



**HAL**  
open science

# Cohomologie modulo $l$ des variétés d'Harris-Taylor

Boyer Pascal

► **To cite this version:**

| Boyer Pascal. Cohomologie modulo  $l$  des variétés d'Harris-Taylor. 2015. hal-01238906v1

**HAL Id: hal-01238906**

**<https://hal.science/hal-01238906v1>**

Preprint submitted on 7 Dec 2015 (v1), last revised 6 Apr 2016 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# COHOMOLOGIE MODULO $l$ DES VARIÉTÉS D’HARRIS-TAYLOR

*par*

Boyer Pascal

---

**Résumé.** — Nous étudions les classes de cohomologie de torsion d’une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor. Dans notre situation géométrique particulière, nous déduisons de cette étude une preuve simple du théorème principal de [7], i.e. on associe à tout système de valeurs propres de Hecke modulo  $l$  apparaissant dans la  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -cohomologie d’une telle variété, une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation galoisienne dont les valeurs propres des Frobenius sont données par celles de Hecke.

**Abstract (Mod  $l$  cohomologie of Harris-Taylor’s varieties).** — We study the torsion classes in the cohomology of some Shimura’s varieties of Kottwitz-Harris-Taylor type. In this particular geometric situation, we give a simple proof of the main result of [7], i.e. we associate to any mod  $l$  system of Hecke eigenvalues appearing in the  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -cohomology of such variety, a  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -Galois representation which Frobenius eigenvalues are given by Hecke’s.

## Table des matières

Introduction.....	1
1. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples.....	2
2. Systèmes locaux d’Harris-Taylor et leur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie.....	4
3. Cohomologie modulo $l$ : preuve du théorème principal.....	7
Références.....	10

## Introduction

Dans [7], Peter Scholze explique comment associer

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

**Mots clefs.** — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l’algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L’auteur remercie l’ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

- à tout système de valeurs propres de Hecke modulo  $l$  apparaissant dans la cohomologie d'un espace localement symétrique associé à  $GL_d$  d'un corps  $F$ , totalement réel ou CM,
  - une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation semi-simple de dimension  $d$ , du groupe de Galois de  $F$ ,
- de sorte que les valeurs propres des Frobenius sont données par les valeurs propres de Hecke.

Dans cet article on reprend la même problématique en se restreignant au cas d'une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor, i.e. associée à un groupe de similitudes  $G/\mathbb{Q}$  donné par une algèbre à division  $B$  centrale et de dimension  $d^2$  sur une extension CM  $F/\mathbb{Q}$  dont les signatures à l'infini sont  $(1, d-1) \times (0, d) \times \cdots \times (0, d)$ . Pour tout sous-groupe compact ouvert  $I$  assez petit de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , on note  $X_I/F$  la variété de Shimura de niveau  $I$  associée : notre résultat principal est le suivant.

**Théorème.** — *Soit  $\overline{\pi}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $G(\mathbb{A})$ . On suppose qu'il existe*

- un entier  $i$ ,
- un sous-groupe ouvert compact  $I$  de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ ,
- un  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -système local  $\mathcal{L}_\xi$ ,

tels que  $\overline{\pi}^\infty$  est un sous-quotient irréductible de  $H^i(X_{I, \overline{\eta}}, \mathcal{L}_\xi)$ . Alors pour toute place  $v$  de  $F$  telle que  $p := v|_{\mathbb{Q}}$  est décomposée dans  $F$  et  $B_v$  est décomposée, il existe une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation automorphe entière  $\Pi$  de  $G(\mathbb{A})$  cohomologique relativement au système local  $\mathcal{L}_\xi$  telle que :

- il existe un sous-groupe ouvert compact  $J \subset I$  avec  $J^v = I^v$  tel que  $\Pi$  a des vecteurs invariants sous  $J$  ;
- la réduction modulo  $l$  de  $\Pi_v$  a le même support supercuspidal que  $\overline{\pi}_v$  ;
- $\overline{\pi}^{v, \infty}$  est un sous-quotient de la réduction modulo  $l$  de  $\Pi^{v, \infty}$ .

Grâce aux travaux de Harris et Taylor [6], on peut associer à un  $\Pi$  comme dans le théorème précédent, une représentation  $\sigma(\Pi)$  de  $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ . La réduction modulo  $l$  de  $\sigma(\Pi)$  n'est pas nécessairement fini, on en choisit simplement un sous-quotient irréductible  $\overline{\sigma}$  quelconque dont les valeurs propres du Frobenius en une place  $w$  sont données par la réduction modulo  $l$  des paramètres de Satake de  $\Pi_w$  lesquels sont ceux de  $\overline{\pi}$ .

## 1. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples

Soit  $F = F^+E$  un corps CM avec  $E/\mathbb{Q}$  quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel  $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $v$  une place de  $F$ , on notera

- $F_v$  le complété du localisé de  $F$  en  $v$ ,
- $\mathcal{O}_v$  l'anneau des entiers de  $F_v$ ,
- $\varpi_v$  une uniformisante et
- $q_v$  le cardinal du corps résiduel  $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$ .

Soit  $B$  une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  telle qu'en toute place  $x$  de  $F$ ,  $B_x$  est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose  $B$  munie d'une involution de seconde espèce  $*$  telle que  $*|_F$  est la conjugaison complexe  $c$ . Pour  $\beta \in B^{*-1}$ ,

on note  $\sharp_\beta$  l'involution  $x \mapsto x^\sharp = \beta x^* \beta^{-1}$  et  $G/\mathbb{Q}$  le groupe de similitudes, noté  $G_\tau$  dans [6], défini pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp = \lambda\}$$

avec  $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$ . Si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  décomposée  $x = yy^c$  dans  $E$  alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times, \quad (1)$$

où, en identifiant les places de  $F^+$  au dessus de  $x$  avec les places de  $F$  au dessus de  $y$ ,  $x = \prod_i z_i$  dans  $F^+$ .

Dans [6], les auteurs justifient l'existence d'un  $G$  comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  qui n'est pas décomposée dans  $E$  alors  $G(\mathbb{Q}_x)$  est quasi-déployé ;
- les invariants de  $G(\mathbb{R})$  sont  $(1, d-1)$  pour le plongement  $\tau$  et  $(0, d)$  pour les autres.

**1.2. Notation.** — On fixe un nombre premier  $l$  non ramifié dans  $E$  et on note  $\text{Spl}$  l'ensemble des places  $v$  de  $F$  telles que  $p_v := v|_{\mathbb{Q}} \neq l$  est décomposé dans  $F$  et  $B_v^\times \simeq GL_d(F_v)$ .

Rappelons, cf. [6] bas de la page 90, qu'un sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbb{A}^\infty)$  est dit « assez petit » s'il existe une place  $x$  pour laquelle la projection de  $U^v$  sur  $G(\mathbb{Q}_x)$  ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité.

**1.3. Notation.** — Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ . Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note  $X_{I,\eta} \rightarrow \text{Spec } F$  la variété de Shimura associée, dit de Kottwitz-Harris-Taylor.

*Remarque :* pour tout  $v \in \text{spl}$ , la variété  $X_{I,\eta}$  admet un modèle projectif  $X_{I,v}$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_v$  de fibre spéciale  $X_{I,s_v}$ . Pour  $I$  décrivant  $\mathcal{I}$ , le système projectif  $(X_{I,v})_{I \in \mathcal{I}}$  est naturellement muni d'une action de  $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$  telle que l'action d'un élément  $w_v$  du groupe de Weil  $W_v$  de  $F_v$  est donnée par celle de  $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$ , où  $\deg = \text{val} \circ \text{Art}^{-1}$  où  $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$  est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

**1.4. Notations.** — (cf. [1] §1.3) Pour  $I \in \mathcal{I}$ , la fibre spéciale géométrique  $X_{I,\bar{s}_v}$  admet une stratification de Newton

$$X_{I,\bar{s}_v} =: X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1} \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 2} \supset \cdots \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq d}$$

où  $X_{I,\bar{s}_v}^{=h} := X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h} - X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}$  est un schéma affine, lisse de pure dimension  $d-h$  formé des points géométriques dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate est de rang  $h$ . Pour tout  $1 \leq h < d$ , nous utiliserons les notations suivantes :

$$i_{h+1} : X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, \quad j^{\geq h} : X_{I,\bar{s}_v}^{=h} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h},$$

ainsi que  $j^{=h} = i_h \circ j^{\geq h}$ .

Pour tout  $1 \leq h < d$ , les strates  $X_{I,\bar{s}_v}^{=h}$  sont géométriquement induites sous l'action du parabolique standard  $P_{h,d}(F_v)$  de Levi  $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)$ , au sens où il existe un

sous-schéma  $X_{I^v v^n, \bar{s}_v, 1}^{=h}$  muni d'une action par correspondances de  $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times GL_{d-h}(F_v) \times \mathbb{Z}$  tel que :

$$X_{I^v v^n, \bar{s}_v}^{=h} \simeq X_{I^v v^n, \bar{s}_v, 1}^{=h} \times_{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n))} GL_d(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n)).$$

**1.5. Notation.** — On note  $X_{I^v v^n, \bar{s}_v, 1}^{\geq h}$  l'adhérence de  $X_{I^v v^n, \bar{s}_v, 1}^{=h}$  dans  $X_{I^v v^n, \bar{s}_v}^{\geq h}$  et

$$j_1^{\geq h} : X_{I^v v^n, \bar{s}_v, 1}^{=h} \hookrightarrow X_{I^v v^n, \bar{s}_v, 1}^{\geq h}.$$

Soit  $\xi$  une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation algébrique irréductible  $\xi$  de  $G$ . D'après le théorème de Baire, celle-ci est définie sur une extension finie  $K$  de  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ . On note  $W_{\xi, K}$  l'espace de cette représentation et  $W_{\xi, \mathcal{O}}$  un réseau stable où  $\mathcal{O}$  désigne l'anneau des entiers de  $K$ . Notons  $\lambda$  une uniformisante de  $\mathcal{O}$  et soit pour  $n \geq 1$ , un sous-groupe distingué  $I_n \in \mathcal{I}$  de  $I \in \mathcal{I}$ , compact ouvert agissant trivialement sur  $W_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n} := W_{\xi, \mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\lambda^n$ . On note alors  $V_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n}$  le faisceau sur  $X_I$  dont les sections sur un ouvert étale  $T \rightarrow X_I$  sont les fonctions

$$f : \pi_0(X_{I_n} \times_{X_I} T) \rightarrow W_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n}$$

telles que pour tout  $k \in I$  et  $C \in \pi_0(X_{I_n} \times_{X_I} T)$ , on a la relation  $f(Ck) = k^{-1}f(C)$ .

**1.6. Notation.** — On pose alors

$$V_{\xi, \mathcal{O}} = \varprojlim_n V_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n} \text{ et } V_{\xi, K} = V_{\xi, \mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} K.$$

On utilisera aussi la notation  $V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}$  et  $V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}$  pour les versions sur  $\bar{\mathbb{Z}}_l$  et  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  respectivement.

**1.7. Définition.** — Une  $\mathbb{C}$ -représentation irréductible  $\Pi_{\infty}$  de  $G(\mathbb{A}_{\infty})$  est dite  $\xi$ -cohomologique s'il existe un entier  $i$  tel que

$$H^i((\text{Lie}G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_{\tau}, \Pi_{\infty} \otimes \xi^{\vee}) \neq (0)$$

où  $U_{\tau}$  est un sous-groupe compact modulo le centre de  $G(\mathbb{R})$ , maximal, cf. [6] p.92. On notera  $d_{\xi}^i(\Pi_{\infty})$  la dimension de ce groupe de cohomologie. Une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible  $\Pi^{\infty}$  de  $G(\mathbb{A}^{\infty})$  sera dit automorphe  $\xi$ -cohomologique s'il existe une  $\mathbb{C}$ -représentation  $\xi$ -cohomologique  $\Pi_{\infty}$  de  $G(\mathbb{A}_{\infty})$  telle que  $\iota_l(\Pi^{\infty}) \otimes \Pi_{\infty}$  est une  $\mathbb{C}$ -représentation automorphe de  $G(\mathbb{A})$ .

## 2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor et leur $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie

Fixons une place  $v \in \text{Spl}$ . À toute représentation irréductible admissible  $\tau_v$  de  $D_{v,h}^{\times}$ , Harris et Taylor associent un système local de Hecke  $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1}$  sur  $\bar{X}_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, 1}^{=h}$ , muni, cf. [1] §1.4.7, d'une action de  $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^{\times} \times P_{h,d}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^{\times} \times \mathbb{Z}$  qui d'après [6] p.136, se factorise par  $G^{(h)}(\mathbb{A}^{\infty})/D_{F_v, h}^{\times}$  via

$$(g^{\infty, p}, g_{p,0}, c, g_v, g_{v_i}, k) \mapsto (g^{p, \infty}, g_{p,0} q^{k-v(\det g_v^c)}, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta). \quad (2)$$

où  $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) := G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D_{F_v,h}^\times$ ,  $g_v = \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix}$  et  $\delta \in D_{v,h}^\times$  est tel que  $v(\text{rn}(\delta)) = k + v(\det g_v^c)$ . On note  $\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}}$  le faisceau sur  $\overline{X}_{\mathcal{I}, \overline{s}_v}^{-h}$  induit associé :

$$\mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}} := \mathcal{F}_{\tau_v, \mathcal{I}, 1} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

Pour  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et  $t$  un entier strictement positif tel que  $tg \leq d$ , on note  $\pi_v[t]$  la représentation duale de l'image de  $\text{St}_t(\pi_v)$  par la correspondance de Jacquet-Langlands locale. On note, suivant [1],  $\mathcal{F}(\pi_v, t)_1$  (resp.  $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ ) le faisceau de Hecke  $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D, \mathcal{I}, 1}$  (resp.  $\mathcal{F}_{\pi_v[t]_D, \mathcal{I}}$ ). On utilisera la notation  $HT(\pi_v, \Pi_t)$  pour désigner le faisceau pervers sur  $\overline{X}_{\mathcal{I}, \overline{s}_v}^{-tg}$  défini par

$$HT(\pi_v, \Pi_t) := \left( \mathcal{F}(\pi_v, t)_1[d - tg] \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \otimes \Pi_t \right) \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où  $\Pi_t$  une représentation de  $GL_{tg}(F_v)$  où  $g_v \in P_{h,d}(F_v)$  agit diagonalement avec son action naturelle sur le facteur  $\Pi_t$  et son action décrite précédemment.

*Remarque :* quand on voudra préciser les coefficients, on les notera en indice  $HT_{\overline{\mathbb{F}}_l}$ ,  $HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l}$  ou  $HT_{\overline{\mathbb{Z}}_l}$ .

**2.2. Notations.** — Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  des représentations de respectivement  $GL_{n_1}(K)$  et  $GL_{n_2}(K)$ . On note alors

- $\pi_1\{n\} := \pi_1 \otimes |\det|^n$  ;
- $\pi_1 \times \pi_2$  l'induite  $\text{ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}$ .

**2.3. Définition.** — Une représentation irréductible  $\Pi$  de  $GL_d(F_v)$  est dite *elliptique* s'il existe un diviseur  $g$  de  $d = sg$  et une représentation irréductible cuspidale  $\pi_v$  de  $GL_g(F_v)$  tels que  $\Pi$  est un sous-quotient de

$$\pi_v\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi_v\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi_v\left\{\frac{s-1}{2}\right\}.$$

Cette induite admet par ailleurs un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible que l'on note  $\text{St}_s(\pi_v)$  (resp.  $\text{Speh}_s(\pi_v)$ ) : c'est une série discrète.

*Remarque :* avec cette définition une représentation est elliptique si et seulement si, cf. [5] lemme 2.1.6, son caractère est non nul sur les éléments elliptiques semi-simples réguliers.

Pour un caractère  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$  et  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale, les systèmes locaux  $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$  et  $HT(\pi_v \otimes \chi, \text{St}_t(\pi_v \otimes \chi))$ , munis des actions par correspondance précédentes, sont isomorphes. Autrement dit l'écriture

$$HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$$

ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de  $\pi_v$ . Dans la suite nous utiliserons cette remarque en remplaçant  $\text{St}_t(\pi_v)$  par une représentation de support cuspidal  $\left\{ \pi_v\left\{\frac{1-t}{2}\right\}, \dots, \pi_v\left\{\frac{t-1}{2}\right\} \right\}$ .

*Remarque* : dans [1], on utilise la même remarque pour

$$HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathcal{L}(\pi_v)$$

où  $\mathcal{L}^\vee$  est la correspondance locale de Langlands et où  $w_v \in W_v$  agit diagonalement avec action naturelle sur  $\sigma_v$  et l'action de

$$(q^{-\deg w_v}, \deg w_v) \in \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Z} \subset G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times P_{h,d}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times \mathbb{Z}$$

avec  $\deg = \text{val} \circ \text{Art}_v^{-1}$  où  $\text{Art}_v^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$  est l'isomorphisme d'Artin de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques sur les uniformisantes.

Fixons à présent une représentation irréductible algébrique  $\xi$  de  $G$ . Étant donné un système local d'Harris-Taylor  $HT(\pi_v, \Pi_t)$ , on note  $[H_{!*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$  (resp.  $[H_!^i(\pi_v, \Pi_t)]$ ) l'image de

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \mathcal{I}}} H^i \left( X_{I, \bar{s}_v}^{\geq tg}, j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l} \right)$$

$$\text{resp. } \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I \in \mathcal{I}}} H^i \left( X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l} \right)$$

dans le groupe de Grothendieck  $\text{Groth}(v, h)$  des représentations admissibles de  $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ .

**2.4. Proposition.** — *Soit  $\Pi_t$  une représentation irréductible elliptique relativement à  $\pi_v$  et soit  $\pi^\infty$  un constituant irréductible de  $[H_{!*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$  ou de  $[H_!^i(\pi_v, \Pi_t)]$ . Il existe alors une représentation automorphe irréductible  $\Pi$  de  $G(\mathbb{A})$ , cohomologique pour  $\xi$  telle que*

- $\Pi^{\infty, v} \simeq \pi^{\infty, v}$  et
- $\Pi_v$  a même support cuspidal que  $\pi_v^\infty$ .

*Démonstration.* — Commençons par le cas de  $[H_{!*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$  : le calcul explicite est donné §3 de [2] mais pour la commodité du lecteur nous allons donner une preuve plus rapide de l'énoncé ci-dessus. On part de l'égalité 2.6.3 de [2] prouvée dans [1] qui exprime  $j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  comme une somme alternée d'extensions par zéro de systèmes locaux d'Harris-Taylor. Le calcul de la somme alternée des groupes de cohomologie à support compact d'un système local d'Harris-Taylor  $HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}$  est donnée dans [6] V.5.4, V.6.4, VI.2.4, cf. aussi la formule 3.3.2 de [2] : ce calcul s'exprime en appliquant à la cohomologie globale de la variété de Shimura, le foncteur

$$\text{red}_{\pi_v[t]_D} : \text{Groth} \left( GL_d(F_v) \right) \longrightarrow \text{Groth} \left( D_{v, tg}^\times / \mathcal{D}_{v, tg}^\times \times GL_{d-tg}(F_v) \right)$$

défini comme la composée des deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Groth} \left( GL_d(F_v) \right) &\longrightarrow \text{Groth} \left( GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v) \right) \\ [\Pi] &\mapsto [J_{P_{tg,d}^{op}}(\Pi) \otimes \delta_{P_{tg,d}}^{1/2}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Groth}\left(GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v)\right) &\longrightarrow \text{Groth}\left(D_{v,tg}^\times/\mathcal{D}_{v,tg}^\times \times GL_{d-tg}(F_v)\right) \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \text{vol}(D_{v,tg}^\times/F_v^\times)^{-1} \sum_\psi \text{Tr } \alpha(\varphi_{\pi_v[t]_D \otimes \psi^\vee}) \psi \otimes \beta, \end{aligned}$$

où

- $P_{tg,d}^{op}$  est le parabolique opposé au parabolique standard  $P_{tg,d}$  et
- $J_{P_{tg,d}^{op}}$  est le foncteur de Jacquet des vecteurs coinvariants sous le sous-groupe unipotent de  $P_{tg,d}^{op}$  tordu par  $\delta_{P_{tg,d}^{op}}^{-1/2}(-) := |\det(\text{ad}(-)|_{\text{Lie}N_{tg,d}^{op}})|^{1/2}$ ;
- $\psi$  décrit les caractères de  $F_v^\times$ ;
- $\varphi_{\pi_v[t]_D \otimes \psi^\vee}$  est un pseudo-coefficient tel que, cf. [6] lemme I.3.4, si  $\pi'_v$  n'est pas un sous-quotient irréductible de  $(\pi_v \otimes \psi)\{-\frac{1-t}{2}\} \times \cdots \times (\pi_v \otimes \psi)\{\frac{t-1}{2}\}$ , alors  $\text{Tr } \pi'(\varphi_{\pi_v[t]_D \otimes \psi^\vee}) = 0$  et sinon il est égal à un signe multiplié par  $\text{vol}(D_{F_v,tg}^\times/F_v^\times)$ .

On en déduit alors que si  $\Pi_t$  est elliptique pour  $\pi_v$ , i.e. a pour support cuspidal  $\{\pi_v\{\frac{1-t}{2}\}, \dots, \pi_v\{\frac{t-1}{2}\}\}$ , alors, avec les notations ci-dessus, pour tout constituant irréductible  $\alpha \otimes \beta$  d'un  $J_{P_{tg,d}^{op}}(\Pi) \otimes \delta_{P_{tg,d}^{op}}^{1/2}$  et pour tout  $\psi$  tel que  $\text{Tr } \alpha(\varphi_{\pi_v[t]_D \otimes \psi^\vee}) \psi \neq 0$ , la représentation  $\Pi_t \otimes \psi$  a même support cuspidal que  $\alpha$  et donc l'induite  $(\Pi_t \otimes \psi) \times \beta$  aura même support cuspidal que la représentation  $\Pi$  de départ. Ainsi en utilisant que la somme alternée des groupes de cohomologie de  $X_{\mathcal{I}}$  s'exprime à l'aide des représentations automorphes  $xi$ -cohomologiques de  $G(\mathbb{A})$ , on en déduit que la conclusion de la proposition est valable pour le calcul de la somme alternée de la cohomologie à support compact des  $HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \overline{\mathbb{Q}}_l}$  et donc, d'après l'égalité 2.6.3 de [2], pour la somme alternée  $\sum_i (-1)^i [H_{l,*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$ . Par pureté on en déduit que le résultat est valable pour chacun des  $[H_{l,*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$ .

En ce qui concerne les  $[H_{l,*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$  individuellement, on part de l'égalité (2.6.2) de [2] qui exprime  $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  en terme d'extensions intermédiaires de systèmes locaux d'Harris-Taylor : cette égalité peut être vu comme une filtration de  $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  qui fournit une suite spectrale  $E_1^{i,j}$  calculant les  $[H_{l,*}^i(\pi_v, \Pi_t)]$  à l'aide de la cohomologie de ces extensions intermédiaires. On vient de voir que la propriété de l'énoncé est valable pour chacun des  $E_1^{i,j}$  et donc aussi pour l'aboutissement de cette suite spectrale, d'où le résultat.  $\square$

### 3. Cohomologie modulo $l$ : preuve du théorème principal

Considérons à présent un niveau fini  $I \in \mathcal{I}$  et notons  $\text{Bad}(I)$  l'ensemble formé des places  $w$  de  $\mathbb{Q}$  divisant  $I$  ou ramifiées dans  $F$ . On fixe en outre une place  $v \in \text{Spl}$ .

Rappelons que par changement de base propre, pour  $\xi$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation algébrique entière irréductible entière, la cohomologie de  $X_{I, \overline{\eta}}$  à coefficients dans le système local  $V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}$ , est donnée par la cohomologie de  $X_{I, \overline{s}_v}$  à coefficients dans  $\Psi_{I,v} \otimes V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l}$  où

$$\Psi_{I,v} := R\Psi_{\eta_v, I}(\overline{\mathbb{Z}}_l)[d-1]\left(\frac{d-1}{2}\right)$$



est le faisceau pervers des cycles évanescents sur  $X_{I, \bar{s}_v}$ .

**3.1. Notations.** — On note

- $I^v$  le sous-groupe compact isomorphe à  $I$  en toute place distincte de  $p = v|_{\mathbb{Q}}$  alors qu'en  $p$ , son facteur associé à la place  $v$ , cf. la formule (1), est  $GL_d(\mathcal{O}_v)$ ;
- $Iv^\infty$  le système inductif infini de niveaux  $(I^v K(v^n))_{n \in \mathbb{N}}$  où  $K(v^n) := \text{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_v) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n)))$ ;
- $\Psi_{Iv^\infty}$  le faisceau pervers de Hecke sur le système projectif  $(X_{J, \bar{s}_v})_{J \in Iv^\infty}$ ;
- $\mathbb{T}_{Iv}$  la  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -algèbre de Hecke de  $G(\mathbb{A}^\infty)$  hors  $S = \text{Bad}(I) \cup \{v|_{\mathbb{Q}}\}$ .

**3.2. Définition.** — On dira d'un  $\mathbb{T}_{Iv}[GL_d(F_v)]$ -module  $M$  qu'il vérifie la propriété **(P)**, s'il admet une filtration finie

$$(0) = \text{Fil}^0(M) \subset \text{Fil}^1(M) \cdots \subset \text{Fil}^r(M) = M$$

telle que pour tout  $k = 1, \dots, r$ , il existe

- une représentation automorphe  $\Pi_k$  irréductible et entière de  $G(\mathbb{A})$ , cohomologique pour  $\xi$
- une représentation irréductible entière  $\tilde{\Pi}_{k,v}$  de même support cuspidal que  $\Pi_{k,v}$
- et un  $\mathbb{T}_{Iv}[GL_d(F_v)]$ -réseau stable  $\Gamma$  de  $(\Pi_k^{\infty, v})^{I^v} \otimes \tilde{\Pi}_{k,v}$  muni d'une surjection équivariante

$$\Gamma \twoheadrightarrow \text{gr}^k(M) := \text{Fil}^k(M) / \text{Fil}^{k-1}(M).$$

**3.3. Lemme.** — La propriété **(P)** est stable par sous-quotient. Elle est aussi stable par dualité, en remplaçant la condition  $\xi$ -cohomologique par  $\xi^\vee$ -cohomologique.

*Démonstration.* — En raisonnant par récurrence sur la longueur de la filtration, il suffit de traiter le cas d'une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Fil}^1(M) \rightarrow M \rightarrow \text{gr}^2(M) \rightarrow 0.$$

Soit alors  $f : M \rightarrow N$  un quotient et  $\text{Fil}^1(N)$  l'image de  $\text{Fil}^1(M)$  par  $f$  de sorte que  $f$  induit une surjection  $\text{gr}^2(M) \rightarrow \text{gr}^2(N) := N / \text{Fil}^1(N)$ . Soient, pour  $i = 1, 2$ , un réseau stable  $\Gamma_i$  de  $(\Pi_i^{\infty, v})^{I^v} \otimes \tilde{\Pi}_{i,v}$ . En composant les surjections  $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \text{Fil}^1(M)$  et  $\Gamma_2 \twoheadrightarrow \text{gr}^2(M)$ , avec respectivement,  $\text{Fil}^1(M) \rightarrow \text{Fil}^1(N)$  et  $\text{gr}^2(M) \rightarrow \text{gr}^2(N)$ , on en déduit que  $N$  vérifie **(P)**.

Soit à présent  $N \hookrightarrow M$  et  $\text{Fil}^1(N) = N \cap \text{Fil}^1(M)$ . On considère alors le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} A \hookrightarrow & \text{---} & \Gamma_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Fil}^1(N) \hookrightarrow & \longrightarrow & \text{Fil}^1(M) \end{array}$$

qui est nécessairement de la forme demandée. On procède de même pour  $\text{gr}^2(N) := N / \text{Fil}^1(N)$ .

Enfin en ce qui concerne la dualité et d'après ce qui précède, il nous reste à traiter le cas où  $M$  est de  $l$ -torsion. Le résultat découle directement du fait que pour  $T$  de torsion et  $L$  un  $\mathbb{Z}_l$ -module libre, la suite exacte courte  $0 \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow T \rightarrow 0$  se dualise en

$$0 \rightarrow L^\vee \rightarrow (L')^\vee \rightarrow T^\vee \rightarrow 0.$$

□

D'après [3], le faisceau pervers  $\Psi_{I_v^\infty}$  admet une  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -filtration dont les gradués sont des faisceaux pervers libres obtenus comme les  $p$ -extensions intermédiaires de systèmes locaux  $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \sigma_v$  où  $\sigma_v$  est une<sup>(1)</sup> représentation de  $W_v$ . Cette filtration fournit une suite spectrale calculant les  $H^i(X_{I_v^\infty, \bar{s}_v}, \Psi_{I_v^\infty} \otimes V_{\xi, \overline{\mathbb{Z}}_l})$  à partir des  $H^i(X_{I_v^\infty, \bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)))$ . Ainsi d'après le lemme précédent, et en utilisant la suite exacte courte suivante valable pour tout  $\mathbb{F}_q$ -schéma  $X$  et tout  $\mathbb{Z}_l$ -faisceau pervers libre  $\mathcal{P}$

$$0 \rightarrow H^n(X, \mathcal{P}) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{F}_l \rightarrow H^n(X, \mathbb{F}\mathcal{P}) \rightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{P})[l] \rightarrow 0. \quad (3)$$

le théorème de l'introduction découle du lemme suivant pour  $\Pi_t = \text{St}_t(\pi_v)$ .

**3.5. Lemme.** — *Pour toute représentation irréductible elliptique  $\Pi_t$  relativement à  $\pi_v$ , et pour tout  $i$ , les  $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -modules  $H^i(X_{I_v^\infty, \bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$  vérifient la propriété **(P)**.*

*Démonstration.* — On va démontrer le résultat par récurrence sur  $t$  de  $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$  à 1. Pour  $t = s$ , d'après [1], on a  ${}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \simeq j_!^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  de sorte que, les strates  $X_{j, \bar{s}_v}^{-tg}$  étant affines, les  $H^i(X_{I_v^\infty, \bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$  sont nuls pour  $i < 0$  et sans torsion pour  $i = 0$ . En outre d'après [4], on a  ${}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \simeq {}^{p+} j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  de sorte que, en utilisant la dualité de Grothendieck-Verdier, on obtient la nullité pour tout  $i \neq 0$  et donc la liberté de tous ses groupes de cohomologie. On conclut en utilisant la proposition 2.4.

Supposons à présent le résultat acquis jusqu'au rang  $t + 1$ .

**3.6. Lemme.** — *Pour tout  $t' \geq t + 1$  et pour  $\Pi_{t'}$  elliptique relativement à  $\pi_v$ , les  $\mathbb{T}_{I_v}[GL_d(F_v)]$ -modules  $H^i(X_{I_v^\infty, \bar{s}_v}, j_!^{-t'g} HT(\pi_v, \Pi_{t'}))$  vérifient la propriété **(P)** pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* — D'après [3],  $j_!^{-t'g} HT(\pi_v, \Pi_{t'})$  admet une filtration dont les gradués sont des  $p$ -extensions intermédiaires de systèmes locaux  $HT(\pi_v, \Pi_{t''})$  avec  $\Pi_{t''}$  elliptique relativement à  $\pi_v$ , pour  $t'' \geq t'$ . Cette filtration fournit une suite spectrale calculant les  $H^i(X_{I_v^\infty, \bar{s}_v}, j_!^{-t'g} HT(\pi_v, \Pi_{t'}))$ , dont, d'après l'hypothèse de récurrence précédente, les termes initiaux vérifient la propriété **(P)**. Le résultat découle alors du lemme 3.3. □

---

1. En fait c'est un tordeu par un caractère non ramifié de l'image de  $\pi_v^\vee$  par la correspondance de Langlands locale.

Considérons à présent le cas où  $g > 1$  et où la réduction modulo  $l$  de  $\pi_v$  est supercuspidale. Partons de la suite spectrale

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= H_c^p(X_{Iv^\infty, \bar{s}_v}, \mathcal{H}^{qp} j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}) \\ &\implies H^{p+q}(X_{Iv^\infty, \bar{s}_v}, {}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}). \end{aligned}$$

D'après [3], les faisceaux de cohomologie  $\mathcal{H}^{qp} j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \otimes V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}$  sont sans torsion et donc donnés, cf. [1], par des systèmes locaux  $HT(\pi_v, \Pi_{t'})$  pour  $\Pi_{t'}$  elliptique relativement à  $\pi_v$ . Ainsi les termes  $E_2^{p,q}$  vérifient :

- la propriété **(P)** pour tout  $q > tg - d$  d'après l'hypothèse de récurrence,
- sont nuls pour  $q < tg - d$ , par perversité;
- les strates étant affines, ils sont nuls pour les couples  $(p, q)$  de la forme  $(p, tg - d)$  avec  $p < 0$  et
- $E_2^{0, tg-d}$  est sans torsion.

Du lemme 3.3, on en déduit que les  $E_\infty^n$  vérifient la propriété **(P)** pour tout  $n \leq 0$ . Comme  $\pi_v$  est supposé supercuspidale, d'après [4],  ${}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \simeq j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$  de sorte que par dualité, les  $E_\infty^n$  pour  $n > 0$  vérifient aussi la propriété **(P)**.

*Remarque :* le cas  $g = 1$  où  $\pi_v = \chi_v$  est un caractère, se traite de même en remplaçant la suite spectrale précédente par la suite spectrale associée à la stratification

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(X_{Iv^\infty, \bar{s}_v}^{p-1}, HT(\chi_v, \chi_v) \otimes V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}) \implies H^{p+q}(X_{Iv^\infty, \bar{s}_v}, HT(\chi_v, \chi_v) \otimes V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}).$$

Il reste alors à traiter le cas où la réduction modulo  $l$  de  $\pi_v$  n'est plus supercuspidale : d'après [8], il existe alors un diviseur  $g_{-1}$  de  $g = kg_{-1}$  ainsi qu'une<sup>(2)</sup> représentation irréductible cuspidale  $\pi_{v,-1}$  telle que la réduction modulo  $l$  de  $\pi_v$  est l'unique sous-quotient non dégénéré de la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_k(\pi_{v,-1})$ . D'après la proposition 3.1.4 de [4], la réduction modulo  $l$  de  ${}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ , avec  $\Pi_t$  elliptique relativement à  $\pi_v$ , s'exprime, dans le groupe de Grothendieck des  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -faisceaux pervers, comme une somme  $\sum_{t' \geq t} j_{!*}^{-t'g} HT_{\bar{\mathbb{F}}_l}(\pi_v, \Pi_{t'})$  où les  $\Pi_{t'}$  sont des  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentations dont tous les constituants irréductibles sont des sous-quotients de la réduction modulo  $l$  d'une représentation elliptique relativement à  $\pi_{v,-1}$ . On conclut alors en utilisant le cas supercuspidal traité ci-avant. □

## Références

- [1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.

---

2. Bien entendu  $\pi_{v,-1}$  n'est pas uniquement défini, tout relèvement de sa réduction modulo  $l$  conviendrait.

- [2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [3] P. Boyer. La cohomologie des espaces de lubin-tate est libre. *soumis*, 2013.
- [4] P. Boyer. Faisceaux pervers entiers d’harris-taylor. *preprint*, 2015.
- [5] J.-F. Dat. Nonabelian Lubin-Tate theory and elliptic representations. (Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques.). *Invent. Math.*, 169(1) :75–152, 2007.
- [6] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [7] P. Scholze. On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties. *Preprint Bonn*, 2013.
- [8] M.-F. Vignéras. Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.

---

BOYER PASCAL • *E-mail* : [boyer@math.univ-paris13.fr](mailto:boyer@math.univ-paris13.fr), Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25