L’argument de Russell-Tennnant

Joseph Vidal-Rosset

L'ARGUMENT DE RUSSELL-TENNANT

JOSEPH VIDAL-ROSSET

> But it must be said that the point of view we are now to consider is disputable. Its main merit is that it allows us to believe in the law of excluded middle.
>
> Bertrand Russell

> Quine holds that meaning (via translation) is indeterminate, but that truth is bivalent. The anti-realist, by contrast, holds that meaning is determinate, but that truth is not bivalent.
>
> Neil Tennant

RÉSUMÉ. Ni dans les *Principia* ni ailleurs dans son œuvre, Russell n'envisage de rejeter la validité universelle du tiers exclu. Ce n'est que tardivement, dans *Signification et Vérité*, qu'il examine la position intuitionniste, pour finalement la refuser après avoir donné des arguments logiques et épistémologiques pour choisir la logique classique comme logique de base de sa théorie de la connaissance. Ce qu'il faut bien appeler son « conservatisme logique » a exercé une profonde influence sur Quine comme sur toute la philosophie analytique en général. On examine dans cet article les arguments de Russell et de Quine en faveur du conservatisme logique et l'on montre que, du strict point de vue de la logique mathématique, ils ne sont pas justifiés. Russell affirme cependant que le fait d'assumer la validité universelle du tiers exclu est incompatible avec l'empirisme. Il sous-entend une thèse qui sera plus tard développé par Tennant : le principe du tiers exclu, s'il est valide, est synthétique *a priori*. Cet argument bien compris aurait dû faire de la logique intuitionniste la logique de base de l'empirisme logique.

TABLE DES MATIÈRES

Date: 6 mars 2014.

Merci à Gérard Chazal de m'avoir fait l'honneur de participer à ce volume en écrivant cet article, à Christophe Raffalli et René David pour leur correspondance privée, à Frédérick Tremblay, pour sa relecture attentive grâce à laquelle j'ai pu corriger de trop nombreuses fautes, et merci enfin à Neil Tennant à qui je dois, à mon avis, toutes les thèses philosophiques de cet article que l'on jugera correctes et pertinentes. Je ne dois en revanche qu'à moi-même les obscurités et confusions qui peuvent subister.

1. Définition et enjeu de l'argument de Russell-Tennant

J'entends par « argument de Russell-Tennant » un raisonnement que Russell a développé dans *Signification et Vérité* et que Tennant a repris pour lui donner une forme précise et explicite. Russell est parti de la remarque selon laquelle l'affirmation de la validité universelle du tiers exclu est incompatible avec l'empirisme et, par conséquent, une philosophie de la connaissance cohérente se doit de renoncer à la logique classique comme logique de base, ou bien de renoncer à l'empirisme. Russell choisit la première option, Tennant la seconde. En affirmant que le tiers exclu, s'il est valide, est synthétique *a priori*, Tennant utilise une terminologie adéquate qui précise correctement ce que vise le raisonnement de Russell. Cela justifie que je baptise ainsi cet argument, même si, évidemment, Tennant n'en tire pas les mêmes conclusions que Russell.

L'enjeu de l'argument de Russell-Tennant n'est rien de moins que l'adoption ou le rejet du réalisme sémantique. On entend aujourd'hui par « réalisme sémantique » la thèse au sujet de la vérité que Russell [21, p. 268] définit ainsi :

Définition 1 (Réalisme sémantique)**.** *Si l'on se place du point de vue que l'on peut appeler la conception réaliste de la vérité, il y a des « faits » et il y a des phrases dont leurs rapports aux faits les rend vraies ou fausses, et cela de manière totalement indépendante de la façon dont on peut décider de leur fausseté ou de leur vérité.*

.

Il faut entendre par « anti-réalisme sémantique » non le rejet de la thèse de la correspondance entre énoncés vrais et faits, mais le rejet de l'idée selon laquelle vérité ou fausseté peuvent être indépendantes des procédures de preuve ou de réfutation des énoncés. Cette appellation contemporaine correspond à la conception de la vérité défendue par Brouwer et l'école intuitionniste :

Définition 2 (Anti-réalisme sémantique)**.** *Le terme « vrai » attribué à un énoncé quelconque n'est d'aucun usage indépendamment d'une méthode pour décider de cette attribution. Un énoncé P est vrai si et seulement si P est connaissable (c'est-à-dire démontrable ou vérifiable) en principe. La vérité est toujours épistémologiquement contrainte.*

Les définitions 1 et 2 étant incompatibles, toute philosophie de la connaissance qui adopte l'une d'entre elle donne aussi des arguments pour rejeter l'autre. Cette opposition de thèse résume la dispute philosophique entre le conservatisme logique qui privilégie la logique classique comme logique de base de la connaissance, et l'intuitionnisme qui, à partir de Brouwer, affirme qu'un changement de système logique est nécessaire afin de corriger les jugements philosophiques erronés qui sont précisément engendrés par l'usage de la logique classique.

En dépit de l'intérêt que suscite la position intuitionniste en logique mathématique et notamment en informatique fondamentale, et bien que l'on puisse considérer que l'intuitionnisme logique a plus de cent ans d'existence (la thèse de Doctorat de Brouwer datant de 1907 [27]), il n'est pas exagéré de dire que le conservatisme logique reste une position forte. Celle-ci a trouvé un avocat de talent chez Russell, et plus tard chez Quine, qui a choisi de faire de la logique classique du premier ordre le centre de gravité de sa théorie de la connaissance. Pour ces deux grands logiciens, seule la logique classique est vraiment naturelle et aucune autre logique ne peut offrir plus de simplicité et de commodité qu'elle n'en apporte. Comme on ne peut pas renoncer facilement au principe de bivalence qui est au fondement de la logique classique, une saine philosophie de la connaissance renâcle naturellement à rejeter la validité universelle du tiers exclu comme la logique intuitionniste l'exige. Cet article s'efforce de réfuter cet argument polémique ainsi que tous les arguments qui ont été avancés par Russell et Quine contre l'adoption de la logique intuitionniste.

Dans un premier temps on se concentre sur les arguments logiques qui ont été avancés par Russell et Quine sur cette question. On montre qu'aucun de ces arguments n'est scientifiquement recevable en raison de théorèmes de logique mathématique désormais bien connus (pour lesquels je ne donne pas les démonstrations, mais simplement leurs références, afin de ne pas alourdir le texte). La seconde partie de cet article est une défense de l'intuitionnisme sur le plan épistémologique, à partir de l'argument de Russell-Tennant. On examine le sens de la célèbre thèse que Quine a développée contre l'existence d'une distinction tranchée entre vérités analytiques et vérités synthétiques. On montre que cet argument, même du point de vue de Quine, échoue à invalider la position intuitionniste de Tennant, qui maintient une frontière indiscutable entre les deux types de jugements, ce qui permet à Tennant de dire que le tiers exclu est synthétique *a priori*, s'il est valide. C'est après avoir écarté pour finir deux remarques polémiques de Russell que l'on pourra conclure que, sans le conservatisme logique, ce que l'on a appelé « l'empirisme logique » aurait naturellement dû être intuitionniste.

2. Défense logique de l'intuitionnisme

A partir de certains théorèmes fondamentaux établis sur la logique intuitionniste, cette section répond à un certain nombre de préjugés dont le premier a été formulé par Russell, et les autres par Quine. On commencera par un rappel sur les rapports exacts entre calcul classique des propositions, et la version intuitionniste de ce même calcul.

2.1. **Calcul des propositions classique et calcul intuitionniste.** On considère que la logique classique est la logique de base de la connaissance seulement si l'on reconnaît la vérité du principe de bivalence que l'on peut définir ainsi (à partir d'une traduction de Tennant [25, p. 36]) :

Définition 3 (Principe de bivalence ou principe de détermination des valeurs de vérité des énoncés)**.** *Tout énoncé déclaratif est vrai ou faux de manière déterminée, indépendamment de toute procédure de décision pour trancher l'alternative.*

Ce principe adopté, la formule classique du tiers exclu (avec ici l'étiquette internationale LEM pour « Law of Excluded Middle ») :

$$(P \vee \neg P) \tag{LEM}$$

est directement prouvée via sa table de vérité en logique classique

P	$\vee$	$\neg P$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

En effet, c'est parce que l'on affirme que la valeur de vérité d'un énoncé, quel qu'il soit, est toujours *déterminée*, que l'on peut en logique classique procéder au calcul de la valeur de vérité d'une formule par combinaison de toutes les valeurs possibles sur les atomes de la formule et, toujours si l'on raisonne avec la logique classique comme logique de base, n'importe quelle substitution d'un énoncé déclaratif à P dans le schéma (LEM) donne une disjonction vraie.

Il est facile de remarquer que les définitions du réalisme sémantique et du principe de bivalence coïncident ou, plus exactement, qu'il est nécessaire d'affirmer le principe de bivalence, tel qu'il est exprimé plus haut, pour pouvoir affirmer le réalisme sémantique.

L'intuitionniste fait usage d'une logique bivalente, où vrai et faux sont les deux seules valeurs de vérité, mais il refuse d'affirmer le *principe de bivalence*. C'est parce qu'il fait de la preuve ou de la réfutation, autrement dit de la décidabilité des énoncés, la condition nécessaire de la détermination de leur valeur de vérité, qu'il ne peut se résoudre à affirmer ce principe nécessaire à l'expression du réalisme sémantique. Contre cette position, le réaliste au contraire nie que la décidabilité soit la condition nécessaire pour que l'on puisse affirmer que les valeurs de vérité des énoncés sont déterminées.

Dès lors on comprend intuitivement ce que veut dire le rejet de la validité universelle du tiers exclu pour l'intuitionniste : puisque le schéma (LEM) est valide *seulement si* P est prouvable ou réfutable, admettre la validité *universelle* de cette formule reviendrait à admettre que tout énoncé déclaratif est prouvable ou réfutable. Mais, d'une part, l'histoire des mathématiques montre qu'il existe un bon nombre de conjectures dont le propre est de n'avoir jamais été jusqu'à ce jour réfutées ni prouvées ; d'autre part, l'intuitionniste rejette la thèse classique selon laquelle la réfutation de $\neg P$ suffit à prouver P. Une démonstration qui montre qu'il est absurde de considérer P comme absurde, montre en effet uniquement que P est *cohérent*, non que P est *vrai*. Prenons par exemple la conjecture de Goldbach que l'on schématise par $(G \vee \neg G)$. Celle-ci n'étant actuellement ni prouvée ni réfutée, aucun état du savoir jusqu'à maintenant ne contient G ou la réfutation de G (c'est-à-dire $\neg G$), ce qui n'interdit pas de supposer que l'on puisse ultérieurement apporter ou bien une preuve, ou bien une réfutation de G. Si ce type de raisonnement permet de comprendre comment une sémantique constructive peut donner un contre-modèle du tiers exclu [3, pp. 131-132], l'analyse de la preuve du schéma $(P \vee \neg P)$ en déduction naturelle montre qu'il n'est prouvable qu'en logique classique, et que la logique intuitionniste s'arrête à la preuve de sa double négation :

Théorème 1.

$$\vdash_c (P \vee \neg P) \tag{LEM}$$

Démonstration.

1	$\quad\mid\ \neg(P \vee \neg P)$	**H**
2	$\quad\mid\ \mid\ P$	**H**
3	$\quad\mid\ \mid\ P \vee \neg P$	$\vee_l$ **I**, 2
4	$\quad\mid\ \mid\ \bot$	$\rightarrow$ **E**, 1,3
5	$\quad\mid\ \neg P$	$\rightarrow$ **I**, 2,4
6	$\quad\mid\ P \vee \neg P$	$\vee_r$ **I**, 5
7	$\quad\mid\ \bot$	$\rightarrow$ **E**, 1,6
8	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	$\rightarrow$ **I**, 1,7
▶	$(P \vee \neg P)$	$\bot_{\mathbf{c}}$, 8

Traduction de la preuve en langage naturel - Le signe $\vdash_c$ qui précède (LEM) signifie que la formule n'est dérivable qu'en logique classique ; on le montre de la façon suivante. Supposons que la disjonction $P \vee \neg P$ soit absurde (ligne 1), pour le montrer supposons que l'on affirme P (ligne 2), or s'il est justifié d'affirmer P, alors il l'est aussi d'affirmer $P \vee \neg P$ (ligne 3) *via* la règle d'introduction de la disjonction ; mais cela contredit l'hypothèse de la négation de $P \vee \neg P$ (ligne 4) ce que l'on note par le signe canonique de la fausseté $\bot$. Donc on abandonne l'hypothèse de P et on affirme $\neg P$ (ligne 5). (On dit que l'hypothèse P est *déchargée*. Un des avantages du symbolisme de Fitch adopté ici, est de rendre cette décharge *immédiatement visible*, dans le passage de la ligne 4 à la ligne 5, par le décalage vers la gauche et par le passage *sous* la ligne verticale qui marquait tout ce qui dépendait de l'hypothèse de P, à partir de la ligne 2.) Notons que la négation de P est une assertion dont la justification ne dépend plus dès lors que l'hypothèse de la ligne 1. Mais s'il est justifié d'écrire $\neg P$ sous l'hypothèse de $\neg(P \vee \neg P)$, il l'est aussi d'écrire $P \vee \neg P$ (ligne 6) *via* la règle d'introduction de la disjonction. Mais cela contredit de nouveau l'hypothèse de départ (ce qui est noté par $\perp$ ligne 7). L'hypothèse $\neg(P \vee \neg P)$ engendre la contradiction et donc peut être déchargée et niée (ligne 8). Comme l'a souligné Brouwer, il est ainsi *justifié* d'affirmer qu'il est absurde d'affirmer que $(P \vee \neg P)$ est absurde.

Le raisonnement qui précède est purement constructif (jusqu'à la ligne 8 de la déduction à la Fitch). Mais on voit qu'il ne permet pas d'affirmer que P est vrai, c'est-à-dire justifié, ou que P est réfuté. Il est en effet *impossible* d'en déduire une telle conséquence sans faire usage de la règle d'absurdité classique (notée $\perp_c$, qui symbolise le signe canonique de l'absurdité, indexé ici par un c qui veut dire « classique ») :

$$
\begin{array}{c|ll}
i & \vdots & \\
j & \neg\neg P & \\
\blacktriangleright & P & \perp_c,\ j
\end{array}
$$

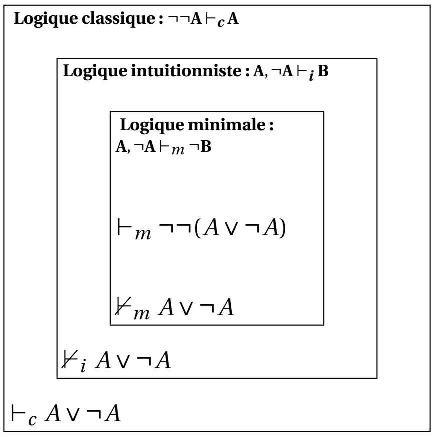
Dès lors qu'est accordée cette règle qui définit la ligne de démarcation entre logique classique et logique intuitionniste, alors $(P \vee \neg P)$ est prouvable par l'absurde (ligne 9 de la déduction à la Fitch). □

2.2. **Contre l'alarmisme de Russell.**

2.2.1. *L'effondrement de la logique ?* Russell a publié *Signification et Vérité* en 1940, soit six années après la parution en allemand du texte où Heyting [8] définit la sémantique de la logique intuitionniste. Au début du chapitre XX de ce livre, Russell définit avec précision le problème philosophique auquel il tente d'apporter une réponse jusqu'à la fin du chapitre suivant ; il écrit alors :

> Si nous définissons la vérité par son rapport avec la connaissance, *la logique s'effondre* et une grande partie du raisonnement admis jusqu'à présent, y compris des parties étendues des mathématiques, doit être rejeté comme n'étant pas valable. Mais si nous acceptons la loi du tiers exclu, nous nous trouvons engagés dans une métaphysique réaliste qui peut sembler, dans l'esprit sinon dans la lettre, incompatible avec l'empirisme. La question est fondamentale et de la plus grande importance.

J'ai souligné en italiques le propos inutilement alarmiste. Il est évident qu'un philosophe ne pourrait pas aujourd'hui écrire que le rejet intuitionniste de la validité du tiers exclu signifie « l'effondrement de la logique », sans susciter un mépris justifié chez les logiciens. L'expression de Russell est malencontreuse parce que, prise à la lettre, elle est tout simplement fausse. En effet l'ensemble des théorèmes de la logique intuitionniste est strictement contenu dans la logique classique. Or le rejet intuitionniste de la validité universelle du tiers exclu a d'une part un sens précis qu'il s'agit ici d'éclairer et, d'autre part, ce rejet concerne une vérité qui n'appartient pas au noyau de la logique, mais pour ainsi dire à sa périphérie. Si l'on est attaché comme Russell à la logique élémentaire standard, la logique ne s'effondrerait qu'à la condition que l'on rende la logique *minimale* impossible. Le diagramme qui suit (que j'ai adapté à partir d'un fichier source que Neil Tennant m'a amicalement envoyé) exprime les relations fondamentales d'inclusion entre logique minimale, logique intuitionniste et enfin logique classique :



On définit aisément la logique minimale par l'ensemble des règles d'introduction et d'élimination des constantes logiques (négation, conjonction, disjonction et conditionnel), où le signe $\perp$ qui ne se distingue des autres lettres schématiques du calcul des énoncés que par le fait d'être le symbole canonique de la fausseté. La logique intuitionniste contient la logique minimale mais prouve plus de théorèmes que cette dernière en acceptant, contrairement à la logique minimale, la fameuse règle du *Ex Falso Quodlibet* (notée *EFQ*) qui stipule que n'importe quel énoncé est dérivable à partir du faux. C'est cette règle qui est exprimée dans le tableau précédent par le séquent :

$$A, \neg A \vdash_i B \tag{1}$$

où le signe $\vdash_i$ exprime la dérivabilité en logique intuitionniste.

La logique classique contient ces deux dernières logiques, mais franchit une étape de plus en acceptant la règle d'absurdité classique $\perp_c$ qui permet de prouver le tiers exclu. Cette règle est exprimée dans le tableau par le séquent :

$$\neg\neg A \vdash_c A \tag{2}$$

où le symbole $\vdash_c$ exprime la dérivabilité en logique classique. Ce séquent, pas plus que le tiers exclu, n'est dérivable à partir des seules règles de la logique intuitionniste.

2.2.2. *Le boxeur sans ses poings ?* La lecture que j'ai faite de la citation de Russell page 5 n'a pas été très charitable, car il est évident que l'on peut interpréter le texte cité de façon à lui faire dire, plus justement, que si le tiers exclu n'est plus une loi logique acceptable, alors tous les théorèmes mathématiques où celui-ci est utilisé seront du même coup invalidés. Cependant on ne voit pas pourquoi le mathématicien trouverait avantage à faire usage d'une logique qui le contraindrait à jeter par-dessus bord un grand nombre de théorèmes que nul ne sait démontrer sans l'usage du tiers exclu. Cet argument avancé par Russell a déjà été formulé avec vigueur par Hilbert [2] dans une formule devenue célèbre :

> Enlever le principe du tiers exclu aux mathématiciens serait la même chose, disons, que d'interdire le télescope à l'astronome ou au boxeur l'usage de ses poings.

La formule de Hilbert a été tellement percutante, qu'elle a marqué pendant des décennies les esprits et a laissé des traces dans la littérature philosophique. Mais on voit désormais plus clairement que cette polémique est le fruit d'un malentendu qui tient au fait que les partisans du conservatisme logique souvent ne comprennent pas ce que signifie réellement le rejet intuitionniste de la validité du tiers exclu. Car non seulement le fait de renoncer à la validité universelle du tiers exclu ne produit pas un effondrement de *la* logique, mais il est de plus possible de traduire tout théorème classique qui n'est pas valide en logique intuitionniste en lui apposant une double négation, de façon à le transformer en un théorème intuitionniste. En effet, si (LEM) n'est pas un théorème de la logique intuitionniste, en revanche

$$\neg\neg(P \vee \neg P) \tag{3}$$

l'est. Ce fait peut se comprendre de façon générale *via* ce célèbre théorème :

Théorème 2 (Théorème de Glivenko)**.** *Soient* Γ, A*, des formules propositionnelles.*
On a $\Gamma \vdash_c A$ *si et seulement si* $\neg\neg\Gamma \vdash_i \neg\neg A$*.*

Démonstration. [20, p. 157]. □

Ce théorème de 1929 est devenu célèbre, et il reste invariablement cité dans tous les articles ou manuels qui traitent de la logique intuitionniste. Mais il existe un autre théorème plus récent, qui permet de rendre compte de la traduction de la logique classique à l'intérieur de la logique intuitionniste et qui a pour immense mérite de rendre simple et transparent *le rôle épistémologique exact* que joue la logique intuitionniste par rapport à la logique classique dans la recherche mathématique. Ce beau théorème a été découvert par von Plato en 1999, et rejeté par un rapporteur aveugle du célèbre *Journal of Symbolic Logic*, il est resté à l'état de manuscrit [12], pour être enfin donné dans [11, pp. 27 et 207] :

Théorème 3 (Théorème de von Plato)**.** *Soit* $P_0, P_1, \ldots, P_n$ *les propositions atomiques de la formule* C*. Alors* C *est démontrable en logique classique si et seulement si*

$$((P_0 \vee \neg P_0) \wedge (P_1 \vee \neg P_1) \wedge \cdots \wedge (P_n \vee \neg P_n)) \rightarrow C$$

est démontrable en logique intuitionniste.

Démonstration. [11, p. 207]. □

Le théorème 3 signifie, comme le soulignent avec force Negri et von Plato [11, p. 27], que la logique propositionnelle classique peut-être interprétée par la logique intuitionniste comme une logique où les preuves des théorèmes sont relatives *aux décisions sur les formules atomiques*. Le caractère tout à fait remarquable du théorème 3, est qu'il prouve que n'importe quel théorème C spécifique à la logique classique mais habituellement rejeté par la logique intuitionnistes (comme la loi de Peirce par exemple) devient, du point de vue intuitionniste, une conséquence logique acceptable de la distribution classique des valeurs de vérités sur les formules atomiques de C. Pour être encore plus clair

$$\nvdash_i ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P \tag{4}$$

signifie que la Loi de Peirce n'est pas valide en logique intuitionniste, mais en revanche

$$\vdash_i ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)) \rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P) \tag{5}$$

l'est, ce qui est une illustration du théorème de von Plato.

Le noeud de la question est donc que la formule classique du tiers exclu (LEM) n'est pas une tautologie pour l'intuitionniste mais, comme le soulignent Negri et von Plato [11, pp. 26-27], un schéma qui n'est valide qu'à la condition que la formule P soit décidable. Ce que l'on peut exprimer par le Corollaire suivant :

Corollaire 1. $\vdash_i (P \vee \neg P)$ *si et seulement si* P *est décidable.*

2.2.3. *Tiers exclu et théorie de la preuve.* Russell donne en faveur de la logique classique un argument fondamental selon lequel le maintien de la validité universelle du tiers exclu serait indispensable pour la poursuite de la vérité. Cet argument exprime d'une autre manière la même idée que celle exprimée par la célèbre métaphore de Hilbert. En tenant compte de ce qui vient d'être établi, on va voir pourquoi c'est au contraire la position intuitionniste, qui n'accorde la validité à (LEM) qu'à la condition que P soit décidable, qui permet le progrès de la poursuite de la vérité.

L'argument de Russell répond exactement à l'esprit de la logique classique : la validité universelle du tiers exclu s'explique par l'application systématique du principe de bivalence, selon la combinatoire de la méthode des tables de vérité, indépendamment des moyens que nous avons pour connaître la valeur de vérité des énoncés qui sont schématisés par les variables propositionnelles. Pour Russell la validité du tiers exclu exprimerait donc la séparation, correcte du point de vue du réalisme sémantique, entre vérité et connaissance justifiée [21, p. 288, trad. fr. p. 313] :

> Lorsque nous nous embarquons dans une recherche, nous prétendons que les propositions, au sujet desquelles nous faisons notre enquête, sont vraies ou fausses ; nous pouvons en trouver la preuve ou non. [...] A présent, nous ignorons s'il y a de la vie ailleurs dans l'univers, mais nous avons raison d'être assurés qu'il y en a ou qu'il n'y en a pas. Nous avons donc besoin de la « vérité » aussi bien que de la « connaissance » parce que les frontières de la connaissance sont incertaines et parce que, sans la loi du tiers exclu, nous ne pourrions pas nous poser les questions qui donnent naissance aux découvertes.

Cet argument exprime d'une autre manière la même idée que celle exprimée par la célèbre métaphore de Hilbert. En tenant compte du théorème 3 et du corollaire 1, on va montrer pourquoi c'est au contraire la position intuitionniste, qui n'accorde la validité à (LEM) qu'à la condition que P soit décidable, qui permet le progrès de la poursuite de la vérité.

On peut remarquer que Russell n'explique pas comment, en tant que principe logique, le principe du tiers exclu intervient pour « donner naissance aux découvertes ». Or il est évident que, formulé de manière schématique *via* la formule (LEM), le tiers exclu n'est que l'expression abstraite de la réponse par « oui ou non » à un problème quelconque. Un schéma propositionnel peut faciliter la compréhension d'un ensemble de phrases ayant la même structure, mais en aucune façon il ne livre une procédure de preuve qui permette d'affirmer une conséquence logique. Si le tiers exclu a une fonction logique, on aimerait comprendre en quoi la logique classique fait plus que d'affirmer que telle assertion problématique est vraie ou fausse, et en quoi elle est supérieure, *via* la démonstration du tiers exclu, à la logique intuitionniste qui, plus exigeante, n'admet l'attribution du vrai à un énoncé P qu'en présence d'une preuve de P, ou du faux qu'en présence d'une réfutation de P. On va répondre à cette question en montrant au contraire, à partir de l'analyse d'un exemple canonique, que le principe du tiers exclu n'est fécond du point de vue logique qu'à la condition d'être intégré dans une règle constructive (c'est-à-dire acceptable pour l'intuitionniste) et d'être interprété de manière intuitionniste.

Pour illustrer la différence qui existe entre la position réaliste (ou platonicienne) et la position constructive, on trouve souvent dans les manuels, le théorème suivant et sa démonstration :

Théorème 4 (Théorème non-constructif canonique)**.** *Il y a au moins deux nombres irrationnels x et y tels que x^y est rationnel.*

Démonstration. (i) Prémisse : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou ne l'est pas.

(ii) Supposons $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationnel . On pose $x = y = \sqrt{2}$ et l'on obtient l'exemple qui prouve l'assertion existentielle du théorème 4 : $\sqrt{2}$ est irrationnel et $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est supposé rationnel.

(iii) Supposons $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrationnel, on pose $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (irrationnel par supposition) et $y = \sqrt{2}$ (irrationnel) ; on obtient alors :

$x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Or 2 est rationnel, et cela prouve l'assertion existentielle du théorème 4.

$\square$

Si cet exemple est fréquemment donné pour illustrer ce qu'est une démonstration *non constructive* parce qu'elle repose sur l'usage du tiers exclu, on ne précise jamais ce que l'intuitionniste serait cependant prêt à admettre dans cette démonstration, ni comment il la reformulerait de manière à la rendre acceptable de son point de vue. Il est pourtant éclairant de le faire. Voici le schéma qui exprime la démonstration du théorème dans le style de la déduction naturelle *à la Fitch*, où $R(x)$ signifie « x est rationnel » :

1	$(\forall x)(R(x) \vee \neg R(x))$	**H** (tiers exclu)
2	$(x = y = \sqrt{2}) \rightarrow (x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H** – *cf*.*Démonstration*, (ii).
3	$\neg R(\sqrt{2})$	**H** – *cf*.*Démonstration*, (ii).
4	$((x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \wedge (y = \sqrt{2})) \rightarrow (x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = 2)$	**H** – *cf*.*Démonstration*, (iii).
5	$R(2)$	**H** – *cf*.*Démonstration*, (iii).
6	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee \neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	$\forall$**E**, 1
7	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H**
8	$(x = y = \sqrt{2})$	**H**
9	$(x = y = \sqrt{2}) \rightarrow (x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	$\rightarrow$ **I**, 8, 2
10	$(\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \rightarrow R(x^y))$	$\exists$ **I**, 9, 3, 7
11	$\neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H**
12	$(x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \wedge (y = \sqrt{2})$	**H**
13	$((x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \wedge (y = \sqrt{2})) \rightarrow (x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = 2)$	$\rightarrow$ **I**, 12, 4
14	$(\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \rightarrow R(x^y))$	$\exists$ **I**, 13, 11, 3, 5
▶	$(\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \rightarrow R(x^y))$	$\vee$ **E**, 6, 10, 14

Expliquons ce schéma. On voit tout d'abord que la prémisse (i) de la démonstration page 8, n'est pas posée à titre d'hypothèse dans le raisonnement classique, mais déduite (ligne 6) comme l'instance d'une vérité universelle (ligne 1 du même schéma) et valide à ce titre. Or, dès lors que cette prémisse est posée comme déductible en raison de l'universalité du tiers exclu, suit l'élimination de cette disjonction (ligne 15) qu'est cette instance du tiers exclu qui a permis l'inférence de l'existence *non déterminée* deux irrationnels x et y qui peuvent être ou bien tous deux égaux à $\sqrt{2}$, ou bien correspondre respectivement à $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}$ pour produire la conséquence affirmée dans le théorème.

Voyons maintenant la preuve de ce même théorème qu'elle pourrait être formulée dans le cadre de la logique intuitionniste. Le logicien intuitionniste rejette la validité universelle du tiers exclu, donc il se dispense évidemment de poser la ligne 1 du schéma classique et les quatre hypothèses suivantes suffiront. Il n'affirmera pas non plus que la détermination de la rationalité ou de l'irrationalité d'un réel quelconque est un problème décidable (il ne l'est sans doute pas). La prémisse (i) de la démonstration de la page 8 ne sera donc évidemment pas une vérité déductible de la validité du tiers exclu, mais une prémisse posée à titre d'hypothèse qui s'énoncera ainsi : « *Si* l'on peut décider de la rationalité ou de l'irrationalité de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *alors* on doit pouvoir obtenir une preuve du théorème 4 ». On retrouve ici ce qui a été précisé plus haut concernant l'admissibilité de l'expression du tiers exclu dans le raisonnement intuitionniste : une instance du tiers exclu est admissible du point de vue intuitionniste si et seulement si cette instance est en l'occurrence décidable. L'intuitionniste transforme la démonstration en affirmant cette conclusion : si l'on peut décider de la rationalité ou de l'irrationalité de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, alors on peut en déduire qu'il existe au moins deux deux nombres irrationnels x et y tels que x^y est rationnel. La procédure de preuve intuitionniste est traduisible en déduction naturelle par le schéma suivant :

⋮	⋮	
4	⋮	
5	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee \neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H** *Démonstration* (i)
6	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H**
	⋮	
	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \to (\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \to R(x^y))$	
	$\neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H**
	⋮	
⋮	$\neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \to (\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \to R(x^y))$	
13	$(\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \to R(x^y))$	$\vee$ **E**
►	$(R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee \neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})) \to (\exists x)(\exists y)(\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \to R(x^y))$	$\to$ **I**

Remarquons que le corps de la preuve classique de l'existence des deux nombres irrationnels *n'est pas rejeté par l'intuitionniste*, tout simplement parce que l'élimination de la disjonction (ligne 13 du précédent schéma) est une règle admissible en logique intuitionniste. Mais l'intuitionniste qui se passe de la loi du tiers exclu peut reprendre le même schéma de raisonnement pour conclure avec plus de précision que ne le fait le logicien classique : si la disjonction de la prémisse (i) est décidable, alors on peut exhiber deux témoins x et y qui justifient l'assertion du théorème 4, conformément aux canons de la logique intuitionniste.

L'intuitionniste ne reproche évidemment pas au mathématicien qui fait usage de la logique classique les raisonnements constructifs qui lui permettent d'indiquer l'existence d'objets mathématiques, mais il lui reproche tous les raisonnements non constructifs qui conduisent à des assertions existentielles indéterminées qui dépendent de l'affirmation de la validité universelle du tiers exclu, autrement dit d'une assertion injustifiée du point de vue intuitionniste.

L'analyse comparative et détaillée de cet exemple classique montre de manière difficilement contestable que c'est uniquement la perspective intuitionniste qui fait un usage utile de la logique dans la poursuite de la vérité. C'est en effet le règle constructive de l'élimination de la disjonction qui permet au logicien classique d'établir la preuve du théorème dans la démonstration précédente, et c'est enfin l'exigence de décidabilité de la prémisse (i) qui apparaît comme la condition suffisante de la *détermination* de l'existence de ces deux irrationnels. En l'occurrence, on sait l'exigence intuitionniste de décidabilité de la prémisse (i) est satisfaite, puisque le très difficile théorème de Gelfond-Schneider (1934) qui apporte une solution générale au septième problème de Hilbert permet aussi de montrer que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est un nombre transcendant (donc irrationnel). Le mathématicien qui, à l'instar de Russell, croît encore que la logique classique est le fondement du raisonnement de la découverte scientifique, sera peut-être encore tenté de répondre que l'on passe ici sous silence l'hypothèse d'éléments non-constructifs dans la preuve de Gelfond-Schneider. Mais, si tel est le cas, ces éléments pourraient à leur tour être repérés au sein de la logique intuitionniste comme autant de sous-problèmes à résoudre pour parvenir à une preuve intégralement constructive du théorème 4.

On ne peut donc pas admettre l'argument qui consiste à dire qu'il faut conserver la validité universelle du tiers exclu parce qu'y renoncer affaiblirait en quelque sorte la logique de la découverte scientifique ; car c'est uniquement au sein de la logique intuitionniste qu'une formule qui est une instance du tiers exclu prend un sens scientifique fort et intéressant, dès lors qu'il est requis que, pour être valide, l'instance en question doit être décidable. En un mot le tiers exclu n'est utile pour la poursuite de la vérité, qu'à la condition qu'il soit *enrégimenté* dans un raisonnement constructif tel que la logique intuitionniste permet de le comprendre. A la métaphore de Hilbert qui compare le mathématicien sans le tiers exclu au boxeur privé de ses poings, l'intuitionniste peut riposter en faisant remarquer que, si l'image de Hilbert est juste, alors il l'est tout autant de souligner que ce même boxeur doit savoir, le moment venu, s'il faut lancer une gauche ou une droite, et surtout ne pas rester indéfiniment dans l'indécision.

2.3. **Contre les arguments de Quine.** De Russell, Quine a hérité le conservatisme logique. Mais contrairement à Russell, Quine semble n'avoir jamais pris au sérieux la position intuitionniste, à en juger sur la désinvolture des arguments qu'il emploie dans sa polémique contre celle-ci. Pour stigmatiser toute logique « déviationniste » en général, Quine [18, chap. 6] a opposé un slogan devenu célèbre : *change of logic, change of subject* (« changer de logique c'est changer de sujet »). Dans sa polémique contre la logique intuitionniste en particulier, il a développé des arguments dont voici l'essentiel : l'adoption de la logique intuitionniste a, pour Quine, trois conséquences fâcheuses :

(a) la logique intuitionniste change la *signification* de la négation, de la disjonction et de la quantification et donc, du point de vue de Quine, le logicien classique ne peut comprendre le sens dévié de ces constantes logiques que par rapport à une traduction de cette logique dans la sienne (qui contient la logique intuitionniste) ;
(b) la logique intuitionniste complique la théorie de la preuve ainsi que la sémantique, car la logique intuitionniste « n'a pas le caractère familier, la commodité, la simplicité et la beauté [de la logique classique] » ;
(c) on change le sujet de la logique qui doit être le vrai et non le savoir comme le pensent les intuitionnistes.

2.3.1. *Un changement de signification des constantes logiques ?* Au chapitre 6 de [18], Quine argumente ainsi le point (a) :

> Nous avons dépeint le rejet du principe du tiers exclu "P ou $\neg P$" comme étant principalement un rejet de la négation classique. Or je viens de présenter les arguments intuitionnistes comme ayant trait surtout à la disjonction. En fait, il n'y a pas lieu de distinguer réellement, car une fois qu'on a bouleversé les relations entre les opérateurs logiques, on peut dire qu'on a modifié n'importe lequel d'entre eux ou qu'on les a tous modifiés. Quoi qu'il en soit, la négation intuitionniste est aussi,

de son estoc, une déviation : le principe de la double négation devient caduc.

Cet argument repose sur une confusion entre la *signification* des connecteurs et quantificateurs et *l'interprétation* des formules logiques elles-mêmes. C'est parce que Quine pense exclusivement à la méthode des tables de vérité pour définir les connecteurs qu'il affirme à tort que la négation intuitionniste est déviante. Il est vrai qu'en logique classique l'application de la négation renverse à chaque fois la valeur de vérité de la formule niée, ce qui permet d'obtenir que, quel que soit la valeur de P, sa double négation lui soit toujours équivalente. On obtient donc le tableau suivant :

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

C'est cette fonction « renversante » accordée à la négation dans la logique classique qui permet de faire de (2) une inférence valide qui justifie l'application de la règle d'absurdité classique dans tous les raisonnements où l'on fait usage de la logique classique. Mais cela signifie-t-il que, parce que l'intuitionniste rejette la validité de (2), il fait usage d'une conception *déviante* de la négation ? La réponse est non, et l'on va montrer que l'argument de Quine n'est admissible que si et seulement si l'on fait dépendre la signification des constantes logiques de l'application du principe de bivalence, ce qui non seulement n'est pas naturel mais, comme l'a bien vu Dummett, introduit une confusion fâcheuse entre signification et référence.

On peut rejeter sereinement cette accusation de déviance intuitionniste de la signification des constantes logiques pour deux raisons. La première est une raison fondée sur la compréhension naturelle que nous avons par exemple des connecteurs du calcul des propositions. On sait que l'intuitionniste rejette le principe de bivalence ainsi que l'équivalence classique entre la double négation d'un énoncé P quelconque et l'assertion de P. En suivant Bell *et al.* [1] on peut faire usage du signe « ? » en logique intuitionniste, en interprétant ce signe non comme une troisième valeur de vérité, mais comme un symbole qui, apposé à une formule, indique que la formule en question n'est pas prouvée. Dès lors la logique intuitionniste peut illustrer l'invalidité du tiers exclu par la table suivante, en réponse à la table de la logique classique de la même formule :

P	$\vee$	$\neg P$
?	?	$\bot$
?	?	?

Cette table peut-elle montrer que l'intuitionniste a une conception déviante de la disjonction et de la négation ? Il semble aller de soi que nous comprenons toujours la disjonction de la même façon, c'est-à-dire, pour reprendre la définition qu'en donne Russell [21, p. 85, trad. fr. p. 98], comme « l'expression verbale d'une indécision ». La négation est à elle seule un champ de réflexions logiques et philosophiques et c'est donc un sujet délicat. Mais dès lors que l'on est d'accord sur la traduction $\neg P$ par « P est faux » on peut sans difficulté soutenir contre Quine que la logique intuitionniste fait usage de la même notion de la négation que celle qui est en vigueur dans la logique classique. Nous comprenons tous ce qu'est la négation d'un énoncé à partir de ce qui est assumé comme vrai ou comme connu. Celui qui est en train de lire ces lignes peut par exemple supposer qu'il est en train de lire la dernière phrase de cet article. Mais parce qu'il voit une ligne qui suit la phrase précédente et une page qui suit la page qu'il est en train de lire, il en conclura rapidement que sa supposition est fausse, parce qu'elle est *incompatible* avec ce qu'il sait. Voilà pourquoi la logique intuitionniste traduit la négation d'un énoncé P comme équivalente avec le fait de dire que P implique l'absurde et définit ainsi la négation :

$$\neg P \Leftrightarrow (P \to \bot) \qquad (Def.\ \neg)$$

Une riposte réaliste, qui consisterait à dire qu'un tel compte rendu de la signification des constantes logiques verse dans le psychologisme, brandirait à tort une sorte d'épouvantail philosophique et manquerait l'essentiel de l'argument qui vient d'être avancé. Si l'on soutient l'argument de Quine selon lequel l'intuitionniste ferait usage d'une notion déviante de la négation des constantes logiques en général, on est très embarrassé pour expliquer comment logiciens intuitionnistes et logiciens classiques peuvent s'entendre sur la démonstration de l'absurdité de $\neg(P \vee \neg P)$. En revanche on explique aisément cet accord si l'on donne raison à Gentzen [7] lorsqu'il voit dans les règles d'introduction de la déduction naturelle *la définition* des constantes logiques. *A l'exception de l'ajout de la règle d'absurdité classique*, $\perp_c$, toutes les règles de la déduction naturelle du calcul des propositions définissent la logique intuitionniste et permettent de tester la validité d'une formule sans faire usage des tables de vérité et donc toutes les règles du calcul classique des propositions, sauf $\perp_c$, sont les mêmes que celles du calcul intuitionniste. Puisque seules importent les extensions en science selon Quine, on voit mal à partir de quel point de vue scientifique il peut reprocher aux intuitionnistes d'attribuer des significations déviantes aux constantes logiques.

Un esprit conciliant serait tenté de répondre que la déduction naturelle jusqu'à la règle d'absurdité classique exceptée est, comme l'a remarqué Prawitz [13], une bonne traduction de *la signification constructive* des opérateurs logiques tels qu'ils ont été définis par Heyting [8] pour la logique intuitionniste, mais une traduction qui échoue à donner la signification classique des opérateurs logiques. Cela expliquerait pourquoi Quine soutient que la logique intuitionniste fait un usage déviant des opérateurs logiques. De la même façon, avec Prawitz [14] encore, on peut considérer que le calcul des séquents classique traduit mieux la signification classique des constantes logiques [5, p. 63, n.16]. Mais, ce serait éviter l'argument de Quine selon lequel les significations intuitionnistes des constantes logiques sont « déviantes » et accepter le préjugé - entretenu par un pluralisme logique qui capitule face aux querelles philosophiques - qui consiste à croire qu'il y a une signification intuitionniste *et* une signification classique des constantes logiques. On peut soutenir vigoureusement qu'il n'y a qu'une signification des constantes logiques et qu'elles sont données par les règles d'introduction de la déduction naturelle.

L'argument de Quine apparaît d'autant moins recevable que les connecteurs et quantificateurs ne sont pas inter-définissables en logique intuitionniste et donc qu'ils n'ont pas à proprement parler de « relations » entre eux, chaque opérateur logique est défini *pour lui-même*. Il est donc étrange de reprocher à la logique intuitionniste de bousculer les rapports entre les opérateurs logiques, alors qu'elle s'abstient de dire quoi que ce soit sur ces rapports. Enfin non seulement l'accusation d'entretenir une notion déviante de la négation tombe, puisque, encore une fois, la logique classique accepte ($Def.\ \neg$), mais c'est du point de vue constructif que l'accusation contre la logique classique d'une approche « déviante » de la négation pourrait être plus rigoureusement justifiée. En effet, puisque la logique classique surajoute à la définition constructive de la négation la règle d'absurdité classique, l'intuitionniste peut protester à bon droit, à l'instar de Bornat [3, p. 34] qui, après avoir rappelé que la négation d'un énoncé P est équivalente, en raison de ($Def.\ \neg$), au fait d'affirmer que P conduit à une contradiction, donne à son lecteur cet avertissement encadré :

> **Ne présumons pas** que $\neg$ est comme une négation numérique, de façon à ce que $\neg\neg A$ soit automatiquement équivalent à A. C'est de la logique formelle, pas de l'algèbre de Boole.

Mais c'est justement ce que reproche Quine à la sémantique de la logique intuitionniste : de ne pas être une algèbre de Boole et donc de ne pas avoir la simplicité et la commodité que fournit cette dernière. Cela nous conduit donc au traitement du point (b).

2.3.2. *Une logique moins familière, moins commode, moins simple et moins belle ?* On n'engagera pas la polémique sur la question de la plus ou moins grande « beauté » de telle ou telle logique. On peut simplement remarquer que Quine ne donne pas avec précision une norme qui permette de dire pourquoi la logique classique est belle, lorsqu'au contraire l'école intuitionniste a insisté sur *l'harmonie* qui existe en déduction naturelle dans l'équilibre des règles de la d'introduction et d'élimination des connecteurs et sur la fécondité déductive qui résulte de cette harmonie (voir [26]).

Il est très probable que Quine associe ce qu'il considère être la « beauté » de la logique classique avec la simplicité et donc la commodité de sa sémantique booléenne qu'il oppose par contraste à la plus grande complexité de la sémantique constructive que les modèles de Kripke ou l'algèbre de Heyting traduisent. Cette opposition pourrait faire pencher la balance en faveur de la logique classique qui posséderait une méthode de décision plus simple que la logique intuitionniste. Mais l'argument ne pourrait être décisif qu'à la condition de penser que la méthode des tables de vérité est *la* méthode fondamentale de décision en logique, ce qui n'est évidemment pas possible d'envisager du point de vue intuitionniste.

Il est cependant vrai que la recherche de preuve en logique intuitionniste est plus longue et donc plus difficile qu'en logique classique (notamment en raison du fait que certaines règles sont non inversibles et que l'on est contraint à des choix pour l'élimination des disjonctions) mais on ne peut accepter que ce point puisse faire figure d'argument sérieux contre l'intuitionnisme, à moins de faire de la paresse une position scientifiquement correcte. En revanche, si la recherche de preuve est moins économique en logique intuitionniste, le gain d'information est aussi plus important comme on l'a vu plus haut.

Enfin, accorder un caractère plus « familier » à la logique classique, comme Quine le fait, s'accorde mal avec le fait que certains théorèmes classiques comme

$$\vdash_c (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q) \tag{6}$$

sont condamnés à rester contre intuitifs et donc, contrairement à ce que soutient Quine, non familiers. Dans son analyse du conditionnel et de la disjonction, Quine [15, ch. 3] soutient une position cohérente avec son réalisme sémantique et son adhésion au conservatisme logique, mais en désaccord avec l'usage naturel que l'on fait du conditionnel, comme on peut en juger à la lecture de ce texte :

> Dans la pratique, celui qui affirme 'Si p alors q' est ordinairement incertain quant à la vérité ou à la fausseté individuelle de 'p' et de 'q' mais a quelque motif simplement pour ne pas croire à la combinaison de 'p et non 'q' prise globalement. Nous disons :
>
> Si Pierre a la malaria alors il a besoin de quinine,
>
> parce que nous connaissons la malaria mais nous sommes dans le doute à la fois sur la maladie de Pierre et sur son besoin de quinine. Seuls valent la peine d'être affirmés les conditionnels qui découlent d'une sorte de rapport direct entre l'antécédent et le conséquent - par exemple d'une loi reliant les états de fait que décrivent les deux énoncés composants. Une telle liaison, tout en étant à la base des applications utiles du conditionnel, n'a cependant nul besoin de participer à sa signification. [...] Ce qu'il est important de noter, c'est que '$p \to q$', c'est-à-dire le conditionnel matériel, doit avoir exactement la signification '$\neg(p \wedge \neg q)$' (ou '$\neg p \vee q$') et l'on verra suffisamment, en avançant, à quel point ce concept est bien adapté aux fins pour lesquelles 'si alors' vient naturellement à l'esprit.

En dépit de ce Quine soutient dans ce texte à la fois dogmatique et provocateur, il est difficile de ne pas reconnaître que les énoncés

$$\text{Pierre n'a pas la malaria ou il a besoin de quinine} \tag{7}$$

$$\text{Si Pierre a la malaria alors il a besoin de quinine} \tag{8}$$

$$\text{Affirmer que Pierre a la malaria et n'a pas besoin de quinine est absurde} \tag{9}$$

n'ont pas *intuitivement* la même signification. Mais Quine soutient que, si deux formules ont des tables de vérité identiques, alors elles sont identiques du point de vue de la signification. Faut-il alors admettre que « la division de 6 par 2 » *signifie* la même chose que « l'addition de 2 et de 1 » puisque ces deux opérations ont le même résultat ?

Supposons qu'un professeur de médecine examine Pierre devant ses étudiants, est-il raisonnable de soutenir qu'il leur apporterait exactement la même *information* en affirmant (7) plutôt que (8), ou (8) plutôt que (9) ? Supposer que la disjonction est vraie, c'est déjà affirmer quelque chose sur l'état de Pierre, ce dont s'abstient en fait l'énoncé conditionnel. Si Quine avait approfondi la réflexion sur son exemple dans le cadre de la logique intuitionniste, peut-être aurait-il été troublé de constater que, conformément à ce que l'usage naturel du langage nous suggère, (7) a pour conséquence (8), en logique intuitionniste, mais non l'inverse, et de même (8) a pour conséquence (9), mais non l'inverse. Bien entendu ce point de logique s'explique encore une fois par le fait que la logique intuitionniste ne fait pas usage de la règle d'absurdité classique, mais il ne faut pas perdre de vue que ce refus est motivé par l'observation du fait que $\neg\neg P$ n'apporte pas la même information que P.

Sans entrer dans les détails qui exigeraient des développements longs et difficiles, on peut rappeler que l'algèbre de Boole, qui offre à la logique classique sa sémantique, n'est qu'un qu'un *cas particulier* de l'algèbre de Heyting, qui elle permet d'interpréter du point de vue sémantique la logique intuitionniste. Ce point éclaire l'expressivité plus riche de cette dernière, ce que Quine passe totalement sous silence. Le conservatisme logique apparaît comme une position philosophique aussi peu justifiée, *mutatis mutandis*, que la thèse qui consisterait, en philosophie de la physique, à prétendre que la théorie de la relativité est une théorie « déviante » par rapport à la mécanique classique et qu'il faut lui préférer cette dernière théorie parce qu'elle plus familière et plus simple. Mais c'est assez pour cette défense logique de l'intuitionnisme, il est temps d'aborder la question de sa compatibilité avec l'empirisme.

3. DÉFENSE ÉPISTÉMOLOGIQUE DE L'INTUITIONNISME

3.1. **Le problème de Russell et « l'argument de Russell-Tennant ».** Russell a eu le mérite de poser le problème que soulève l'adoption de la validité universelle du tiers exclu dans une philosophie de la connaissance qui admet l'empirisme (comme le montre la citation faite plus haut page 5). La complexité de la question apparaît à partir d'un double constat. D'une part, dans le domaine mathématique, les contre-exemples que Brouwer donne pour invalider le tiers exclu conduisent selon Russell, ou bien à sacrifier toutes les preuves qui n'obéissent qu'à la logique classique mais qui ne sont pas valides en logique intuitionniste, ou bien à conserver toutes les mathématiques classiques et du même coup reconnaître implicitement le caractère fondé du platonisme. D'autre part, comme l'induction échoue à fondé le tiers exclu et donc à justifier logiquement son application dans les sciences de la nature, alors on doit, contre l'empirisme, admettre que la validité du tiers exclu est comparable à celle d'un principe d'inférence qui transcende l'expérience en général. C'est ainsi que Russell réaffirme la vérité du réalisme sémantique [21, p. 305, trad. fr. p. 311] :

> Comme une expérience est un fait, les propositions vérifiables sont vraies ; mais il n'y a pas de raison de supposer que toutes les propositions vraies sont vérifiables. Si néanmoins nous affirmons qu'il y a

> des propositions vraies qui ne sont pas vérifiables, nous abandonnons l'empirisme pur. Finalement, personne ne croit à l'empirisme pur et, si nous devons conserver des croyances que nous considérons tous comme valables, nous devons admettre des principes d'inférence qui ne sont ni démonstratifs ni dérivables de l'expérience.

Pour Russell, un empirisme « pur » implique que ne soient considérés comme vrais que les énoncés qui font référence à des événements dont on a l'expérience privée. Il est évident que, si l'on ne veut pas tomber dans le solipsisme pour maintenir coûte que coûte l'empirisme pur, on doit accepter la vérité de certains énoncés qui sont fondés sur les témoignages ou sur la physique contemporaine et qui présupposent que l'on admette des principes d'inférence qui ne sont ni démontrables, ni dérivables de l'expérience. Parmi ceux-ci, le tiers exclu justifie la croyance en la vérité de phrases comme « il y a ou il n'y a pas de vie au-delà de notre système solaire », parce qu'en vertu de la loi du tiers exclu et indépendamment de toute preuve ou de toute réfutation, l'un des énoncés correspond à un fait. Nous savons que cette disjonction est vraie, parce que chacun de ces membres entretient « des rapports syntaxiques « avec les propositions de base qui traduisent notre expérience. C'est donc par *analogie* avec les propositions de base que nous pouvons affirmer que les énoncés qui outrepassent notre expérience, voire la possibilité de notre expérience en général, sont vrais.

Il n'est pas aisé de répondre à la question de savoir à quelle classe de système philosophique la théorie que Russell développe dans *Signification et Vérité*. On peut par exemple penser avec Quine [17], qu'en dépit de sa sympathie pour le nominalisme et de ses fréquentes références à Carnap, Russell conserve à son insu une théorie platonicienne des mathématiques. On peut aussi considérer avec Marion [10] que la théorie de la connaissance de Russell a toujours conservé d'indiscutables aspects métaphysiques. Mais la question de l'interprétation générale de la philosophie de Russell dans *Signification et Vérité* a déjà été traitée par Engel [6] et n'est pas ici notre propos.

Notons simplement qu'il est indiscutable que Russell est finalement conduit à reconnaître une réalité aux jugements synthétiques *a priori* que le logicisme écartait, même s'il ne l'écrit pas explicitement. On trouve en effet plus tard sous sa plume cette définition de l'empirisme qui *prouve* qu'il admet les jugements synthétiques *a priori* dont le tiers exclu est un exemple [22, p. 516, trad. fr. p. 533] :

> L'empirisme peut être défini par l'affirmation : « Toute connaissance synthétique est fondée sur l'expérience ».

Russell parvient à la conclusion du caractère inadéquat de l'empirisme, et donc à l'idée selon laquelle il y a bien une connaissance synthétique qui est indépendante de l'expérience, c'est-à-dire synthétique et *a priori*. Cinquante six années plus tard, Tennant marquera son accord avec la conséquence que Russell tire de sa position, dans un article au titre suffisamment explicite : *The Law of Excluded Middle is Synthetic A Priori, if Valid* [24]. Mais comme le souligne Tennant, cela rompt avec le statut de vérité analytique que la tradition philosophique depuis Kant accordait à toute vérité logique. En affirmant que le principe du tiers exclu doit être conçu du point de vue du réalisme sémantique comme un « principe synthétique *a priori* » , Tennant insiste plus que Dummett ne l'a fait sur le caractère métaphysique d'une telle position. Cet argument présuppose, bien entendu, que l'intuitionniste qui refuse la validité universelle du tiers exclu n'est en rien tenu d'adopter une telle métaphysique. Si Russell avait réfléchi plus profondément aux fondements et aux vertus épistémologiques de la logique intuitionniste, peut-être n'aurait-il pas sacrifié l'empirisme pour conserver la logique classique comme logique de base, au profit du réalisme sémantique. On a en revanche plus de mal à imaginer ce qu'aurait pu être la philosophie de la logique de Quine sans le conservatisme logique.

3.2. **L'esquive de Quine : relativité de l'analyticité.** Le fait que Quine n'ait jamais considéré que la position intuitionniste puisse être bien fondée, ni que la logique intuitionniste puisse être autre chose qu'une logique « déviante, » explique aussi qu'il donne des arguments qui, indirectement, relativisent l'analyse que Russell fait du tiers exclu dans *Signification et Vérité*. Un des arguments des plus célèbres de Quine [16] consiste à contester que la distinction entre analytique et synthétique puisse être une distinction tranchée, puisque toute définition rationnelle et acceptable de la notion d'analyticité consiste à relativiser celle-ci à une théorie donnée.

Pour définir après Kant le sens de la distinction entre analytique et synthétique, Tennant [24] souligne le fait que deux choses permettent ordinairement de déterminer la valeur de vérité d'un énoncé déclaratif ϕ : sa signification et les états de choses du monde. Cette distinction permet alors de préciser comment il faut entendre les expressions « ϕ est analytique » et « ϕ est synthétique ». Si la signification suffit à déterminer la valeur de vérité de ϕ, alors ϕ est analytique et ne dit rien sur les états de choses du monde. Si en revanche un état de choses du monde doit participer à la détermination de la valeur de vérité de ϕ, alors ϕ est synthétique.

Reprenons maintenant les exemples et l'analyse de Quine [16] :

$$\text{Aucun homme non marié n'est marié} \tag{10}$$

est analytique parce que (10) est une vérité logique qui, pour reprendre la prose de Quine, reste vraie pour toute interprétation de ses composantes autres que les constantes logiques. Cet exemple conduit Quine à remarquer que

$$\text{Aucun célibataire n'est marié} \tag{11}$$

n'est pas une vérité de logique, mais reste un énoncé analytique, en raison de la relation de synonymie en français entre les termes « célibataire » et « non marié ». Laissons pour l'instant de côté l'embarras de Quine vis-à-vis de la synonymie et admettons que, dans un contexte ordinaire, (11) est analytique. Son embarras a quelque chose d'embarrassant parce qu'il contraste avec son manque d'embarras pour considérer (7), (8) et (9) comme des énoncés analytiquement équivalents et donc substituables *salva veritate* dans tous les contextes dénotatifs et référentiellement transparents. Mais l'analyse de Quine s'explique et ne souffre d'aucune incohérence.

Poursuivons en nous demandant si

$$\text{Tout ce qui vert est étendu} \tag{12}$$

est analytique ou ne l'est pas. Quine se déclare indécis à ce sujet, et explique que son indécision ne provient pas d'une appréhension incomplète de la signification des termes « vert » et « étendu » mais de la difficulté qui réside dans la définition même de l'analyticité. La démarche qui consisterait à expliquer l'analyticité de (12) par la construction d'une sémantique scientifique pour un langage artificiel L, de façon à rendre (12) *L-analytique*, ne réussit pas à cacher le fait qu'il est nécessaire d'avoir une compréhension préalable de ce qu'il faut entendre par « analytique » avant de pouvoir définir l'analyticité par l'application de règles sémantiques dans un langage artificiel quelconque. Ce que veut dire Quine est sans doute qu'il est impossible de connaître la vérité de (12) sans qu'il soit nécessaire d'avoir au moins une fois l'expérience sensorielle du vert. De la même façon, on peut admettre que (11) est vrai en vertu d'une relation de synonymie, mais on ne comprendra pas la signification de cette synonymie, sans comprendre ce que signifie le mariage, autrement dit sans une expérience de nature sociologique qui, évidemment, n'est pas *a priori* et donc n'est pas analytique dès lors que l'on accepte l'idée selon laquelle tout énoncé analytique est *a priori*.

Toutes les remarques de Quine doivent être comprises à partir de son point de vue holiste. Quine écrit à la fois contre le dogme réductionniste selon lequel chaque énoncé peut être confirmé ou infirmé, et contre le dogme d'un clivage tranché entre analytique et synthétique [16, trad. fr. pp. 75-76] :

> Les deux dogmes sont, à la racine, identiques. Nous avons remarqué plus haut qu'en général la vérité des énoncés dépend, de façon évidente, à la fois du langage et des faits extra-linguistiques ; nous avons vu que cette observation évidente peut conduire, sinon logiquement, en tout cas hélas naturellement, au sentiment qu'on peut analyser la vérité d'un énoncé en deux composantes, l'une linguistique, l'autre factuelle. Si l'on est empiriste, la composante se réduit à une série de confirmations par l'expérience. Dans le cas extrême, où la composante linguistique est la seule qui compte, un énoncé vrai est un énoncé analytique. Mais j'espère qu'on arrive maintenant à apprécier combien la distinction entre l'analytique et le synthétique a obstinément résisté à toute tentative de la tracer clairement.

La conclusion de cette analyse est que, pour Quine, le schéma de Tennant [24]

$$\left.\begin{array}{l}\text{Monde}\\ \text{Signification de } \phi\end{array}\right\} \rightarrow \text{valeur de vérité de } \phi$$

participe du non-sens. On va cependant montrer qu'il existe un noyau de la signification qui résiste aux attaques holistiques de Quine.

3.3. **Le noyau dur de la signification constructive des constantes logiques.** Une lecture attentive de [16] permet de comprendre que Quine n'affirme pas qu'il n'y a pas de frontière entre vérités analytiques et vérités synthétiques mais, plus précisément, qu'au-delà de la distinction entre les vérités décidables à l'aide de la logique du premier ordre qui sont indiscutablement analytiques, et les autres vérités qui nécessitent pour leur décision des théories plus riches ou bien le recours à l'expérience, la frontière entre analytique et synthétique n'est pas et ne peut pas être une frontière clairement définissable.

Admettons l'argument de Quine dès lors que celui-ci concède l'analyticité des vérités de la logique ; car il n'en faut pas plus, du point de vue intuitionniste, pour contester l'analyticité du tiers exclu. En effet, comme nous l'avons vu à partir de la section 2.3.1, les règles d'introduction des constantes logiques donnent la signification des constantes logiques et parce que ces règles sont aussi les règles de la logique classique, il est impossible, même du point de vue de Quine, de ne pas reconnaître qu'une démonstration intuitionniste qui prouve que C est la conséquence logique des prémisses $H_0, H_1, \ldots, H_n$ établit une vérité analytique. En revanche, à l'instar de Tennant, l'intuitionniste invite le réaliste à assumer le fait qu'en adoptant la logique classique comme logique de base, on accorde au tiers exclu le statut de vérité synthétique *a priori* et non de vérité analytique. Le réaliste évidemment rejettera l'argument de Russell-Tennant et l'interprétera comme l'indice supplémentaire de la relativité de l'analyticité : il semble évident que si l'on adopte une logique plus faible et si l'on définit les vérités analytiques comme coextensives aux vérités logiques, alors on déplace la frontière entre analytique et synthétique. D'un point de vue logique, une preuve en logique propositionnelle classique, n'est pas moins analytique qu'une preuve intuitionniste. On terminera cette section en montrant pourquoi ce déni réaliste de l'argument intuitionniste n'a rien de convaincant.

Il est compréhensible que l'on puisse être tenté de rejeter l'argument de Russell-Tennant en se plaçant du point de vue de Quine. Mais il n'y a pas d'autre moyen de rejeter cet argument qu'en faisant précisément ce que Russell reproche à Carnap et au positivisme logique en général, c'est-à-dire de considérer que le terme « réalité » est un terme métaphysique qui ne connaît pas d'usage légitime et que le Principe de Tolérance doit contraindre tout esprit scientifique à reconnaître qu'il n'y a aucun sens à considérer qu'il y a *une* logique correcte. C'est en assumant cette position propre à Carnap qu'un Quine peut s'autoriser à ne voir dans le tiers exclu qu'un schéma ontologiquement innocent, qu'il est utile et commode de respecter sans inquiétude.

Or, précisément, il n'y a dans l'ajout du tiers exclu ou de la règle d'absurdité classique aux autres règles de la déduction naturelle, aucune *justification* qui soit fondée sur la seule signification des connecteurs. On peut remarquer par ailleurs, que la proposition 2.11 des *Principia* [23, p. 101] n'apporte aucune démonstration satisfaisante du tiers exclu, puisque celle-ci est uniquement fondée sur la substitution de la variable p à la variable q dans le schéma $(\neg p \vee q)$ ainsi que sur la référence à la thèse, affirmée en 1.11, selon laquelle la variable p doit ici être considérée comme une *variable réelle*, c'est-à-dire, tout simplement, comme une variable du calcul des propostions.

Voilà pourquoi Tennant considère qu'il est justifié de considérer que le tiers exclu est posé par la logique classique comme une vérité *a priori* et non comme une règle logique comparable à l'introduction de la disjonction ou l'introduction de la négation. Cette « vérité *a priori* » exprime la croyance métaphysique en l'idée selon laquelle le monde est déterminé dans *toutes* ses dimensions exprimables, ce qui revient bien à affirmer, pour parler comme Kant, un jugement synthétique *a priori*. Lorsque Brouwer, pour illustrer l'invalidité du tiers exclu, pose la question de savoir s'il existe ou non, dans le développement décimal de π, un chiffre qui apparaît plus souvent que tous les autres, le réaliste conséquent ne pose pas d'exception à l'applicabilité du tiers exclu, en dépit du fait qu'il est douteux que l'on puisse répondre un jour à une telle question. En conséquence, du point de vue réaliste, on a raison ou tort selon la réponse que l'on donne au problème de Brouwer, même si la réponse transcende irrémédiablement nos capacités cognitives. Ceci montre, à défaut de le prouver, que le réaliste assume le tiers exclu comme un principe synthétique *a priori* et qu'en cela il ne peut s'accorder avec l'empirisme.

4. Conclusion : compatibilité de l'intuitionnisme et de l'empirisme

L'argument de Russell-Tennant laisse à l'intuitionniste la possibilité d'assumer l'empirisme. L'intuitionniste n'est pas engagé dans un système philosophique *instable* qui, comme celui de Quine admet l'ontologie des vérités mathématiques transcendantes, l'infinité des ensembles non spécifiables de la théorie de ZFC, mais admet aussi la vérité de l'épistémologie empiriste en décrivant de la sorte l'origine de la connaissance [19] :

> Partant des impacts sur nos surfaces sensorielles, nous avons fait jaillir par notre création collective et cumulative, au fil des génération, notre théorie systématique du monde extérieur.

Dès lors, compte tenu de la défense qui a été faite de la logique intuitionniste, c'est au réaliste partisan, comme Russell et Quine, du conservatisme logique, qu'incombe la preuve de montrer que notre théorie systématique du monde extérieur a besoin de la validité universelle du tiers exclu et donc d'outrepasser la restriction intuitionniste du tiers exclu au domaine du décidable.

Il n'est pas certain que Russell ait eu à l'esprit le fait que le tiers exclu redevenait une vérité pour l'intuitionniste dès lors que l'on est dans le domaine du décidable. Car il assez facile de voir que les exemples polémiques que Russell donne pour jeter le doute sur la position intuitionniste ne sont pas pertinents. Lorsqu'il s'agit de traiter de « propositions extra-logiques au sujet desquelles il n'y de preuve ni pour ni contre », Russell prend comme exemple de proposition de ce type :

Il a neigé sur l'île de Manhattan le 1er janvier de l'an I de notre ère. (13)

Bien que la géologie nous apprenne que l'île de Manhattan existait le 1er janvier de l'an I de notre ère, et bien qu'en raison des observations climatiques cet énoncé soit plausible, trop de données seraient requises pour que (13) soit humainement prouvable ou réfutable. Russell voit dans cet exemple un argument de bon sens contre l'intuitionnisme : nous répugnons à admettre que (13) n'est ni vrai ni faux parce que nous croyons obstinément et à juste titre, à une monde « réel » indépendant de nous. Or le fait de soutenir avec l'intuitionniste une conception épistémologique de la vérité conduit, selon Russell, à rejeter ce réalisme de bon sens.

Mais c'est faire là un mauvais procès fait à l'intuitionnisme, sur la base d'un mauvais exemple. Le fait que les calculs météorologiques soient *pratiquement* impossibles pour déterminer la vérité ou la fausseté de (13) ne conduit pas l'anti-réaliste *modéré* qu'est l'intuitionniste à considérer que cet énoncé n'est ni vrai ni faux et qu'il est donc un bon candidat pour illustrer la non validité universelle du tiers exclu. Si importante soit la période temporelle choisie dans l'exemple de Russell, celle-ci est *finie* et l'on a une idée des procédures dont on devrait faire usage pour décider si (13) est vrai ou faux. Le fait que l'énoncé choisi par Russell ne soit pas pratiquement décidable ne conduit nullement à penser qu'il est *absolument* indécidable. Puisque (13) est connaissable en principe à l'aide d'une méthode que l'on connaît, l'intuitionniste n'a aucune raison de considérer qu'il infirme le tiers exclu.

Russell pousse cependant le raisonnement pour montrer qu'il est impossible de trouver un énoncé qui fasse référence à une expérience imaginable, mais qui ne puisse cependant faire l'objet ni d'une preuve, ni d'une réfutation, conformément à la théorie qu'il attribue (encore à tort) à l'intuitionnisme. Il écrit alors

> Il y aura encore des propositions au sujet desquelles il n'y a aucune sorte de preuve. Par exemple « Il y a un cosmos qui ne possède aucun rapport spatio-temporel avec celui dans lequel nous vivons ». Un auteur de romans scientifiques pourrait imaginer un tel cosmos, mais de la nature même de l'hypothèse, il résulte qu'il ne peut y avoir aucun argument inductif ni pour ni contre elle. Quand nous avons le sentiment qu'il doit ou ne doit pas y avoir un tel cosmos, je pense que nous imaginons une Divinité contemplant tous les mondes qu'Elle a créés, et de la sorte nous restaurons subrepticement le chaînon avec notre propre monde, monde qu'en paroles nous avons refusé. Si nous excluons fermement à la fois cette conception et celle d'un accroissement miraculeux de nos propres facultés perceptives, peut-être pourrait-on supposer que notre hypothèse est sans signification. Dans ce cas, elle n'est ni vrai ni fausse, mais elle n'est pas une proposition, et c'est pourquoi, elle est impuissante à montrer qu'il y a des propositions qui n'obéissent pas à la loi du tiers exclu.

Il est étonnant que Russell n'ait pas vu que sa façon de régler le problème qu'il se donne à lui-même avec cet exemple, n'embarrasse pas l'intuitionnisme mais menace sa propre théorie d'incohérence. Car manifestement l'exemple de phrase qu'il donne a une signification puisque nous la comprenons. Si tel n'était pas le cas Russell n'aurait pas pu suggérer qu'un tel énoncé pourrait être le point de départ d'un roman de science fiction. Néanmoins, pour éloigner la menace d'invalidité du tiers exclu, puisque cet énoncé n'est pas vérifiable, Russell lui refuse toute signification et lui refuse donc le statut de proposition. Si l'analyse de Russell était acceptable, il faudrait admettre qu'il y a des énoncés qui expriment des situations imaginables mais qui sont néanmoins sans signification.

Encore une fois l'effort de Russell pour faire échec à l'intuitionnisme est ici vain. Il eût été plus simple de dire que l'énoncé pris pour exemple est faux, si l'on assume pour vraie l'hypothèse suivante « tout ce qui peut être affirmé au sujet de quoi que ce soit d'existant dans un univers physique quelconque, doit avoir un rapport spatio-temporel avec notre cosmos pour être vrai », pour que l'énoncé pris comme exemple par Russell soit déclaré faux, car il implique le faux, conformément à l'hypothèse.

Il est enfin totalement inexact que l'intuitionnisme conduise à la forme de l'idéalisme que Russell combat, c'est-à-dire à cette philosophie qui consiste à renoncer à la saine croyance en l'indépendance du monde réel par rapport à nos moyens de connaître. Ce à quoi en revanche l'intuitionnisme conduit à renoncer comme on l'a vu, c'est à la thèse logico-philosophique qui affirme que tous les énoncés doués de sens seraient vrais ou faux de manière déterminée en raison des occurrences factuelles du monde qui répondraient, sans que l'on sache pourquoi, aux contenus de nos énoncés référentiels. A cause de son conservatisme logique, Russell a manqué l'occasion de construire une théorie de la connaissance fondée sur la logique intuitionniste qu'il méconnaissait. Il a exercé comme on le sait une influence non négligeable sur Quine, dont le génie a, hélas, oeuvré pour renforcer dans le milieu philosophique, le préjugé antique que dénonçait Brouwer [4, 9], notre croyance en la validité universelle du tiers exclu. A l'aube du 21ème siècle, ce préjugé persiste encore.

RÉFÉRENCES

[1] BELL, J.L. & DEVIDI, D. & SOLOMON, G. – *Logical Options : An Introduction to Classical and Alternative Logics*, Broadview Press, Peterborough, Ontario, Canada, 2001.

[2] BERNAYS, P. & HILBERT, P. – *Grundlagen der mathematik*, Springer, Berlin, 1939.

[3] R. BORNAT – *Proof and Disproof in Formal Logic - An Introduction for Programmers*, Oxford University Press, New York, 2005.

[4] L. BROUWER – « Conscience, Philosophie, et Mathématique », in Largeault [9], trad. fr. de l'article « Consciousness, Philosophy, and Mathematics », *Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy*, Amsterdam, 1948, 1, Fasc. 2, North-Holland, 1949, pp.1235-49., p. 419–440.

[5] M. D'AGOSTINO – « Tableau Methods for Classical Propositional Logic », (d'Agostino, M. & Gabbay D.M. & Hälne, R. & Possega, J., éd.), Kluwer Academic Publishers, 1999, p. 45–123.

[6] P. ENGEL – « Russell's Inquiry into Meaning and Truth », in *Contemporary philosophy* (J. Shand, éd.), vol. 4, Acumen, 2005.

[7] G. GENTZEN – « Untersuchungen über das logiesche Schliessen », *Matematishe Zeitschrift* **39** (1935), p. 176–210, 405–431, en. tr. in Szabo M.E., *The collected papers of Gerhard Gentzen*, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, North Holland, Amsterdam, pp. 68-131.

[8] HEYTING – *Mathematische Grundlagenforschung : Intuitionismus, Beweistheorie*, Springer, Berlin, 1934, (Trad. fr. *Les Fondements des Mathématiques - Intuitionnisme - Théorie de la Démonstration*, Paris Gauthier-Villars, Louvain E. Nauwelaerts, 1955).

[9] J. LARGEAULT (éd.) – *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Mathesis, Paris, Vrin, 1992.

[10] M. MARION – « L'épistémologie de Russell : de la logique mathématique aux vertus épistémiques », in *Philosophies de la connaissance. Contributions à une histoire de la théorie de la connaissance* (Québec, Paris) (R. Nadeau, éd.), Presses de l'Université de Laval - Vrin, 2009, p. 282–314.

[11] NEGRI, S. & VON PLATO, J. – *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[12] J. VON PLATO – « Proof Theory of Full Classical Propositional Logic », ms., 1998.

[13] D. PRAWITZ – *Natural Deduction - A Proof Theoretical Study*, Almqvist & Wilksell, Uppsala, 1965, 2nd ed. 2006 by Dover Publications, Inc. Mineola, New-York.

[14] ______, « Ideas and Results in Proof Theory », in *Proceedings of the II Scandinavian Logic Symposium* (Amsterdam), North Holland, 1971, p. 235–308.

[15] W. QUINE – *Methods of Logic*, fourth edition, 1982 éd., Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1950, *Méthodes de Logique*, trad. fr. Clavelin, Armand Colin, Paris, 1972.

[16] ______, « Two Dogmas of Empiricism », *The Philosophical Review* **60** (1951), p. 20–43, reimprim dans *From a Logical Point of View*, 1953, H.U.P., trad.fr. Vrin 2003.

[17] ______, « Russell's Ontological Development », *The Journal of Philosophy* **63** (1966), no. 21, p. 657–667.

[18] ______, *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1970, trad. fr. Largeault, Aubier-Montaigne, Paris, 1975.

[19] ______, *Pursuit of Truth*, Harvard University Press, New-York, 1990, *La poursuite de la vérité*, trad. fr. Clavelin, Seuil, Paris, 1993.

[20] R. DAVID & K. NOUR & C. RAFFALLI – *Introduction à la logique (théorie de la démonstration, cours et exercices corrigés)*, Dunod, Paris, 2001, 2003.

[21] B. RUSSELL – *An Inquiry into Meaning and Truth*, Allen & Unwin, 1940, tr. fr. Devaux, *Signification et vérité*, Flammarion, Paris, 1969.

[22] ———, *Human Knowledge, Its Scope and Limits*, Allen and Unwin, 1948, *La connaissance humaine. Sa portée et ses limites*, tr. fr. Lavand, Vrin, Paris.

[23] RUSSELL, B. & WHITEHEAD, A. N. – *Principia mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

[24] N. TENNANT – « The Law of Excluded Middle is Synthetic A Priori, if Valid », *Philosophical Topics* **24** (1996), p. 205–229.

[25] ———, *The Taming of the True*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1997.

[26] ———, « Inferentialism, Logicism, Harmony, and a Counterpoint », in *Essays for Crispin Wright : Logic, Language and Mathematics* (M. . Coliva, A., éd.), 2011, forthcoming.

[27] VAN ATTEN, M. & BOLDINI, P. & BOURDEAU, M. & HEINZMANN, G. (éd.) – *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007) - The Cerisy Conference*, Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser Verlag AG, 2008.

UNIVERSITÉ DE NANCY 2 - DÉPARTEMENT DE PHILOSOPHIE -ARCHIVES POINCARÉ, UMR-7117 - CNRS -, 91, BD LIBÉRATION, F-54000 NANCY.

E-mail address: `joseph.vidal-rosset@univ-nancy2.fr`