

INTÉGRALE DE FEYNMAN ET C^α -STRUCTURES EN PHYSIQUE

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Dans la première partie, on approfondit le travail de C.M. DeWitt sur l'intégrale de chemin de Feynman et on étend les méthodes aux fibrés banachiques ou hilbertiens. On définit la notion d'intégrale de Feynman sur les fibrés vectoriels.

Dans les parties suivantes, on part du postulat que toutes les structures de classe C^∞ ne sont pas observables physiquement. Si on veut étudier la ligne d'univers d'une particule, on ne peut le faire que si cette ligne a des "irrégularités". On est amené à décrire ces irrégularités en utilisant la notion de dérivation non entière ou fractionnaire. On propose dans cette partie un lien entre la masse d'une particule et l'ordre de dérivation fractionnaire aux irrégularités de la ligne d'univers. La masse mesure, en un certain sens, l'irrégularité de sa trajectoire.

1. INTÉGRALE DE FEYNMAN ET PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Si λ est une mesure sur un espace vectoriel X qui est d'Hausdorff et localement convexe, de dual $\mathcal{D}X$, alors la transformée de Fourier de λ est la fonction complexe définie sur $\mathcal{D}X$ par

$$\mathcal{F}\lambda(x_{\mathcal{D}}) = \int_X \exp(-i \langle x_{\mathcal{D}}, x \rangle) d\lambda(x),$$

où $x \in X$, $x_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}X$ et

$$\langle x_{\mathcal{D}}, x \rangle = x_{\mathcal{D}}(x).$$

Soit

$$L : X \rightarrow Y$$

une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels topologiques localement convexes et d'Hausdorff. Pour la transposée ${}^{\text{Tr}}L$ du dual de Y dans le dual de X

$${}^{\text{Tr}}L : \mathcal{D}Y \rightarrow \mathcal{D}X$$

on peut écrire

$$\langle {}^{\text{Tr}}L(y_{\mathcal{D}}), x \rangle = \langle y_{\mathcal{D}}, L(x) \rangle, \quad y_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}Y, \quad x \in X$$

et

$${}^{\text{Tr}}L(y_{\mathcal{D}}) = y_{\mathcal{D}} \circ L.$$

Notons λ_L , l'image de la mesure λ par l'application linéaire L ,

$$\lambda_L(B) = \lambda(L^{-1}(B)), \quad B \subset Y$$

Date: 21 novembre 2015 .

Key words and phrases. C^α -structure, Intégrale de Feynman, Fibrés de Banach, pseudo-mesure gaussienne, dérivation fractionnaire.

alors

$$\mathcal{F}\lambda_L = \mathcal{F}\lambda \circ^{\text{Tr}} L \quad (1.1)$$

car si $y_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}Y$ et $y \in Y$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\lambda \circ^{\text{Tr}} L(y_{\mathcal{D}}) &= \int_X \exp(-i \langle^{\text{Tr}} L(y_{\mathcal{D}}), x \rangle) d\lambda(x) \\ &= \int_X \exp(-i \langle y_{\mathcal{D}}, L(x) \rangle) d\lambda(x) \\ &= \int_Y \exp(-i \langle y_{\mathcal{D}}, y \rangle) d\lambda_L(y). \end{aligned}$$

En particulier, pour une forme linéaire continue L sur X ,

$$L : X \rightarrow \mathbb{R}$$

on a si

$$\begin{aligned} \tau &= \langle L, x \rangle = L(x) \\ \mathcal{F}\lambda_L(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}) &= \mathcal{F}\lambda \circ^{\text{Tr}} L(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{F}\lambda(L) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\tau) d\lambda_L(\tau), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ est l'application identique de \mathbb{R} .

Pour tout sous-espace fermé V de codimension finie, si

$$\pi_V : X \rightarrow X/V$$

est la projection canonique sur l'espace quotient X/V , $^{\text{Tr}}\pi_V$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(X/V)$ sur

$$V^o = \{x_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}X : \langle x_{\mathcal{D}}, x \rangle = 0, \forall x \in V\}$$

et pour $y_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}(X/V)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\lambda_{\pi_V}(y_{\mathcal{D}}) &= \int_{X/V} \exp(-i \langle y_{\mathcal{D}}, y \rangle) d\lambda_{\pi_V}(y) = \mathcal{F}\lambda \circ^{\text{Tr}} \pi_V(y_{\mathcal{D}}) \\ &= \mathcal{F}\lambda(x_{\mathcal{D}}), \quad x_{\mathcal{D}} \in V^o \subset \mathcal{D}X. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}(X)$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés V de X tels que

$$\text{codim } V < +\infty,$$

alors

$$\mathcal{D}X = \cup_{V \in \mathcal{F}(X)} V^o$$

ce qui permet de définir la transformée de Fourier par une famille de transformées de Fourier sur des espaces vectoriels de dimension finie.

Definition 1. Une pseudo-mesure μ sur X est une famille $\{\mu_V\}_{V \in \mathcal{F}(X)}$ telle que, μ_V soient des mesures σ -additives sur X/V qui satisfont à la condition de compatibilité suivante. Si $W \subset V$, μ_V est la mesure image de μ_W par l'application π_{VW}

$$\mu_V(B) = \mu_W(A), \quad A = \pi_{VW}^{-1}(B)$$

où π_{VW} est la projection canonique

$$\pi_{VW} : X/W \rightarrow X/V$$

vérifiant

$$\pi_V = \pi_{VW} \circ \pi_W.$$

Remark 1. Si la famille $\{\mu_V\}_{V \in \mathcal{F}(X)}$ est une famille de mesure finies telles que

$$\mu_V(X/V) = \mu(X),$$

ne dépend pas de V , on dit que la pseudo-mesure est finie de masse $\mu(X)$.

La transformée de Fourier d'une pseudo-mesure μ est définie par

$$\mathcal{F}\mu(x_{\mathcal{D}}) = \mathcal{F}\mu_V \circ (\text{Tr } \pi_V)^{-1}(x_{\mathcal{D}}), \forall x_{\mathcal{D}} \in V^o.$$

Lemma 1. Si $x_{\mathcal{D}} \in V^o \cap W^o$ alors

$$\mathcal{F}\mu(x_{\mathcal{D}}) = \mathcal{F}\mu_V \circ (\text{Tr } \pi_V)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) = \mathcal{F}\mu_W \circ (\text{Tr } \pi_W)^{-1}(x_{\mathcal{D}}),$$

donc, $\mathcal{F}\mu$ est bien définie et on a

$$\mathcal{F}\mu(x_{\mathcal{D}}) = \int_{X/V} \exp(-i \langle x_{\mathcal{D}}, x \rangle) d\mu_V(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-it) d\mu_{V_{x_{\mathcal{D}}}}(t).$$

pour tout $x_{\mathcal{D}} \in V^o$.

Proof. De la relation 1.2, on déduit

$$\int_{X/V} \exp(-i \langle x_{\mathcal{D}}, x \rangle) d\mu_V(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-it) d\mu_{V_{x_{\mathcal{D}}}}(t)$$

et si $\mathcal{W} = W \cap V$, de la relation 1.1, on a

$$\mathcal{F}\mu_V = \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ \text{Tr } \pi_{V\mathcal{W}} \text{ et } \mathcal{F}\mu_W = \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ \text{Tr } \pi_{W\mathcal{W}},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mu_V \circ (\text{Tr } \pi_V)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) &= \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ \text{Tr } \pi_{V\mathcal{W}} \circ (\text{Tr } \pi_V)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) \\ &= \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ (\text{Tr } \pi_{\mathcal{W}})^{-1}(x_{\mathcal{D}}), \quad x_{\mathcal{D}} \in V^o \subset \mathcal{W}^o \end{aligned}$$

car

$$\text{Tr } \pi_{V\mathcal{W}} \circ (\text{Tr } \pi_V)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) = (\text{Tr } \pi_{\mathcal{W}})^{-1}(x_{\mathcal{D}})$$

de façon analogue

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mu_W \circ (\text{Tr } \pi_W)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) &= \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ \text{Tr } \pi_{W\mathcal{W}} \circ (\text{Tr } \pi_W)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) \\ &= \mathcal{F}\mu_{\mathcal{W}} \circ (\text{Tr } \pi_{\mathcal{W}})^{-1}(x_{\mathcal{D}}), \quad x_{\mathcal{D}} \in W^o \subset \mathcal{W}^o \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{F}\mu_V \circ (\text{Tr } \pi_V)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) = \mathcal{F}\mu_W \circ (\text{Tr } \pi_W)^{-1}(x_{\mathcal{D}}) \text{ si } x_{\mathcal{D}} \in V^o \cap W^o.$$

□

Theorem 1. Si \mathbf{Q} est une forme quadratique positive sur $\mathcal{D}X$, il existe une unique pseudo-mesure finie μ sur X telle que

$$\mathcal{F}\mu(x_{\mathcal{D}}) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(x_{\mathcal{D}})\right), \quad \forall x_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}X.$$

Proof. Cette preuve est développée dans [2].

□

Soit \mathcal{C} l'espace vectoriel des chemins

$$\gamma : T = [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$$

tels que

$$\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = 0,$$

\mathcal{C} est un espace vectoriel d'Hausdorff et localement connexe pour la norme uniforme. Le dual de \mathcal{C} , noté \mathcal{M} , est l'espace vectoriel des mesures bornées sur T .

Theorem 2. *L'intégrale de chemin de Feynman [5] d'une particule de masse m , à un degré de liberté, évoluant dans un potentiel \mathcal{V} , est donnée par*

$$\int_{\mathcal{C}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{V}(\gamma(t)) dt \right) dw(\sqrt{m}\gamma),$$

où w est une pseudo-mesure dont la transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}w(\mu) = \exp \left(-\frac{i}{2} W(\mu) \right) = \exp \left(-\frac{i}{2} \int_{T \times T} \inf(t, s) d\mu(t) d\mu(s) \right)$$

pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$.

Proof. Ce résultat a été démontré dans [2]. □

Le propagateur $\mathcal{K}((x_1, t_1), (x_0, t_0))$ permet de déterminer l'amplitude de probabilité de trouver la particule $x_1 \in \mathbb{R}$ à l'instant t_1 si elle se trouvait localisée en x_0 à l'instant t_0 avec $t_1 \geq t_0$. Si $\tilde{\gamma}$ est un chemin fixé tel que

$$\tilde{\gamma}(t_0) = x_0 \text{ et } \tilde{\gamma}(t_1) = x_1$$

on a le théorème suivant.

Theorem 3. *Le calcul du propagateur dans le cas d'un degré de liberté est*

$$\mathcal{K}((x_1, t_1), (x_0, t_0)) = \sqrt{m} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_o(\tilde{\gamma}) \right) \int_{\mathcal{C}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\tilde{\gamma} + \gamma) \right) dw(\gamma),$$

\mathcal{S} est l'action qui se scinde sous la forme

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_o + \mathcal{S}_{int}$$

où \mathcal{S}_o est l'action d'une particule de masse m et \mathcal{S}_{int} est l'interaction dans le potentiel \mathcal{V} définie par

$$\mathcal{S}_{int}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{V}(\gamma(t)) dt.$$

Proof. La preuve est donnée dans l'article [2]. □

2. INTÉGRALE DE FEYNMAN SUR LES FIBRÉS

Dans ce qui suit

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{E})$$

est un fibré Banachique ou Hilbertien [4] et [6], de fibre \mathcal{E} sur l'univers Ω , qui est une variété de dimension $\dim \Omega \geq 4$. Le fibré dual de ζ est noté $\zeta_{\mathcal{D}}$, si σ et $\sigma_{\mathcal{D}}$ sont des sections de, respectivement, ζ et $\zeta_{\mathcal{D}}$ on pose

$$\sigma_{\mathcal{D}} \otimes \sigma(\omega) = \sigma_{\mathcal{D}}(\omega)(\sigma(\omega)), \forall \omega \in \Omega.$$

Soit λ une mesure finie sur $\Gamma(\zeta)$, l'espace vectoriel des sections de ζ , on définit la **transformée de Fourier en fibre** de λ par

$$\mathcal{F}\lambda(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-i\sigma_{\mathcal{D}} \otimes \sigma(\omega)) d\lambda(\sigma),$$

c'est une section du fibré trivial

$$(\Omega \times \mathcal{C}^\infty(\zeta_{\mathcal{D}}), pr_1, \Omega)$$

où $C^\infty(\zeta_{\mathcal{D}})$ est l'espace vectoriel des applications C^∞ , dans le sens de Banach, de $\Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$ à valeurs dans \mathbb{C} . On pose θ , θ_ω et θ_σ , les C^∞ -applications comme applications de variétés de Banach définies par

$$\begin{aligned}\theta : \Gamma(\zeta) \times \Omega &\rightarrow E(\zeta), \theta(\sigma, \omega) = \sigma(\omega), \\ \theta_\omega : \Gamma(\zeta) &\rightarrow E_\omega(\zeta), \theta_\omega(\sigma) = \sigma(\omega)\end{aligned}$$

et

$$\theta_\sigma : \Omega \rightarrow E_\omega(\zeta), \theta_\sigma(\omega) = \sigma(\omega).$$

Pour une mesure λ sur $\Gamma(\zeta)$, on note $\lambda(\omega)$ la mesure image de λ par θ_ω alors

$$\mathcal{F}\lambda(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \int_{E_\omega(\zeta)} \exp(-i \langle \sigma_{\mathcal{D}}(\omega), u \rangle) d\lambda(\omega)(u)$$

par changement de variable, avec les notations précédentes

$$\mathcal{F}\lambda(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \mathcal{F}\lambda(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega)), \sigma_{\mathcal{D}}(\omega) \in E_\omega(\zeta_{\mathcal{D}}). \quad (2.1)$$

Remark 2. Dans l'équation 2.1, le membre de gauche représente la **transformée de Fourier en fibre** de la mesure λ et le membre de droite la **transformée de Fourier** de la mesure image $\lambda(\omega)$ sur $E_\omega(\zeta)$.

La transformée de Fourier d'une mesure finie λ de $\Gamma(\zeta)$ est définie plus haut par

$$\mathcal{F}\lambda(\sigma_{\mathcal{D}}) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-i \langle \sigma_{\mathcal{D}}, \sigma \rangle) d\lambda(\sigma), \sigma_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}\Gamma(\zeta)$$

où $\mathcal{D}\Gamma(\zeta)$ est l'espace dual de $\Gamma(\zeta)$.

Soit L un morphisme de fibrés de ζ dans ξ

$$L \in \text{Hom}(\zeta, \xi),$$

L induit un morphisme d'espaces vectoriel de $\Gamma(\zeta)$ dans $\Gamma(\xi)$ défini par

$$\mathcal{L}(\sigma_\zeta) = L \otimes \sigma_\zeta \text{ avec } L \otimes \sigma_\zeta(\omega) = L(\omega)(\sigma_\zeta(\omega)), \forall \omega \in \Omega,$$

et soit $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ le morphisme d'espaces vectoriels de $\Gamma(\xi_{\mathcal{D}})$ dans $\Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$, défini par

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}) = \sigma_{\xi_{\mathcal{D}}} \circ L \text{ avec } (\sigma_{\xi_{\mathcal{D}}} \circ L)(\omega) = \sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}(\omega) \circ L(\omega), \forall \omega \in \Omega$$

alors

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}) \otimes \sigma_\zeta(\omega) = \sigma_{\xi_{\mathcal{D}}} \otimes \mathcal{L}(\sigma_\zeta)(\omega), \forall \omega \in \Omega.$$

Notons $\lambda_{\mathcal{L}}$, l'image de la mesure λ par l'application linéaire \mathcal{L} ,

$$\lambda_{\mathcal{L}}(B) = \lambda(\mathcal{L}^{-1}(B)), B \subset \Gamma(\xi)$$

alors

$$\mathcal{F}\lambda_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}\lambda \circ \mathcal{L}_{\mathcal{D}}.$$

Si $L = \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$ alors L s'identifie à un élément de $\text{Hom}(\zeta, \xi)$, où ξ est le fibré trivial

$$\xi = (\Omega \times \mathbb{K}, pr_1, \Omega), \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},$$

le morphisme induit $\mathcal{L} = \sigma_{\mathcal{D}}$ est un morphisme de l'espace des sections de ζ dans l'espace des sections de ξ qui est l'espace des fonctions d'ondes de l'univers. Les sections du dual $\xi_{\mathcal{D}}$ s'identifient aux sections de ξ . A la forme linéaire

$$\sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}(\omega) : \{\omega\} \times \mathbb{K} \rightarrow \{\omega\} \times \mathbb{K}, \sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}(\omega)(k) = a_{\sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}}(\omega)k \text{ où } a_{\sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}}(\omega), k \in \mathbb{K}$$

on associe la section

$$\Omega \rightarrow \Omega \times \mathbb{K}, \omega \rightarrow (\omega, a_{\sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}}(\omega)).$$

L'application $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ est définie par

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\sigma_{\xi_{\mathcal{D}}})(\omega) = \sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}(\omega) \circ L(\omega) = a_{\sigma_{\xi_{\mathcal{D}}}}(\omega) \times L(\omega)$$

et

$$\mathcal{F}\lambda_{\mathcal{L}}(\mathbf{1}) = \mathcal{F}\lambda \circ \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}) = \mathcal{F}\lambda(L)$$

où $\mathbf{1}$ est définie par

$$\mathbf{1}(\omega) = \mathbf{Id}_{\{\omega\} \times \mathbb{K}}.$$

La mesure $\lambda_{\sigma_{\mathcal{D}}}$ est une mesure sur les ondes de l'univers qui vérifie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\lambda(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) &= \int_{\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)} \exp(-i\phi(\omega)) d\lambda_{\sigma_{\mathcal{D}}}(\phi) \\ &= \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-i\sigma_{\mathcal{D}} \otimes \sigma(\omega)) d\lambda(\sigma), \forall \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{S}(\zeta)$, l'ensemble des sous-fibrés fermés de ζ de codimension finie. Si $\varsigma \in \mathcal{S}(\zeta)$, la fibre \mathcal{E}_{ς} de ς est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{E} de codimension finie. On définit le fibré quotient ζ/ς , de fibre $\mathcal{E}/\mathcal{E}_{\varsigma}$ dont les cartes de trivialisations sont données par

$$p_U : \pi_{\zeta/\varsigma}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\varsigma}, p_U(x) = (\pi(x), \mathbf{p}(x)),$$

si U est un ouvert de trivialisations de ζ et

$$\mathbf{p}_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathcal{E}, \mathbf{p}_U(x) = (\pi(x), \mathbf{q}(x))$$

est l'isomorphisme de trivialisations on a, $\mathbf{p}(x) = \pi_{\varsigma} \circ \mathbf{q}(x)$ où π_{ς} est la projection canonique $\pi_{\varsigma} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\varsigma}$. On note L_{ς} le morphisme de fibré induit par π_{ς} ,

$$L_{\varsigma} : \zeta \rightarrow \varsigma, \text{ si } \mathcal{E}_{\varsigma} \subset \mathcal{E}_{\tau}$$

alors la projection $\pi_{\varsigma\tau} : \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\tau} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\varsigma}$ vérifiant $\pi_{\varsigma} = \pi_{\varsigma\tau} \circ \pi_{\tau}$ induit un morphisme de fibré noté $L_{\varsigma\tau} : \zeta/\tau \rightarrow \zeta/\varsigma$ pour lequel

$$L_{\varsigma} = L_{\varsigma\tau} \circ L_{\tau}.$$

Les morphismes L_{ς} et $L_{\varsigma\tau}$ induisent des morphismes d'espaces vectoriels

$$\mathcal{L}_{\varsigma} : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\zeta/\varsigma) \text{ et } \mathcal{L}_{\varsigma\tau} : \Gamma(\zeta/\tau) \rightarrow \Gamma(\zeta/\varsigma)$$

vérifiant $\mathcal{L}_{\varsigma} = \mathcal{L}_{\varsigma\tau} \circ \mathcal{L}_{\tau}$, les applications

$$\mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}} : \Gamma((\zeta/\varsigma)_{\mathcal{D}}) \rightarrow \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) \text{ et } \mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}\tau_{\mathcal{D}}} : \Gamma((\zeta/\tau)_{\mathcal{D}}) \rightarrow \Gamma((\zeta/\varsigma)_{\mathcal{D}}) \quad (2.2)$$

vérifient

$$\mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}} = \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{D}}} \circ \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{D}}\varsigma_{\mathcal{D}}}.$$

On pose

$$\Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o = \{\sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) : \sigma_{\mathcal{D}} \otimes \sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, \sigma_{\mathcal{D}} \otimes \sigma = 0 \text{ si } \sigma \in \Gamma(\varsigma)\}$$

alors $\mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}} : \Gamma((\zeta/\varsigma)_{\mathcal{D}}) \rightarrow \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$ est un isomorphisme sur $\Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o$, on note

$$\mathcal{L}_{\varsigma_{\mathcal{D}}}^{-1} : \Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o \rightarrow \Gamma((\zeta/\varsigma)_{\mathcal{D}}),$$

l'application réciproque.

Si $\mathcal{F}(\zeta)$ est l'ensemble des sous-fibrés fermés de ζ de codimension finie alors

$$\Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) = \cup_{\varsigma \in \mathcal{F}(\zeta)} \Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o,$$

une pseudo-mesure μ sur $\Gamma(\zeta)$ est une famille $\{\mu_\varsigma\}_{\varsigma \in \mathcal{F}(\zeta)}$ telle que μ_ς sont des mesures σ -additives sur $\Gamma(\zeta)$ qui satisfont à la condition de compatibilité si $\mathcal{E}_\varsigma \subset \mathcal{E}_\tau$, μ_τ est la mesure image de μ_ς par l'application $\mathcal{L}_{\varsigma\tau}$

$$\mu_\varsigma(B) = \mu_\tau(A), \quad A = \mathcal{L}_{\tau\varsigma}^{-1}(B)$$

où $\mathcal{L}_{\tau\varsigma}$ est la projection canonique

$$\mathcal{L}_{\tau\varsigma} : \Gamma(\zeta/\tau) \rightarrow \Gamma(\zeta/\varsigma)$$

vérifiant

$$\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\tau\varsigma} \circ \mathcal{L}_\varsigma,$$

si les mesures μ_ς sont finies et de masse $\mu(\zeta)$, on dit que la pseudo-mesure est finie. La transformée de Fourier en fibre d'une pseudo-mesure μ est définie par

$$\mathcal{F}\mu(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \mathcal{F}\mu_\varsigma \circ \mathcal{L}_{\varsigma\mathcal{D}}^{-1}(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega), \quad \forall \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\varsigma)^o \text{ et } \omega \in \Omega.$$

Lemma 2. Si $\sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\varsigma_{\mathcal{D}})^o \cap \Gamma(\tau_{\mathcal{D}})^o$ alors

$$\mathcal{F}\mu(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \mathcal{F}\mu_\varsigma \circ \mathcal{L}_{\varsigma\mathcal{D}}^{-1}(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \mathcal{F}\mu_\tau \circ \mathcal{L}_{\tau\mathcal{D}}^{-1}(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

donc, $\mathcal{F}\mu$ est bien définie et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mu(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) &= \int_{\Gamma(\zeta/\varsigma)} \exp(-i\sigma_{\mathcal{D}} \otimes \sigma(\omega)) d\mu_\varsigma(\sigma) \\ &= \int_{\mathcal{C}^\infty(\Omega)} \exp(-i\phi(\omega)) d\mu_{\mathcal{L}_{\sigma_{\mathcal{D}}}}(\phi), \quad \forall \omega \in \Omega \text{ et } \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\varsigma)^o. \end{aligned}$$

A partir d'un fibré vectoriel ζ on définit deux fibrés, l'un est le fibré des formes quadratiques de ζ , noté $\mathcal{Q}(\zeta)$ et l'autre est le fibré des mesures de ζ , noté $\mathcal{M}(\zeta)$. Si U est une carte de trivialisation de ζ , on note $\theta_{U,\zeta}$ l'isomorphisme de trivialisation

$$\theta_{U,\zeta} : \pi_\zeta^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{F}(\zeta), \quad \theta_{U,\zeta}(u) = (\pi_\zeta(u), \mathbf{p}_\zeta(u))$$

alors les fibrés $\mathcal{Q}(\zeta)$ et $\mathcal{M}(\zeta)$ ont pour fibres respectives $\mathbf{FQ}(\zeta)$ et $\mathbf{FM}(\zeta)$ où $\mathbf{FQ}(\zeta)$ est l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbf{F}(\zeta)$ et $\mathbf{FM}(\zeta)$ est l'espace vectoriel des pseudo-mesures finies sur $\mathbf{F}(\zeta)$. Les applications de trivialisation sont respectivement

$$\theta_{U,\mathcal{Q}(\zeta)} : \pi_{\mathcal{Q}(\zeta)}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{FQ}(\zeta), \quad \theta_{U,\mathcal{Q}(\zeta)}(q) = (\pi_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q), \mathbf{p}_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q))$$

où

$$\mathbf{p}_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q) = q \circ \theta_{U,\zeta}^{-1}$$

et

$$\theta_{U,\mathcal{M}(\zeta)} : \pi_{\mathcal{M}(\zeta)}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{FM}(\zeta), \quad \theta_{U,\mathcal{M}(\zeta)}(\mu) = (\pi_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu), \mathbf{p}_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu))$$

où

$$\mathbf{p}_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu) = \mu \circ \theta_{U,\zeta}^{-1}.$$

Si q est une forme quadratique sur $E_\omega(\zeta)$ alors $\mathbf{p}_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q)$ est la forme quadratique sur $\mathbf{F}(\zeta)$

$$\mathbf{p}_{\mathcal{Q}(\zeta)}(q) = q \circ \theta_{U,\zeta}^{-1} |_{E_\omega(\zeta)}$$

et si μ est une pseudo-mesure finie sur $E_\omega(\zeta)$ alors $\mathbf{p}_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu)$ est la pseudo-mesure image sur $\mathbf{F}(\zeta)$

$$\mathbf{p}_{\mathcal{M}(\zeta)}(\mu) = \mu \circ \theta_{U,\zeta}^{-1} |_{E_\omega(\zeta)}.$$

Les sections de $\mathcal{Q}(\zeta)$ sont les sections de formes quadratiques, si toutes les formes quadratiques sont positives, la section est une section positive. Les sections de

$\mathcal{M}(\zeta)$ sont les sections de pseudo-mesures, si sur chaque fibre la pseudo-mesure est finie, on dit que la section est finie.

Lemma 3. *Soit \mathbf{Q} une section positive de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$, il existe une section finie de pseudo-mesures μ de $\mathcal{M}(\zeta)$ telle que*

$$\mathcal{F}\mu(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega)) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega))\right), \forall \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) \text{ et } \forall \omega \in \Omega.$$

où $\mathbf{Q}(\omega)$ est la forme quadratique induite par \mathbf{Q} sur la fibre $E_{\omega}(\zeta_{\mathcal{D}})$.

Proof. Pour chaque $\omega \in \Omega$, la forme quadratique positive $\mathbf{Q}(\omega)$ de

$$E_{\omega}(\zeta_{\mathcal{D}}) = \mathcal{D}E_{\omega}(\zeta)$$

permet de définir une pseudo-mesure finie $\mu(\omega)$ sur $E_{\omega}(\zeta)$ telle que

$$\mathcal{F}\mu(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega)) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega))\right), \forall \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}})$$

par le théorème de Madame C. Morette DeWitt et μ est une section de $\mathcal{M}(\zeta)$. \square

Lemma 4. *Soit μ une pseudo-mesure finie de $\Gamma(\zeta)$, il existe une section finie $\tilde{\mu}$ de $\mathcal{M}(\zeta)$ telle que la transformée de Fourier en fibre*

$$\mathcal{F}\mu(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-i\sigma_{\mathcal{D}} \otimes \sigma(\omega)) d\mu(\sigma)$$

vérifie

$$\mathcal{F}\mu(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \mathcal{F}\tilde{\mu}(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega)), \forall \omega \in \Omega \text{ et } \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}).$$

Proof. L'application canonique

$$\theta_{\omega} : \Gamma(\zeta) \rightarrow E_{\omega}(\zeta), \theta_{\omega}(\sigma) = \sigma(\omega)$$

permet de construire pour toute pseudo-mesure finie μ de $\Gamma(\zeta)$ une section finie $\tilde{\mu}$ de $\mathcal{M}(\zeta)$, où $\tilde{\mu}(\omega)$ est la pseudo-mesure image de μ par θ_{ω} . On a par 2.1

$$\mathcal{F}\mu(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \mathcal{F}\tilde{\mu}(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega)), \forall \omega \in \Omega \text{ et } \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}).$$

\square

Definition 2. *Une section positive \mathbf{Q} de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$ est **stable** s'il existe une pseudo-mesure finie μ de $\Gamma(\zeta)$ pour laquelle la section $\tilde{\mu}$ image de μ vérifie*

$$\mathcal{F}\tilde{\mu}(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega)) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega))\right), \forall \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}) \text{ et } \forall \omega \in \Omega.$$

Theorem 4. *Si \mathbf{Q} est une section positive stable de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$ alors il existe une pseudo-mesure finie μ de $\Gamma(\zeta)$ telle que*

$$\mathcal{F}\mu(\sigma_{\mathcal{D}})(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(\omega)(\sigma_{\mathcal{D}}(\omega))\right), \forall \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}).$$

Un potentiel \mathcal{V} sur un fibré ζ est une C^{∞} -application de l'espace total $E(\zeta)$ à valeurs dans \mathbb{R}

$$\mathcal{V} : E(\zeta) \rightarrow \mathbb{R},$$

l'interaction d'une section σ , avec un potentiel \mathcal{V} , est définie par

$$\mathcal{S}_{int}(\sigma) = \int_{\Omega} \mathcal{V}(\sigma(t)) d\nu(t) \quad (2.3)$$

où ν est une mesure de Lebesgue sur l'univers Ω . L'intégrale de Feynman sur les sections d'un fibré de potentiel \mathcal{V} , est donnée par

$$\int_{\Gamma(\zeta)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\sigma)\right) dw(\sigma),$$

w est une pseudo-mesure dont la transformée de Fourier en fibre est

$$\mathcal{F}w(\sigma_{\mathcal{D}}) = \exp\left(-\frac{i}{2} \mathbf{Q}(\sigma_{\mathcal{D}})\right)$$

où \mathbf{Q} est une section positive stable de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$. On dit que la pseudo-mesure, ainsi définie, est une **pseudo-mesure gaussienne en fibre** de covariance \mathbf{Q} . Pour une sous-variété V de Ω , de dimension 0, on pose

$$\Gamma_V(\zeta) = \{\tau \in \Gamma(\zeta) : \tau(\nu) = o_\nu \in E_\nu(\zeta), \forall \nu \in V\}$$

et

$$W = \{w_\nu \in E_\nu(\zeta), \forall \nu \in V\}.$$

Definition 3. On appelle propagateur de Feynman pour la section positive stable \mathbf{Q} sur $\Gamma_V(\zeta)$ de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$, la quantité

$$\mathcal{K}(V, W) = \phi(\sigma) \int_{\Gamma_V(\zeta)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\sigma + \tau)\right) dw(\tau),$$

où w est la pseudo-mesure sur $\Gamma_V(\zeta)$ de transformée de Fourier en fibre

$$\mathcal{F}w(\sigma_{\mathcal{D}}) = \exp\left(-\frac{i}{2} \mathbf{Q}(\sigma_{\mathcal{D}})\right) \quad \forall \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}),$$

σ est une section fixée vérifiant

$$\sigma(\nu) = w_\nu, \quad \nu \in V \tag{2.4}$$

et l'application ϕ est une C^∞ -application au sens de Banach sur les sections à valeurs dans \mathbb{C}

$$\phi : \Gamma(\zeta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\sigma) = |\phi(\sigma)| \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_0(\sigma)\right)$$

\mathcal{S}_0 est l'action et l'interaction \mathcal{S}_{int} , relatif à un potentiel \mathcal{V} , est définie par 2.3.

Remark 3. Pour les sections de chemins, à un degré de liberté, $|\phi(\sigma)|$ est constant et vaut \sqrt{m} , m est la masse de la particule.

Le propagateur de Feynman des sections quantifie les sections de ζ . Ce propagateur mesure, **en un certain sens**, la **"pseudo-probabilité"** de trouver des sections de ζ pour lesquelles le système d'équations 2.4 est vérifié lorsque l'on munit le fibré ζ , d'un potentiel \mathcal{V} , d'une section positive stable \mathbf{Q} de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$.

3. LES CHAMPS DE L'UNIVERS Ω

Le fibré considéré ζ est le fibré tangent

$$\zeta = (T\Omega, \pi, \Omega, \mathbb{R}^n), \quad n \geq 4$$

et on note $\zeta_{\mathcal{D}}$ le fibré dual

$$\zeta_{\mathcal{D}} = (\mathcal{T}\Omega, \pi, \Omega, \mathbb{R}^n).$$

On se fixe une métrique riemannienne g , g est une section de $\mathcal{Q}(\zeta)$ définie positive. Cette métrique induit un isomorphisme de dualité de ζ dans $\zeta_{\mathcal{D}}$, défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{D} : \Gamma(\zeta) &\rightarrow \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}), \\ \mathcal{D}(X)(\omega) &= X_{\mathcal{D}}(\omega) : E_{\omega}(\zeta) \rightarrow \mathbb{R}, \\ X_{\mathcal{D}}(\omega)(u) &= g(\omega)(X(\omega), u).\end{aligned}$$

Soit \mathbf{Q} la section des formes quadratiques de $\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{D}})$ définie par

$$\mathbf{Q}(\omega)(X_{\mathcal{D}}(\omega)) = g(\omega)(X(\omega), X(\omega)), \quad X(\omega) = \mathcal{D}^{-1}(X_{\mathcal{D}})(\omega).$$

Sur chaque fibre $\mathcal{D}T_{\omega}\Omega$, la forme bilinéaire $\mathbf{Q}(\omega)$ induit, en dimension finie sur la fibre, une mesure gaussienne $\tilde{\mu}(\omega)$. Si \mathbf{Q} est positive et stable la section $\tilde{\mu}$ ainsi définie est la mesure image sur chaque fibre, d'une mesure μ sur l'espace des champs $\Gamma(\Omega)$. Fixons une sous-variété V d'événements de l'univers Ω , $\dim V = 0$, et une famille $W = \{X_v : v \in V\}$ telle que

$$X_v \in T_v\Omega, \forall v \in V$$

il existe un champ \mathbf{X} tel que

$$\mathbf{X}(v) = X_v, \forall v \in V, \quad (3.1)$$

il suffit de prendre pour chaque $v \in V$, des cartes U_v de v , deux à deux disjointes et des C^∞ -applications θ_v telles que

$$\text{supp } \theta_v \subset U_v \text{ et } \theta_v(v) = 1, \forall v \in V$$

alors

$$\mathbf{X} = \sum_{v \in V} \theta_v X_v \quad (3.2)$$

est un champ qui vérifie les équations 3.1. On peut définir le propagateur de Feynman

$$\mathcal{K}(V, W) = \phi(\mathbf{X}) \int_{\Gamma_V(\Omega)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\mathbf{X} + X)\right) dw(X),$$

où w est la pseudo-mesure sur $\Gamma_V(\Omega)$ de transformée de Fourier en fibre

$$\mathcal{F}w(\sigma_{\mathcal{D}}) = \exp\left(-\frac{i}{2} \mathbf{Q}(\sigma_{\mathcal{D}})\right) \quad \forall \sigma_{\mathcal{D}} \in \Gamma(\zeta_{\mathcal{D}}),$$

\mathbf{X} est un champ vérifiant 3.2 et l'application ϕ est une C^∞ -application au sens de Banach sur les sections à valeurs dans \mathbb{C}

$$\phi : \Gamma(\zeta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\mathbf{X}) = |\phi(\mathbf{X})| \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_0(\mathbf{X})\right)$$

\mathcal{S}_0 est l'action et \mathcal{S}_{int} est l'interaction relatif à un potentiel \mathcal{V} . Si

$$|\phi(\mathbf{X})| = 1 \text{ et } \int_{\Gamma_V(\Omega)} dw = 1$$

alors $|\mathcal{K}(V, W)|$ est indépendant du choix de $\phi(\mathbf{X})$, c'est la probabilité de trouver un champ $X \in \Gamma(\Omega)$ vérifiant les équations 3.1.

Remark 4. Si la famille d'événements V est discrète avec des points d'accumulation, une condition nécessaire pour l'existence d'un champ X pour lequel les équations 3.2 soient vérifiées est donnée par

$$\lim_{v \rightarrow v_0, v \in V} X_v = X_{v_0}, \text{ si } v_0 \in V.$$

4. LES C^α -STRUCTURES

On s'intéresse aux lignes d'univers des particules. Une ligne d'univers de Ω est une sous-variété topologique γ de dimension 1 telle qu'il existe une sous-variété \mathcal{N}_γ de γ de dimension 0 pour laquelle chaque composante connexe de

$$\gamma \setminus \mathcal{N}_\gamma$$

est une sous-variété de classe C^∞ . La sous-variété \mathcal{N}_γ forme les noeuds de la ligne d'univers. Si on fait l'hypothèse qu'une ligne d'univers ne peut-être observable qu'aux événements \mathcal{N}_γ , peut-on mesurer les irrégularités aux noeuds? Et peut-on décrire la ligne d'univers à partir de ses noeuds. Dans un premier temps, on étudie la ligne d'univers aux noeuds et ensuite on détermine en un certain sens la probabilité de trouver une ligne d'univers ayant des noeuds fixés. Commençons par l'espace le plus élémentaire des fonctions numériques, continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ noté

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}),$$

une fonction est dite α -dérivable en $a \in I$ si les deux limites existent et sont égales,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a) - f(a-h)}{h^\alpha}, \text{ pour } \alpha \in [0, 1[,$$

on note $f^{(\alpha)}(a)$ cette limite [3].

Lemma 5. *Si f est α -dérivable en a , alors pour tout β , $\alpha \leq \beta < 1$, f est β -dérivable en a et $f^{(\beta)}(a) = 0$.*

On note

$$\alpha(a) = \inf \{ \beta \in [0, 1[: f \text{ est } \beta\text{-dérivable en } a \},$$

si $f^{(\alpha(a))}(a)$ existe, ce nombre est le nombre dérivé de f en a . Une application f est α -dérivable sur I si elle a un nombre dérivé $f^{(\alpha)}$ en chaque point $a \in I$. Cette dérivée s'écrit $f^{(\alpha)}$.

Remark 5. α est une fonction de I à valeurs dans $[0, 1[$.

Definition 4. Pour $\alpha \geq 0$, une fonction f est α -dérivable sur I si f est de classe \mathcal{C}^n , $n = [\alpha]$, telle que $f^{(n)}$ est $(\alpha - [\alpha])$ -dérivable sur I .

La formule de dérivation des compositions se transforme, si g est β -dérivable et f est α -dérivable alors $g \circ f$ est γ -dérivable, où

$$\gamma(a) = (\beta \circ f(a)) \alpha(a)$$

et

$$(g \circ f)^{(\gamma)} = (g^{(\beta)} \circ f) (f^{(\alpha)})^{\beta \circ f}.$$

On peut définir de nouvelles classes de fonctions entre les classes $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, ce sont les classes des fonctions α -dérivables $C^\alpha(I, \mathbb{R})$ pour lesquelles on a les inclusions

$$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\beta(I, \mathbb{R}) \subset C^\alpha(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ pour } \alpha < \beta.$$

L'holomorphie non entière est définie par, si $z = |z| e^{i \arg(z)} \in \mathbb{C}$, où

$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi \text{ et } \text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$$

est l'argument principal de z , on définit les puissances d'ordre $\alpha \in [0, 1[$ par

$$z_k^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha(\text{Arg}(z) + 2k\pi)},$$

la dérivée d'indice k , d'ordre α de $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ au point z est la limite, si elle existe de

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h_k^\alpha}$$

que l'on note $f_k^{(\alpha)}(z)$. S'il existe un indice k pour lequel $f_k^{(\alpha)}(z)$ existe, alors $\{f_k^{(\alpha)}(z)\}_{k \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $e^{2i\alpha\pi}$, cyclique si $\alpha \in \mathbb{Q}$ et de même module.

Remark 6. Si f est une fonction monotone sur l'intervalle ouvert I alors l'ordre de dérivation α de f vérifie $\alpha = 1$ p.p.

Definition 5. Une fonction numérique est fractale sur un intervalle ouvert I si pour tout intervalle $J \subset I$, la restriction

$$f_J : J \rightarrow \mathbb{R}, f_J = f|_J$$

n'est pas monotone.

On définit la notion de \mathcal{C}^α -structure sur les variétés de Banach, il suffit de définir la notion de \mathcal{C}^α -différentiabilité pour une application

$$f : U \subset E \rightarrow F$$

où E et F sont des espaces de Banach. Si f n'est pas dérivable au sens de Banach en $x \in U \subset E$, on dit que f est α -dérivable en x s'il existe une application linéaire continue $L : E \rightarrow F$

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - L(h)|}{|h|^\alpha} = 0, h^\alpha = |h|^\alpha \frac{h}{|h|} \text{ si } h \neq o_E \text{ et } o_E^\alpha = o_E$$

sous cette hypothèse, L est notée

$$L = D^{(\alpha)} f(x).$$

On peut élargir la notion de dérivation aux échelles de comparaison. Une échelle de comparaison est une famille de fonctions $\mathcal{E}_o = \{\varphi\}$, non équivalentes à la fonction identiquement nulle et définies sur un voisinage ouvert I tel que

$$0 \in \text{Adh}(I),$$

sauf peut-être en 0, vérifiant les propriétés suivantes. La famille \mathcal{E}_o est une famille totalement ordonnée pour la relation d'ordre \preccurlyeq . L'ordre de dérivation de f , le long de $\{\varphi\}$, est le

$$\sup \left\{ \psi \in \{\varphi\} : \lim_{h \rightarrow 0, h \in I} \frac{f(x+h) - f(x)}{\psi(h)} = 0 \right\}.$$

On rappelle que $\varphi \preccurlyeq \psi$, si et seulement si, $\varphi = \psi$ ou $\varphi(h) \underset{h \rightarrow 0}{\in} o(\psi(h))$. La dérivée le long de $\{\varphi\}$ est

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in I} \frac{f(x+h) - f(x)}{\psi(h)} = f^{(\psi)}(x),$$

si cette limite existe, où ψ est l'ordre de dérivation de f le long de $\{\varphi\}$.

Remark 7. On peut définir la notion de \mathcal{C}^ψ -structure sur les variétés de Banach, pour ψ appartenant à une échelle de comparaison \mathcal{E}_o , il suffit de définir la notion de \mathcal{C}^ψ -différentiabilité pour une application

$$f : U \subset E \rightarrow F$$

où E et F sont des espaces de Banach. L'application f est ψ -dérivable en x s'il existe une application linéaire continue $L : E \rightarrow F$

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - L(h^\psi)|}{\psi(|h|)} = 0, \quad h^\psi = \psi(|h|) \frac{h}{|h|} \text{ si } h \neq o_E \text{ et } o_E^\psi = o_E \quad (4.1)$$

sous cette hypothèse, L est notée

$$L = D^{(\psi)} f(x).$$

La plus petite fonction $\psi \in \mathcal{E}_o$ vérifiant 4.1, pour la relation d'ordre \preceq , est l'ordre de dérivation de f en x relativement à \mathcal{E}_o .

Soit $\{t_n\}$ et $\{\alpha_n\}$ deux suites de $]0; 1[$, on pose

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \neq t_n \\ \alpha_n & \text{si } t = t_n \end{cases}.$$

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

est une série absolument convergente, on note

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_n)^{\alpha_n},$$

où

$$t^\alpha = \begin{cases} \frac{t}{|t|} \exp(\alpha \log(|t|)) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

f est α -dérivable sur $[0, 1]$. Les fonctions de Weierstrass, définies par

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cos(a^n x),$$

avec $0 < \lambda < 1$ et $a > 0$. Si $\lambda a \geq 1$, W n'a pas de dérivée finie en aucun point. Si W est α -dérivable au point x , $\alpha \in]0; 1[$, alors $\alpha = -\frac{\log(\lambda)}{\log(a)}$, puisque pour $\alpha = -\frac{\log(\lambda)}{\log(a)} < 1$,

$$W(x+h) - W(x) = O(|h|^\alpha)$$

et

$$W(x+h) - W(x) \neq o(|h|^\alpha),$$

l'ordre de dérivation de W en x est α . La fonction de Riemann, définie par

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n^2 x),$$

n'est pas dérivable si $\frac{x}{\pi}$ est irrationnel, elle est dérivable en π et $R'(\pi) = -\frac{1}{2}$.
L'exponentielle de Mittag-Leffer, définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)},$$

est α -différentiable pour $0 < \alpha < 1$ et $z \in \mathbb{C}$ et on a

$$(E_\alpha(t))^{(\alpha)} = -E_\alpha(t).$$

Definition 6. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, l'intégrale de Riemann-Liouville au point $x \in [a, b]$ est définie par

$$I_a(f, \alpha)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

On rappelle que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \mathcal{L}(t^{\alpha-1} u(t))(1)$$

où \mathcal{L} est l'opérateur de Laplace. La dérivée de Riemann-Liouville

$$D^\alpha(f, a)(x) = \frac{d}{dx} (I_a(f, 1-\alpha))(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right)$$

et $\alpha \leq 1$.

La dérivée fractionnaire locale à droite et à gauche de f en $y \in [a, b]$ est, respectivement,

$$d_-^\alpha f(y) = \lim_{x \rightarrow y^-} D^\alpha(f - f(y), y)(x)$$

et

$$d_+^\alpha f(y) = \lim_{x \rightarrow y^+} D^\alpha(f - f(y), y)(x).$$

Proposition 1. Si f est différentiable en y , $\lim_{\alpha \rightarrow 1} d_\pm^\alpha f(y) = f'(y)$.

Pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, $d_\pm^\alpha(C) = 0$.

Theorem 5. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $\alpha \leq 1$

$$d_\pm^\alpha f(y) = \Gamma(1 + \alpha) \lim_{x \rightarrow y^\pm} \frac{\pm(f(y) - f(x))}{(\pm(y-x))^\alpha}.$$

En particulier, si f est α -dérivable en $y \in [a, b]$, les dérivées fractionnaires, à gauche et à droite de y , sont égales à $d_\pm^\alpha f(y) = \Gamma(1 + \alpha) f^{(\alpha)}(y)$.

Proof. On peut consulter [1] pour une preuve. □

On a

$$d_+^\alpha f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{x \rightarrow y^+} \frac{d}{dx} \left(\int_y^x \frac{f(t) - f(y)}{(x-t)^\alpha} dt \right)$$

et

$$d_-^\alpha f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{x \rightarrow y^-} \frac{d}{dx} \left(\int_x^y \frac{f(y) - f(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right).$$

On peut exprimer, lorsqu'elle existe, la dérivée d'ordre α de f à l'aide d'opérations standards.

5. TRAJECTOIRE QUANTIQUE DANS UN BANACH

Si $\gamma \in \mathcal{C}^n(I, \mathcal{B})$ et $\gamma \notin \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathcal{B})$, où \mathcal{B} est un espace de Banach et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , on dit que $\gamma^{(n)}$ est α -dérivable en $t \in I$, si les limites suivantes existent et sont égales

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma^{(n)}(t+h) - \gamma^{(n)}(t)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma^{(n)}(t) - \gamma^{(n)}(t-h)}{h^\alpha}, \text{ pour } \alpha \in [0, 1[\quad (5.1)$$

on note $\gamma^{(n+\alpha)}(t)$ cette limite. L'ordre de dérivation de $\gamma^{(n)}$ en t est défini par

$$\alpha(t) = \inf \left\{ \alpha \in [0, 1[: \gamma^{(n)} \text{ est } \alpha\text{-dérivable en } t \right\}.$$

On dit qu'une trajectoire γ d'un espace de Banach est α -dérivable en t si

$$\gamma \in \mathcal{C}^{[\alpha]}(I, \mathcal{B}), \gamma \notin \mathcal{C}^{[\alpha]+1}(I, \mathcal{B})$$

$$\text{et } \alpha - [\alpha] = \inf \left\{ \beta \in [0, 1[: \gamma^{([\alpha])} \text{ est } \beta\text{-dérivable en } t \right\},$$

où $[\alpha]$ est la partie entière de α . Les chemins γ de classe $\mathcal{C}^\alpha(I, \mathcal{B})$ sont les chemins α -dérivables en t pour tout $t \in I$.

Remark 8. Pour une trajectoire $\gamma \in \mathcal{C}^n(I, \mathcal{B})$, $\gamma \notin \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathcal{B})$, le nombre

$$\alpha(t) = \inf \left\{ \alpha \in [0, 1[: \gamma^{(n)} \text{ est } \alpha\text{-dérivable en } t \right\}$$

est la fonction d'irrégularité de $\gamma^{(n)}$.

Definition 7. Une trajectoire fractale γ de \mathcal{B} est un chemin continu de \mathcal{B} , tel que la fonction d'irrégularité restreinte à tout intervalle $J \subset I$, notée α_J est différente de 1 presque partout. On dit que γ est quantique si

$$\mathcal{I} = \{t \in I : \alpha(t) < 1\}$$

est discret. Les points $\gamma(t)$ pour $t \in \mathcal{I}$ sont les noeuds de la trajectoire.

On suppose \mathcal{B} est muni d'une base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dans cette base on peut écrire tout chemin continu $\gamma(t)$ sous la forme

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(t) e_n.$$

Si γ est une trajectoire fractale alors toutes les fonctions coordonnées sont fractales. Si γ est quantique, toutes les coordonnées sont quantiques.

Claim 1. Peut-on donner une interprétation géométrique de la masse? Si la trajectoire γ d'une particule est α -dérivable sur I où α est une fonction numérique sur I , à valeurs dans $[0, 1[$, on peut interpréter la masse m de la particule aux noeuds comme une fonction qui mesure l'irrégularité de γ . On pose

$$m = \Psi(\alpha).$$

Problem 1. La fonction Ψ est une fonction décroissante de

$$\Psi : [0, 1[\rightarrow]0, 1],$$

plus la masse est élevée, plus elle interagit avec les autres particules et plus sa trajectoire est irrégulière. On prend pour Ψ aux noeuds de la trajectoire,

$$\Psi(t) = 1 - \alpha(t) \text{ si } t \in \mathcal{I}.$$

En dehors des noeuds la notion de masse n'existe plus, la particule devient énergie. Dans le cas général, la masse mesure l'irrégularité de $\gamma^{(n)}$, où γ est une trajectoire de classe C^n . Dans le cas d'une trajectoire de classe C^∞ , la masse $m = 0$.

L'univers visible est formé par les noeuds des lignes d'univers Ω . On munit cet univers d'une pseudo-métrique g vérifiant l'équation relativiste d'Einstein

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Une "entropie" Φ est une C^∞ -application

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

qui mesure le désordre dans l'univers. L'évolution de l'univers n'est plus décrit par le temps, qui est une notion locale définie à l'aide de champs chronologiques, mais par son entropie. On définit le graphe orienté

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Omega, \Phi, g)$$

les sommets du graphe sont les noeuds des lignes d'univers de chaque particule. Notons $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$, l'ensemble des sommets du graphe, un arc joint le sommet ω_0 au sommet ω_1 si

$$\Phi(\omega_0) < \Phi(\omega_1)$$

et il existe une géodésique de la pseudo-métrique g joignant les sommets ω_0 et ω_1 . On pondère les arcs pour minimaliser l'entropie de la façon suivante. Soit γ un C^∞ -chemin de l'événement ω_0 à ω_1 alors $\Phi \circ \gamma \in \mathcal{C} = C^\infty(I, \mathbb{R})$, on définit le propagateur de Feynman pour l'entropie Φ par

$$\mathcal{K}_\Phi(\omega_0, \omega_1) = \sqrt{m_0} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_o(\Phi \circ \gamma)\right) \int_{\mathcal{C}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\Phi \circ \gamma + \tau)\right) d\omega(\tau),$$

où m_0 est la masse de la particule en l'événement ω_0 , γ est une géodésique joignant les événements ω_0 et ω_1 , l'action \mathcal{S} de la particule se scinde sous la forme

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_o + \mathcal{S}_{int}$$

avec $\mathcal{S}_o(\Phi \circ \gamma)$ est l'action de la particule le long du chemin γ et $\mathcal{S}_{int} \circ \Phi$ est l'interaction dans un potentiel \mathcal{V} définit par

$$\mathcal{S}_{int} \circ \Phi(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma(t)) dt.$$

La pseudo-mesure w est définie par sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}w(\mu) = \exp\left(-\frac{i}{2}W(\mu)\right) = \exp\left(-\frac{i}{2} \int_{[0,1]^2} \inf(t, s) d\mu(t) d\mu(s)\right),$$

pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$.

Remark 9. \mathcal{S}_{int} est une interaction définie sur les chemins $\mathcal{C} = C^\infty(I, \mathbb{R})$ si la condition

$$\Phi(\gamma_0) = \Phi(\gamma_1) \implies \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma_0(t)) dt = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma_1(t)) dt, \quad (5.2)$$

une entropie qui vérifie 5.2 est une \mathcal{V} -entropie. Si $\Phi = \mathcal{V}$ alors

$$\mathcal{S}_{int} \circ \mathcal{V}(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma(t)) dt$$

et l'interaction s'écrit

$$\mathcal{S}_{int}(\tau) = \int_0^1 \tau(t) dt, \forall \tau \in \mathcal{C}.$$

Dans cette situation, on peut décrire le propagateur de Feynman de façon intrinsèque. L'action \mathbf{S} de la particule sur l'univers Ω se scinde sous la forme

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_{int}$$

avec \mathbf{S}_0 est l'action de la particule dans l'univers Ω , \mathbf{S}_{int} est l'interaction définie par

$$\mathbf{S}_{int}(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma(t)) dt,$$

si γ est une géodésique de g on a

$$\mathcal{K}(\omega_0, \omega_1) = \sqrt{m_0} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{S}_0(\gamma)\right) \int_{\mathcal{C}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^1 (\mathcal{V} \circ \gamma(t) + \tau(t)) dt\right) dw(\tau),$$

et w est la pseudo-mesure définie par

$$\mathcal{F}w(\mu) = \exp\left(-\frac{i}{2} \int_{[0,1]^2} \inf(t, s) d\mu(t) d\mu(s)\right).$$

On peut, maintenant, définir la pondération sur l'arc (ω_0, ω_1) du graphe quantique $\mathcal{G}(\Omega, \Phi, g)$ par

$$\text{pond}(\omega_0, \omega_1) = |\mathcal{K}_{\Phi}(\omega_0, \omega_1)|,$$

le principe de moindre action s'énonce ainsi:

"Pour une particule de masse m_0 qui se situe en l'événement ω_0 , la probabilité de la localisée en ω_1 est $\text{pond}(\omega_0, \omega_1)$. La ligne d'univers est un chemin fini ou infini du graphe pour lequel entre deux sommets consécutifs ω_0 et ω_1 , on a

$$\text{pond}(\omega_0, \omega_1) = \inf \{ \text{pond}(\omega_0, \omega) : (\omega_0, \omega) \in \mathcal{A}(\mathcal{G}) \}$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est l'ensemble des arcs de \mathcal{G} ".

6. LES CHAMPS DU GRAPHE QUANTIQUE

En chaque sommet $\omega \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ du graphe quantique \mathcal{G} , on définit un champ de la façon suivante. Si ω est un sommet de \mathcal{G} , soit (U, φ) une carte en ω , pour un chemin quantique γ passant par ω , l'application

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi^{-1} \circ \gamma(0) = o$$

est α -dérivable dans le sens de 5.1 pour $0 \leq \alpha < 1$. Le vecteur tangent

$$D_{\omega} \varphi \left(\gamma^{(\alpha)}(0) \right) \in T_{\omega} \Omega$$

où

$$\gamma^{(\alpha)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{-1} \circ \gamma(h) - \varphi^{-1} \circ \gamma(0)}{h^{\alpha}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{-1} \circ \gamma(0) - \varphi^{-1} \circ \gamma(-h)}{h^{\alpha}}.$$

Supposons qu'en chaque sommet du graphe quantique \mathcal{G} , on se fixe un champ défini précédemment, on note \mathcal{W} cette famille. On peut définir le propagateur de Feynman

$$\mathcal{K}(\mathcal{G}, \mathcal{W}) = \phi(\mathbf{X}) \int_{\Gamma_V(\Omega)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\mathbf{X} + X)\right) dw(X),$$

où w est la pseudo-mesure sur $\Gamma_{\mathcal{G}}(\Omega)$ de transformée de Fourier en fibre

$$\mathcal{F}w(d) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(d)\right) \quad \forall d \in \Gamma(\mathcal{T}\Omega),$$

d est une section de 1-forme et \mathbf{X} est un champ vérifiant

$$\mathbf{X}(\omega) = X_{\omega} \in T_{\omega}\Omega, \quad (6.1)$$

pour tous les sommets $\omega \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ du graphe quantique et l'application ϕ est une C^{∞} -application au sens de Banach sur les sections à valeurs dans \mathbb{C}

$$\phi : \Gamma(T\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\mathbf{X}) = |\phi(\mathbf{X})| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_0(\mathbf{X})\right)$$

\mathcal{S}_0 est l'action et \mathcal{S}_{int} est l'interaction relatif au potentiel \mathcal{V} défini précédemment. La probabilité de trouver un champ vérifiant 6.1 est $|\mathcal{K}(\mathcal{G}, \mathcal{W})|$.

7. CONCLUSION

L'univers est observable qu'en ses irrégularités. On est amené à décrire les lignes d'univers des particules comme les chemins d'un graphe dont les sommets sont les événements observables. La notion de dérivation fractale ou fractionnaire permet de mesurer l'irrégularité et de faire l'hypothèse d'une interprétation géométrique de la masse. Entre deux observations, on définit le propagateur de Feynman qui donne la probabilité de présence de la particule-énergie. On a une dualité entre énergie et matière. La matière est l'univers observable et entre deux événements l'énergie produite oscille le long d'une géodésique définie par une métrique d'Einstein, cette oscillation est décrite par le propagateur de Feynman. Le propagateur de Feynman sur les champs permet de donner la probabilité de l'existence d'un champ unitaire défini aux noeuds par les dérivations fractales décrites par les lignes d'univers.

REFERENCES

- [1] Ben Adda F., Cresson J., "Divergence d'échelle et différentiabilité" C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 261–264, 2000
- [2] Morette DeWitt C., "Feynman's Path Integral Definition Without Limiting Procedure" Commun. math. Phys. 28, 47-67(1972) Springer-Verlag 1972
- [3] Jonot J.L., "Structures opérationnelles de dimension intrinsèque non entière" Thèse 1993.
- [4] Jonot J.L., "Quantification des fibrés des états" [Research Report] Académie de Versailles. 2015. <hal-01114487v3>
- [5] Feynman R. P., Hibbs A. R., "Quantum Mechanics and Path Integrals", (New York : McGraw-Hill 1965) 133
- [6] Tumpach A.B., "Variétés kaelériennes et hyperkaelériennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes. 2006

E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr