



HAL
open science

LE COMMENTAIRE D'IBN AL-HAYTHAM SUR LES DÉFINITIONS DU LIVRE V DES ÉLÉMENTS

Bijan Vahabzadeh

► **To cite this version:**

Bijan Vahabzadeh. LE COMMENTAIRE D'IBN AL-HAYTHAM SUR LES DÉFINITIONS DU LIVRE V DES ÉLÉMENTS. 2015. hal-01237203

HAL Id: hal-01237203

<https://hal.science/hal-01237203>

Preprint submitted on 2 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE COMMENTAIRE D'IBN AL-HAYTHAM SUR LES DÉFINITIONS DU LIVRE V DES *ÉLÉMENTS*

BIJAN VAHABZADEH

I. INTRODUCTION

Ibn al-Haytham — plus précisément Abū 'Alī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haytham — est l'auteur d'une œuvre importante qui touche à des domaines aussi divers que l'optique, l'astronomie et les mathématiques. Les détails sur sa vie et ses œuvres que nous ont transmis les bio-bibliographes anciens sont incertains ; on peut dire que selon toute probabilité, il était originaire de Basra dans l'actuel Iraq, qu'il s'est rendu au Caire pendant le règne du calife al-Ḥākim (996-1021), et qu'il y est mort après septembre 1040.¹

Ibn al-Haytham est notamment l'auteur d'un *Commentaire sur les postulats d'Euclide*, dans lequel il se propose d'examiner en détail les définitions, postulats et notions communes des *Éléments* d'Euclide (c. 300 av. J.-C.) ; ce commentaire a été ensuite complété par un second traité *Sur la résolution des doutes de l'ouvrage d'Euclide sur les Éléments et le commentaire de ses notions*, consacré plus particulièrement aux propositions des *Éléments*.

E. B. Plooiij avait traduit en anglais et analysé quelques passages du *Commentaire sur les postulats* relatifs au Livre V.² Les Livres I-VI ont ensuite été édités par B. H. Sude sur la base de quatre manuscrits ;³ elle a également donné une traduction anglaise des mêmes Livres, avec une introduction, des notes et un glossaire des termes arabes.⁴ Pour ce qui est de la partie traitant du Livre V — la seule qui nous intéresse ici — on peut dire que l'édition de Sude⁵ est dans l'ensemble fiable, mais l'on y trouve plusieurs erreurs qui faussent l'intelligence du texte.⁶ Quant à sa traduction anglaise,⁷ elle est beaucoup moins fiable que l'édition et contient de nombreux contresens.⁸ Nous ne connaissons pas d'autres éditions ni d'autres traductions de ce texte.

¹ Rappelons que R. Rashed ([1993], pp. 1-19 ; [2000], pp. 937-41 ; [2002], pp. 957-9) a établi que le bio-bibliographe Ibn Abī Usaybi'a, l'une de nos principales sources sur la vie et les œuvres d'Ibn al-Haytham, avait en fait confondu le mathématicien et physicien al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haytham avec le philosophe et théoricien de la médecine Muḥammad ibn al-Ḥasan ibn al-Haytham ; c'est cette identification qui a été à la source de certaines erreurs quant aux dates et à la liste des œuvres de notre auteur (cf. A. I. Sabra [1972] et [1998]). Pour un tableau récapitulatif des œuvres d'Ibn al-Haytham, voir Rashed [1993, pp. 511-38].

² [Plooiij, 1950], pp. 53-4 & 61-2.

³ [Sude, 1974b]. Le nombre de manuscrits recensés à ce jour se montent à dix, dont trois sont partiels (voir [Sude, 1974a], pp. 5-6 & 17 ; [Sezgin, 1974], pp. 370-1 ; [Rashed, 1993], p. 530).

⁴ [Sude, 1974a].

⁵ [Sude, 1974b], pp. 91-120.

⁶ Par exemple *sathān mutasāwiyān* au lieu de *sathān mustawiyān* (*op. cit.*, p. 97 l. 13) ; *immā* au lieu de *ammā* (*op. cit.*, pp. 102 l. 19 et 103 l. 1) ; *al-aḍ'āf* au lieu de *al-anṣāf* (*op. cit.*, p. 112 l. 1).

⁷ [Sude, 1974a], pp. 168-204.

⁸ Un exemple concerne le mot arabe *aḍ'āf* — pluriel de *ḍi'f* (double, copie) — qui est le terme employé par les mathématiciens pour signifier le concept de *multiple*. Ce mot est morphologiquement un pluriel et seul le contexte permet de savoir s'il doit être traduit par le singulier ou par le pluriel ; or Sude le traduit presque systématiquement par le pluriel, d'où de nombreux contresens tout au long de sa

Nous nous proposons ici de donner une traduction française de la partie de ce commentaire traitant du Livre V, en nous basant directement sur trois manuscrits. Nous espérons ainsi fournir un outil de travail fiable à ceux qui seraient intéressés de connaître dans les détails les propos d'Ibn al-Haytham sur la théorie euclidienne des proportions, mais qui ne sauraient le lire dans le texte.⁹

II. TRADUCTION FRANÇAISE

La traduction (littérale) qui suit est basée sur une édition de travail du texte établie à partir de trois manuscrits : 1° Bursa, Haraççioğlu 1172, ff. 34^v-51^r ;¹⁰ 2° Istanbul, Feyzullah 1359, ff. 191^r-206^v ;¹¹ 3° Tunis, Ahmadiyya 5482 (n° 16167 du nouveau catalogue), ff. 30^r-42^r.¹²

LE DÉBUT DU CINQUIÈME LIVRE

Quant au cinquième Livre, Euclide y démontre les propriétés des rapports des grandeurs mathématiques les unes aux autres. Et il fait entrer sous les rapports des grandeurs mathématiques les rapports de toutes les grandeurs naturelles. Néanmoins les rapports dans les grandeurs mathématiques peuvent être déterminés avec le dernier degré de précision, puisqu'ils conservent toujours leur état ; car les grandeurs mathématiques se maintiennent toujours dans un même état inaltérable en lui-même tant que celui qui les imagine ne les altère pas.

Et quant aux rapports qui sont dans les grandeurs naturelles, beaucoup d'entre eux ne conservent pas leur état ; puisque beaucoup de grandeurs naturelles ne se maintiennent pas dans un même état, ne fût-ce durant l'instant le plus court : et c'est tout ce qui est sous la génération et la corruption. Et l'on peut utiliser les rapports mentionnés dans ce Livre dans le cas de ces grandeurs — je veux dire celles qui sont sous la génération et la corruption — même si le rapport n'y maintient pas son état ; et cela du fait que l'altération du rapport dans ces grandeurs pendant un bref instant n'affecte pas le rapport d'une manière sensible ; il n'y aura donc aucun mal à ce qu'il s'altère dans les endroits où on l'utilise. Et les grandeurs naturelles altérables dans lesquelles on utilise les rapports mentionnés dans ce Livre sont la quantité des corps naturels, la quantité de leurs surfaces, et la quantité de leurs longueurs et de leurs largeurs — je veux dire par tout cela leurs mesures — et de plus les grandeurs des poids de ceux d'entre ces corps qui sont pesants. Car les grandeurs des poids sont divisées et partagées et multipliées, et l'on connaît les rapports de leurs divisions les unes aux autres. On utilise donc

traduction, par exemple dans le passage où Ibn al-Haytham cite la définition euclidienne du rapport plus grand (*op. cit.*, p. 182 l. 20-24).

⁹ On notera que dans la partie de son traité *Sur la résolution des doutes* relative aux Définitions du Livre V, Ibn al-Haytham n'ajoute rien à ce qu'il avait déjà dit dans le *Commentaire sur les postulats*, si ce n'est quelques réflexions générales sur la Définition V. 4 qui touchent à la comparaison des grandeurs curvilignes et rectilignes, notamment des lunules et des triangles rectilignes (voir [Sezgin et Schramm, 1985], pp. 242-48).

¹⁰ *In* [Sezgin, 2000], pp. 68-101.

¹¹ *In* [Sezgin, 2000], pp. 249-280. — Ce manuscrit est l'un de ceux utilisés par Sude pour son édition.

¹² Nous voudrions remercier Marouane Ben Miled pour nous avoir fourni une copie de ce manuscrit.

également les rapports mentionnés dans le cinquième Livre dans le cas des grandeurs des poids.

Et quant aux grandeurs qui sont extérieures à la génération et la corruption, l'utilisation de ces rapports y est encore plus grand. Et ces grandeurs sont le temps, et les corps célestes, les grandeurs de leurs mesures, les grandeurs de leurs mouvements, les grandeurs de leurs orbites et les grandeurs de leurs distances.

Donc les rapports mentionnés dans ce Livre sont employés dans le cas de toutes les grandeurs, et sont utilisés dans toutes d'une utilisation dont on ne saurait se passer chaque fois que l'on a besoin de connaître leurs quantités, leurs relations les unes aux autres et leurs comparaisons les unes aux autres.

Et le rapport est une certaine relation ; et lorsqu'on a une certaine relation, elle ne peut exister qu'entre deux choses. Et cette expression — je veux dire le *rapport* — peut être employée dans les grandeurs et dans des choses autres que les grandeurs. En effet dans beaucoup de cas où des choses sont mises en relation les unes aux autres, on appelle *rapport* le fait de les mettre en relation. Par exemple l'homme ; on dit en effet à propos d'un certain homme qu'il est *arabe* ; on le met donc en relation aux Arabes lorsqu'il est un de leurs descendants. Et l'on dit qu'il est *irakien* ; on le met donc en relation à l'Irak lorsqu'il est un de ses habitants. On appelle donc cette relation *rapport*. Et les relations semblables à celle-ci sont nombreuses.

Et quant au rapport qui est dans les grandeurs, c'est une relation des unes aux autres quant à leurs quantités. Et le rapport des grandeurs les unes aux autres se divise en premier lieu en deux espèces ; et nous ne connaissons personne qui ait défini chacune de ces deux espèces à l'aide d'une définition qui la caractérise, ni qui l'ait dénommée par un nom qui l'isole. On pourra donc appeler l'une de ces espèces *le rapport indéterminé*, et appeler l'autre espèce *le rapport déterminé*.¹³

Donc le rapport indéterminé, c'est quand nous disons : *cette grandeur est plus grande que cette grandeur*, ou *cette grandeur est plus petite que cette grandeur* (et l'on emploie parfois l'expression *une partie [ba'd] de* au lieu de *plus petit que*). Or une grandeur qui est plus grande qu'une autre grandeur peut parfois être le double d'elle, et peut parfois être un multiple d'elle, et peut parfois être moindre que le double d'elle. Et de même la plus petite — et la partie [ba'd] — peut parfois être une partie [juz']¹⁴ de la grandeur la plus grande, et elle peut parfois être des parties d'elle, et elle peut parfois être ce qui est entre cela ; en effet il n'est pas vrai que chaque fois que l'on a deux grandeurs différentes, la plus petite est une partie [juz'] de la plus grande ou des parties (et nous allons expliquer cette notion dans ce qui va suivre). Il apparaît donc de cet exemple que lorsque nous disons à propos d'une grandeur qu'elle est plus grande qu'une autre grandeur, c'est un rapport indéterminé et non déterminé ; car le rapport déterminé est celui dont la grandeur n'admet pas d'être altérée.

Et quant au rapport déterminé, il se divise en trois espèces. La première d'entre elles est le rapport de l'égalité ; c'est quand nous disons : *cette grandeur est égale à cette grandeur*. Et quant à la deuxième espèce, c'est comme quand nous disons : *cette grandeur est le double de cette grandeur*, ou *tel ou tel multiple*, ou *la moitié d'elle*, ou

¹³ Cf. Aristote, *Métaphysique*, Δ, 15, 1020b 26 – 1021a 8.

¹⁴ Dans ce contexte, le mot *juz'* signifie une partie aliquote, tandis que *ba'd* signifie une partie au sens général, c'est-à-dire aliquote ou aliquante.

telle ou telle partie d'entre ses parties, ou telles ou telles parties, ou ce qui est composé à partir de cela. Et ce rapport est celui qui suit le rapport de l'égalité en degré ; car le rapport de l'égalité est le plus simple des rapports et il est l'élément de tous les rapports, alors que ce rapport vient après lui, il est dérivé de lui et il est rapporté à lui. Et quant à la troisième espèce, c'est comme quand nous disons : le rapport de cette grandeur à cette grandeur est le rapport de l'autre grandeur à cette autre grandeur, ou comme le rapport de telle ou telle grandeur à telle ou telle grandeur. Et ce rapport-ci contient en lui ces rapports-là, ainsi que d'autres. Quant au fait que ces rapports-là y soient contenus, c'est évident ; et quant au fait qu'il contient en lui d'autres rapports, cela apparaîtra par la suite.

Le rapport déterminé se divise donc en ces trois espèces ; et ces trois espèces se regroupent en deux espèces ; c'est-à-dire que le rapport déterminé peut être ou un rapport numérique ou un rapport non numérique. Et quant au rapport numérique, c'est le rapport de l'égalité, le rapport multiple, et le rapport des parties ; puisque le rapport de l'égalité, du multiple et des parties est le rapport de leur nombre.

Et quant au rapport non numérique, c'est celui qui peut exister mais qui ne peut pas être énoncé. Et ce rapport est dans la quantité continue, mais on l'emploie parfois dans les nombres en les rendant semblables aux grandeurs continues ; et c'est comme quand les arithméticiens disent : *la racine de dix*, et ce qui y ressemble parmi les choses qui n'ont pas de racine ; et comme quand ils disent : *racine de racine* à propos d'une chose qui n'a pas de racine de racine ; et comme quand ils disent : *le côté d'un cube* qui est tel nombre d'entre les nombres qui ne sont pas cubiques ; et de même *la racine de dix avec cinq en nombre* ou *moins tel nombre*. (Et les arithméticiens appellent tout cela *les [quantité] sourdes*.) On aura donc un exemple du rapport qui n'est pas numérique au moyen des nombres avec ces exemples, lorsque l'on rapporte ces racines et les choses qui leur sont analogues les unes aux autres, ou lorsqu'on les rapporte à leurs carrés ou aux nombres rationnels ; car leur rapport ne sera pas comme le rapport d'un nombre à un nombre.

Et quant aux grandeurs, ceux qui s'appliquent à l'art de la géométrie les divisent toutes en deux divisions : les sourdes et les rationnelles. Et le dixième Livre de l'ouvrage d'Euclide se borne à cette notion ; et nous expliquerons en commentant la postulation du dixième Livre ce que sont les sourdes et ce que sont les rationnelles, et nous traiterons en détail ces deux notions et parlerons de leur essence. Et quant à cet endroit-ci, nous allons parler de l'universalité du rapport.

Nous disons donc : Le rapport de la quantité continue se divise en deux divisions : un rapport numérique et un rapport non numérique. Quant au rapport numérique qui est dans la quantité continue, c'est que le rapport de deux grandeurs l'une à l'autre est comme le rapport d'un nombre à un nombre ; et cela est manifeste, car il peut exister parmi les grandeurs certaines dont l'une est un multiple de l'autre, et une partie d'elle, et des parties d'elle, et égale à elle ; et tous ces rapports existent dans les nombres.

Et quant au rapport non numérique, c'est que le rapport de deux grandeurs l'une à l'autre est comme le rapport d'une grandeur à une grandeur mais qu'il n'est pas comme le rapport d'un nombre à un nombre. Et une caractéristique de chaque paire de grandeurs ayant cet attribut, c'est que lorsque l'on soustrait de la plus grande des [grandeurs] égales à la plus petite, il restera d'elle un reste qui est plus petit que la plus

petite grandeur ; et lorsque l'on soustrait de la plus petite des [grandeurs] égales à ce reste, il restera de la plus petite un reste qui est plus petit que le premier reste ; et lorsque l'on soustrait du premier reste des [grandeurs] égales au deuxième reste, il restera de lui un reste qui est plus petit que le deuxième reste ; ainsi continuellement ; et le retranchement n'aboutira pas à un reste qui mesure exhaustivement le reste précédent, je veux dire qu'il ne sera pas un multiple de lui.¹⁵ Si en effet le retranchement aboutissait à un reste qui mesure celui qui le précède, ce reste mesurerait nécessairement les deux grandeurs ensemble (et cela a déjà été démontré dans les propositions du dixième Livre¹⁶) ; et lorsqu'une même grandeur mesure ensemble deux grandeurs, le rapport de l'une des deux grandeurs à l'autre sera comme le rapport d'un nombre à un nombre : en effet chacune des deux grandeurs sera un multiple de cette grandeur qui les mesure, de sorte que le rapport des deux grandeurs l'une à l'autre sera comme le rapport du nombre du multiple contenu dans l'une au nombre du multiple contenu dans l'autre.

Et quant au fait qu'il puisse exister deux grandeurs ayant cet attribut — je veux dire que le rapport de l'une à l'autre ne soit pas comme le rapport d'un nombre à un nombre — il est démontré dans le dixième Livre. Et nous n'admettons pas, en démontrant cette notion là-bas, l'existence de cette notion ; au contraire nous démontrerons l'existence de cela en commentant le début du dixième Livre. Et si nous ne l'avons pas établi ici, c'est uniquement parce que cet endroit-là lui convient, et parce que nous utiliserons pour son existence des propositions appliquées au rapport numérique parmi celles mentionnées dans le cinquième Livre et dans lesquelles n'est pas admise l'existence de cette notion. Et dès lors qu'il en est ainsi, il n'y aura aucun mal pour nous à ce que nous utilisions la mention de cette division dans cet endroit-ci, puis que nous démontrions son existence par la suite dans l'endroit qui lui convient.

Nous disons donc : Le rapport de toutes les grandeurs continues se divise en deux espèces : un rapport numérique et un rapport non numérique. Le rapport numérique est donc celui qui est tel qu'il existe des nombres selon son rapport, et le rapport non numérique est celui qui est tel qu'il n'existe pas de nombres selon son rapport.

Et le rapport numérique se divise en deux espèces : en l'égalité et en la différence. Et l'égalité est l'élément de tous les rapports ; c'est-à-dire que ce qui est plus grand n'est que ce qui excède ce qui est égal, et ce qui est plus petit est ce qui est inférieur à ce qui est égal. Et le multiple est des doubles¹⁷ de ce qui est égal, tous égaux entre eux. Et lorsque la plus petite de deux grandeurs est une partie de la plus grande, la plus grande sera une multitude de grandeurs dont chacune est égale à la plus petite. Et lorsque la

¹⁵ C'est à ce passage que Plooiij se réfère lorsqu'il dit (*op. cit.*, p. 53) qu'Ibn al-Haytham remarque que chaque paire de grandeurs dont le rapport n'est pas numérique est caractérisée par le fait que le processus de soustractions alternatives — appelé « anthyphérèse » ou « algorithme d'Euclide » — se poursuit indéfiniment. C'est probablement ce passage, sorti de son contexte, qui a amené Plooiij à identifier la démarche d'Ibn al-Haytham avec celles d'al-Māhānī, d'al-Nayrīzī et d'al-Khayyām, et à affirmer que la méthode était dans les quatre cas essentiellement la même et basée sur l'anthyphérèse (*op. cit.*, pp. 57 et 60-1). C'est là l'origine des affirmations selon lesquelles Ibn al-Haytham aurait défini la proportion entre grandeurs à l'aide de l'anthyphérèse, et qu'il aurait établi un lien entre cette définition et celle d'Euclide (voir [Dold-Samplonius, 1974], pp. 21-2 ; [Youschkevitch, 1976], p. 84 ; [Vahabzadeh, 1994], p. 182 ; [Saccheri, 2014], p. 315) ; ou qu'il aurait au moins interprété la notion de rapport d'une manière anthyphérétique (voir [Vitrac, 2002], V. 5, p. 177). Une fois ce passage remis dans son contexte, on constate qu'Ibn al-Haytham y énonce une caractéristique de deux grandeurs incommensurables — et non de leur rapport — qui n'est rien d'autre que la converse de la Proposition X. 2 des *Éléments*.

¹⁶ Voir la démonstration de la Proposition X. 3 des *Éléments*.

¹⁷ Dans le sens de *copies, duplicata*.

plus petite est des parties de la plus grande, la plus grande contiendra une multitude de grandeurs égales entre elles, et la plus petite contiendra une multitude de grandeurs égales entre elles, et chacune des grandeurs qui sont contenues dans la plus petite sera égale à chacune des grandeurs qui sont contenues dans la plus grande. Il apparaît donc de cette différenciation que l'égalité est l'élément de tous les rapports, je veux dire le principe auquel tous les rapports se ramènent.

Et la définition du rapport que¹⁸ l'on trouve dans toutes les espèces de la quantité continue, celle qui rassemble tous ses rapports, est celle par laquelle les Anciens l'ont défini, à savoir *que le rapport est la « quelléité »¹⁹ de la mesure [qadr] de l'une des deux grandeurs relativement à l'autre*. Et l'interprétation de cet énoncé est que le rapport est la notion qui est dans la quantité des grandeurs [et] sur laquelle on s'interroge par *quel*. Et les Modernes ont défini le rapport avec des termes autres que ces termes, et voici leur énoncé : *c'est une certaine relation de deux grandeurs homogènes, l'une à l'autre, quant à la grandeur [miqdār]*. Et Euclide avait mentionné la définition du rapport au début du cinquième Livre de son ouvrage : dans certaines copies on trouve la première expression, et dans d'autres on trouve la deuxième expression ; et chacune des expressions est une définition vraie, car l'on ne saurait vraiment s'interroger sur la relation de l'une des deux grandeurs à l'autre quant à la mesure [miqdāriyya], si ce n'est par *quel*. Mais il serait possible de définir le rapport avec des termes plus explicites que les termes de ces deux définitions, à savoir *que le rapport de l'une des deux grandeurs à l'autre est la comparaison de la quantité de l'une des deux grandeurs à la quantité de l'autre grandeur*. Nous avons donc achevé de différencier la notion de rapport et de la définir.

Revenons donc maintenant aux termes par lesquelles Euclide débute le cinquième Livre de son ouvrage. La première chose qu'Euclide a mentionnée au début de ce Livre est son énoncé : *La partie, c'est la grandeur la plus petite relativement à la grandeur la plus grande, lorsqu'elle mesure la plus grande ; et le multiple, c'est la plus grande relativement à la plus petite, lorsque la plus petite la mesure*. Et ces deux énoncés sont des définitions vraies de la partie et du multiple. C'est-à-dire que chaque fois que l'on a deux grandeurs différentes et que l'on divise la plus grande en divisions égales entre elles dont chacune est égale à la plus petite, soit il restera d'elle un reste qui sera plus petit que la grandeur la plus petite, soit il ne restera rien d'elle. Si la plus grande se divise en grandeurs égales entre elles dont chacune est égale à la plus petite, la plus petite mesurera la plus grande ; et le sens de *elle mesurera* est qu'elle sera égale à chacune de ses parties [i.e. des parties de la plus grande]. Si donc les deux grandeurs sont d'un certain genre dans lequel l'application est vraie, comme les lignes et les surfaces qui sont d'un même genre, la mesure des unes par les autres sera alors possible

¹⁸ Le pronom relatif *que* se réfère à *rapport*, comme l'indique le genre du pronom relatif arabe.

¹⁹ Nous reprenons ici, avec une légère variante, un néologisme forgé par J. Jolivet et R. Rashed pour traduire le nom abstrait *ayyiyya* dérivé de l'interrogatif *ayy* (quel). Rappelons que dans le traité où ce néologisme a été introduit, à savoir la *Philosophie Première* d'al-Kindī, la « quelléité » d'une chose est ce qui répond à la question *Quelle est-elle ?*, question qui s'enquiert de la différence spécifique ; en d'autre termes, elle indique le caractère par lequel une espèce se distingue des autres espèces du même genre (voir [Jolivet et Rashed, 1998], pp. 10-1, 48-9, 101-2 *Ad note 6*, et 106 *Ad note 48*). Une autre alternative, qui cependant ne refléterait pas la morphologie du mot arabe, serait de traduire *ayyiyya* par *spécificité* ; Sude l'a d'ailleurs traduit par *specification* ([Sude, 1974a], pp. 174 l. 5, 206 et 237). Voir également en annexe l'usage qu'Ibn al-Haytham fait de ce mot lorsqu'il commente la définition euclidienne des nombres proportionnels.

puisqu'elles s'appliquent les unes sur les autres. Donc lorsque la partie et son multiple sont deux lignes d'un même genre, il sera possible d'appliquer la plus petite sur une partie puis une partie de la plus grande jusqu'à ce qu'elle l'épuise et qu'il ne reste rien d'elle. Mais il se peut dans le cas des surfaces que la plus grande soit un multiple de la plus petite bien que l'on ne puisse appliquer la plus petite sur une partie puis une partie de la plus grande jusqu'à ce qu'elle l'épuise. C'est-à-dire qu'il est possible que deux surfaces soient d'un même genre et qu'elles soient égales entre elles, bien que l'on ne puisse appliquer l'une des deux sur l'autre ; comme la surface rectangulaire et la surface rhomboïdale, lorsque leurs bases sont une même ligne et qu'elles sont comprises entre deux lignes parallèles. (Et il a déjà démontré dans le premier Livre que ces deux surfaces sont égales entre elles.²⁰) Et de même lorsque la base du rhomboïde est un multiple de la base de la surface rectangulaire, le rhomboïde sera un multiple de la surface rectangulaire ; et malgré cela la surface rectangulaire ne mesurera pas la surface rhomboïdale : les deux possèdent l'attribut que nous avons défini au moyen de l'application, et les deux sont de même genre puisqu'elles sont des surfaces planes. Et de même le triangle et le quadrilatère peuvent être égaux entre eux bien que l'un ne s'applique pas sur l'autre, et l'un peut être un multiple de l'autre bien qu'il ne le mesure pas par application. (Et l'égalité du triangle et du quadrilatère a été démontrée dans le premier Livre et dans le deuxième Livre.²¹) Et quant aux corps, ils peuvent vraiment être égaux entre eux et les uns être des multiples des autres, bien qu'ils ne puissent vraiment s'appliquer les uns sur les autres.

Donc ce qui est commun à toutes les grandeurs homogènes, c'est qu'elles sont égales entre elles et que les unes sont des multiples des autres, qu'elles s'appliquent les unes sur les autres ou qu'elles ne s'appliquent pas. Et puisqu'il en est ainsi, l'énoncé d'Euclide concernant la partie — *lorsqu'elle mesure la plus grande* — signifie qu'il est possible de diviser la plus grande en divisions égales entre elles dont chacune est égale à la plus petite ; car l'énoncé qu'il a mentionné est un énoncé universel, je veux dire pour chaque partie de chaque grandeur. Et dès lors que l'application n'est pas vraie dans le cas de toutes les grandeurs tandis que l'égalité est vraie dans les cas de toutes, la mesure ne sera pas universelle sauf si elle signifie l'égalité ; et le fait d'appeler ici l'égalité *mesure* est uniquement dérivé de l'égalité des grandeurs qui s'appliquent les unes sur les autres. Il apparaît donc de ce que nous avons mentionné que l'énoncé d'Euclide *lorsqu'elle mesure la plus grande* signifie bien *lorsqu'elle est égale à chacune de ses parties*.

Et dès lors que certaines paires de grandeurs homogènes différentes de grandeur sont telles que la plus grande peut se diviser en grandeurs égales entre elles et égales à la plus petite grandeur ; et que certaines sont telles que la plus grande ne se divise pas en grandeurs égales entre elles et égales à la plus petite grandeur, qu'au contraire il reste d'elle un reste qui est plus petit que la plus petite grandeur ; la plus petite se divisera en deux espèces qui ont en commun la petitesse, et dont l'une a en propre la mesure de la plus grande, i.e. elle est égale à toutes les parties de la plus grande. Donc la mesure devient ici une différence [spécifique] ; donc l'énoncé est une définition parfaite. Et de même lorsque la grandeur la plus grande est mesurée par la plus petite grandeur, la plus

²⁰ Voir la Proposition I. 35 des *Éléments*.

²¹ Voir les Propositions I. 42, I. 44 & II. 14 des *Éléments*.

grande se divisera en deux espèces, dont l'une est que la plus grande se divise en parties égales entre elles dont chacune est égale à la plus petite, et l'autre qu'il reste d'elle un reste qui est plus petit que la grandeur la plus petite. Donc la plus grande ou sera un multiple de la plus petite, ou ne sera pas un multiple : est multiple celle qui est mesurée par la plus petite, et celle qui n'est pas multiple est celle qui n'est pas mesurée par la plus petite. Donc la mesure par la plus petite devient en cet endroit une différence [spécifique] ; donc l'énoncé est une définition parfaite.

Et le mot *doubles* signifie *égaux*. Le singulier de *doubles* est *double* ; et *double* a le même sens que *égal*. (Le duel de *égal* est parfois désigné par le singulier *double*, et parfois par le duel de *double*, le premier nom étant une métaphore qu'on emploie souvent ; mais la signification véritable de *égal* au duel est *double* au duel.) Et ce qui indique que *double* a le même sens que *égal*, c'est que lorsque l'on dit à propos d'une grandeur qu'elle est *cinq doubles* d'une autre grandeur, ou *dix doubles*, ou un nombre quelconque de doubles, on veut uniquement signifier *cinq [grandeurs] égales*, ou *dix [grandeurs] égales*, ou un nombre quelconque de [grandeurs] égales. Or le singulier de *doubles* est *double*, et le singulier de *égaux* est *égal*. Donc puisque *doubles* signifie *égaux*, le singulier *double* aura le même sens que le singulier *égal*.²²

Puis Euclide mentionne après ces deux définitions la définition du rapport ; et on en a déjà parlé.

Puis Euclide dit après avoir défini le rapport : *Et les grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres, ce sont celles qui peuvent, lorsqu'elles sont multipliées, s'excéder les unes les autres*. Et le sens de cet énoncé et l'objectif d'Euclide sont ambigus aux yeux de beaucoup de personnes. Mais il est clair que cet énoncé est une définition des grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres : non pas une définition au sens strict, mais plutôt une définition et une chose à admettre. C'est-à-dire que les grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres sont celles qui sont d'une même espèce, et dont l'espèce de l'une ne se différencie pas de l'espèce de l'autre par une différence d'entre les différences ; comme une ligne droite et une ligne droite, une ligne circulaire et une ligne circulaire d'un même cercle ou de deux cercles égaux, une surface plane et une surface plane, une surface sphérique et une surface sphérique d'une même sphère ou de deux sphères égales, et tout ce qui est semblable à cela. Et dans l'ensemble, la vérité des grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres est que ce sont celles qui sont telles, que l'égalité peut vraiment tomber entre leurs deux espèces ; et lorsque l'égalité tombe entre leurs deux espèces, leurs deux espèces seront une même espèce.

Quant à l'énoncé d'Euclide *ce sont celles qui peuvent, lorsqu'elles sont multipliées, s'excéder les unes les autres*, il implique l'égalité dans leurs deux espèces. C'est-à-dire qu'une grandeur excède une grandeur uniquement lorsqu'elle contient une grandeur égale à elle et un excès. Donc son énoncé *elles s'excèdent les unes les autres* implique

²² Dans ce passage, que nous avons été obligé de rendre assez librement, Ibn al-Haytham se propose du justifier le sens du mot *ad'āf*, le terme employé en mathématiques pour exprimer la notion de *multiple*. Pour comprendre ce passage, il faut savoir que la langue arabe a trois nombres, le singulier, le duel et le pluriel ; et que le mot *ad'āf* est morphologiquement un pluriel dont le singulier *di'f* (tout comme le mot français *double*) signifie : 1° une même chose répétée deux fois ; 2° une copie d'une chose. Ibn al-Haytham considère le premier sens comme une métaphore où le singulier est pris pour un duel. Il justifie le second par l'usage : on sait que le pluriel *ad'āf* a le même sens que le pluriel *amtāl* ; le singulier *di'f* doit donc avoir le même sens que le singulier *miṭl*. Or *miṭl* signifie *même*, *égal* ; donc *di'f* aussi. Donc le pluriel *ad'āf* désigne des *mêmes* choses ou des choses *égales*. C.Q.F.D.

bien la notion d'égalité dans les espèces des deux grandeurs. Et dès lors qu'il implique la notion d'égalité dans les espèces des deux grandeurs, il implique la définition des grandeurs qui ont un rapport l'une à l'autre. Et s'il a posé l'excès dans le cas des multiples des grandeurs qui ont un rapport l'une à l'autre, sans mentionner les espèces des deux grandeurs ni les grandeurs elles-mêmes, c'est uniquement du fait qu'il utilise parfois dans les démonstrations des propositions qui parlent du rapport des unes aux autres, l'excès du multiple de l'une sur le multiple de l'autre. C'est-à-dire que lorsqu'il parle de quatre grandeurs dont il veut démontrer que le rapport de deux d'entre elles, l'une à l'autre, est comme le rapport des deux autres, ou plus grand que le rapport des deux autres ou plus petit, il prend alors des équimultiples de deux d'entre elles, et des équimultiples des deux autres ; puis il dit : *Si ce multiple excède ce multiple, le multiple homologue au multiple qui excède excédera le multiple homologue au multiple qui est inférieur*. Puis il dit : *Et s'il est inférieur, il sera inférieur ; et s'il est égal, il sera égal*. *Et lorsqu'une des grandeurs est inférieure à l'autre, l'autre l'excédera*. Puis il donne la conclusion de ces excès. Donc s'il n'avait pas fait admettre en tant que postulat entre lui et l'étudiant que les multiples des grandeurs que l'on rapporte les unes aux autres peuvent s'excéder, il n'aurait pas pu utiliser l'excès en tant que chose admise. Il a donc avancé au début du Livre que *les grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres, ce sont celles qui peuvent, lorsqu'elles sont multipliées, s'excéder les unes les autres*, pour que cet énoncé soit une définition des grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres, et avec cela fasse admettre que cette propriété — i.e. les grandeurs qui ont un rapport entre elles sont celles dont les multiples peuvent s'excéder — est concomitante des grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres. Et cet énoncé est un énoncé vrai, et il est analogue à une définition. Car chaque fois que deux grandeurs ont vraiment entre elles un rapport, l'égalité tombe entre leurs deux espèces ; et lorsque l'égalité tombe entre les deux, l'excès tombe entre les deux ; et lorsque l'égalité et l'excès tombent entre leurs deux espèces, les multiples des deux grandeurs — je veux dire ceux d'entre les multiples qui sont homologues — ou sont égaux entre eux, ou l'un des deux excède l'autre ; et l'on peut ajouter à l'un de ceux qui sont égaux un excès ; et lorsqu'on ajoute à l'un d'eux un excès, l'un d'eux excédera l'autre. Et dès lors qu'il en est ainsi, l'excès entre les multiples des grandeurs est une propriété concomitante que l'on pourra trouver dans les multiples de chaque paire de grandeurs qui ont vraiment entre elles un rapport — je veux dire chaque paire de grandeurs d'une même espèce. Et dès lors que l'excès est une propriété concomitante des multiples de chaque paire de grandeurs qui ont vraiment entre elles un rapport, l'énoncé qui implique cette propriété sera un énoncé qui indique la quiddité des grandeurs qui ont vraiment entre elles un rapport et, avec cela, que l'excès entre les multiples est une propriété concomitante des grandeurs qui ont les unes aux autres un rapport. Donc l'énoncé d'Euclide *les grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres, ce sont celles qui peuvent, lorsqu'elles sont multipliées, s'excéder les unes les autres*, est une définition des grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres et, avec cela, une admission et une indication que chaque fois que deux grandeurs ont entre elles un rapport, leurs multiples peuvent s'excéder. Et il a fait admettre et a indiqué la possibilité de l'excès dans le cas des multiples, afin que lorsqu'il utilisera l'excès dans le cas des multiples de chaque paire de grandeurs dont l'une est rapportée à l'autre, rien ne s'y oppose.

Donc tout ce que nous avons mentionné fait clairement apparaître quel est le sens de l'énoncé d'Euclide *les grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres, ce sont celles qui peuvent, lorsqu'elles sont multipliées, s'excéder les unes les autres*, et quelle est son intention à son sujet ; que le sens de son énoncé est de définir les grandeurs qui ont un rapport les unes aux autres ; et que son intention à son sujet, et au sujet de la mention de l'excès entre les multiples, est uniquement de faire admettre la possibilité de l'excès entre les multiples afin d'utiliser l'excès entre les multiples en tant que proposition admise.

Puis Euclide dit après cet énoncé : *Et l'on dit que les grandeurs sont selon un même rapport, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième, lorsque les équimultiples que l'on prend de la première et de la troisième ou excèdent simultanément les équimultiples que l'on prend de la deuxième et de la quatrième, ou sont simultanément égaux à eux, ou sont simultanément inférieurs à eux, lorsqu'on les prend successivement, quels que soient les multiples*. Et le sens de cet énoncé est que lorsque l'on a quatre grandeurs, et qu'elles sont telles que quand on prend de la première d'entre elles et de la troisième des équimultiples, et qu'on prend de la deuxième et de la quatrième des équimultiples, quels que soient les multiples, on trouve que si le multiple de la première excède le multiple de la deuxième, le multiple de la troisième excède le multiple de la quatrième, que s'il est inférieur au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est inférieur au multiple de la quatrième, et que s'il est égal au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est égal au multiple de la quatrième, alors, le rapport de la première à la deuxième est [le même que] le rapport de la troisième à la quatrième. Euclide a donc posé cet énoncé comme définition des grandeurs proportionnelles, car son énoncé *on dit que les grandeurs sont selon un même rapport* signifie les grandeurs que l'on appelle proportionnelles. (Et de fait il a mentionné cela après cet énoncé ; et voici son énoncé : *Et les grandeurs dont le rapport est le même sont appelées proportionnelles*.) Donc l'ensemble de l'énoncé est que les grandeurs proportionnelles sont celles dont la caractéristique est cette caractéristique.

Et ce concept est — par ma vie ! — une caractéristique concomitante des grandeurs proportionnelles, sauf qu'elle n'est pas évidente pour l'intelligence à l'aide de ce seul énoncé ; elle a au contraire besoin d'une explication et d'un éclaircissement. C'est-à-dire qu'il n'est pas évident pour l'intelligence qu'il puisse exister des grandeurs avec cette qualité. Et lorsqu'on utilise dans une définition des caractéristiques qui ne sont pas évidentes, la définition a besoin d'une explication (et je veux dire par *définition* tout ce que les géomètres appellent une définition). Donc cet énoncé a de toutes les manières besoin d'une explication. Et si Euclide ne l'a pas démontré, c'est uniquement parce que sa démonstration [i.e. la démonstration de cet énoncé] est arbitraire. Et il ne s'est pas abstenu de poser cet énoncé comme définition et de le postuler sans démonstration, car c'est un énoncé vrai. (De la même manière qu'il ne s'était pas abstenu d'avancer la proposition qu'il a avancée au début du premier Livre, du fait que c'est une proposition vraie, à savoir la droite tombant sur les deux droites qui fait les angles intérieurs plus petits que deux droits.) Et dès lors que notre but dans ce discours est de commenter les difficultés de certains postulats de cet ouvrage, nous devons obligatoirement démontrer cette proposition, je veux dire la définition des grandeurs proportionnelles, par une preuve indubitable. Et lorsque nous l'aurons démontrée par une preuve, il ne sera plus

permis qu'elle soit une prémisse que l'on postule ; au contraire il ne sera pas possible qu'elle soit autre qu'une proposition parmi les propositions de l'ouvrage ; et nous la démontrerons après avoir terminé toutes les prémisses qu'Euclide a mentionnées au début de ce Livre.

Puis Euclide dit : *Et lorsque les équimultiples sont tels, que d'une part le multiple du premier excède le multiple du deuxième, et d'autre part le multiple du troisième n'excède pas le multiple du quatrième ; alors le rapport de la première à la deuxième est dit être plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième.* Et cet énoncé est une définition des grandeurs différentes de rapport. Et cette caractéristique, je veux dire le fait que l'un des multiples excède son conjoint sans que le multiple homologue excède son conjoint, est une caractéristique concomitante des grandeurs différentes de rapport, sauf qu'elle aussi n'est pas évidente pour l'intelligence ; elle a au contraire besoin d'une explication, car il n'est pas évident pour l'intelligence qu'il puisse exister des grandeurs avec cette qualité. Et dès lors que ce concept n'est pas évident, nous le démontrerons après avoir démontré la caractéristique des [grandeurs] proportionnelles.

Puis Euclide dit : *Et une proportion est au moins en trois termes.* C'est-à-dire que la proportion est la similitude des rapports ; et il est parfois possible que plusieurs grandeurs soient associées à plusieurs autres grandeurs, et que le rapport de chacune d'entre elles à son conjoint soit comme le rapport de chacune de celles qui restent à son conjoint ; et chaque fois que deux grandeurs sont rapportées l'une à l'autre, elles sont appelées les *termes* du rapport. Donc il suit de cela qu'une proportion est en plusieurs termes ; sauf qu'une similitude a au moins deux rapports puisque l'un des deux rapports est semblable à l'autre. Et deux rapports peuvent être en quatre termes, lorsque chacun est entre deux termes qui sont différents que les termes de l'autre rapport. Et il est parfois possible que deux rapports soient en trois termes, lorsque les deux ont un terme en commun, c'est-à-dire que le deuxième terme du premier rapport est le premier terme du deuxième rapport. Mais il n'est pas possible que deux rapports soient en moins que trois termes, car entre deux termes il n'y a qu'un seul rapport. Et dès lors que la proportion est la similitude des rapports, que la similitude des rapports n'est pas en moins de deux rapports, et que deux rapports ne sont pas en moins de trois termes, la proportion par conséquent ne sera pas en moins de trois termes. Donc la vérité de l'énoncé selon lequel *la proportion est en trois termes au moins* est évidente.

Puis Euclide dit : *Et lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première à la troisième est dit être son rapport à la deuxième doublé.* Et le sens de cet énoncé, c'est que lorsque le rapport de la première à la deuxième est comme le rapport de la deuxième à la troisième, le rapport de la première à la troisième est le rapport de la première à la deuxième réitéré. Et c'est une proposition vraie, et qui devient claire à l'aide d'un exemple. *Exemple.* Lorsque la première est le double de la deuxième, et que la deuxième est le double de la troisième, la première est le double du double de la troisième ; de même si la première est la moitié de la deuxième, et que la deuxième est la moitié de la troisième, la première est la moitié de la moitié de la troisième ; et de même le rapport de toutes les parties et de tous les multiples. Et de même si un rapport est comme le rapport d'une grandeur à une grandeur mais pas comme le rapport d'un nombre à un nombre, le doubler c'est le réitérer de la même manière que l'on a réitéré le rapport numérique ; sauf que la différence entre ce [rapport] et entre le numérique, c'est

que le numérique est énoncé, alors que le non numérique ne peut pas être énoncé ; donc il existe par construction, il est réitéré par construction,²³ mais il n'est pas énoncé ; tandis que le rapport numérique existe par construction, il est réitéré par construction, et avec cela il peut être énoncé. Donc le sens de *son rapport à la deuxième doublé*, c'est réitérer le rapport qui est le rapport de la première à la deuxième, qu'il soit numérique ou non numérique.

Puis Euclide dit : *Et si quatre grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première à la quatrième est dit être le rapport de la première à la deuxième triplé*. Et cette notion est la notion qui la précède. Mais puisque le rapport qui est en trois termes est deux rapports, le rapport de la première à la troisième sera son rapport à la deuxième réitéré deux fois. Et lorsque le rapport est en quatre termes, les rapports sont [au nombre de] trois ; donc le rapport de la première à la quatrième sera son rapport à la deuxième réitéré trois fois. *Exemple*. Que la première soit le double de la deuxième, la deuxième le double de la troisième et la troisième le double de la quatrième ; la première sera alors le double du double du double de la quatrième. Et de même dans le cas des parties et dans le cas des grands multiples, et dans le cas de tous les rapports numériques ; et de même les rapports non numériques. Et cette notion est inhérente à toutes les grandeurs proportionnelles dont les termes sont communs, quel que soit le nombre des grandeurs ; et c'est pour cela qu'Euclide dit après cet énoncé : *et de même ce qui suit cela*.

Puis Euclide dit : *Les grandeurs qui sont dites homologues dans le rapport sont les [grandeurs] antécédentes aux [grandeurs] antécédentes, et les conséquentes aux conséquentes*. C'est-à-dire qu'il ne fait aucun doute que dans le cas de chaque paire de grandeurs que l'on rapporte les unes aux autres, on commence la mention du rapport qu'il y a entre les deux par l'une des deux pour ensuite la rapporter à l'autre ; donc l'une des deux de toutes les manières précédera l'autre dans la mention. Euclide a donc appelées les grandeurs par lesquelles on commence dans le rapport *homologues*, et de même les grandeurs qui viennent à la fin dans le rapport. Et celles par lesquelles on commence sont antécédentes, car elles précèdent dans l'expression et la désignation ; et celles qui viennent à la fin sont conséquentes, car elles suivent dans l'expression et la désignation. Il a donc dit : *Les grandeurs qui sont dites homologues dans le rapport sont les antécédentes aux antécédentes, et les conséquentes aux conséquentes*. Il veut dire que les grandeurs antécédentes sont homologues aux grandeurs antécédentes, et les conséquentes homologues aux conséquentes. Et il a uniquement avancé cet énoncé afin qu'on comprenne son intention, lorsqu'il dira dans le cas de certaines grandeurs dont on mentionne les rapports *chacune à son homologue*, ou qu'il mentionnera *l'homologue*.

Puis il dit : *Alterner un rapport, c'est <prendre> le rapport des antécédentes aux antécédentes, et des conséquentes aux conséquentes*. Et cet énoncé est un nom par lequel il nomme le fait d'altérer un rapport de cette manière : c'est-à-dire que lorsqu'on a quatre grandeurs, et qu'on rapporte la première d'entre elles à la deuxième, et qu'on rapporte la troisième à la quatrième en connexion avec le rapport de la première à la deuxième ; qu'ensuite on a besoin de rapporter la première à la troisième, et de rapporter aussi la deuxième à la quatrième en connexion avec le rapport de la première à la troisième ; on appelle cette altération *alterner [ibdāl] un rapport*. (Et l'on dit parfois *alterner [tabdīl] un rapport*.)

²³ Voir la Proposition VI. 11 des *Éléments*.

Puis il dit : *Composer un rapport, c'est prendre le rapport de l'antécédente et de la conséquente ensemble à la conséquente*. Et cet énoncé est aussi un nom pour une sorte d'altération du rapport, à savoir : lorsque l'on a deux grandeurs dont l'une est déjà rapportée à l'autre, qu'ensuite les deux grandeurs sont ajoutées et posées comme une seule grandeur, et leur somme rapportée à celle d'entre elles qui est la conséquente comme on rapporterait une seule grandeur à son conjoint, on appelle cette action *composer un rapport*. Et il dit *l'antécédente et la conséquente* car celle par laquelle on commence dans le rapport est appelée *antécédente*, et celle qui vient à la fin est appelée *conséquente*, conformément à ce que nous avons mentionné avant.

Puis il dit : *Séparer un rapport, c'est prendre le rapport de l'excès de l'antécédente sur la conséquente à la conséquente*. Et cet énoncé est aussi un nom pour une sorte d'altération du rapport, à savoir : lorsqu'on a deux grandeurs dont l'une est une partie [ba'd] de l'autre et qu'on rapporte la plus grande à la plus petite, qu'ensuite on rapporte l'excès de la plus grande sur la plus petite à la plus petite, on appelle cette altération *séparer un rapport*.

Puis il dit : *Convertir un rapport, c'est prendre le rapport de l'antécédente à son excès sur la conséquente*. Et cet énoncé est un nom pour cette sorte d'altération du rapport, à savoir : lorsqu'on a deux grandeurs dont l'une est une partie [ba'd] de l'autre et qu'on rapporte la plus grande à la plus petite, qu'ensuite on rapporte la plus grande à son excès sur la plus petite, on appelle cette sorte d'altération *convertir un rapport*.

Puis il dit : *Inverser un rapport, c'est que l'on prenne la conséquente et qu'on la pose comme antécédente et qu'on la rapporte à l'antécédente, et que l'on pose l'antécédente comme conséquente*. Et cet énoncé est aussi un nom pour cette sorte d'altération : c'est-à-dire que l'on rapporte une grandeur à une grandeur de sorte que l'une des deux est antécédente et l'autre conséquente, qu'ensuite on commence par la conséquente et on la rapporte à l'antécédente ; on appelle alors cette action *inverser un rapport*.

Puis il dit : *Le rapport d'égalisation c'est : lorsqu'on a un certain nombre de grandeurs et d'autres grandeurs en même nombre, le rapport d'égalisation est le rapport des extrêmes lorsqu'on a laissé tomber les grandeurs qui sont au milieu*. Et cet énoncé est aussi un nom pour une sorte d'altération du rapport, à savoir : lorsqu'on a des grandeurs et d'autres grandeurs en même nombre, et que l'on rapporte chacune des premières grandeurs à son conjoint et que l'on rapporte aussi chacune des autres grandeurs à son conjoint, qu'ensuite on rapporte les deux extrêmes des premières grandeurs l'une à l'autre et que l'on rapporte aussi les deux extrêmes des autres grandeurs l'une à l'autre en connexion avec le rapport des deux extrêmes des deux premières, on appelle cette action *le rapport d'égalisation*. Ceci est la fin de ce qu'Euclide a mentionné au début du cinquième Livre.

Il nous reste à démontrer les deux propositions précédentes qui traitent des grandeurs proportionnelles et des grandeurs différentes de rapport ; et nous les démontrons maintenant à l'aide d'une preuve en tant qu'elles sont deux propositions d'entre les propositions de ce Livre ; de plus nous les convertissons et nous démontrons la converse pour que l'idée des deux [propositions] soit régulière, convertible. Et nous utiliserons en prouvant tout cela des prémisses premières, et seulement une seule proposition d'entre

les propositions de ce Livre, dans la preuve de laquelle il n'a rien utilisé de ces deux propositions ni rien qui s'y rattache. Il y a donc parmi les prémisses premières que nous utiliserons dans cette preuve celle-ci : *Lorsque l'on a quatre grandeurs et que le rapport de la première à l'ensemble de la deuxième est le rapport de la troisième à l'ensemble de la quatrième, le rapport de la première à une partie [ba'd] de la deuxième est le rapport de la troisième à une partie [ba'd] de la quatrième.*²⁴ Et notamment : *Que chaque grandeur peut être divisée en deux moitiés, et chacune de ses deux moitiés peut être divisée en deux moitiés et chacune des moitiés de ses moitiés en deux moitiés, jusqu'à ce que le nombre des parties devienne plus grand qu'un nombre donné.* Et notamment : *Que lorsque l'on a deux grandeurs différentes, la plus petite peut être multipliée de nombreuses fois jusqu'à ce que l'on aboutisse à une grandeur plus grande que la grandeur la plus grande.* (On a déjà mentionné cette prémisse et son utilisation.) Et la proposition que nous utiliserons d'entre les propositions de ce Livre en est la première proposition ; et il n'utilise pas en prouvant cette proposition, je veux dire la première, rien qui se rattache aux propositions que nous démontrons, et avec cela cette proposition, je veux dire la première, peut être démontrée par la parole sans tracer des lignes ni des figures.

Et maintenant que nous avons avancé cela, soient quatre grandeurs proportionnelles, à savoir AB , CD , EG , HI ; et que le rapport de AB à CD soit comme le rapport EG à HI . Qu'il y ait dans la grandeur S autant de [grandeurs] égales à AB , qu'il y a dans la grandeur U de [grandeurs] égales à EG ;²⁵ et qu'il y ait dans la grandeur Q autant de [grandeurs] égales à CD , qu'il y a dans la grandeur J de [grandeurs] égales à HI . Je dis alors que si la grandeur S excède la grandeur Q , la grandeur U excède la grandeur J ; et que si S est inférieure à la grandeur Q , U est inférieure à la grandeur J ; et que si S est égale à la grandeur Q , U est égale à la grandeur J ; quelques multiples que soient les multiples S , U , et quelques multiples que soient les multiples Q , J .

Preuve. On a déjà avancé que chaque rapport entre deux grandeurs est parfois un rapport numérique, et qu'il est parfois un rapport non numérique. Donc le rapport de AB à CD ou est un rapport numérique, ou il n'est pas numérique. Donc que le rapport de AB à CD soit premièrement un rapport numérique. En conséquence de cela le rapport de EG à HI sera aussi un rapport numérique, et homonyme du rapport de AB à CD à cause de l'égalité des deux rapports (et je veux dire par *homonyme* que son nom est semblable à son nom). Donc puisque le rapport de AB à CD est comme le rapport d'un nombre à un nombre, la grandeur AB sera une partie de la grandeur CD ou un multiple d'elle ou égale à elle ; ou il y aura dans la grandeur AB des parties égales entre elles homonymes du nombre rapporté,²⁶ et il y aura dans CD des parties égales entre elles homonymes du nombre auquel il est rapporté,²⁷ et chacune des parties égales de AB sera égale à chacune des parties égales de CD , car les nombres ont cet attribut. Qu'il y ait dans AB , CD des parties égales entre elles, et que les parties de AB homonymes du nombre rapporté soient les parties AK , KB , et que les parties de CD homonymes du nombre auquel il est

²⁴ Le terme *ba'd* employé par Ibn al-Haytham indique qu'il s'agit ici d'une partie au sens général, c'est-à-dire d'une partie aliquote ou aliquante (cf. note 14).

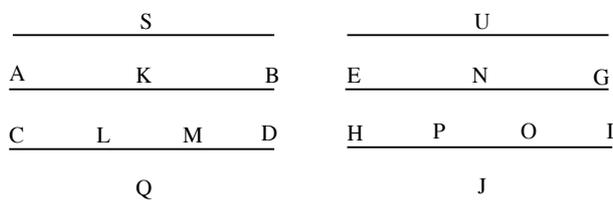
²⁵ Autrement dit : Que S soit le même multiple de AB , que U l'est de EG .

²⁶ i.e. le nombre qui est l'antécédent du rapport.

²⁷ i.e. le nombre qui est le conséquent du rapport.

rapporté soient les parties CL, LM, MD ; chacune des parties AK, KB sera donc égale à chacune des parties CL, LM, MD .

Et puisque le rapport de EG à HI est comme le rapport de AB à CD , les deux nombres homonymes du rapport de EG à HI sont les deux nombres homonymes du rapport de AB à CD ; et il y aura dans EG des parties égales entre elles homonymes du nombre rapporté, et il y aura dans HI des parties égales entre elles homonymes du nombre auquel il est rapporté ; et chacune des parties contenues dans EG sera égale à chacune des parties contenues dans HI . Que les parties de EG homonymes du nombre rapporté soient donc les parties EN, NG ; et que les parties de HI homonymes du nombre auquel il est rapporté soient les parties HP, PO, OI . Donc le nombre de parties contenues dans AB sera le même que le nombre de parties contenues dans EG , car le nombre rapporté est dans tous les deux rapports un même nombre ; et de même le nombre de parties contenues dans CD sera le même que le nombre de parties contenues dans HI , car le nombre auquel il est rapporté est aussi dans les deux rapports un même nombre.



De plus du fait que S est un multiple de AB , il y aura dans la grandeur S des parties égales entre elles dont chacune est égale à chacune des parties AK, KB ; et puisque Q est un multiple de CD , il y aura dans la grandeur Q des parties égales entre elles dont chacune est égale à chacune des parties CL, LM, MD . Et puisque chacune des parties de AB est égale à chacune des parties CD , chacune des parties égales qui sont contenues dans la grandeur S sera égale à chacune des parties égales qui sont contenues dans la grandeur Q . Et l'on démontrerait de même qu'il y a dans la grandeur U des parties égales entre elles dont chacune est égale à chacune des parties EN, NG ; et qu'il y a dans la grandeur J des parties égales entre elles dont chacune est égale à chacune des parties HP, PO, OI . Il y aura donc dans la grandeur U des parties égales entre elles et dans la grandeur J des parties égales entre elles, et chacune des parties égales qui sont contenues dans la grandeur U sera égale à chacune des parties égales qui sont contenues dans la grandeur J .

Et puisque le nombre de parties égales contenues dans AB est le même que le nombre de parties égales contenues dans EG , et que le nombre de [grandeurs] égales à AB contenues dans S est le même que le nombre de [grandeurs] égales à EG contenues dans U , le nombre de parties égales contenues dans S sera le même que le nombre de parties égales contenues dans U . Et l'on démontrerait de même que le nombre de parties égales contenues dans Q est le même que le nombre de parties égales contenues dans J .

Et puisqu'il y a dans la grandeur S des parties égales entre elles et dans la grandeur Q des parties égales entre elles, et que chacune des parties égales qui sont contenues dans S est égale à chacune des parties égales qui sont contenues dans Q ; quand le nombre de parties qui sont contenues dans S est égal au nombre de parties qui sont contenues dans Q , S est égale à Q ; et si le nombre de parties qui sont contenues dans S est plus grand

que le nombre de parties qui sont contenues dans Q , S est plus grande que Q ; et si le nombre de parties qui sont contenues dans S est plus petit que le nombre de parties qui sont contenues dans Q , S est plus petite que Q . Et l'on démontrerait de même que si le nombre de parties qui sont contenues dans U est égal au nombre de parties qui sont contenues dans J , U est égale à la grandeur J ; et que si le nombre de parties qui sont contenues dans U est plus grand que le nombre de parties qui sont contenues dans J , U est plus grande que J ; et que si le nombre de parties qui sont contenues dans U est plus petit que le nombre de parties qui sont contenues dans J , U est plus petite que J .

Mais le nombre de parties qui sont contenues dans S est le même que le nombre de parties qui sont contenues dans U ; et le nombre de parties qui sont contenues dans Q est le même que le nombre de parties qui sont contenues dans J . Donc si le nombre de parties qui sont contenues dans S est égal au nombre de parties qui sont contenues dans Q , le nombre de parties qui sont contenues dans U est égal au nombre de parties qui sont contenues dans J ; et si le nombre de parties qui sont contenues dans S est plus grand que le nombre de parties qui sont contenues dans Q , le nombre de parties qui sont contenues dans U est plus grand que le nombre de parties qui sont contenues dans J ; et si le nombre de parties qui sont contenues dans S est plus petit que le nombre de parties qui sont contenues dans Q , le nombre de parties qui sont contenues dans U est plus petit que le nombre de parties qui sont contenues dans J . Donc si le multiple qui est la grandeur S excède le multiple qui est la grandeur Q , le multiple qui est la grandeur U excèdera le multiple qui est la grandeur J ; et si le multiple qui est la grandeur S est égal au multiple qui est la grandeur Q , le multiple qui est la grandeur U sera égal au multiple qui est la grandeur J ; et si le multiple qui est la grandeur S est inférieur au multiple qui est la grandeur Q , le multiple qui est la grandeur U sera inférieur au multiple qui est la grandeur J .

Et la démonstration serait la même si AB était une seule partie de la grandeur CD ou un multiple d'elle ou égale à elle, car EG serait à ce moment-là une seule partie de HI ou un multiple d'elle ou égale à elle, et l'achèvement de la preuve serait analogue à ce qui précède.

De plus répétons la figure ; et que le rapport de AB à CD soit comme le rapport de EG à HI ; et que le rapport de AB à CD ne soit pas comme le rapport d'un nombre à un nombre. Donc le rapport de EG à HI ne sera pas comme le rapport d'un nombre à un nombre. Qu'il y ait dans S autant de [grandeurs] égales à AB , qu'il y a dans U de [grandeurs] égales à EG ; et qu'il y ait dans QL autant de [grandeurs] égales à CD , qu'il y a dans JF de [grandeurs] égales à HI .²⁸ Je dis alors que si S excède QL , U excède JF ; et que si S est égal à QL , U est égal à JF ; et que si S est inférieur à QL , U est inférieur à JF . Et supposons premièrement que S est inférieur à QL ; je dis alors que U est inférieur à JF .

Séparons [de QL] LM égale à S ; il restera alors la grandeur MQ . Et cherchons tout d'abord une partie de AB qui soit plus petite que la grandeur MQ . Si donc AB est plus petite que MQ , la moitié de AB est plus petite que la grandeur MQ ; et de même si AB est égale à MQ , la moitié de AB est plus petite que MQ .

Et si AB est plus grande que MQ , ou MQ mesurera AB ou elle ne la mesurera pas. Si donc MQ mesure AB , alors lorsqu'on divise AB en deux moitiés, et sa moitié en deux

²⁸ Voir la Figure *infra*.

moitiés, jusqu'à ce que la division aboutisse à des parties dont le nombre est plus grand que le nombre des fois par lesquelles MQ mesure la grandeur AB , la partie de AB à laquelle la division aboutit sera plus petite que MQ .²⁹

Et si MQ ne mesure pas AB , elle mesurera une partie $[ba'd]$ d'elle ; et la mesure aboutira à ce qu'il reste de AB une grandeur plus petite que la grandeur MQ . Donc lorsqu'on divise AB en deux moitiés, et sa moitié en deux moitiés, jusqu'à ce que le nombre de parties devienne un nombre plus grand que le nombre des fois par lesquelles MQ mesure ce qu'il mesure de la grandeur AB de sorte qu'il reste un reste plus petit qu'elle [i.e. que MQ], la partie à laquelle aboutit la division sera plus petite que MQ . En effet lorsque AB est divisée en des parties égales dont le nombre est plus grand que le nombre des fois par lesquelles MQ mesure ce qu'il mesure de AB d'une unité seulement, la partie à laquelle aboutit la division est plus petite que la grandeur MQ . Car la seule qui reste des moitiés est égale à chacune des moitiés restantes ; et le reste qui reste de AB après que MQ l'ait mesurée est plus petit que MQ , donc il est plus petit que chacune des parties restantes ; c'est donc pour cela que chacune des parties égales, qui sont les moitiés qui sont contenues dans AB , sera plus petite que la grandeur MQ .³⁰

Il apparaît donc de cette explication qu'il y a de toutes les manières dans la grandeur AB une partie qui est plus petite que la grandeur MQ , que AB soit plus petite que MQ ou qu'elle soit plus grande qu'elle ou qu'elle soit égale à elle.

Que cette partie plus petite que MQ à laquelle la division a aboutit soit donc la grandeur AK . Alors soit la grandeur AK est plus petite que CD , soit elle n'est pas plus petite qu'elle. Si donc elle est plus petite que CD , c'est ce que l'on cherche. Et si elle n'est pas plus petite qu'elle, elle sera ou égale à elle ou plus grande qu'elle. Si donc AK est égale à CD , sa moitié est plus petite que CD . (Mais AK n'est pas égale à CD . Car si elle était égale à elle, CD serait une partie de AB ; de sorte que le rapport de AB à CD serait comme le rapport d'un nombre à un nombre. Mais leur rapport par hypothèse n'est pas comme le rapport d'un nombre à un nombre ; donc AK n'est pas égale à CD .) Et si la grandeur AK est plus grande que CD , alors lorsqu'on divise AK en deux moitiés et sa moitié en deux moitiés, et qu'on la divise comme cela continuellement, la division aboutira à une partie qui est plus petite que la grandeur CD , comme on l'a démontré précédemment dans le cas de la grandeur MQ . Que la partie plus petite que la grandeur CD à laquelle aboutit la division soit donc la partie AN .

Donc la grandeur AN est plus petite que CD . Et la grandeur AN peut être divisée en deux moitiés et sa moitié en deux moitiés, jusqu'à ce qu'on aboutisse au nombre que

²⁹ Ce passage peut être interprété de deux manières différentes (en notations modernes) : (I) On a par hypothèse $AB = pMQ$ avec $p \in \mathbf{N}^*$. On divise ensuite la grandeur AB en deux moitiés, puis chacune de ses deux moitiés en deux moitiés, etc. ; on obtiendra ainsi des parties de AB égales entre elles et de la forme $(1/2^q)AB$ où $q \in \mathbf{N}^*$. D'après la deuxième des trois prémisses énoncées par Ibn al-Haytham, $\exists q \mid 2^q > p$; d'où $1/2^q < 1/p$ et $(1/2^q)AB = (1/2^q)pMQ < (1/p)pMQ = MQ$. (II) La grandeur AB est divisée en $q + 1$ parties, égales successivement à $(1/2)AB$, $(1/2^2)AB$, ..., $(1/2^q)AB$ et $(1/2^q)AB$, où $q + 1 > p$. D'où $q \geq p$ et $1/2^q \leq 1/2^p$. Or $\forall p \in \mathbf{N}^*$, on a $p < 2^p$, d'où $p/2^p < 1$; et $(1/2^q)AB \leq (1/2^p)AB = (1/2^p)pMQ = (p/2^p)MQ < MQ$. — Bien que la deuxième manière de subdiviser AB soit plus proche du texte, la première est conforme à l'énoncé de la prémisses ci-dessus et conforme au paragraphe suivant, où Ibn al-Haytham indique explicitement que les parties de AB obtenues lors de la division sont égales entre elles.

³⁰ Supposons maintenant que $AB = pMQ + R$ où $p \in \mathbf{N}^*$ et $0 < R < MQ$, et soit $q \in \mathbf{N}^* \mid 2^q > p$; alors $(1/2^q)AB < MQ$. *Démonstration.* Si la proposition est vraie pour $2^q = p + 1$, elle le sera *a fortiori* pour $2^q > p + 1$. Supposons donc que $2^q = p + 1$, et posons $D = (1/2^q)AB$; on a $(p + 1)D = (p + 1)(1/2^q)AB = AB = pMQ + R < pMQ + MQ = (p + 1)MQ$; donc $D < MQ$. C.Q.F.D.

nous voudrions. Et puisqu'il en est ainsi, il y aura dans la grandeur AN des parties égales entre elles en lesquelles se divise AN selon la manière que nous avons mentionnée, dont le nombre est plus grand que le nombre de [grandeurs] égales à CD contenues dans QL . Que cette partie d'entre les parties égales qui ont l'attribut que nous avons mentionné soit donc la partie AT ; donc il y a dans AN plus de [grandeurs] égales à AT , qu'il y a dans QL de [grandeurs] égales à CD . Et il y aura dans la grandeur AB des parties égales entre elles dont chacune est égale à la partie AT , car AT est une partie de AB , ce du fait qu'elle est une partie de la partie AK . Et puisque AN est plus petite que CD , AT sera beaucoup plus petite que CD .

Et soit AT mesure CD , soit elle ne la mesure pas. Si donc AT mesure CD , il y aura dans CD des parties égales entre elles dont chacune est égale à la grandeur AT ; et on a déjà démontré qu'il y a dans AB des parties égales entre elles dont chacune est égale à la grandeur AT ; donc le rapport de AB à CD sera comme le rapport d'un nombre à un nombre. Mais le rapport de AB à CD par hypothèse n'est pas comme le rapport d'un nombre à un nombre ; donc AT ne mesure pas CD . Et dès lors qu'elle ne mesure pas CD et qu'elle est plus petite qu'elle, elle mesurera une partie d'elle et il restera de CD une grandeur qui est plus petite que AT . Que AT mesure donc DR et qu'il reste RC plus petite que AT . Et dès lors que AT mesure DR , il y a dans DR des parties égales entre elles dont chacune est égale à la grandeur AT ; et on a déjà démontré qu'il y a dans AB des parties égales entre elles dont chacune est égale à la grandeur AT ; donc le rapport de AB à DR est comme le rapport d'un nombre à un nombre.

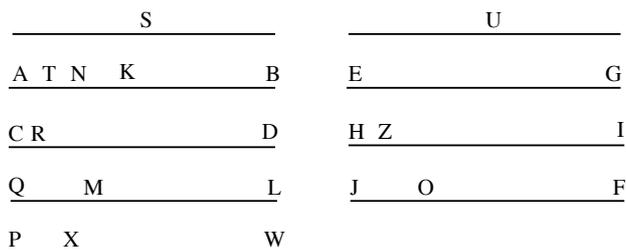
Et qu'il y ait dans PX autant de [grandeurs] égales à CR , qu'il y a dans QL de [grandeurs] égales à CD . Et l'on a déjà démontré qu'il y a dans AN plus de [grandeurs] égales à AT , qu'il y a dans QL de [grandeurs] égales à CD . Donc il y a dans AN plus de [grandeurs] égales à AT , qu'il y a dans PX de [grandeurs] égales à CR ; et AT est plus grande que CR ; donc la grandeur AN est plus grande que la grandeur PX et la grandeur PX plus petite que la grandeur AN . Mais on a déjà démontré que AN est plus petite que MQ . Donc la grandeur PX est plus petite que la grandeur MQ .

De plus, qu'il y ait dans la grandeur XW autant de [grandeurs] égales à RD , qu'il y a dans PX de [grandeurs] égales à CR . Il y aura donc dans le tout PW autant de [grandeurs] égales à CD , qu'il y a dans PX de [grandeurs] égales à CR , par la première proposition de ce Livre. Mais il y a dans PX autant de [grandeurs] égales à CR , qu'il y a dans QL de [grandeurs] égales à CD . Il y a donc dans PW autant de [grandeurs] égales à CD , qu'il y a dans QL de [grandeurs] égales à CD . Donc la grandeur PW est égale à la grandeur QL . Mais PX est plus petite que QM . Donc la grandeur ML est plus petite que la grandeur XW . Mais ML est égale à S . Donc la grandeur S est plus petite que la grandeur XW .

De plus le rapport de AB à CD est comme le rapport de EG à HI ; donc le rapport de AB à RD est le rapport de EG à une partie [$ba'd$] de HI ; et que cette partie soit ZI . Le rapport de AB à RD sera donc comme le rapport de EG à ZI . Mais le rapport de AB à RD est un rapport numérique ; donc le rapport de EG à ZI est un rapport numérique.

Qu'il y ait dans la grandeur OF autant de [grandeurs] égales à ZI , qu'il y a dans XW de [grandeurs] égales à RD . Or il y a dans XW autant de [grandeurs] égales à RD , qu'il y a dans QL de [grandeurs] égales à CD ; et il y a dans QL autant de [grandeurs] égales à CD , qu'il y a dans JF de [grandeurs] égales à HI ; il y a donc dans OF autant de

[grandeurs] égales à ZI , qu'il y a dans JF de [grandeurs] égales à HI . Mais HI est plus grande que ZI . Donc la grandeur JF est plus grande que la grandeur OF , donc OF est plus petite que JF .



Et puisque le rapport de AB à RD est comme le rapport de EG à ZI ; que le rapport de AB à RD est un rapport numérique ; que de même le rapport de EG à ZI est un rapport numérique ; qu'il y a dans S autant de [grandeurs] égales à AB , qu'il y a dans U de [grandeurs] égales à EG ; et qu'il y a dans XW autant de [grandeurs] égales à RD , qu'il y a dans OF de [grandeurs] égales à ZI ; si le multiple qui est S excède le multiple qui est XW , le multiple qui est U excèdera le multiple qui est OF ; si le multiple qui est S est inférieur au multiple qui est XW , le multiple qui est U sera inférieur au multiple qui est OF ; et si le multiple qui est S est égal au multiple qui est XW , le multiple qui est U sera égal au multiple qui est OF ; comme on l'a démontré dans le cas du premier rapport. Mais le multiple qui est S est par hypothèse inférieur au multiple qui est XW . Donc le multiple qui est U est inférieur au multiple qui est OF . Mais OF est plus petite que JF . Donc U sera *a fortiori* inférieur à la grandeur JF .

Il apparaît donc de cette explication que lorsque le multiple qui est S est inférieur au multiple qui est QL , le multiple qui est U est inférieur au multiple qui est JF .

De plus que le multiple qui est S excède le multiple qui est QL . Je dis alors que le multiple qui est U excède le multiple qui est JF . C'est que lorsque le multiple qui est S excède le multiple qui est QL , le multiple qui est QL est inférieur au multiple qui est S . Donc lorsque nous opérons avec CD comme nous avons opéré avec AB , nous trouverons que le rapport de CD à une partie de AB est un rapport numérique ; et lorsque nous complétons l'opération conformément à ce qui précède, il apparaîtra que le multiple qui est JF est inférieur au multiple qui est U . Et dès lors que le multiple qui est JF est inférieur au multiple qui est U , le multiple qui est U excède le multiple qui est JF . Il apparaît donc de cette explication que si le multiple qui est S excède le multiple qui est QL , le multiple qui est U excède le multiple qui est JF .

De plus que le multiple qui est S soit égal au multiple qui est QL ; je dis alors que le multiple qui est U est égal au multiple qui est JF . C'est que lorsque le multiple qui est U est inférieur au multiple qui est JF , on démontre comme on l'a démontré avant que le multiple qui est S est inférieur au multiple qui est QL : lorsqu'on pose le rapport de EG à HI en premier et qu'on pose le rapport de AB à CD ensuite, et qu'on opère avec EG comme on avait opéré avec AB ; donc lorsque le multiple qui est U est inférieur au multiple qui est JF , le multiple qui est S est inférieur au multiple qui est QL . Et si le multiple qui est U excède le multiple qui est JF , le multiple qui est JF est inférieur au multiple qui est U ; et il s'ensuit que le multiple qui est QL est inférieur au multiple qui est S ; donc il suit de cela que le multiple qui est S excèdera le multiple qui est QL . Il apparaît donc de cette explication que si le multiple qui est U n'est pas égal au multiple qui est JF , le multiple qui est S ne sera pas égal au multiple qui est QL . Et dès lors qu'il

en est ainsi, le multiple qui est S étant par hypothèse égal au multiple qui est QL , le multiple qui est U ne pourra pas ne pas être égal au multiple qui est JF ; donc il est égal à lui. Par conséquent le multiple qui est U est donc égal au multiple qui est JF .

Il apparaît donc de tout ce nous avons mentionné que si le multiple qui est S excède le multiple qui est QL , le multiple qui est U excédera le multiple qui est JF ; que si le multiple qui est S est inférieur au multiple qui est QL , le multiple qui est U sera inférieur au multiple qui est JF ; et que si le multiple qui est S est égal au multiple qui est QL , le multiple qui est U sera égal au multiple qui est JF .

Donc lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première d'entre elles à la deuxième comme le rapport de la troisième à la quatrième, et qu'on prend de la première et de la troisième des équimultiples, et de la deuxième et de la quatrième des équimultiples ; alors si le multiple de la première excède le multiple de la deuxième, le multiple de la troisième excède le multiple de la quatrième ; si le multiple de la première est inférieur au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est inférieur au multiple de la quatrième ; et si le multiple de la première est égal au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est égal au multiple de la quatrième ; quels multiples que soient les multiples de la première et de la troisième, et quels multiples que soient les multiples de la deuxième et de la quatrième ; que le rapport soit un rapport numérique ou non numérique. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

De plus soient quatre grandeurs, à savoir AB, C, DE, G ; et que le rapport de AB à C soit plus grand que le rapport de DE à G . Je dis alors que l'on pourra trouver des équimultiples des grandeurs AB, DE et des équimultiples des grandeurs C, G tels, que le multiple de AB excédera le multiple de C , tandis que le multiple de DE n'excédera pas le multiple de G .

Preuve. Le rapport de AB à C est plus grand que le rapport de DE à G , donc le rapport d'une partie de AB à C est le rapport de DE à G ; que cette partie soit donc SB . Donc le rapport de SB à C sera comme le rapport de DE à G .

Nous multiplions AS jusqu'à ce qu'on aboutisse à une grandeur qui est plus grande que C ; et que ce multiple soit HI . Et qu'il y ait dans IK autant de [grandeurs] égales à SB , qu'il y a dans HI de [grandeurs] égales à AS . Il y aura donc dans le tout HK autant de [grandeurs] égales à AB , qu'il y a dans IK de [grandeurs] égales à SB .

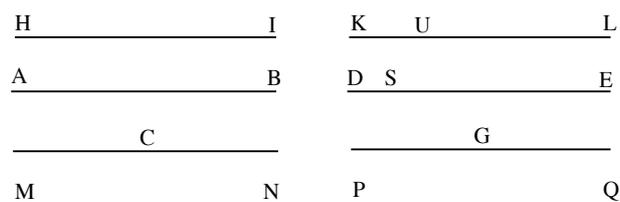
Et nous multiplions C continuellement jusqu'à ce que l'on aboutisse au multiple qui est la première grandeur qui excède la grandeur IK ; et que ce multiple soit NM . Et nous posons LM égale à IK ; donc NL sera soit égale à C soit plus petite qu'elle. Mais HI est plus grand que C ; donc la grandeur HI sera plus grande que NL . Mais IK est égale à LM ; donc la grandeur HK est plus grande que la grandeur NM .

Et nous posons qu'il y a dans QU autant de [grandeurs] égales à DE , qu'il y a dans IK de [grandeurs] égales à SB ; et nous posons qu'il y a dans PO autant de [grandeurs] égales à G , qu'il y a dans NM de [grandeurs] égales à C .

qu'il y a dans QU de [grandeurs] égales à DE , AB est une partie de HK semblable à la partie DE de QU . Et lorsque HK est égal à NM et QU égal à PO , AB sera une partie de NM comme la partie DE de PO . Et puisqu'il y a dans NM autant de [grandeurs] égales à C , qu'il y a dans PO de [grandeurs] égales à G , C sera une partie de NM semblable à la partie G de PO . Donc AB et C seront deux parties de NM , et DE et G deux parties de PO , et les deux parties AB , C de NM seront [respectivement] homonymes des deux parties DE , G de PO ; donc le rapport de AB à C sera le rapport de DE à G . Cela du fait que chaque fois que deux parties d'une grandeur sont homonymes de deux parties d'une autre grandeur, le rapport des deux parties l'une à l'autre est comme le rapport des deux autres parties l'une à l'autre ; par exemple le rapport de la moitié au quart d'une certaine grandeur est comme le rapport de la moitié au quart de toute grandeur. Donc lorsque le rapport de AB à C n'est pas comme le rapport de DE à G , il est impossible qu'il y ait des équimultiples de ces grandeurs ayant l'attribut que nous avons mentionné. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

De plus soient quatre grandeurs, à savoir AB , C , DE , G ; et qu'il y ait dans HI autant de [grandeurs] égales à AB , qu'il y a dans KL de [grandeurs] égales à DE ; et qu'il y ait dans MN autant de [grandeurs] égales à C , qu'il y a dans PQ de [grandeurs] égales à G ; et que le multiple HI excède le multiple MN tandis que le multiple KL n'excède pas le multiple PQ . Je dis alors que le rapport de AB à C est plus grand que le rapport de DE à G .

Preuve. Si le rapport de AB à C n'est pas plus grand que le rapport de DE à G , il est égal au rapport de DE à G ou plus petit que lui. Or si le rapport de AB à C est comme le rapport de DE à G ; qu'il y a dans HI autant de [grandeurs] égales à AB , qu'il y a dans KL de [grandeurs] égales à DE ; qu'il y a dans MN autant de [grandeurs] égales à C , qu'il y a dans PQ de [grandeurs] égales à G ; et que le multiple HI excède le multiple MN ; alors le multiple KL excèdera le multiple PQ . Mais le multiple KL par hypothèse n'excède pas le multiple PQ . Cela est absurde. Donc le rapport de AB à C n'est pas comme le rapport de DE à G .



Et si le rapport de AB à C est plus petit que le rapport de DE à G , le rapport de DE à G est plus grand que le rapport de AB à C . Et lorsque le rapport de DE à G est plus grand que le rapport de AB à C , le rapport d'une partie de DE à G est comme le rapport de AB à C ; que cette partie soit donc la grandeur SE . Donc le rapport de SE à G est comme le rapport de AB à C . Qu'il y ait dans UL autant de [grandeurs] égales à SE , qu'il y a dans KL de [grandeurs] égales à DE ; UL sera donc plus petite que KL . Mais il y a dans KL autant de [grandeurs] égales à DE , qu'il y a dans HI de [grandeurs] égales à AB ; il y a donc dans UL autant de [grandeurs] égales à SE , qu'il y a dans HI de [grandeurs] égales à AB ; et il y a dans PQ autant de [grandeurs] égales à G , qu'il y a dans MN de [grandeurs] égales à C . Donc le rapport de AB à C est comme le rapport SE à G , et le multiple HI excède le multiple MN ; donc le multiple UL excède le multiple PQ ; donc

le multiple KL excédera le multiple PQ . Mais le multiple KL par hypothèse n'excède pas le multiple PQ . Cela est absurde. Donc le rapport de AB à C n'est pas plus petit que le rapport de DE à G , ni égal à lui ; il est donc plus grand que lui.

Donc lorsque l'on a quatre grandeurs, et que l'on prend de la première et de la troisième des équimultiples, et de la deuxième et de la quatrième des équimultiples, et que le multiple de la première excède le multiple de la deuxième tandis que le multiple de la troisième n'excède pas le multiple de la quatrième, le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

De plus soient quatre grandeurs, à savoir A, B, C, D ; et que les équimultiples pris des grandeurs A, C ou excèdent simultanément les équimultiples pris des grandeurs B, D , ou sont simultanément inférieurs à eux, ou sont simultanément égaux à eux, quelques multiples qu'ils soient ; je dis alors que le rapport de A à B est comme le rapport de C à D .

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Preuve. Ce n'est pas possible autrement ; car si c'était possible, que le rapport de A à B ne soit pas comme le rapport de C à D . Et dès lors que le rapport de A à B n'est pas comme le rapport de C à D , l'un des rapports est plus grand que l'autre. Et dès lors que l'un des rapports est plus grand que l'autre, on trouvera des équimultiples des grandeurs A, C et des équimultiples des grandeurs B, D tels, que l'un des multiples de A, C excède son conjoint tandis que le multiple homologue à lui d'entre les multiples de A, C n'excède pas son conjoint, comme on l'a démontré dans ce qui précède. Mais les équimultiples de A, C et les équimultiples de B, D sont par hypothèse tels que quand l'un des deux excède son conjoint, son homologue excède son conjoint ; quand il est inférieur à son conjoint, son homologue est inférieur à son conjoint ; et quand il est égal à son conjoint, son homologue est égal à son conjoint ; quelques multiples qu'ils soient. Et dès lors qu'il en est ainsi, un même multiple excédera son conjoint et avec cela il n'excédera pas son conjoint ; et ceci est absurde. Donc aucun des rapports de A à B ni de C à D n'est plus grand que l'autre ; et dès lors qu'aucun des rapports n'est plus grand que l'autre, ils sont égaux entre eux. Donc le rapport de A à B est comme le rapport de C à D ; et c'est ce que nous voulions démontrer.

Nous avons donc fini de commenter le début du cinquième Livre ; et les propositions que nous avons mentionnées doivent être incluses dans le cinquième Livre, et leur place est avant l'utilisation des grandeurs proportionnelles mentionnées dans le cinquième Livre.³¹

³¹ C'est-à-dire avant la Proposition V. 4 des *Éléments*.

ANNEXE

Le commentaire d'Ibn al-Haytham sur la Définition VII. 21 des *Éléments*

Traduction d'après : 1° Bursa, Haraççioğlu 1172, ff. 67^r-67^v ;³² 2° Istanbul, Feyzullah 1359, ff. 222^v-223^r ;³³ 3° Tunis, Aḥmadiyya 5482, ff. 51bis^r-51bis^v.³⁴

Puis Euclide dit : *Et les nombres qui sont dits proportionnels, le rapport du premier d'entre eux au deuxième comme le rapport du troisième au quatrième, sont ceux qui sont tels que la partie, ou les parties, que le premier est du deuxième est la partie, ou les parties, que le troisième est du quatrième.* Il veut dire que les nombres proportionnels sont ceux qui sont tels que si le premier est une partie du deuxième, le troisième est une partie du quatrième qui est la même que cette partie que le premier est du deuxième ; et que si le premier est des parties du deuxième, le troisième sera des parties du quatrième qui sont les mêmes que ces parties que le premier est du deuxième. Et cet énoncé est une définition des nombres proportionnels.

Et l'on a déjà avancé en parlant du début du cinquième Livre que le rapport est une certaine « quelléité ». Donc le rapport des grandeurs les unes aux autres est la « quelléité » des grandeurs les unes aux autres ; et le rapport des nombres les uns aux autres est la « quelléité » des nombres les uns relativement aux autres. Et chaque fois que l'on compare un nombre à un autre nombre, il sera ou une partie de lui ou des parties. Donc le rapport du nombre au nombre est la « quelléité » des parties de l'un des deux relativement à l'autre ; je veux dire que le rapport du nombre au nombre est la relation de l'un des deux à l'autre quant à la partie.³⁵ Et dès lors que le rapport du nombre au nombre est sa relation à lui quant à la partie,³⁵ les nombres égaux de rapport sont ceux qui sont tels que la partie, ou les parties, que l'un est relativement à son conjoint est la partie, ou les parties, que l'autre est relativement son conjoint. Et les nombres égaux de rapport sont ceux que l'on appelle *proportionnels*. Il est donc vrai que les nombres proportionnels *sont ceux qui sont tels que la partie, ou les parties, que le premier est du deuxième est la partie, ou les parties, que le troisième est du quatrième.*

Et quant au fait qu'il existe des nombres ayant cet attribut, cela est clair. C'est-à-dire que chaque fois que l'on a deux nombres selon un certain rapport, lorsqu'on les multiplie ensemble par un autre nombre, quel que soit le nombre, on obtiendra ainsi deux nombres selon leur rapport. Donc il s'ensuit nécessairement que si on les multiplie par plusieurs nombres, on obtiendra ainsi plusieurs nombres selon leur rapport. Et il apparaît qu'il en est bien ainsi de la dix-septième proposition du septième Livre.

³² In [Sezgin, 2000], pp. 133-4.

³³ In [Sezgin, 2000], pp. 312-3.

³⁴ Il s'agit d'un folio non numéroté qui se trouve entre les folios 51 et 52.

³⁵ Littéralement : quant à la « partitude » [fī al-juz'iyya].

BIBLIOGRAPHIE

Dold-Samplonius (Yvonne)

[1974] Al-Māhānī, in C. C. Gillispie (éd.), *Dictionnaire of Scientific Biography*, vol. IX, New York, 1974, pp. 21-2.

Jolivet (Jean) et Rashed (Roshdi)

[1998] *Œuvres philosophiques et scientifiques d'al-Kindī, vol. II, Métaphysique et Cosmologie*, Leiden-Boston-Köln, 1998.

Plooiij (Edward Bernard)

[1950] *Euclid's Conception of Ratio and His Definition of Proportional Magnitudes as Criticized by Arabian Commentators*, Rotterdam, 1950. Réimp. in F. Sezgin (éd.), *Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science, Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 19, Frankfurt am Main, 1997, pp. 167-243.

Rashed (Roshdi)

[1993] *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. II, Londres, 1993.

[2000] *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. III, Londres, 2000.

[2002] *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. IV, Londres, 2002.

Sabra (Abdelhamid I.)

[1972] Ibn al-Haytham, in C. C. Gillispie (éd.), *Dictionnaire of Scientific Biography*, vol. VI, New York, 1972, pp. 189-210.

[1998] One Ibn al-Haytham or Two? An Exercise in Reading the Bio-Bibliographical Sources, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, 12, Frankfurt am Main, 1998 : 1-50.

Saccheri (Gerolamo)

[2014] *Euclid Vindicated from Every Blemish*, Edited and Annotated by Vincenzo De Risi, Translated by G. B. Halsted and L. Allegri, Birkhäuser, 2014.

Sezgin (Fuat)

[1974] *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V, 1974.

[2000] *Commentary on the Premises of Euclid's Elements (Sharḥ Muṣādarāt Uqlīdis) by Ibn al-Haytham*, Edited by Fuat Sezgin with an introduction by Matthias Schramm, Frankfurt am Main, 2000. (Reproduction en facsimile des MSS Bursa, Haraççioğlu 1172, et Istanbul, Feyzullah 1359.)

Sezgin (Fuat) et Schramm (Matthias) (éds.)

[1985] *On the Resolution of Doubts in Euclid's Elements and Interpretation of Its Special Meanings (Kitāb fī ḥall shukūk kitāb Uqlīdis fī'l-uṣūl wa-sharḥ ma'ānīhi) by Ibn al-Haytham*, Frankfurt an Main, 1985. (Reproduction en facsimile du MS A.Y. 800, Bibliothèque universitaire d'Istanbul, complété par le MS Or. 516, Bibliothèque universitaire de Leyde.)

Sude (Barbara Hooper)

- [1974a] *Ibn al-Haytham's Commentary on the Premises of Euclid's Elements (Sharḥ muṣādarāt kitāb Uqlīdis fī al-'uṣūl)*, Books I-VI, PhD Dissertation, Princeton University, 1974. (Thèse non publiée.)
- [1974b] *Sharḥ muṣādarāt kitāb Uqlīdis fī al-'uṣūl by Ibn al-Haytham*, Vol. II, The Arabic Text (Books I-VI), Edited by Barbara Hooper Sude.

Vahabzadeh (Bijan)

- [1994] Two Commentaries on Euclid's Definition of Proportional Magnitudes, *Arabic Sciences and Philosophy*, 4, 1994 : 181-98.

Vitrac (Bernard)

- [2002] 'Omar Khayyām et l'anthyphérèse : Étude du deuxième Livre de son commentaire *Sur certaines prémisses problématiques du livre d'Euclide*, *Farhang*, 14, Téhéran, 2002 : 137-92. (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00174930>)

Youschkevitch (Adolf P.)

- [1976] *Les Mathématiques arabes (VIII^e – XV^e siècles)*, Traduction française de M. Cazenave et K. Jaouiche, Préface de René Taton, Paris, 1976.