alpha\right)\right) \subset \mathfrak{F}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha).$$

— Sur \mathcal{L} , on a :

$$\|\tilde{\zeta}\|_\alpha \leq \|\zeta\|_\alpha + C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}} \nu^{\frac{3}{2}} < \frac{1}{2}\nu^{\frac{1}{2}} + C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}} \nu^{\frac{3}{2}} < \nu\mu.$$

— Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_a - \nu\rho_a| &\leq |I_a - \nu\rho_a| + |\tilde{I}_a - I_a| \\ &< \frac{1}{4}\nu\mu^2 + |\tilde{\xi}_a\tilde{\eta}_a - \xi_a\eta_a| \\ &< \frac{1}{4}\nu\mu^2 + |\tilde{\xi}_a||\tilde{\eta}_a - \eta_a| + |\eta_a||\tilde{\xi}_a - \xi_a|. \end{aligned}$$

Comme $\zeta \in \mathfrak{F}_\rho\left(\nu, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \alpha\right)$, on a

$$|\eta_a| < \left(\frac{1}{2}\mu + \sqrt{2}\right)e^{\frac{\sigma}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}.$$

En vertu de l'inégalité (3.14), on a :

$$|\tilde{\xi}_a| < \left(\frac{1}{2}\mu + \sqrt{2}\right)e^{\frac{\sigma}{2}}\nu^{\frac{1}{2}} + C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}}\nu^{\frac{3}{2}},$$

$$|\tilde{\eta}_a - \eta_a| + |\tilde{\xi}_a - \xi_a| < C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}}\nu^{\frac{3}{2}}.$$

Donc on a bien

$$|\tilde{I}_a - \nu\rho_a| < \nu\mu^2.$$

— Il reste à vérifier que $|Im(\tilde{\theta}_a)| < \sigma$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. D'une part, on a :

$$|\tilde{\xi}_a| = \left| \sqrt{\tilde{I}_a} e^{i\tilde{\theta}_a} \right| \leq \sqrt{\tilde{I}_a} e^{|Im(\tilde{\theta}_a)|} < \nu^{\frac{1}{2}}(\mu + \sqrt{2})e^{|Im(\tilde{\theta}_a)|}.$$

D'autre part, grâce à l'inégalité (3.14) on a :

$$|\tilde{\xi}_a| < \left(\frac{1}{2}\mu + \sqrt{2}\right)e^{\frac{\sigma}{2}}\nu^{\frac{1}{2}} + C'(m)\mu^3 e^{\frac{3\delta}{2}}\nu^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi

$$e^{|Im(\tilde{\theta}_a)|} \leq \frac{\mu + 2\sqrt{2}}{2(\mu + \sqrt{2})} e^{\frac{\sigma}{2}} + \nu \frac{C'(m)\mu^3}{\mu + \sqrt{2}} e^{\frac{3\delta}{2}},$$

et on obtient que $|Im(\tilde{\theta})| \leq \sigma$. □

3.4. Forme normale sur les ensembles admissibles. On rappelle que l'hamiltonien Z_4 est donné par :

$$Z_4 = 3/4\pi \sum_{(i,j,k,l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2} \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{\lambda_i \lambda_j},$$

avec

$$\mathcal{J}_2 = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J} \mid \#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{A} \geq 2\}.$$

On remarque que Z_4 contient des termes intégrables formés par les monômes de la forme $\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l = I_i I_j$, qui dépendent seulement des actions définies par $I_n = \xi_n \eta_n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Notons ces termes Z_4^+ et $Z_4^- = Z_4 - Z_4^+$. Un simple calcul nous donne :

$$(3.15) \quad Z_4^+ = \frac{3}{4\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{Z}} \frac{4 - 3\delta_{l,k}}{\lambda_l \lambda_k} I_l I_k.$$

On s'intéresse à présent à Z_4^- . On a $Z_4^- = \sum_{0 \leq r \leq 4} Z_4^{-r}$ avec $r = \#\{(i, j, k, l) \cap \mathcal{A}\}$.

Par définition de \mathcal{J}_2 , on a $Z_4^{-0} = Z_4^{-1} = 0$.

Lemme 3.18. *Supposons que \mathcal{A} est admissible. Alors, pour tout $m \in \mathcal{U}$,*

$$Z_4^{-4} = 0.$$

Preuve. Posons $\mathcal{F} = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{A}\}$. On a alors, pour $(i, j, k, l) \in \mathcal{F}$ et $m \in \mathcal{U}$,

- ★ $i + j = k + l$ d'après la définition de \mathcal{J} ,
- ★ $\{|i|, |j|\} = \{|k|, |l|\}$ d'après le Lemme 3.10,
- ★ $\{i, j\} \neq \{k, l\}$ d'après la définition de \mathcal{A} ,

Il s'ensuit que $\mathcal{F} = \emptyset$ et que $Z_4^{-4} = 0$. \square

Lemme 3.19. *Supposons que \mathcal{A} est admissible. Alors pour tout $m \in \mathcal{U}$*

$$Z_4^{-3} = 0.$$

Preuve. Supposons qu'il existe $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2$ tel que $\#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{A} = 3$. Sans perte de généralité supposons que $i, j, k \in \mathcal{A}$ et $l \in \mathcal{L}$. Grâce au Lemme 3.10, on a $|i| = |k|$ ou $|j| = |k|$. De plus, et puisque \mathcal{A} est un ensemble admissible, on a $ai = k$ ou $j = k$. Supposons par exemple que $i = k$. Puisque $i + j = k + l$, on a $j = l$ et $l \in \mathcal{A}$, ce qui contredit le fait que \mathcal{A} est admissible. Donc $Z_4^{-3} = 0$. \square

Lemme 3.20. *Supposons que \mathcal{A} est admissible. Alors, pour tout $m \in \mathcal{U}$,*

$$Z_4^{-2} = 0.$$

Preuve. Posons $\aleph = \{(i, j, k, l) \in \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{R}_2 \mid \#\{i, j, k, l\} \cap \mathcal{A} = 2\}$.

- ★ Supposons que $i, j \in \mathcal{A}$ et que $k, l \in \mathcal{L}$. Alors, par le Lemme 3.10, on a $i = -k$ et $j = -l$ ou $i = -l$ et $j = -k$. Sans perte de généralité supposons que $i = -k$ et $j = -l$. Or $(i, j, k, l) \in \mathcal{J}$, donc $i + j = k + l = -k - l$ et donc $i = -j$. Ceci est absurde puisque \mathcal{A} est un ensemble admissible. Le cas où $k, l \in \mathcal{A}$ et $i, j \in \mathcal{L}$ se traite exactement de la même manière.
- ★ Supposons maintenant que $i, l \in \mathcal{A}$ et que $j, k \in \mathcal{L}$. D'après le Lemme 3.10, on aura alors soit $|i| = |k|$ et $|j| = |l|$ ou $i = l$ et $|j| = |k|$. Étudions d'abord le cas où $i = l$ et $|j| = |k|$. La condition $i + j = k + l$ nous donne $j = k$. Le monôme $\xi_i \xi_j \eta_j \eta_i$ serait donc dans Z_4^- , ce qui est absurde. Regardons maintenant le cas où $|i| = |k|$ et $|j| = |l|$. Puisque \mathcal{A} est admissible, on a $i = -k$ et $l = -j$. Puisque $i + j = k + l$, on a alors $i = l$ et $j = k$, ce qui nous ramène au cas précédent. Le cas où $k, l \in \mathcal{A}$ et $i, j \in \mathcal{L}$ se traite exactement de la même manière. De même on traite le cas où $i, k \in \mathcal{A}$ et $j, l \in \mathcal{L}$.

Ainsi on déduit que $\aleph = \emptyset$ et donc $Z_4^{-2} = 0$. \square

3.5. Passage aux variables action-angle. Comme dans (3.3), on passe des variables (ξ, η) au variables $(I, \theta, \xi^\mathcal{L})$, avec $I = (I_a, a \in \mathcal{A})$, $\theta = (\theta_a, a \in \mathcal{A})$ et $\xi^\mathcal{L} = (\xi_s, s \in \mathcal{L})$. On rappelle que pour $a \in \mathcal{A}$, I et θ sont donnés par :

$$\xi_a = \sqrt{I_a} e^{i\theta_a}, \quad \eta_a = \sqrt{I_a} e^{-i\theta_a}.$$

Dans ces nouvelles variables, la forme symplectique $-id\xi \wedge d\eta$ devient :

$$(3.16) \quad - \sum_{a \in \mathcal{A}} dI_a \wedge d\theta_a - i \sum_{s \in \mathcal{L}} d\xi_s \wedge d\eta_s.$$

De plus I est d'ordre 2, θ est d'ordre zéro, et ξ et η sont d'ordre 1.

En vertu de (3.15) et des lemmes 3.18-3.20, l'hamiltonien 3.9 devient :

$$\begin{aligned} H \circ \tau &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a I_a + \frac{3}{4\pi} \sum_{l, a \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{l,a}}{\lambda_l \lambda_a} I_l I_a + \sum_{s \in \mathcal{L}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \frac{3}{\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{L}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} I_l \xi_s \eta_s \\ &\quad + Q_4 + R_5 \circ \tau + R_6 \end{aligned}$$

La première ligne contient les termes intégrables. La deuxième ligne contient :

- Q_4 , qui est d'ordre 4 et au moins d'ordre 3 dans la direction de \mathcal{L} ;

- R_6 , qui provient de la forme normale de Birkhoff et qui est d'ordre 6 ;
- $R_5 \circ \tau$, qui provient du terme d'ordre 5 de la non linéarité (1.2).

L'hamiltonien $H \circ \tau$ dépend des variables $(I, \theta, \zeta^{\mathcal{L}})$. Pour la suite, on va omettre le multi-indice \mathcal{L} : $\zeta^{\mathcal{L}}$ sera donc noté par ζ .

3.6. Re-scaling des variables. Notre but est d'étudier l'hamiltonien H_1 . Pour cela, on va ré-échelonner les variables (I, θ, ξ, η) moyennant le changement de variable :

$$(3.17) \quad \chi_\rho : (\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \mapsto (I, \theta, \xi, \eta),$$

avec :

$$\begin{aligned} I &= \nu\rho + \nu\tilde{r}, & \theta &= \tilde{\theta}, \\ \xi &= \nu^{1/2}\tilde{\xi}, & \eta &= \nu^{1/2}\tilde{\eta}. \end{aligned}$$

on a :

$$\chi_\rho : \mathcal{O}^\alpha \left(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2} \right) \rightarrow \mathfrak{T}_\rho \left(\nu, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \alpha \right).$$

Dans ces nouvelles variables, la forme symplectique (3.16) devient :

$$(3.18) \quad -\nu \sum_{a \in \mathcal{A}} d\tilde{r}_a \wedge d\tilde{\theta}_a - i\nu \sum_{s \in \mathcal{L}} d\tilde{\xi}_s \wedge d\tilde{\eta}_s.$$

Posons :

$$\check{\Psi} = \check{\Psi}_\rho = \tau \circ \chi_\rho.$$

Le changement de variables χ_ρ est linéaire en ρ . On peut donc étendre Φ de manière holomorphe sur :

$$\mathcal{D}_c = \left\{ \rho \in \mathbb{C}^{\mathcal{A}} \mid \left| \rho_j - \frac{3}{2} \right| \leq c, 1 \leq j \leq \text{Card}(\mathcal{A}) \right\}.$$

Pour alléger les notations on va omettre le tilde. Dans ces variables ré-échelonnées l'hamiltonien H devient à une constante près :

$$\begin{aligned} H \circ \check{\Psi} &= \nu \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a r_a + \nu^2 \frac{3}{2\pi} \sum_{a, l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{a,l}}{\lambda_a \lambda_l} \rho_l r_a \\ &+ \nu \sum_{s \in \mathcal{L}} \lambda_s \xi_s \eta_s + \nu^2 \frac{3}{\pi} \sum_{\substack{l \in \mathcal{A} \\ s \in \mathcal{L}}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} \rho_l \xi_s \eta_s \\ &+ \nu^2 \frac{3}{4\pi} \sum_{a, l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{a,l}}{\lambda_a \lambda_l} r_l r_a + \nu^2 \frac{3}{\pi} \sum_{\substack{l \in \mathcal{A} \\ s \in \mathcal{L}}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} r_l \xi_s \eta_s \\ &+ (Q_4 + R_5 \circ \tau + R_6) \circ \chi_\rho. \end{aligned}$$

En divisant par ν , on peut réécrire l'hamiltonien suivant sous la forme :

$$(3.19) \quad \nu^{-1} H \circ \check{\Psi} = h_0 + f,$$

où $h_0 \equiv h_0(r, \xi, \eta; \rho, \nu)$ contient tous les termes linéaires en r , quadratiques en ξ, η et indépendants de la variable angle θ . La nouvelle perturbation f contient tous les termes restants et dépend notamment de la variable angle. Elle est donnée par :

$$(3.20) \quad f \equiv \nu \frac{3}{4\pi} \sum_{a, l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{a,l}}{\lambda_a \lambda_l} r_l r_a + \nu \frac{3}{\pi} \sum_{\substack{l \in \mathcal{A} \\ s \in \mathcal{L}}} \frac{1}{\lambda_l \lambda_s} r_l \xi_s \eta_s + \nu^{-1} (Q_4 + R_5 \circ \tau + R_6) \circ \chi_\rho.$$

On peut écrire le nouvel hamiltonien h sous la forme suivante

$$(3.21) \quad h_0 = \Omega \cdot r + \sum_{a \in \mathcal{L}} \Lambda_a \xi_a \eta_a,$$

avec $\Omega = (\Omega_k)_{k \in \mathcal{A}}$, et

$$(3.22) \quad \Omega_k = \Omega_k(\rho, \nu) = \omega_k + \nu \tilde{\omega}_k = \omega_k + \nu \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\lambda_k} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{l,k}}{\lambda_l} \rho_l,$$

$$(3.23) \quad \Lambda_a = \Lambda_a(\rho, \nu) = \lambda_a + \nu \tilde{\lambda}_a = \lambda_a + \nu \frac{3}{\pi} \frac{1}{\lambda_a} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{\rho_l}{\lambda_l},$$

pour tout $\rho \in \mathcal{D}_c$. On remarque que pour les fréquences internes, on a :

$$(3.24) \quad \tilde{\omega}_k = \sum_{l \in \mathcal{A}} M_k^l \rho_l, \quad M_k^l = \frac{3}{2\pi} \frac{4 - 3\delta_{l,k}}{\lambda_k \lambda_l}.$$

M est une matrice inversible puisque :

$$\det M = \left(\frac{3}{2\pi} \right)^n \left(\prod_{l \in \mathcal{A}} \lambda_l^{-2} \right) (4n - 3) (-3)^{n-1}, \quad n = \text{Card}(\mathcal{A}).$$

Rappelons que $\rho \in [1, 2]^{\mathcal{A}}$ et que $\mathcal{A} \subset \{a \in \mathbb{Z}^d \mid |a| \leq N\}$. On a alors, pour tout $\rho \in \mathcal{D}_c$,

$$|\Omega(\rho) - \omega(\rho)| \leq \nu \left| \frac{3}{2\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{4 - 3\delta_{l,k}}{\lambda_l} \rho_l \right|, \quad \text{et} \quad |\Lambda_a(\rho) - \lambda_a(\rho)| \leq \nu |a|^{-1} \left| \frac{3}{\pi} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{\rho_l}{\lambda_l} \right|.$$

Ceci prouve les inégalités (3.6) et termine la preuve des points (i) et (ii) du Théorème 3.7.

En rappelant que $\zeta = (\zeta_a)_{a \in \mathcal{L}}$, la partie quadratique de notre Hamiltonien est donnée par la matrice infinie :

$$A(\rho, \nu) = \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & \Lambda_a(\rho, \nu) \\ \Lambda_a(\rho, \nu) & 0 \end{array} \right), a \in \mathcal{L} \right).$$

On peut donc écrire l'hamiltonien h sous la forme :

$$h = \Omega(\rho, \nu) \cdot r + \frac{1}{2} \langle A(\rho, \nu) \zeta, \zeta \rangle.$$

Le spectre de A est

$$\sigma(A) = \{\pm \Lambda_a(\rho, \nu), a \in \mathcal{L}\}.$$

L'opérateur Hamiltonien est

$$iJA(\rho, \mu) = \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} -i\Lambda_a(\rho, \nu) & 0 \\ 0 & i\Lambda_a(\rho, \nu) \end{array} \right), a \in \mathcal{L} \right).$$

Le spectre de l'opérateur hamiltonien est donné par

$$\Sigma(iJA) = \{\pm i\Lambda_a(\rho, \nu), a \in \mathcal{L}\}.$$

Étudions à présent la perturbation (3.20). En vertu de la Proposition 3.15, la perturbation f est réelle holomorphe et appartient à $\mathcal{T}^{\alpha, 1/2}(\mathcal{D}, \frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$. En utilisant les estimations (3.10)-(3.12), on a pour $x = (r, \theta, \zeta) \in \mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$:

$$\begin{aligned} |f| &\leq C\nu\mu^4, \\ \|\nabla_\zeta f\|_\alpha &\leq C\nu\mu^3, \\ |\nabla_\zeta f|_{1/2} &\leq C\nu\mu^3, \\ |\nabla_\zeta^2 f|_{1/2} &\leq C\nu\mu^2, \end{aligned}$$

avec C une constante qui dépend de l'ensemble admissible \mathcal{A} , de la masse m et de la non-linéarité g . On obtient ainsi :

$$\|f\|_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2} \leq C\nu\mu^4.$$

Regardons à présent f^T . Rappelons d'abord que :

$$f^T = f(\theta, 0, 0, \rho) + \nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho)r + \langle \nabla_\zeta f(\theta, 0, 0, \rho), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla_{\zeta\zeta}^2 f(\theta, 0, 0, \rho) \zeta, \zeta \rangle.$$

On cherche les termes de (3.20) qui peuvent contribuer à f^T . Clairement les deux premiers termes ne contribuent pas à f^T . Le troisième terme Q_4 est construit sur \mathcal{J}_2^c et donc ne contribue pas dans f^T . Regardons à présent $R_5 \circ \tau$. D'après 3.15, $R_5 \circ \tau$ est d'ordre 5. De plus $R_5 \circ \tau$ dépend de la variable action I , d'ordre 2, de l'angle θ et de ξ et η , qui sont tous d'ordre 1 chacun. Donc $R_5 \circ \tau$ peut contenir des termes du type :

- $I^{5/2}$ qui contribueront à $f(\theta, 0, 0, \rho)$ et $\nabla_r f(\theta, 0, 0, \rho)$;
- $I^2 \xi$ ou $I^2 \eta$ qui contribueront à $\nabla_\xi f(\theta, 0, 0, \rho)$ ou $\nabla_\eta f(\theta, 0, 0, \rho)$;
- $I^{3/2} \xi \eta$, $I^{3/2} \xi \xi$, $I^{3/2} \eta \eta$ qui contribueront à $\nabla_{\xi\eta}^2 f(\theta, 0, 0, \rho)$, $\nabla_{\xi\xi}^2 f(\theta, 0, 0, \rho)$ ou $\nabla_{\eta\eta}^2 f(\theta, 0, 0, \rho)$.

Et donc $R_5 \circ \tau \circ \chi_\rho$ contribue à f^T . De même pour $R_6 \circ \chi_\rho$. On déduit que :

$$\llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2} \leq C \nu^{3/2} \mu^5.$$

Pour terminer la preuve du point (iii) du Théorème 3.7, il faut étudier la dérivée en ρ de la perturbation f , ainsi que son jet. Rappelons que, d'après (3.20), la dépendance de la perturbation f en ρ provient du changement de variable χ_ρ via la relation $I = \nu\rho + \nu\tilde{r}$. On peut donc étendre f de manière holomorphe sur \mathcal{D}_c avec les mêmes estimations. En appliquant l'estimation de Cauchy sur ce ce domaine on obtient :

$$\llbracket \partial_\rho f \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2} \leq c^{-1} \llbracket f \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2}, \quad \llbracket \partial_\rho f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2} \leq c^{-1} \llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2}.$$

Donc $\partial_\rho f$ et $\partial_\rho f^T$ vérifient les mêmes estimations que f et f^T .

3.7. Passage aux variables réelles. Dans la forme normale (3.5), la partie quadratique est exprimée en variables complexes. Cependant le théorème KAM est énoncé en variables réelles. Afin d'y remédier on considère le changement de variable symplectique suivant :

$$\Upsilon(r, \theta, \zeta) = (r, \theta, \check{\zeta}),$$

avec $\check{\zeta} = (p, q) = \left(\check{\zeta}_s = (p_s, q_s), s \in \mathcal{L} \right)$. Les variables p et q sont définies par :

$$\xi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_s + iq_s), \quad \eta_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_s - iq_s).$$

Sous les hypothèses du Théorème 3.7, posons $\Psi_\rho = \check{\Psi}_\rho \circ \Upsilon$. Ce changement de variable est réel holomorphe et vérifie :

$$\Psi_\rho : \mathcal{O}^\alpha \left(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2} \right) \rightarrow \mathfrak{F}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha).$$

Le changement de variable Ψ_ρ transforme la forme symplectique $-id\xi \wedge d\eta$ en $-dr \wedge d\theta - dp \wedge dq$. Dans les nouvelles variables la forme normale (3.5) devient :

$$\begin{aligned} h(r, \theta, \check{\zeta}; \rho) &= H \circ \Psi_\rho \\ &= \Omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \sum_{a \in \mathcal{L}} \Lambda_a(\rho) (p_a^2 + q_a^2) + f(r, \theta, \check{\zeta}; \rho) \\ (3.25) \quad &= \Omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \sum_{a \in \mathcal{L}} \langle \check{A}(\rho, \nu) \check{\zeta}, \check{\zeta} \rangle + f(r, \theta, \check{\zeta}; \rho), \end{aligned}$$

avec

$$\check{A}(\rho, \nu) = \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} \Lambda_a(\rho, \nu) & 0 \\ 0 & \Lambda_a(\rho, \nu) \end{array} \right), a \in \mathcal{L} \right).$$

Dans ces nouvelles variables, la perturbation f vérifie les mêmes estimations que celle énoncées au troisième point du Théorème 3.7.

4. THÉORÈME KAM POUR L'ÉQUATION DES ONDES

4.1. Hypothèses et énoncé du théorème KAM. Dans cette section on rappelle un théorème KAM et on adapte les notations pour l'équation des ondes non-linéaire cubique sur le cercle.

Considérons un Hamiltonien réel h_ρ sous forme normale qui dépend d'un paramètre ρ , donné par :

$$(4.1) \quad h(r, p, q; \rho) = \Omega(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \sum_{a \in \mathcal{L}} \Lambda_a(\rho) (p_a^2 + q_a^2),$$

avec :

- $\rho \in \mathcal{D}$ un compact de \mathbb{R}^p ;
- $\Omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ le vecteur fréquence interne de classe C^1 ;
- \mathcal{L} un ensemble quelconque de \mathbb{Z} ;
- pour tout $a \in \mathcal{L}$, Λ_a est une fréquence externe de classe C^1 sur \mathcal{D} .

Les fréquences internes Ω et les fréquences externes Λ vérifient certaines hypothèses qui seront énoncées dans le paragraphe suivant. Pour la suite, on fixe deux paramètres $0 < \delta_0 \leq \delta \leq 1$, \mathcal{A}^- un ensemble fini de \mathcal{L} , et $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L} \setminus \mathcal{A}^-$.

Hypothèse A1 : Condition de séparation. On suppose que, pour tout $\rho \in \mathcal{D}$, on a :

- ★ pour tout $a \in \mathcal{L}$,

$$(4.2) \quad \Lambda_a(\rho) \geq c_0 \langle a \rangle;$$

- ★ pour tout $a, b \in \mathcal{L}$ avec $|a| \neq |b|$, on a

$$(4.3) \quad |\Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq c_1 ||a| - |b||.$$

Hypothèse A2 : Condition de non résonance. Supposons que pour toute fonction $\Omega' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$|\Omega - \Omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$ il existe un vecteur unitaire $z_k \in \mathbb{R}^p$ et pour tout $a, b \in \mathcal{L}$ tel que $|a| > |b|$ on a :

★

$$|k \cdot \Omega'(\rho)| \geq \delta, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D};$$

avec $k \neq 0$

★

$$|k \cdot \Omega'(\rho) \pm \Lambda_a(\rho)| \geq \delta \langle a \rangle, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) \pm \Lambda_a(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

★

$$|k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) + \Lambda_b(\rho)| \geq \delta(\langle a \rangle + \langle b \rangle), \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) + \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

★

$$|k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \delta(1 + ||a| - |b||), \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

ou bien

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle \geq \delta \quad \forall \rho \in \mathcal{D}$$

Hypothèse A3 : deuxième condition de Melnikov. On suppose que les fréquences internes et externes vérifient la deuxième condition de Melnikov. C'est-à-dire pour toute fonction $\Omega' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$|\Omega - \Omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

on a :

pour tout $0 < \kappa < \delta$ et $N > 1$ il existe un fermé $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ qui vérifie

$$(4.4) \quad \text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq C(\delta^{-1}\kappa)^\tau N^\iota;$$

pour $\tau, \iota > 0$, pour tout $\rho \in \mathcal{D}'$, pour tout $0 < |k| < N$ et pour tout $a, b \in \mathcal{L}$ avec $|a| \neq |b|$ on a :

$$(4.5) \quad |\Omega'(\rho) \cdot k + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \kappa(1 + ||a| - |b||).$$

A présent, on est en mesure d'énoncer notre théorème KAM :

Théorème 4.1. *Soit h un Hamiltonien défini comme dans (4.1) qui vérifie les hypothèses A1, A2 et A3 avec δ et δ_0 fixés pour tout $\rho \in \mathcal{D}$. Fixons $\alpha, \beta > 0$ et $0 < \sigma, \mu \leq 1$. Il existe alors un ε_0 qui dépend de $\alpha, \beta, \sigma, n, \mu, |\omega_0|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ et $|A_0|_{\beta, \mathcal{C}^1(\mathcal{D})}$ tel que, si on a $\partial_\rho^j f \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \sigma, \mu)$ pour $j = 0, 1$, si $[[f^T]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} = \varepsilon < \varepsilon_0 \delta$ et si $[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa}$ vérifie pour $0 < \tau < 1$*

$$[[f]]_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \beta, \kappa} = O(\varepsilon^\tau),$$

alors il existe un Borélien $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ avec $\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq c\varepsilon^\tau$ tel que pour tout $\rho \in \mathcal{D}'$:

— il existe un changement de variable symplectique analytique :

$$\Phi = \Phi_\rho : \mathcal{O}^\alpha\left(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \rightarrow \mathcal{O}^\alpha(\sigma, \mu)$$

— il existe un vecteur fréquence interne $\tilde{\omega}(\rho) \in \mathbb{R}^n$, une matrice $A \in \mathcal{M}_\beta$ et une perturbation $\tilde{f} \in \mathcal{T}^{\alpha, \beta}(\mathcal{D}', \sigma/2, \mu/2)$ tels que :

$$(h_\rho + f) \circ \Phi = \tilde{\omega}(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho) \zeta \rangle + \tilde{f}(\theta, r, \zeta; \rho),$$

où $A : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ est une matrice de \mathcal{M}_β infinie réelle symétrique diagonale par bloc, c'est-à-dire $A_{[a]}^{[b]} = 0$ si $[a] \neq [b]$. De plus $\partial_r \tilde{f} = \partial_\zeta \tilde{f} = \partial_{\zeta \zeta}^2 \tilde{f} = 0$ pour $r = \zeta = 0$. D'autre part le changement de variable $\Phi = (\Phi_\theta, \Phi_r, \Phi_\zeta)$ est proche de l'identité, et pour tout $x \in \mathcal{O}^\alpha(\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2})$ et tout $\rho \in \mathcal{D}'$, on a :

$$(4.6) \quad \|\Phi - Id\|_\alpha \leq C\varepsilon^{1/5}.$$

De plus pour tout $\rho \in \mathcal{D}'$ on a :

$$(4.7) \quad |A(\rho) - A_0(\rho)|_\alpha \leq C\varepsilon, \quad |\tilde{\omega}(\rho) - \omega(\rho)|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} \leq C\varepsilon,$$

avec C est une constante qui dépend de ε_0 .

4.2. Vérifications des hypothèses du théorème KAM.

4.2.1. *Non résonance.* Dans ce paragraphe, on vérifie que la forme normale réelle (3.25) satisfait les hypothèses du Théorème 4.1. On commence par vérifier les hypothèses de séparation A1, puis les hypothèses de non résonances A2 et enfin la deuxième condition de Melnikov A3. On commence par vérifier les hypothèses de séparation A1.

Lemme 4.2. *Pour tout $\rho \in \mathcal{D}$, pour tous $a, b \in \mathcal{L}$, on a :*

- (i) $\Lambda_a(\rho) \geq \langle a \rangle$;
- (ii) $|\Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \frac{1}{8} ||a| - |b||$, avec $|a| \neq |b|$.

Preuve. Rappelons que, pour $a \in \mathcal{L}$, les fréquences externes sont données par :

$$\Lambda_a(\rho) = \lambda_a + \nu \frac{3}{\pi} \frac{1}{\lambda_a} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{\rho_l}{\lambda_l} = \lambda_a + \nu \frac{C}{\lambda_a}.$$

L'estimation (i) est alors immédiate. Pour (ii), on remarque que, pour ν petit, on a :

$$C\nu \left| \frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_b} \right| = \frac{C\nu}{\lambda_a \lambda_b} |\lambda_a - \lambda_b| \leq \frac{1}{2} |\lambda_a - \lambda_b|,$$

ainsi on obtient

$$|\Lambda_a - \Lambda_b| \geq \frac{1}{2} |\lambda_a - \lambda_b| \geq \frac{1}{8} ||a| - |b||,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. \square

A présent on va vérifier en trois étapes les hypothèses de non résonance A2. On commence tout d'abord par rappeler des résultats obtenus dans les Propositions 2.8 et 2.10. Pour $\kappa = \nu^{1/2}$, On obtient le lemme suivant :

Lemme 4.3. *pour $\gamma > 0$ petit, $|k| \leq \nu^{-\gamma}$ et $(a, b) \in \mathcal{L}^2$ on a :*

$$|\omega \cdot k| \geq 2\nu^{1/2},$$

sauf quand k est D_0 résonant.

$$|\omega \cdot k + \lambda_a| \geq 2\nu^{1/2} \langle a \rangle,$$

sauf quand (k, a) est D_1 résonant.

$$|\omega \cdot k + \lambda_a + \lambda_b| \geq 2\nu^{1/2} (\langle a \rangle + \langle b \rangle),$$

sauf quand (k, a, b) est D_2 résonant.

$$|\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| \geq 2\nu^{1/2} (1 + ||a| - |b||),$$

avec $|a| \neq |b|$ et (k, a, b) n'est pas D_3 résonant.

Remarque 4.4. *Dans le lemme précédent, on a appliqué les Propositions 2.8 et 2.10 avec $\kappa = \nu^{1/2}$, $N = \nu^{-\gamma}$ et $m \in [1, 2] \setminus \mathcal{C}$. On sait que la mesure de Lebesgue de \mathcal{C} vérifie :*

$$\text{mes}(\mathcal{C}) \leq C\kappa^\tau N^\iota,$$

où $\tau = O(\frac{1}{n})$ et $\iota = O(n^2)$. Avec ce choix de paramètres, pour que la mesure de Lebesgue de \mathcal{C} reste petite, il faut que $\gamma < O(\frac{1}{n^3})$.

Maintenant, on va démontrer les hypothèses de non résonance A2 pour des k petits. Rappelons que les fréquences internes sont données par :

$$\Omega = \omega + \nu M\rho,$$

où M est la matrice donnée par (3.24). M est symétrique inversible, donc on peut poser $C_{\mathcal{A}} = \|M^{-1}\|_2$.

Lemme 4.5. *Pour $\gamma > 0$ petit, $k \in \mathbb{Z}^n$ tel que $|k| \leq \nu^{-\gamma}$, $(a, b) \in \mathcal{L}^2$, posons $\delta_0 = \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu$. Alors pour toute fonction $\Omega' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie*

$$|\Omega - \Omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

et pour tout $\rho \in \mathcal{D}$, on a :

$$|\Omega' \cdot k| \geq \nu^{1/2},$$

sauf quand k est D_0 résonant.

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a| \geq \nu^{2/3}\langle a \rangle,$$

sauf quand (k, a) est D_1 résonant.

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a + \Lambda_b| \geq \nu^{2/3}(\langle a \rangle + \langle b \rangle),$$

sauf quand (k, a, b) est D_2 résonant.

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| \geq \nu^{2/3}(1 + ||a| - |b||),$$

avec $|a| \neq |b|$ et (k, a, b) n'est pas D_3 résonant.

Preuve. Soit $k \in \mathbb{Z}^n$ tel que $|k| \leq \nu^{-\gamma}$ pour $\gamma > 0$ petit. Commençons par démontrer la première inégalité. Tout d'abord, on a :

$$|\Omega' - \omega| \leq |\Omega' - \Omega| + |\Omega - \omega| \leq \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu + c\nu \leq C\nu.$$

On a donc, pour tout $a \in \mathcal{A}$

$$|\Omega' - \omega| \leq C\nu\langle a \rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $(a, b) \in \mathcal{L}$:

$$|\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| \leq C\nu^{1-\gamma} \leq \nu^{1/2}.$$

$$|\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| \leq \nu^{1/2}\langle a \rangle.$$

$$|\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| \leq \nu^{1/2}(\langle a \rangle + \langle b \rangle).$$

$$|\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| \leq \nu^{1/2}(1 + ||a| - |b||), \quad |a| \neq |b|.$$

Pour terminer la preuve du premier cas, on utilise le fait que :

$$|\Omega' \cdot k| \geq |\omega \cdot k| - |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| \geq 2\nu^{1/2} - \nu^{1/2} = \nu^{1/2}.$$

Regardons maintenant la deuxième inégalité. Remarquons que, pour $a \in \mathcal{L}$, on a :

$$|\lambda_a - \Lambda_a| \leq \tilde{c}\nu\langle a \rangle.$$

Alors

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a| &\geq |\Omega' \cdot k + \lambda_a| - |\lambda_a - \Lambda_a| \\ &\geq |\omega \cdot k + \lambda_a| - |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| - |\lambda_a - \Lambda_a| \\ &\geq 2\nu^{1/2}\langle a \rangle - \nu^{1/2}\langle a \rangle - \tilde{c}\nu\langle a \rangle \geq \nu^{2/3}\langle a \rangle. \end{aligned}$$

Étudions à présent la troisième estimation. Pour $(a, b) \in \mathcal{L}^2$, on a :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a + \Lambda_b| &\geq |\Omega' \cdot k + \lambda_a + \lambda_b| - |\lambda_a - \Lambda_b| - |\lambda_b - \Lambda_a| \\ &\geq |\omega \cdot k + \lambda_a + \lambda_b| - |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| - |\lambda_a - \Lambda_a| - |\lambda_b - \Lambda_b| \\ &\geq (2\nu^{1/2} - \nu^{1/2} - 2\tilde{c}\nu)(\langle a \rangle + \langle b \rangle) \geq \nu^{2/3}(\langle a \rangle + \langle b \rangle). \end{aligned}$$

Il reste à démontrer la dernière estimation des petits diviseurs. Grâce à (3.23), on remarque, que pour tout $(a, b) \in \mathcal{L}^2$ tel que $|a| \neq |b|$, on a :

$$\begin{aligned} |\Lambda_a - \Lambda_b - (\lambda_a - \lambda_b)| &\leq \tilde{c}\nu |\lambda_a^{-1} - \lambda_b^{-1}| \\ &= \tilde{c}\nu \frac{||a| + |b||}{(\lambda_a + \lambda_b)\lambda_a\lambda_b} ||a| - |b|| \\ &\leq \tilde{c}\nu(1 + ||a| - |b||). \end{aligned}$$

Ceci nous donne que :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| &\geq |\Omega' \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| - |\Lambda_a - \Lambda_b - (\lambda_a - \lambda_b)| \\ &\geq |\omega \cdot k + \lambda_a - \lambda_b| - |\Omega' \cdot k - \omega \cdot k| - |\Lambda_a - \Lambda_b - (\lambda_a - \lambda_b)| \\ &\geq (2\nu^{1/2} - \nu^{1/2} - \tilde{c}\nu)(1 + ||a| - |b||) \geq \nu^{2/3}(1 + ||a| - |b||). \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. \square

Ainsi on a vérifié les hypothèses de non résonance pour $|k| \leq \nu^{-\gamma}$, $\delta_0 = \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu$ et $\delta = \nu^{2/3}$. Pour k grand, c'est-à-dire $|k| > \nu^{-\gamma}$, on montre les conditions de séparation A2 sur les dérivées en ρ des petits diviseurs. Plus précisément on a :

Lemme 4.6. *Pour $\gamma > 0$ petit, $k \in \mathbb{Z}^n$ tel que $|k| > \nu^{-\gamma}$, $(a, b) \in \mathcal{L}^2$, posons $\delta_0 = \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu$. Alors pour toute fonction $\Omega' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie*

$$|\Omega - \Omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

il existe un vecteur unitaire z_k tel que pour tout $\rho \in \mathcal{D}$ on a :

- (i) $|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle| \geq C\nu^{1-\gamma} \geq \nu$,
- (ii) $|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) \pm \Lambda_a(\rho)), z_k \rangle| \geq \nu$ pour tout $a \in \mathcal{L}$,
- (iii) $|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) + \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle| \geq \nu$ pour tout $(a, b) \in \mathcal{L}^2$,
- (iv) $|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle| \geq \nu$ pour tout $(a, b) \in \mathcal{L}^2$.

a constante C dépend de l'ensemble admissible \mathcal{A} .

Preuve. Commençons par prouver (i). Remarquons tout d'abord que :

$$\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle = \langle \partial_\rho(k \cdot \Omega(\rho)), z_k \rangle + \langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)) - k \cdot \Omega(\rho), z_k \rangle.$$

Or

$$|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)) - k \cdot \Omega(\rho), z_k \rangle| \leq \frac{1}{2}|k|C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu.$$

Rappelons que la matrice M est symétrique et que $|k| > \nu^{-\gamma}$. En choisissant $z_k = \frac{Mk}{|Mk|}$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle| &\geq \nu \left| \left\langle Mk, \frac{Mk}{|Mk|} \right\rangle \right| - |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)) - k \cdot \Omega(\rho), z_k \rangle| \\ &= \nu |Mk| - \frac{1}{2}|k|C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu \\ &\geq \nu \left(C_{\mathcal{A}}^{-1} - \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1} \right) |k| \\ &\geq \frac{1}{2}C_{\mathcal{A}}^{-1}\nu^{1-\gamma} \geq \nu. \end{aligned}$$

Intéressons nous maintenant à (ii). Pour $a, l \in \mathcal{L}$, on a :

$$|\partial_{\rho_l} \Lambda_a(\rho)| = \left| \nu \frac{3}{\pi} \frac{1}{\lambda_a \lambda_l} \right| \leq c\nu.$$

Donc, pour le même vecteur z_k unitaire que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) \pm \Lambda_a(\rho)), z_k \rangle| &\geq |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle| - |\partial_\rho(\Lambda_a(\rho))| |z_k| \\ &\geq \frac{1}{2} C_{\mathcal{A}}^{-1} \nu^{1-\gamma} - c' \nu \geq \nu. \end{aligned}$$

En appliquant le même principe pour (iii) et (iv), on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) \pm \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle| &\geq |\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho)), z_k \rangle| - |\partial_\rho(\Lambda_a(\rho))| |z_k| \\ &\quad - |\partial_\rho(\Lambda_b(\rho))| |z_k| \\ &\geq \frac{1}{2} C_{\mathcal{A}}^{-1} \nu^{1-\gamma} - 2c' \nu \geq \nu. \end{aligned}$$

□

Pour terminer la vérification des conditions de non résonance, il reste à regarder le cas où (k, a) est D_1 résonant et (k, a, b) est D_2 ou D_3 résonant.

Lemme 4.7. Soient $k \in \mathbb{Z}^n$ et $(a, b) \in \mathcal{L}^2$. Posons $\delta_0 = \frac{1}{4} \nu \check{C}_{\mathcal{A}}$, avec $\check{C}_{\mathcal{A}}$ est une constante qui dépend de l'ensemble admissible \mathcal{A} . Alors pour toute fonction $\Omega' \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$|\Omega - \Omega'|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{D})} < \delta_0,$$

et pour tout $\rho \in \mathcal{D}$ on a :

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a| \geq \check{C}_{\mathcal{A}} \nu \langle a \rangle,$$

si (k, a) est D_1 résonant ;

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a + \Lambda_b| \geq \check{C}_{\mathcal{A}} \nu (\langle a \rangle + \langle b \rangle),$$

si (k, a, b) est D_2 résonant ;

$$|\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| \geq \check{C}_{\mathcal{A}} \nu (1 + ||a| - |b||),$$

avec $|a| \neq |b|$ et (k, a, b) est D_3 résonant.

Preuve. Pour $a \in \mathcal{A}$, rappelons que, d'après (3.22) et (3.23),

$$\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\lambda_a} \sum_{l \in \mathcal{A}} \frac{2 - 3\delta_{l,a}}{\lambda_l} \rho_l.$$

Supposons que (k, a) est D_1 résonant. On obtient donc

$$\Omega' \cdot k + \Lambda_a = (\Omega'_a - \Omega_a) - \nu(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a)$$

Remarquons qu'il existe une constante C_1 , qui dépend de l'ensemble admissible \mathcal{A} , telle que :

$$|\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a| \geq \frac{C_1}{\lambda_a}.$$

Pour $\delta_0 \leq \frac{1}{2} \nu \frac{C_1}{\max(\mathcal{A})^2 + 2} := \frac{1}{2} \nu \check{C}_1$, on a :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a| &\geq C_1 \nu \frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{2} \check{C}_1 \nu \\ &\geq \check{C}_1 \nu \langle a \rangle - \frac{1}{2} \check{C}_1 \nu \\ &\geq \frac{1}{2} \check{C}_1 \nu \langle a \rangle. \end{aligned}$$

Étudions à présent le cas où (k, a, b) est D_2 résonant. Remarquons qu'il existe une constante C_2 , qui dépend de l'ensemble admissible \mathcal{A} tel que pour tout $(a, b) \in \mathcal{A}^2$, on a :

$$\begin{aligned} |(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) + (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b)| &\geq C_2 \left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} \right) \\ &\geq \tilde{C}_2 (\langle a \rangle + \langle b \rangle), \end{aligned}$$

avec $\tilde{C}_2 := \frac{C_2}{\max(\mathcal{A})^2 + 2}$. Donc si (k, a, b) est D_2 résonant et si $\delta_0 \leq \frac{1}{4}\nu\tilde{C}_2$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a + \Lambda_b| &= |(\Omega' - \Omega) \cdot k - \nu((\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) + (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b))| \\ &\geq \nu|(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) + (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b)| - 2|\Omega' - \Omega| \\ &\geq \frac{1}{2}\tilde{C}_2\nu(\langle a \rangle + \langle b \rangle). \end{aligned}$$

Il reste à regarder le dernier petit diviseur dans le cas où (k, a, b) est D_3 résonant. On remarque qu'il existe une constante C_3 , qui dépend de l'ensemble admissible \mathcal{A} , telle que pour tout $(a, b) \in \mathcal{A}^2$, on a :

$$\begin{aligned} |(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) - (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b)| &\geq C_3 \left| \frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_b} \right| \\ &\geq \tilde{C}_3 (1 + ||a| - |b||), \end{aligned}$$

avec $\tilde{C}_3 := \frac{C_3}{8(\max(\mathcal{A})^2 + 2)}$. Donc, si (k, a, b) est D_3 résonant et si $\delta_0 \leq \frac{1}{4}\nu\tilde{C}_3$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| &= |k \cdot (\Omega' - \Omega) - \nu((\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) - (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b))| \\ &\geq \nu|(\tilde{\omega}_a - \tilde{\lambda}_a) - (\tilde{\omega}_b - \tilde{\lambda}_b)| - 2|\Omega' - \Omega| \\ &\geq \frac{1}{2}\tilde{C}_3\nu(1 + ||a| - |b||). \end{aligned}$$

On termine la preuve en choisissant $\check{C}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \min(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3)$. □

Vérifions maintenant la seconde condition de Melnikov. Rappelons que $n = \text{Card}(\mathcal{A})$.

Lemme 4.8. BUG Pour $\delta = \nu$, $\delta_0 \leq \delta$, $\tau = \frac{1}{3}$ et $\iota = n + \frac{3}{2} + \frac{2}{3\gamma}$, la deuxième condition de Melnikov est vérifiée.

Preuve. Soient $\gamma > 0$ petit et $N \geq 0$. Si $N \leq \nu^{-\gamma}$, alors, d'après le Lemme 4.5, la deuxième condition de Melnikov est vérifiée pour tout $\rho \in \mathcal{D}$. Si $N > \nu^{-\gamma}$, alors d'après le Lemme 4.5 pour $|k| \leq \nu^{-\gamma}$ la deuxième condition de Melnikov est vérifiée pour tout $\rho \in \mathcal{D}$. Supposons à présent que $|k| > \nu^{-\gamma}$, alors d'après le Lemme 4.6 il existe un vecteur unitaire z_k tel que :

$$|\langle \partial_\rho(k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)), z_k \rangle| \geq \nu.$$

Pour $0 < \kappa < \nu$, posons

$$J(k, a, b) = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |\Omega'(\rho) \cdot k + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| < \kappa\}.$$

On a

$$\text{mes } J(k, a, b) \leq C\kappa\nu^{-1},$$

avec C une constante qui dépend de la taille de \mathcal{D} . Pour un entier relatif p et $k \in \mathcal{Z}^n$, on pose

$$W(k, p) = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |\Omega' \cdot k + p| < 5\kappa^{1/3}\},$$

on a alors d'après (i) du Lemme 4.6

$$\text{mes } W(k, p) \leq C\kappa^{1/3}\nu^{-1},$$

avec C est une constante qui dépend de la taille de \mathcal{D} . Posons

$$W = \{\rho \in \mathcal{D} \mid |\Omega' \cdot k + p| < 5\kappa^{1/3}\}.$$

Remarquons que le fait que $|\Omega' \cdot k + p| < 5\kappa^{1/3}$ avec $|k| < N$, nous donne que $|p| \leq C|k| < CN$. Donc

$$\text{mes}(W) \leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \leq N}} \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ |p| < CN}} W(k, p) \leq CN^{n+1}\kappa^{1/3}\nu^{-1}.$$

Pour $a \in \mathcal{L}$, rappelons que $\Lambda_a(\rho) = \lambda_a + \nu C(\rho)\lambda_a^{-1}$. Pour ν petit et pour tout $\rho \in \mathcal{D}$, on a :

$$|\Lambda_a(\rho) - |a|| = \left| \lambda_a(\rho) - |a| + \nu \frac{C(\rho)}{\lambda_a} \right| = \left| \frac{m}{\lambda_a + |a|} + \nu \frac{C(\rho)}{\lambda_a} \right| \leq \frac{2}{|a|}.$$

Si $|a| > |b| > \kappa^{-1/3}$, on a :

$$|\Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho) - (|a| - |b|)| \leq \frac{4}{|b|} \leq 4\kappa^{1/3}.$$

Pour tout $\rho \in \mathcal{D} \setminus W$ et si $|a| > |b| > \kappa^{-\alpha}$ on obtient :

$$\begin{aligned} |k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| &\geq |k \cdot \Omega'(\rho) + (|a| - |b|) - |\Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho) - (|a| - |b|)| \\ &\geq 5\kappa^{1/3} - 4\kappa^{1/3} = \kappa^{1/3}. \end{aligned}$$

Il reste à regarder les cas où $|a| \leq \kappa^{-1/3}$ ou $|b| \leq \kappa^{-1/3}$, et où il existe $k \in \mathbb{Z}^n$ tel que :

$$|k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| < 1,$$

avec $\nu^{-\gamma} < |k| < N$. On obtient ainsi $||a| - |b|| \leq CN$. Posons :

$$\mathcal{Q} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \min(|a|, |b|) \leq \kappa^{-1/3} \text{ et } ||a| - |b|| \leq CN \right\}.$$

On a :

$$\text{Card}(\mathcal{Q}) \leq CN\kappa^{-2/3}.$$

Posons

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \left(W \bigcup_{\substack{|k| \leq N \\ (a, b) \in \mathcal{Q}}} (J(k, a, b)) \right).$$

Pour tout $\rho \in \mathcal{D}'$ on a :

$$|k \cdot \Omega'(\rho) + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \kappa.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') &\leq \text{mes}(W) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \leq N}} \sum_{(a, b) \in \mathcal{Q}} \text{mes } J(k, a, b) \\ &\leq CN^{n+1}\kappa^{1/3}\nu^{-1} + CN^n N \kappa^{-2/3} \kappa \nu^{-1} \\ &\leq CN^{n+1}(\kappa \nu^{-1})^{1/3}. \end{aligned}$$

Or $N > \nu^{-\gamma}$. Ce qui donne

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq CN^{n+1+2/3\gamma}\nu^{-2/3}(\kappa \nu^{-1})^{1/3}.$$

A présent il reste à montrer que pour tout $\rho \in \mathcal{D}'$ on a :

$$|\Omega'(\rho) \cdot k + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| \geq \kappa(1 + |a| - |b|).$$

Établissons cette estimation suivant l'ordre de grandeur de la différence de $\|a\| - \|b\|$. Supposons en premier lieu que $\|a\| - \|b\| \geq 16|\Omega' \cdot k|$. On obtient, en utilisant la deuxième condition de séparation du Lemme 4.2, que :

$$\begin{aligned} |\Omega'(\rho) \cdot k + \Lambda_a(\rho) - \Lambda_b(\rho)| &\geq |\Lambda_a - \Lambda_b| - |\Omega' \cdot k| \\ &\geq \frac{1}{16}\|a\| - \|b\| \geq \frac{1}{32}(1 + \|a\| - \|b\|) \\ &\geq \kappa(1 + \|a\| - \|b\|), \end{aligned}$$

pour $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{32}$ et tout $\rho \in \mathcal{D}$.

Supposons, dans un deuxième temps, que $\|a\| - \|b\| < 16|\Omega' \cdot k| < 16C_{\mathcal{A}}N$. Alors, pour tout $\rho \in \mathcal{D}'$, $0 < |k| < N$ et $a, b \in \mathcal{L}$ avec $|a| \neq |b|$, on a :

$$\begin{aligned} |\Omega' \cdot k + \Lambda_a - \Lambda_b| &\geq \frac{\kappa}{1 + 16C_{\mathcal{A}}N}(1 + |a| - |b|) \\ &\geq \tilde{\kappa}(1 + |a| - |b|), \end{aligned}$$

avec

$$\text{mes}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}') \leq CN^{n+3/2+2/3\gamma} \left(\tilde{\kappa}\nu^{-7/5} \right)^{1/2}.$$

□

Ce qui termine la vérification des hypothèses faites sur les fréquences.

4.2.2. *Application du Théorème 4.1.* En vertu des lemmes 4.2-4.8, les conditions de séparation, de non résonance et la deuxième condition de Melnikov sont vérifiées pour $\delta = \nu$ et $\delta_0 \leq \delta$. D'après le Théorème 3.7, on a pour $0 < \mu \leq 1$:

$$(4.8) \quad \llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2, \kappa} \leq 2C\nu^{3/2}.$$

De plus, on a :

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \gamma, \kappa} = O \left(\left(\llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2, \kappa} \right)^{3/2} \right).$$

Or, pour appliquer le Théorème 4.1, il faut que :

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \gamma, \kappa} \ll \delta = \nu^{7/5}$$

et

$$\llbracket f \rrbracket_{\sigma, \mu, \mathcal{D}}^{\alpha, \gamma, \kappa} = O \left(\left(\llbracket f^T \rrbracket_{\frac{\sigma}{2}, \frac{\mu}{2}, \mathcal{D}}^{\alpha, 1/2, \kappa} \right)^\tau \right), \text{ avec } \tau \in]0, 1[.$$

Ces deux dernières conditions sont bien vérifiées. On peut donc appliquer le Théorème 4.1.

5. PREUVE DU THÉORÈME 1.3

A présent, on a tous les outils nécessaires pour démontrer le Théorème 1.3. Pour $m \in \mathcal{U}$ et $\rho \in (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}')$, on pose :

$$\Pi_\rho = \Psi_\rho \circ \Phi_\rho = \tau \circ \chi_\rho \circ \Upsilon \circ \Phi_\rho,$$

avec

- τ est le changement de variable de Birkhoff construit dans la Proposition 3.15.
- χ_ρ est le res-caling construit dans 3.17 ;
- Υ est le passage vers les variables réelles ;
- Φ_ρ est le changement de variable construit dans le théorème KAM 4.1.

On a donc que Π_ρ est un changement de variable symplectique réel holomorphe

$$\Pi_\rho : \mathcal{O}^\alpha \left(\frac{\sigma}{4}, \frac{\mu}{4} \right) \rightarrow \mathfrak{F}_\rho(\nu, \sigma, \mu, \alpha),$$

qui transforme l'hamiltonien perturbé (1.5) en :

$$H \circ \Pi_\rho = \omega'(\rho) \cdot r + \frac{1}{2} \langle \zeta, A(\rho)\zeta \rangle + \tilde{f}(\theta, r, \zeta; \rho).$$

où $A : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ est une matrice infinie dans \mathcal{M}_β réelle symétrique diagonale par bloc c'est-à-dire $A_{[a]}^{[b]} = 0$ si $[a] \neq [b]$. De plus $\partial_r \tilde{f} = \partial_\zeta \tilde{f} = \partial_{\zeta\zeta}^2 \tilde{f} = 0$ pour $r = \zeta = 0$. D'après (3.24) et (4.7), les fréquences internes sont données par :

$$\omega' = \omega + \nu M \rho + O(\nu^{3/2}).$$

Pour ce qui suit on pose $I = \nu \rho$ et $\mathcal{D} = [\nu, 2\nu]^n$. Ainsi, pour $m \in \mathcal{U}$, il existe un Borélien $\mathcal{D}' \subset [\nu, 2\nu]^n$ tel que :

$$\text{mes}([\nu, 2\nu]^n \setminus \mathcal{D}') \leq \nu^{\gamma+n},$$

avec γ strictement positif et dépendant de n . Pour $X = (\theta, r, \zeta)$, on note $[X]_\alpha = \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} |r_a e^{2i\theta_a}| \right)^{1/2} + \|\zeta\|_\alpha$. Soit $X \in \mathbb{T}^n \times \{I\} \times \{0\}$. Alors $\chi_\rho \circ \Upsilon(X) \in \mathfrak{T}_\rho(\nu, [X]_\alpha, \alpha)$, et on a :

$$\text{dist}_\alpha(\chi_\rho \circ \Upsilon(X), X) \leq 2\nu^{1/2}[X]_\alpha \leq 4\nu^{3/2}.$$

Grâce à (3.8), on obtient

$$\text{dist}_\alpha(\tau \circ \chi_\rho \circ \Upsilon(X), X) \leq \nu^{3/2} + \text{dist}_\alpha(\chi_\rho \circ \Upsilon(X), X) \leq 5\nu^{3/2}.$$

Il s'ensuit, grâce à (4.6) et (4.8), que

$$\text{dist}_\alpha(\Pi_\rho(X), X) \leq C\nu^{4/5},$$

avec C une constante absolue. Pour $m \in ([1, 2] \setminus \mathcal{U})$ et $I \in \mathcal{D}'$ posons $(\tilde{\theta}, \tilde{I}, \tilde{\zeta}) = \Pi^{-1}(X)$; et soit :

$$u(\tilde{\theta}, \tilde{I}, x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sqrt{\tilde{I}_a} \frac{e^{-i\tilde{\theta}_a} \varphi_a(x) + e^{i\tilde{\theta}_a} \varphi_{-a}(x)}{\sqrt{2\omega'^{1/4}}}.$$

Alors la fonction

$$t \mapsto u(\tilde{\theta} + t\omega', \tilde{I}, x)$$

est solution quasi-périodique de l'équation des ondes (1.1). Posons $\zeta_{I,\theta} = (\xi_{I,\theta}, \eta_{I,\theta})$ avec

$$\begin{aligned} (\xi_{I,\theta})_a &= \sqrt{I_a} e^{i\theta_a}, & (\eta_{I,\theta})_a &= \sqrt{I_a} e^{-i\theta_a}, & \text{si } a \in \mathcal{A}, \\ (\xi_{I,\theta})_s &= (\eta_{I,\theta})_s = 0, & & & \text{si } s \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\sup_{\theta_0 \in \mathbb{T}^n} \|u(\theta_0, I, \cdot) - u_{I,m}(\theta_0, \cdot)\|_{H^\alpha} \leq \|\Pi_\rho(X) - \zeta_{I,\theta}\|_\alpha \leq C\nu^{4/5}.$$

RÉFÉRENCES

- [1] D. Bambusi. Nekhoroshev theorem for small amplitude solutions in nonlinear schrödinger equations. *Mathematische Zeitschrift*, 230(2) :345–387, 1999.
- [2] D. Bambusi. Birkhoff normal form for some nonlinear PDEs. *Communications in mathematical physics*, 234(2) :253–285, 2003.
- [3] D. Bambusi and B. Grébert. Birkhoff normal form for partial differential equations with tame modulus. *Duke Mathematical Journal*, 135(3) :507–567, 2006.
- [4] G. Benettin, L. Galgani, and A. Giorgilli. A proof of Nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable hamiltonian systems. *Celestial Mechanics*, 37(1) :1–25, 1985.
- [5] Massimiliano Berti, Luca Biasco, and Michela Procesi. KAM theory for the Hamiltonian derivative wave equation. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 46(2) :301–373 (2013), 2013.
- [6] M. Bouthelja. KAM pour l'équation des ondes sur le cercle. partie 1 : un résultat de forme normale. *En cours*, 2015.
- [7] Luigi Chierchia and Jiangong You. KAM tori for 1D nonlinear wave equations with periodic boundary conditions. *Comm. Math. Phys.*, 211(2) :497–525, 2000.

- [8] L. H. Eliasson. Almost reducibility of linear quasi-periodic systems. In *Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999)*, volume 69 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 679–705. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [9] L.H Eliasson, B. Grébert, and S.B. Kuksin. KAM for multidimensional PDEs with regularizing nonlinearity. *Preprint*, 2013.
- [10] S B Kuksin. Perturbation of quasiperiodic solutions of infinite-dimensional hamiltonian systems. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 32(1) :39.
- [11] S. B. Kuksin. Hamiltonian perturbations of infinite-dimensional linear systems with imaginary spectrum. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 21(3) :22–37, 95, 1987.
- [12] Sergej Kuksin and Jurgen Poschel. Invariant cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrodinger equation. *Annals of Mathematics*, pages 149–179, 1996.
- [13] Jürgen Pöschel. Quasi-periodic solutions for a nonlinear wave equation. *Comment. Math. Helv.*, 71(2) :269–296, 1996.
- [14] Jürgen Pöschel. A KAM-theorem for some nonlinear partial differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 23(1) :119–148, 1996.
- [15] C. Eugene Wayne. Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory. *Comm. Math. Phys.*, 127(3) :479–528, 1990.
- [16] J. Xu, J. You, and Q. Qiu. Invariant tori for nearly integrable hamiltonian systems with degeneracy. *Mathematische Zeitschrift*, 226(3) :375–387, 1997.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES JEAN LERAY, UNIVERSITÉ DE NANTES, UMR CNRS 6629,
2, RUE DE LA HOUSSINIÈRE, 44322 NANTES CEDEX 03, FRANCE
E-mail address: bouthelja.moudhaffar@univ-nantes.fr