



HAL
open science

Sur la \overline{F}_l -cohomologie des variétés de Shimura unitaires simples.

Pascal Boyer

► **To cite this version:**

Pascal Boyer. Sur la \overline{F}_l -cohomologie des variétés de Shimura unitaires simples.. 2015. hal-01238906v2

HAL Id: hal-01238906

<https://hal.science/hal-01238906v2>

Preprint submitted on 6 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LA $\overline{\mathbb{F}}_l$ -COHOMOLOGIE D'UNE VARIÉTÉ DE SHIMURA UNITAIRE SIMPLE

par

Boyer Pascal

Résumé. — On étudie les classes de cohomologie de torsion des variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor et on montre qu'elles se relèvent « à une place arbitraire près » en une représentation automorphe. En application à tout système de valeurs propres de Hecke modulo l apparaissant dans la $\overline{\mathbb{F}}_l$ -cohomologie d'une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor, on associe une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation galoisienne dont les valeurs propres des Frobenius sont données par celles de Hecke. Par rapport à la construction bien plus générale de Scholze dans [10], on gagne à la fois la simplicité des arguments et le contrôle aux places ramifiées et à celles divisant l .

Abstract (On the $\overline{\mathbb{F}}_l$ -cohomology of a simple unitary Shimura variety)

We study the torsion cohomology classes of Shimura varieties of type Kottwitz-Harris-Taylor and we show that « up to an arbitrary place » one can raise them to an automorphic representation. In application, to any mod l system of Hecke eigenvalues appearing in the $\overline{\mathbb{F}}_l$ -cohomology of a Shimura's variety of Kottwitz-Harris-Taylor type, we associate a $\overline{\mathbb{F}}_l$ -Galois representation which Frobenius eigenvalues are given by Hecke's. Compared to the highly more general construction of Scholze in [10], we gain both the simplicity of the proof and the control at places ramified and at those dividing l .

Table des matières

Introduction.....	2
1. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples.....	3
2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor et leur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie.....	6
3. Cohomologie d'un $\overline{\mathbb{F}}_l$ -système local.....	9
Références.....	13

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

Introduction

Soit $F = F^+E$ un corps CM d'anneau des entiers \mathcal{O}_F et où F^+ est une extension finie de \mathbb{Q} totalement réelle et E/\mathbb{Q} est quadratique imaginaire. Pour $K \subset GL_n(\mathbb{A}_F^\infty)$ un sous-groupe ouvert compact de GL_n sur les adèles finies de F , on note

$$X_K := GL_n(F) \backslash \left[D \times GL_n(\mathbb{A}_F^\infty) \right] / K$$

où $D := GL_n(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) / \mathbb{R}_{>0} K_\infty$ est l'espace symétrique pour $GL_n(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ avec K_∞ un sous-groupe compact maximal. Pour S un ensemble fini de places de F stable par la conjugaison complexe contenant les places au dessus de p et les places ramifiées sur F^+ , dans [10] Peter Scholze associe

- à tout système de $\overline{\mathbb{F}}_l$ -valeurs propres de Hecke hors de S , apparaissant dans la cohomologie de X_K où $K = K_S K^S$ avec $K^S = \prod_{v \notin S} GL_n(\mathcal{O}_{F_v})$,
 - une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation semi-simple de dimension d , du groupe de Galois de F ,
- de sorte qu'en toute place $v \notin S$, les valeurs propres du Frobenius Fr_v sont données par les valeurs propres de Hecke.

Les restrictions sur S portant sur les places ramifiées sur F^+ ne sont pas sérieuses contrairement à ce qui se passe au dessus de p . Le but premier de ce travail est de s'attaquer à la question portant sur la compatibilité aux places au dessus de p dans une situation considérablement plus simple où l'espace localement symétrique X_K est désormais une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor, i.e. associée à un groupe de similitudes G/\mathbb{Q} donné par une algèbre à division B centrale et de dimension d^2 sur une extension CM F/\mathbb{Q} dont les signatures à l'infini sont $(1, d-1) \times (0, d) \times \cdots \times (0, d)$. Pour tout sous-groupe compact ouvert I assez petit de $G(\mathbb{A}^\infty)$, on note X_I/F la variété de Shimura de niveau I associée. On choisit une place v de F telle que $p := v|_{\mathbb{Q}}$ est décomposée $p = yy^c$ dans E et telle que dans l'écriture

$$G(\mathbb{Q}_p) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

avec $p = \prod_i z_i$ dans F^+ où on identifie les places de F^+ au dessus de p avec les places de F au dessus de y , le facteur associé à v est $GL_d(F_v)$.

Théorème. — Soit $\overline{\pi}$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $G(\mathbb{A})$. On suppose qu'il existe

- un entier i ,
- un sous-groupe ouvert compact I de $G(\mathbb{A}^\infty)$,
- un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -système local \mathcal{L}_ξ associé à une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible algébrique entière ξ de G/\mathbb{Q} supposée l -petite

tels que $\overline{\pi}^\infty$ est un sous-quotient irréductible de $H^i(X_{I, \overline{\eta}}, \mathcal{L}_\xi \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l)$. Alors pour toute place v de F comme ci-avant, il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation automorphe entière Π de $G(\mathbb{A})$ cohomologique relativement au système local \mathcal{L}_ξ telle que :

- Π a des vecteurs invariants sous $J \subset I$ où J et I sont égaux hors de v , i.e. égaux hors de p et en p , via l'isomorphisme précédent, seule la composante indexée par v est éventuellement différente,
- la réduction modulo l de Π_v a le même support supercuspidal que $\overline{\pi}_v$;

— $\overline{\pi}^{v,\infty}$ est un sous-quotient de la réduction modulo l de $\Pi^{v,\infty}$.

Remarques :

- comme ξ est supposé l -petite, sa réduction modulo l est irréductible de sorte qu'à isomorphisme près, il n'y a qu'un unique réseau stable ;
- toute représentation irréductible ξ de $G(\mathbb{F}_l)$ s'obtient d'après [8], comme la réduction modulo l d'une représentation irréductible algébrique entière ξ qui est l -petite ;
- la représentation $\overline{\pi}$ ne se relève pas nécessairement en une représentation automorphe sur \mathbb{Q}_l , c'est cependant valable si on autorise à modifier une et une seule composante locale en gardant le support supercuspidal⁽¹⁾.

Grâce aux travaux de Harris et Taylor [7], on peut associer à un Π comme dans le théorème précédent, une représentation $\sigma(\Pi)$ de $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ telle que :

- en toute place finie w de F ne divisant pas l , la restriction de $\sigma(\Pi)$ au groupe de Weil en w est la représentation galoisienne attachée à Π_w par la correspondance de Langlands locale ;
- pour w une place divisant l alors $\sigma(\Pi)$ est potentiellement semi-stable en w et pour tout plongement $\tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$, les paramètres de Hodge-Tate de $\sigma(\Pi)$ sont donnés par ceux de la représentation algébrique ξ selon la formule du théorème VII.1.9 de [7].

En particulier en toute place w de F telle que Π_w est non ramifiée, la réduction modulo l des paramètres de Satake de Π_w , qui d'après le théorème précédent est égale aux paramètres de Satake de $\overline{\pi}_w$, correspond aux $\overline{\mathbb{F}}_l$ -valeurs propres de Fr_w agissant sur un sous-quotient irréductible $\sigma(\overline{\pi})$ quelconque de la réduction modulo l de $\sigma(\Pi)$, autrement dit la situation est similaire à celle de [10]. En outre en une place au dessus de l , les paramètres de Hodge-Tate de $\sigma(\Pi)$ sont donnés par ceux de la représentation algébrique ξ de G/\mathbb{Q} .

Remarque : à chaque choix d'une représentation l -petite ξ' dont la réduction modulo l est isomorphe à celle de ξ , et d'une place v' de F vérifiant les conditions précédentes, on associe à $\overline{\pi}$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation galoisienne. Cette collection de représentations partagent la propriété que les valeurs propres des Frobenius aux places non ramifiées sont fixées, données par les paramètres de Satake de $\overline{\pi}$.

1. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples

Soit $F = F^+E$ un corps CM avec E/\mathbb{Q} quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Pour v une place de F , on notera

- F_v le complété du localisé de F en v ,
- \mathcal{O}_v l'anneau des entiers de F_v ,
- ϖ_v une uniformisante et
- q_v le cardinal du corps résiduel $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F , B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*|_F$ est la conjugaison complexe c . Pour $\beta \in B^{*=-1}$,

1. Cette condition est clairement nécessaire.

on note \sharp_β l'involution $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$ et G/\mathbb{Q} le groupe de similitudes, noté G_τ dans [7], défini pour toute \mathbb{Q} -algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$. Si x est une place de \mathbb{Q} décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times, \quad (1)$$

où, en identifiant les places de F^+ au dessus de x avec les places de F au dessus de y , $x = \prod_i z_i$ dans F^+ .

Dans [7], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si x est une place de \mathbb{Q} qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;
- les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

1.2. Notation. — On fixe un nombre premier l non ramifié dans E et on note Spl l'ensemble des places v de F telles que $p_v := v|_{\mathbb{Q}} \neq l$ est décomposé dans F et $B_v^\times \simeq GL_d(F_v)$.

Rappelons, cf. [7] bas de la page 90, qu'un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ est dit « assez petit » s'il existe une place x pour laquelle la projection de U^v sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité.

1.3. Notation. — Soit \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Pour $I \in \mathcal{I}$, on note $X_{I,\eta} \rightarrow \text{Spec } F$ la variété de Shimura associée, dit de Kottwitz-Harris-Taylor.

Remarque : pour tout $v \in \text{Spl}$, la variété $X_{I,\eta}$ admet un modèle projectif $X_{I,v}$ sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$ de fibre spéciale X_{I,s_v} . Pour I décrivant \mathcal{I} , le système projectif $(X_{I,v})_{I \in \mathcal{I}}$ est naturellement muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$, où $\deg = \text{val} \circ \text{Art}^{-1}$ où $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

1.4. Notations. — (cf. [1] §1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, la fibre spéciale géométrique X_{I,\bar{s}_v} admet une stratification de Newton

$$X_{I,\bar{s}_v} =: X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1} \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 2} \supset \cdots \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq d}$$

où $X_{I,\bar{s}_v}^{=h} := X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h} - X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}$ est un schéma affine, lisse de pure dimension $d-h$ formé des points géométriques dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate est de rang h . Pour tout $1 \leq h < d$, nous utiliserons les notations suivantes :

$$i_{h+1} : X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, \quad j^{\geq h} : X_{I,\bar{s}_v}^{=h} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h},$$

ainsi que $j^{=h} = i_h \circ j^{\geq h}$.

Pour tout $1 \leq h < d$, les strates $X_{I,\bar{s}_v}^{=h}$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique standard $P_{h,d}(F_v)$ de Levi $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)$, au sens où il existe un

sous-schéma $X_{I^v v^n, \overline{s}_v, 1}^{\overline{h}}$ muni d'une action par correspondances de $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times GL_{d-h}(F_v) \times \mathbb{Z}$ tel que :

$$X_{I^v v^n, \overline{s}_v}^{\overline{h}} \simeq X_{I^v v^n, \overline{s}_v, 1}^{\overline{h}} \times_{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n))} GL_d(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n)).$$

1.5. Notation. — On note $X_{I^v v^n, \overline{s}_v, 1}^{\geq \overline{h}}$ l'adhérence de $X_{I^v v^n, \overline{s}_v, 1}^{\overline{h}}$ dans $X_{I^v v^n, \overline{s}_v}^{\geq \overline{h}}$ et

$$j_1^{\geq \overline{h}} : X_{I^v v^n, \overline{s}_v, 1}^{\overline{h}} \hookrightarrow X_{I^v v^n, \overline{s}_v, 1}^{\geq \overline{h}}.$$

Rappelons que les représentations irréductibles algébriques de GL_d sont en bijection avec l'ensemble $\mathbb{X}(\mathbb{G}_m^d)^+$ des poids dominants $\vec{a} := (a_1 \leq \dots \leq a_d) \in \mathbb{Z}^d$: la représentation correspondante est celle dont l'action de $\text{diag}(t_1, \dots, t_d)$ sur le vecteur de plus haut poids est donnée par la multiplication par $t_1^{a_1} \dots t_d^{a_d}$. En notant St la représentation standard St de GL_d , la représentation associée à \vec{a} est donnée par $c_{\vec{a}} \text{St}^{\otimes |\vec{a}|}$ où $|\vec{a}| = \sum_{i=1}^d a_i$ et $c_{\vec{a}}$ est la fonction symétrique de Young. Pour $a_0 \leq a_1$, la représentation

$$(\Lambda^d \text{St})^{\otimes a_0} \otimes c_{(a_1 - a_0 \leq \dots \leq a_d - a_0)} \text{St}^{\otimes |\vec{a}| - da_0}$$

définit un \mathbb{Z} -réseau stable de la représentation associée à \vec{a} . En ce qui concerne les représentations irréductibles algébriques de G , d'après [7] p97, elles sont classifiées par les $(d+1)$ -uplets $\mu := (a_0, \vec{a}_{\sigma})$ où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $\vec{a}_{\sigma} \in \mathbb{X}(\mathbb{G}_m^d)^+$ pour σ décrivant les plongements $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ prolongeant un $E \hookrightarrow \mathbb{C}$ fixé. La recette précédente pour GL_d , permet de définir des \mathbb{Z} -réseaux stables.

Remarque : d'après [8], les $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de $G(\mathbb{F}_l)$ sont encore classifiées par les poids dominants comme ci-dessus, à la différence près que μ et $\mu + (l, \dots, l)$ donnent la même représentation irréductible.

1.6. Définition. — Avec les notations précédentes, on dit que $\mu = (a_0, \vec{a}_{\sigma})$ est l -petit si pour tout prolongement σ de σ_0 , le poids $\vec{a}_{\sigma} = (a_{\sigma,1} \leq \dots \leq a_{\sigma,d})$ est tel que pour tout $i = 1, \dots, d-1$, on a

$$a_{\sigma, i+1} - a_{\sigma, i} \leq l.$$

Fait : toute $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible algébrique de $G(\mathbb{F}_l)$, associé donc à un poids dominant $\overline{\mu}$ défini modulo (l, \dots, l) , est la réduction modulo l d'un poids dominant μ qui est l -petit. En outre comme la réduction modulo l d'une représentation algébrique irréductible de G associée à un paramètre l -petit, est irréductible, tous ses réseaux stables sont isomorphes.

Soit alors ξ une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation algébrique irréductible ξ de G . D'après le théorème de Baire, celle-ci est définie sur une extension finie K de \mathbb{Q}_l . On note $W_{\xi, K}$ l'espace de cette représentation et $W_{\xi, \mathcal{O}}$ un réseau stable où \mathcal{O} désigne l'anneau des entiers de K . Notons λ une uniformisante de \mathcal{O} et soit pour $n \geq 1$, un sous-groupe distingué $I_n \in \mathcal{I}$ de $I \in \mathcal{I}$, compact ouvert agissant trivialement sur $W_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n} := W_{\xi, \mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\lambda^n$. On note alors $\mathcal{L}_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n}$ le faisceau sur X_I dont les sections sur un ouvert étale $T \rightarrow X_I$ sont les fonctions

$$f : \pi_0(X_{I_n} \times_{X_I} T) \rightarrow W_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n}$$

telles que pour tout $k \in I$ et $C \in \pi_0(X_{I_n} \times_{X_I} T)$, on a la relation $f(Ck) = k^{-1}f(C)$.

1.7. Notation. — On pose alors

$$\mathcal{L}_{\xi, \mathcal{O}} = \varprojlim_n \mathcal{L}_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n} \text{ et } \mathcal{L}_{\xi, K} = \mathcal{L}_{\xi, \mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} K.$$

On utilisera aussi la notation $\mathcal{L}_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ et $\mathcal{L}_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}$ pour les versions sur $\bar{\mathbb{Z}}_l$ et $\bar{\mathbb{Q}}_l$ respectivement.

1.8. Définition. — Une \mathbb{C} -représentation irréductible Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ est dite ξ -cohomologique s'il existe un entier i tel que

$$H^i((\text{Lie}G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes \xi^\vee) \neq (0)$$

où U_τ est un sous-groupe compact modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, maximal, cf. [7] p.92. On notera $d_\xi^i(\Pi_\infty)$ la dimension de ce groupe de cohomologie. Une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible Π^∞ de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sera dit automorphe ξ -cohomologique s'il existe une \mathbb{C} -représentation ξ -cohomologique Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ telle que $\iota_l(\Pi^\infty) \otimes \Pi_\infty$ est une \mathbb{C} -représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$.

2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor et leur $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie

Fixons une place $v \in \text{Spl}$.

2.1. Définition. — Dans [7], les auteurs, via les variétés d'Igusa de première et seconde espèce, associent à toute représentation ρ_v de l'ordre maximal $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ de $D_{v,h}^\times$, un système local $\mathcal{L}(\rho_v)$ sur $X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}}^{=h}$.

Rappelons, cf. [1], que $\mathcal{L}(\rho_v)$ est « géométriquement induit » au sens suivant. Soit \mathcal{L}_1 la restriction de \mathcal{L} à la strate $X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}, 1}^{=h}$, alors \mathcal{L}_1 est muni, cf. [1] §1.4.2, d'une action de $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times P_{h,d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ tel que le sous-groupe unipotent de $P_{h,d}(F_v)$ agit trivialement alors que l'action du facteur $GL_h(F_v)$ de son Levi agit via $\text{val} \circ \det : GL_h(F_v) \rightarrow \mathbb{Z}$. Le système local $\mathcal{L}(\rho_v)$ est alors muni d'une action équivariante de $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$ qui se décrit comme suit :

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où géométriquement $GL_d(F_v)$ permute les sous-schémas $X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}, a}^{=h}$ indexés par $a \in GL_d(F_v)/P_{h,d}(F_v)$.

2.2. Définition. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $t \geq 1$, on note $\pi_v[t]_D$ la représentation de $D_{v, tg}^\times$ associée à $\text{St}_t(\pi_v)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands.

Remarque : toute représentation irréductible de $D_{v,h}^\times$ est de la forme $\pi_v[t]_D$ pour $h = tg$.

2.3. Notation. — Pour Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, on introduit alors

$$HT(\pi_v, \Pi_t)(n) := \mathcal{L}(\pi_v, t)[d - tg] \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d+n}{2}} \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$$

où \mathbb{L}^\vee est la correspondance Langlands sur F_v ,

$$\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \bar{\mathbb{Z}}_l^\times$$

est définie par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$ et

- $GL_{tg}(F_v)$ agit diagonalement sur Π_t et sur $\mathcal{L}(\pi_v, t) \otimes \Xi^{\frac{tg-d+n}{2}}$ via son quotient $GL_{tg}(F_v) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$,
- le groupe de Weil W_v en v agit diagonalement sur $\mathbb{L}(\pi_v)$ et le facteur $\Xi^{\frac{tg-d+n}{2}}$ via l'application $\deg : W_v \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie les frobenius géométriques sur 1.

Une $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -version entière sera notée $HT_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)(n)$ où Γ désigne un réseau stable, par forcément sous la forme d'un produit tensoriel.

2.4. Notations. — Soient π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$. On note alors

- $\pi_1\{n\} := \pi_1 \otimes |\det|^n$;
- $\pi_1 \times \pi_2$ l'induite $\text{ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}$.

2.5. Définition. — Une représentation irréductible Π de $GL_d(F_v)$ est dite *elliptique* s'il existe un diviseur g de $d = sg$ et une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ tels que Π est un sous-quotient de

$$\pi_v\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi_v\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi_v\left\{\frac{s-1}{2}\right\}.$$

Cette induite admet par ailleurs un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible que l'on note $\text{St}_s(\pi_v)$ (resp. $\text{Speh}_s(\pi_v)$) : c'est une série discrète.

Remarque : avec cette définition une représentation est elliptique si et seulement si, cf. [6] lemme 2.1.6, son caractère est non nul sur les éléments elliptiques semi-simples réguliers.

2.6. Définition. — On rappelle que π'_v est inertiuellement équivalente à π_v si et seulement s'il existe un caractère $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes (\zeta \circ \text{val} \circ \det)$.

Remarque : Les faisceaux pervers $HT(\pi_v, \Pi_t)(n)$ ne dépend en un certain sens que de la classe d'équivalence inertielle de π_v . Nous utiliserons exclusivement cette indépendance dans le cas où Π_t est une représentation elliptique relativement à π_v , i.e. un sous-quotient de $\pi_v\{\frac{1-t}{2}\} \times \cdots \times \pi_v\{\frac{t-1}{2}\}$. Ainsi par exemple pour $\Pi_t = \text{St}_t(\pi_v)$ et $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, les faisceaux pervers $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ et $HT(\pi_v \otimes \chi, \text{St}_t(\pi_v \otimes \chi))$, munis de leurs actions par correspondance, sont isomorphes. Dans cette situation on a en outre

$$HT(\pi_v, \Pi_t)(n) = e_{\pi_v} \mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n)$$

où $\mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ est un faisceau pervers irréductible. Dans la suite on utilisera la notation $\mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ dans ce contexte.

Fixons à présent une représentation irréductible algébrique ξ de G . Étant donné un système local d'Harris-Taylor $HT(\pi_v, \Pi_t)$, on note $[H_{l*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$ (resp. $[H_l^i(\pi_v, \Pi_t)]$) l'image

de

$$\lim_{I \in \mathcal{I}} H^i \left(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq tg}, j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l} \right)$$

$$\text{resp. } \lim_{I \in \mathcal{I}} H^i \left(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l} \right)$$

dans le groupe de Grothendieck $\text{Groth}(v, h)$ des représentations admissibles de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$.

2.7. Proposition. — Soit Π_t une représentation irréductible elliptique relativement à π_v et soit π^∞ un constituant irréductible de $[H_{!*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$ ou de $[H_!^i(\pi_v, \Pi_t)]$. Il existe alors une représentation automorphe irréductible Π de $G(\mathbb{A})$, cohomologique pour ξ telle que

- $\Pi^{\infty, v} \simeq \pi^{\infty, v}$ et
- Π_v a même support cuspidal que π_v^∞ .

Démonstration. — Commençons par le cas de $[H_{!*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$: le calcul explicite est donné §3 de [2] mais pour la commodité du lecteur nous allons donner une preuve plus rapide de l'énoncé ci-dessus. On part de l'égalité 2.6.3 de [2] prouvée dans [1] qui exprime $j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ comme une somme alternée d'extensions par zéro de systèmes locaux d'Harris-Taylor. Le calcul de la somme alternée des groupes de cohomologie à support compact d'un système local d'Harris-Taylor $HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}$ est donnée dans [7] V.5.4, V.6.4, VI.2.4, cf. aussi la formule 3.3.2 de [2] : ce calcul s'exprime en appliquant à la cohomologie globale de la variété de Shimura, le foncteur

$$\text{red}_{\pi_v[t]_D} : \text{Groth} \left(GL_d(F_v) \right) \longrightarrow \text{Groth} \left(D_{v, tg}^\times / \mathcal{D}_{v, tg}^\times \times GL_{d-tg}(F_v) \right)$$

défini comme la composée des deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Groth} \left(GL_d(F_v) \right) &\longrightarrow \text{Groth} \left(GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v) \right) \\ [\Pi] &\mapsto [J_{P_{tg, d}^{op}}(\Pi) \otimes \delta_{P_{tg, d}}^{1/2}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Groth} \left(GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v) \right) &\longrightarrow \text{Groth} \left(D_{v, tg}^\times / \mathcal{D}_{v, tg}^\times \times GL_{d-tg}(F_v) \right) \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \text{vol}(D_{v, tg}^\times / F_v^\times)^{-1} \sum_\psi \text{Tr } \alpha(\varphi_{\pi_v[t]_D \otimes \psi^\vee}) \psi \otimes \beta, \end{aligned}$$

où

- $P_{tg, d}^{op}$ est le parabolique opposé au parabolique standard $P_{tg, d}$ et
- $J_{P_{tg, d}^{op}}$ est le foncteur de Jacquet des vecteurs coinvariants sous le sous-groupe unipotent de $P_{tg, d}^{op}$ tordu par $\delta_{P_{tg, d}^{op}}^{-1/2}(-) := |\det(\text{ad}(-)|_{\text{Lie} N_{tg, d}^{op}})|^{1/2}$;
- ψ décrit les caractères de F_v^\times ;
- $\varphi_{\pi[t]_D \otimes \psi^\vee}$ est un pseudo-coefficient tel que, cf. [7] lemme I.3.4, si π'_v n'est pas un sous-quotient irréductible de $(\pi_v \otimes \psi) \left\{ -\frac{1-t}{2} \right\} \times \cdots \times (\pi_v \otimes \psi) \left\{ \frac{t-1}{2} \right\}$, alors $\text{Tr } \pi'(\varphi_{\pi_v[t]_D \otimes \psi^\vee}) = 0$ et sinon il est égal à un signe multiplié par $\text{vol}(D_{F_v, tg}^\times / F_v^\times)$.

On en déduit alors que si Π_t est elliptique pour π_v , i.e. a pour support cuspidal $\{\pi_v\{\frac{1-t}{2}\}, \dots, \pi_v\{\frac{t-1}{2}\}\}$, alors, avec les notations ci-dessus, pour tout constituant irréductible $\alpha \otimes \beta$ d'un $J_{P_{tg,d}^{op}}(\Pi) \otimes \delta_{P_{tg,d}}^{1/2}$ et pour tout ψ tel que $\text{Tr } \alpha(\varphi_{\pi_v[t]_D \otimes \psi^\vee})\psi \neq 0$, la représentation $\Pi_t \otimes \psi$ a même support cuspidal que α et donc l'induite $(\Pi_t \otimes \psi) \times \beta$ aura même support cuspidal que la représentation Π de départ. Ainsi en utilisant que la somme alternée des groupes de cohomologie de $X_{\mathcal{I}}$ s'exprime à l'aide des représentations automorphes ξ -cohomologiques de $G(\mathbb{A})$, on en déduit que la conclusion de la proposition est valable pour le calcul de la somme alternée de la cohomologie à support compact des $HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \overline{\mathbb{Q}}_l}$ et donc, d'après l'égalité 2.6.3 de [2], pour la somme alternée $\sum_i (-1)^i [H_{1,*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$. Par pureté on en déduit que le résultat est valable pour chacun des $[H_{1,*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$.

En ce qui concerne les $[H_1^i(\pi_v, \Pi_t)]$ individuellement, on part de l'égalité (2.6.2) de [2] qui exprime $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ en terme d'extensions intermédiaires de systèmes locaux d'Harris-Taylor : cette égalité peut être vu comme une filtration de $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ qui fournit une suite spectrale $E_1^{i,j}$ calculant les $[H_1^i(\pi_v, \Pi_t)]$ à l'aide de la cohomologie de ces extensions intermédiaires. On vient de voir que la propriété de l'énoncé est valable pour chacun des $E_1^{i,j}$ et donc aussi pour l'aboutissement de cette suite spectrale, d'où le résultat. \square

3. Cohomologie d'un $\overline{\mathbb{F}}_l$ -système local

Considérons à présent un niveau fini $I \in \mathcal{I}$ et notons $\text{Bad}(I)$ l'ensemble formé des places w de \mathbb{Q} divisant I ou ramifiées dans F . On fixe en outre une place $v \in \text{Spl}$ et ξ une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation algébrique entière irréductible entière associée à un poids dominant l -petit de sorte que le système local associé admet, à isomorphisme près, une unique $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -structure $\mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}$. D'après le changement de base propre, la cohomologie de $X_{I, \overline{\eta}}$ à coefficients dans le système local $\mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}$, est donnée par la cohomologie de X_{I, \overline{s}_v} à coefficients dans $\Psi_{I,v} \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}$ où

$$\Psi_{I,v} := R\Psi_{\eta_v, I}(\overline{\mathbb{Z}}_l)[d-1]\left(\frac{d-1}{2}\right)$$

est le faisceau pervers des cycles évanescents sur X_{I, \overline{s}_v} .

3.1. Notations. — On note

- I^v le sous-groupe compact isomorphe à I en toute place distincte de $p = v|_{\mathbb{Q}}$ alors qu'en p , son facteur associé à la place v , cf. la formule (1), est $GL_d(\mathcal{O}_v)$;
- Iv^∞ le système inductif infini de niveaux $(I^v K(v^n))_{n \in \mathbb{N}}$ où $K(v^n) := \text{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_v) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_v / (\varpi_v^n)))$;
- Ψ_{Iv^∞} le faisceau pervers de Hecke sur le système projectif $(X_{J, \overline{s}_v})_{J \in Iv^\infty}$;
- \mathbb{T}_{Iv} la $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -algèbre de Hecke de $G(\mathbb{A}^\infty)$ hors $S = \text{Bad}(I) \cup \{v|_{\mathbb{Q}}\}$.

3.2. Définition. — On dira d'un $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -module M qu'il vérifie la propriété $\mathbf{P}(\xi)$, s'il admet une filtration finie

$$(0) = \text{Fil}^0(M) \subset \text{Fil}^1(M) \cdots \subset \text{Fil}^r(M) = M$$

telle que pour tout $k = 1, \dots, r$, il existe

- une représentation automorphe Π_k irréductible et entière de $G(\mathbb{A})$, cohomologique pour ξ
- une représentation irréductible entière $\tilde{\Pi}_{k,v}$ de même support cuspidal que $\Pi_{k,v}$
- et un $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -réseau stable Γ de $(\Pi_k^{\infty,v})^{I_v} \otimes \tilde{\Pi}_{k,v}$ muni d'une surjection équivariante

$$\Gamma \twoheadrightarrow \text{gr}^k(M) := \text{Fil}^k(M) / \text{Fil}^{k-1}(M).$$

3.3. Lemme. — *La propriété $\mathbf{P}(\xi)$ est stable par sous-quotient.*

Démonstration. — En raisonnant par récurrence sur la longueur de la filtration, il suffit de traiter le cas d'une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Fil}^1(M) \rightarrow M \rightarrow \text{gr}^2(M) \rightarrow 0.$$

Soit alors $f : M \rightarrow N$ un quotient et $\text{Fil}^1(N)$ l'image de $\text{Fil}^1(M)$ par f de sorte que f induit une surjection $\text{gr}^2(M) \rightarrow \text{gr}^2(N) := N / \text{Fil}^1(N)$. Soient, pour $i = 1, 2$, un réseau stable Γ_i de $(\Pi_i^{\infty,v})^{I_v} \otimes \tilde{\Pi}_{i,v}$. En composant les surjections $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \text{Fil}^1(M)$ et $\Gamma_2 \twoheadrightarrow \text{gr}^2(M)$, avec respectivement, $\text{Fil}^1(M) \rightarrow \text{Fil}^1(N)$ et $\text{gr}^2(M) \rightarrow \text{gr}^2(N)$, on en déduit que N vérifie $\mathbf{P}(\xi)$.

Soit à présent $N \hookrightarrow M$ et $\text{Fil}^1(N) = N \cap \text{Fil}^1(M)$. On considère alors le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} A \hookrightarrow & \Gamma_1 & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Fil}^1(N) \hookrightarrow & \text{Fil}^1(M) & \end{array}$$

qui est nécessairement de la forme demandée. On procède de même pour $\text{gr}^2(N) := N / \text{Fil}^1(N)$. \square

Remarque : soit M un $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -module qui est libre en tant que $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module libre. Si M vérifie $\mathbf{P}(\xi)$ alors son dual $M^\vee = \text{Hom}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(M, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ en tant que $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -module, vérifie $\mathbf{P}(\xi^\vee)$. Pour M vérifiant $\mathbf{P}(\xi)$ qui est de torsion en tant que $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module, par définition il s'écrit sous la forme $0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ où L et L' sont des $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -modules, libres en tant que $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -modules et vérifiant $\mathbf{P}(\xi)$, alors de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow L^\vee \rightarrow (L')^\vee \rightarrow M^\vee \rightarrow 0.$$

et de ce qui précède, on en déduit que M^\vee vérifie $\mathbf{P}(\xi^\vee)$.

3.4. Proposition. — *Soit π_v une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière cuspidale de $GL_g(F_v)$ dont la réduction modulo l , notée ρ , est supposée supercuspidale. Alors pour toute représentation irréductible elliptique Π_t relativement à π_v , et pour tout i , les $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -modules $H^i(X_{I_v^\infty, \bar{s}_v}, {}^p j_{1*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l})$ vérifient la propriété $\mathbf{P}(\xi)$.*

Remarque : d'après le résultat principal de [5], comme ϱ est supercuspidal, on a une unique notion d'extension intermédiaire de $\mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)$, i.e.

$${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) \simeq {}^{p+} j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t),$$

ce qui nous permettra d'utiliser la dualité de Verdier.

Démonstration. — Démonstrons le résultat par récurrence sur t de $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ à 1. Pour $t = s$, d'après [1], on a

$${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) \simeq j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)$$

de sorte que, les strates $X_{J, \overline{s}_v}^{-tg}$ étant affines, les $H^i(X_{I_v^\infty, \overline{s}_v}, {}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l})$ sont nuls pour $i < 0$ et sans torsion pour $i = 0$. En utilisant que l'égalité des extensions intermédiaires p et $p+$ et la dualité de Grothendieck-Verdier, on obtient la nullité de la cohomologie pour tout $i \neq 0$ et la liberté du H^0 . On conclut en utilisant la proposition 2.7. Supposons à présent le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$.

3.5. Lemme. — Pour tout $t' \geq t + 1$ et pour $\Pi_{t'}$ elliptique relativement à π_v , les $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -modules $H^i(X_{I_v^\infty, \overline{s}_v}, j_{!*}^{-t'g} \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_{t'}) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l})$ vérifient la propriété $\mathbf{P}(\xi)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — D'après [3], $j_{!*}^{-t'g} \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_{t'})$ admet une filtration dont les gradués sont des p -extensions intermédiaires de systèmes locaux $\mathcal{HT}_{\Gamma''}(\pi_v, \Pi_{t''})$ avec $\Pi_{t''}$ elliptique relativement à π_v , pour $t'' \geq t'$. Cette filtration fournit une suite spectrale calculant les $H^i(X_{I_v^\infty, \overline{s}_v}, j_{!*}^{-t'g} \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_{t'}) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l})$, dont, d'après l'hypothèse de récurrence précédente, les termes initiaux vérifient la propriété $\mathbf{P}(\xi)$. Le résultat découle alors du lemme 3.3. \square

Considérons à présent dans le cas $g > 1$, la suite spectrale

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= H_c^p(X_{I_v^\infty, \overline{s}_v}, \mathcal{H}^{qp} j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \\ &\implies \\ &H^{p+q}(X_{I_v^\infty, \overline{s}_v}, {}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}). \end{aligned}$$

Remarque : pour $g = 1$, les arguments qui suivent sont valables pourvu qu'on utilise la suite spectrale associée à la stratification qui, d'après [1], est de la forme

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(X_{I_v^\infty, \overline{s}_v}^{-p-1}, \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_{p-1}) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}) \implies H^{p+q}(X_{I_v^\infty, \overline{s}_v}, {}^p j_{!*}^{-t} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}).$$

D'après [3], les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^{qp} j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}$ sont sans torsion et donc donnés, cf. [1], par des systèmes locaux $\mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_{t'})(n')$ pour $\Pi_{t'}$ elliptique relativement à π_v et $n' \in \mathbb{Z}$ qu'il est inutile de préciser ici. Ainsi les termes $E_2^{p,q}$ vérifient :

- la propriété $\mathbf{P}(\xi)$ pour tout $q > tg - d$ d'après l'hypothèse de récurrence,
- sont nuls pour $q < tg - d$, par perversité ;
- les strates étant affines, ils sont nuls pour les couples (p, q) de la forme $(p, tg - d)$ avec $p < 0$ et
- $E_2^{0, tg-d}$ est sans torsion.

Du lemme 3.3, on en déduit que les E_∞^n vérifient la propriété $\mathbf{P}(\xi)$ pour tout $n \leq 0$. Comme par hypothèse ${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) \simeq {}^{p+} j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)$, par application de la dualité de Grothendieck-Verdier on obtient que les E_∞^n pour $n > 0$ vérifient aussi la propriété $\mathbf{P}(\xi)$. \square

3.6. Corollaire. — Soient π_v une représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(F_v)$ et Π_t une représentation elliptique relativement à π_v . Alors les $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -modules

$$H^i\left(X_{I_v^\infty, \bar{s}_v}, \mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)\right) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \bar{\mathbb{F}}_l}\right)$$

vérifient la propriété $\mathbf{P}(\xi)$, où $\mathbb{F}(-) := \bar{\mathbb{F}}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} (-)$ est le foncteur de réduction modulo l ,

Remarque : dans l'énoncé précédent on ne suppose plus que la réduction modulo l de π_v est supercuspidale. D'après [11], il existe un diviseur g_{-1} de $g = kg_{-1}$ ainsi qu'une⁽²⁾ représentation irréductible cuspidale $\pi_{v,-1}$ dont la réduction modulo l , notée ϱ , est supercuspidale et telle que la réduction modulo l de π_v est l'unique sous-quotient non dégénéré de la réduction modulo l de $\text{St}_k(\pi_{v,-1})$.

Démonstration. — Rappelons que pour tout \mathbb{F}_q -schéma X et tout \mathbb{Z}_l -faisceau pervers libre \mathcal{P} , on a les suites exactes courtes

$$0 \rightarrow H^n(X, \mathcal{P}) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l \rightarrow H^n(X, \mathbb{F}\mathcal{P}) \rightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{P})[l] \rightarrow 0. \quad (2)$$

D'après [9] l'égalité ${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t) = {}^{p+} j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)$ est équivalente au fait que \mathbb{F} commute avec l'extension intermédiaire, i.e.

$$\mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)\right) \simeq j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(\varrho, r_l(\Pi_t))$$

dans le groupe de Grothendieck des $\bar{\mathbb{F}}_l$ -faisceaux pervers sur $X_{I_v^\infty, \bar{s}_v}$. Ainsi dans le cas où la réduction modulo l de π_v est supercuspidale, le résultat découle de la proposition précédente.

Il reste alors à traiter le cas où la réduction modulo l de π_v n'est plus supercuspidale mais seulement cuspidale. D'après la proposition 3.2.4 de [5], dans le groupe de Grothendieck des $\bar{\mathbb{F}}_l$ -faisceaux pervers, pour Π_t elliptique relativement à π_v , on a une égalité de la forme

$$\mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)\right) = \sum_{t' \geq t} j_{!*}^{-t'g} \mathcal{HT}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(\varrho, \Pi_{t'})(n')$$

où les n' sont des entiers qu'il est inutile de préciser et de même les $\Pi_{t'}$ sont des $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentations dont tous les constituants irréductibles sont des sous-quotients de la réduction modulo l d'une représentation elliptique relativement à $\pi_{v,-1}$, qu'il est à nouveau inutile de préciser plus. Le résultat découle alors du fait que d'après le lemme 3.3, la propriété $\mathbf{P}(\xi)$ se lit dans le groupe de Grothendieck et du cas où $\pi_{v,-1}$ en utilisant que la commutation de \mathbb{F} avec ${}^p j_{!*}^{-t'g}$. \square

2. Bien entendu $\pi_{v,-1}$ n'est pas uniquement défini, tout relèvement de sa réduction modulo l conviendrait.

On peut à présent démontrer le théorème de l'introduction. Dans [4], on définit des filtrations exhaustives de stratification d'un faisceau pervers libre et ce quels que soient les coefficients. Appliqué au $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre Ψ_{Iv^∞} des cycles évanescents, on montre dans [3] que les gradués sont de la forme ${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(n)$ pour π_v irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, l'entier t variant de 1 à $\lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, avec Γ un $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -réseau stable et n décrivant un certain ensemble fini d'entier, qu'il est inutile ici de préciser.

Remarque : pour obtenir les p -versions des extensions intermédiaires, il faut prendre les constructions de [4] utilisant les morphismes d'adjonction $j_! j^* \rightarrow \text{Id}$. Si on utilisait dualement $\text{Id} \rightarrow j_* j^*$, on obtiendrait les p + extensions intermédiaires de ces systèmes locaux relativement à d'autres réseaux.

Par application du foncteur \mathbb{F} et en notant que les gradués de notre filtration de stratification exhaustive sont libres, on obtient une filtration de $\Psi_{Iv^\infty, \overline{\mathbb{F}}_l} \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{F}}_l}$ dont les gradués sont les $\mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(n) \right) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{F}}_l}$. Cette filtration fournit une suite spectrale calculant les $H^i(X_{Iv^\infty, \overline{s}_v}, \Psi_{Iv^\infty, \overline{\mathbb{F}}_l} \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{F}}_l})$ à partir des

$$H^i \left(X_{Iv^\infty, \overline{s}_v}, \mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(n) \right) \otimes \mathcal{L}_{\xi, \overline{\mathbb{F}}_l} \right).$$

D'après le corollaire précédent, les termes initiaux de cette suite spectrale vérifie $\mathbf{P}(\xi)$ de sorte que d'après le lemme 3.3, il en est de même de l'aboutissement, ce qui finit de prouver le théorème de l'introduction.

Références

- [1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [3] P. Boyer. La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre. *soumis*, 2013.
- [4] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de Shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.
- [5] P. Boyer. Faisceaux pervers entiers d'Harris-Taylor. *preprint*, 2015.
- [6] J.-F. Dat. Nonabelian Lubin-Tate theory and elliptic representations. (Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques). *Invent. Math.*, 169(1) :75–152, 2007.
- [7] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [8] Jens Carsten Jantzen. *Representations of algebraic groups*. Pure and Applied Mathematics 131, 1987.
- [9] D. Juteau. Decomposition numbers for perverse sheaves. *Annales de l'Institut Fourier*, 59 (3), pages 1177–1229, 2009.
- [10] P. Scholze. On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties. *Preprint Bonn*, 2013.
- [11] M.-F. Vignéras. Induced R -representations of p -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.

BOYER PASCAL • *E-mail* : boyer@math.univ-paris13.fr, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité,
LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25