



HAL
open science

Les premières contributions de Poincaré en mécanique céleste vues à partir de sa correspondance avec Anders Lindstedt (1883-1884)

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. Les premières contributions de Poincaré en mécanique céleste vues à partir de sa correspondance avec Anders Lindstedt (1883-1884). 2012. hal-01231461

HAL Id: hal-01231461

<https://hal.science/hal-01231461>

Preprint submitted on 29 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Les premières contributions d'Henri Poincaré en mécanique céleste vues à partir de sa correspondance avec Anders Lindstedt (1883-1884).



Anders Lindstedt (1854-1939)



Henri Poincaré (1854-1912)

5° *Application des notions précédentes.*

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences : Notes du 27 février, 30 octobre 1882; 23 juillet et 24 décembre 1884.

Résultats. -- Étude de certaines solutions particulières du problème des trois corps, examen critique des démonstrations de la stabilité du système solaire; intégration des équations différentielles par des séries convergentes pour toutes les valeurs réelles de la variable.

Présentation de travaux de Poincaré par lui-même (1884)

V. — APPLICATIONS DES NOTIONS PRÉCÉDENTES.

On a dû voir, en lisant les lignes qui précèdent, que les questions de stabilité, analogues à celles que l'on rencontre en Astronomie, étaient ma préoccupation constante. C'est qu'en effet j'attendais de l'application des principes que je viens d'exposer la solution de cette question si intéressante de la stabilité du système solaire, et, malgré l'insuccès de mes efforts, je persiste à croire que c'est dans cette direction qu'il faut la chercher.

Il est aisé de voir que les méthodes anciennes ne donnent pas la solution complète de cet important problème. Les séries que l'on obtient sont ordonnées suivant les puissances des masses et contiennent le temps en dehors des signes trigonométriques. Il en résulte qu'elles ne sont convergentes que pendant un certain intervalle de temps. Elles nous font donc voir par exemple que, *pendant quelques siècles*, les excentricités oscilleront entre certaines limites; elles ne nous permettent pas d'affirmer que ces excentricités resteront *éternellement* très petites.

Mes travaux mathématiques ont eu jusqu'ici quatre objets principaux :

- 1° Étude des équations différentielles ;
- 2° Théorie générale des fonctions ;
- 3° Algèbre et Arithmétique ;
- 4° Mécanique céleste.

Toutefois, je n'ai pas poursuivi ces quatre buts indépendamment l'un de l'autre et sans profiter de l'appui mutuel que se prêtent ces théories, en apparence si différentes.

Présentation de ses travaux par lui-même (1886)

D'après la présentation de ces travaux par lui-même, Poincaré classe ses travaux de recherche antérieurs à 1886 en quatre rubriques (équations différentielles (ED), théorie des fonctions (TF), mathématiques pures (algèbre et arithmétique) (AA), mécanique céleste (MC)).

Notes aux <i>Comptes rendus</i>				
	ED	TF	AA	MC
1879			2	
1880	1		2	
1881	14	2	1	
1882	8	1	2	1
1883	4	4	2	2

La correspondance avec Anders Lindstedt

- 12 lettres entre le 14 août 1883 et le 20 septembre 1885.
- Des héroïnes : l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \Psi_0 + \Psi_1x + \Psi_2x^2 + \dots$$

et en particulier, deux cas particuliers

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (n^2 - 2\beta \cos k \cdot \lambda t)x = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \lambda x \cos t + \mu x^3 \sin t.$$

Une vieille équation (en particulier la seconde)... D'Alembert, Lagrange, Lamé (1839), Mathieu (1868), Weber (1868), Gylden (1878-1881), Heine (1878) ... qui apparaît dans différents contextes (équation de la chaleur, vibration, théorie de la lune, fonctions sphériques) et qui est très étudiée dans les années 80 (Bruns, Callandreau, Hill, Lindemann, Stieljes, Tisserand, Radau, ...)

Juillet 1883 – Anders Lindstedt prend contact avec Poincaré en envoyant à ce dernier une série de notes qu'il a publiées dans *Astronomische Nachrichten* au sujet de ses travaux sur les développements des solutions de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \Psi_0 + \Psi_1x + \Psi_2x^2 + \dots$$

« Je vous remercie beaucoup des brochures que vous avez eu la bonté de m'envoyer il y a environ un mois ; »

Une première question historique – Pourquoi Lindstedt envoie-t-il des tirés à part à Poincaré ?

Poincaré fait bien entendu dès 1883 partie des interlocuteurs possibles dans ce champ (milieu suédois, même génération, début de notoriété, ...) mais il n'est pas pour autant encore un acteur incontournable en mécanique céleste.

L'importance de Hermite et Gylden – l'épisode de la note aux *Comptes rendus* du 17 février 1882 sur l'intégration des équations différentielles par les séries.

La note aux *Comptes rendus* du 17 février 1882 – Sur l'intégration des équations différentielles par les séries

- Lettre du 4 mars 1882 de Hermite à Mittag-Leffler
« [...] priez le [Gyldén] de ma part de bien vouloir lire l'article que Mr Poincaré vient de publier dans les *Comptes rendus* [24], et qui vise la théorie des perturbations. »
- Lettre du 20 mars 1882 de Hermite à Mittag-Leffler
« J'ai engagé Mr Poincaré à faire l'application de sa méthode au cas du mouvement elliptique ; je pense que Mr Gyldén ne sera pas fâché de pouvoir ainsi en juger. »
- Lettre du 6 avril 1882 de Hermite à Mittag-Leffler
« Dans un de nos entretiens, il m'a fait savoir que les séries auxquelles il parvient pour le mouvement elliptique, convergent plus ou moins rapidement, suivant le choix de la constante α , mais toujours à la manière d'une progression géométrique, ce qui me paraît de la plus haute importance. »
- Lettre du 14 juin 1882 de Weierstrass à Kowalevskaja

- Lettre du 8 mars 1883 de Weierstrass à Mittag-Leffler
- Lettre de mars 1883 de Mittag-Leffler à Poincaré – transmettant la lettre de Weierstrass du 8 mars et demandant une réponse de Poincaré.
- Lettre du 13 avril 1883 de Hermite à Mittag-Leffler
« Mr Poincaré est dans l'intention d'écrire à Mr Weierstrass au sujet de l'introduction de sa nouvelle variable s , qui n'est aucunement le temps t , mais qui varie dans le même sens que t de $-\infty$ à $+\infty$ dans le problème des trois corps. »
- Lettre du 18 avril 1883 de Poincaré à Mittag-Leffler (répondant à la question de Weierstrass) – la lettre d'un mathématicien très assuré et guère impressionné par la question d'un des mathématiciens les plus réputés de l'époque :
« J'ai lu avec un grand intérêt la lettre de M. Weierstrass dont vous m'avez donné copie. Il est bien clair comme le dit M. Weierstrass que les coordonnées des planètes ne peuvent s'exprimer en séries ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}$$
que si l'on est certain d'avance que les planètes ne se rencontreront pas et d'autre part on ne peut jamais en être certain.

Aussi je n'ordonnais pas suivant les puissances de $\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$ mais suivant celles de $\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$

s est une variable auxiliaire qui jouit des propriétés suivantes :

1° t s'exprime comme les coordonnées en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$

2° Si les planètes ne se rencontrent pas, quand s varie de $-\infty$ à $+\infty$, t croît constamment de $-\infty$ à $+\infty$.

3° Si elles se rencontrent au temps t_0 , quand s varie de $-\infty$ à $+\infty$, t croît constamment de $-\infty$ à t_0 . Les formules ne donnent plus rien à partir du temps t_0 et c'est ce qu'elles ont de mieux à faire.

Maintenant je n'avais pas eu spécialement en vue le problème de la Mécanique Céleste ; mon but était de montrer qu'on pouvait toujours résoudre des équations différentielles algébriques par des séries toujours convergentes pour toutes les valeurs réelles des variables. Les solutions de ce problème sont en nombre infini et celle que j'ai donnée n'est qu'un exemple. Il est clair que dans chaque cas particulier, il faut choisir la plus *zweckmässig*. Or je ne crois pas que dans le cas de la Mécanique Céleste celle que j'ai donnée soit la plus *zweckmässig*, je crois qu'il y a mieux à trouver. »

« Je ne crois pas toutefois qu'on puisse tirer grand parti des applications de cette méthode à la Mécanique céleste. [1886e, p. 188] »

- Rapport de Hermite sur les travaux de Poincaré, 1884

« Nous ne devons pas toutefois omettre de signaler une application d'une importance capitale et qui a été sa constante préoccupation. Que de nouveaux progrès se réalisent dans voie ouverte par Mr. Poincaré, il deviendra possible d'employer ses méthodes dans les grandes et difficiles questions de la mécanique céleste, comme celle de la stabilité du système solaire qui a été l'objet d'admirables travaux analytiques de Laplace, de Poisson, de Le Verrier. Les conclusions [?] obtenues par ces grands géomètres supposent la convergence des séries dont ils ont dû faire usage, séries ordonnées suivant les puissances des masses des planètes, et qui contiennent le temps en dehors des lignes trigonométriques. Or Mr. Weierstrass a mis en évidence dans une de ces leçons au Séminaire de l'Université de Berlin que cette convergence est impossible pour une durée quelconque, c'est donc seulement pour un intervalle de temps limité qu'il a été effectivement démontré que les excentricités oscillent en restant des quantités très petites. »

Cette question amène (techniques de calcul des perturbations) à chercher « des développements en série d'autre nature, dont la convergence serait certaine ou plus rapide ».

« Tel a été l'objet des travaux de notre illustre correspondant Suédois Mr. Gylden qui y a consacré son beau talent de géomètre et sa connaissance approfondie de la théorie des fonctions elliptiques, et l'on sait comment ses nouvelles méthodes ont permis de calculer beaucoup plus rapidement et plus sûrement les orbites de diverses comètes et petites planètes. Tout récemment un jeune astronome géomètre d'un grand mérite, Mr. Lindstedt a repris sous un nouveau point de vue cette question des perturbations dans un important mémoire dont un de nos confrères de la section d'astronomie saurait mieux que moi montrer l'intérêt. Ces efforts ne font pas encore toucher le but, mais ils montrent ce que l'on doit attendre d'une vue nouvelle et profonde que Mr. Poincaré a succinctement indiquée dans une note des comptes rendus du mois de Février 1882.

Mr. Poincaré y énonce que les solutions réelles d'un système d'un nombre quelconque d'équations différentielles linéaires du premier ordre peuvent s'exprimer par des séries convergentes, ordonnées suivant les puissances d'une variable auxiliaire. Et donc, dans le cas du problème des trois corps, sous certaines conditions initiales que l'auteur spécifie, cette variable devient une fonction exponentielle très simple du temps. L'importance de ce résultat nous fait exprimer le vœu que le jeune géomètre dirige son beau talent vers les problèmes de la Mécanique céleste, et poursuive dans cette voie le développement complet de ses idées, en réalisant les espérances qu'elles ont fait concevoir. »

Retour à la correspondance avec Lindstedt

Premier point : discussion autour des termes séculaires des développements des solutions de l'équation – août 1883.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (n^2 - 2\beta \cos k \cdot mt)x = 0.$$

Deuxième point : la robustesse et la convergence des développements de Lindstedt – septembre 1883 - mars-mai 1884.

Troisième point : la possibilité des développements de Lindstedt – mars-mai 1884.

Premier point : discussion autour des termes séculaires des développements des solutions de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (n^2 - 2\beta \cos \lambda t)x = 0$$

Deux techniques différentes : Lindstedt utilise des itérations de développements en séries ou de fractions continues (équations de récurrence), Poincaré utilise des techniques linéaires sur l'espace des solutions (analogie avec la théorie de Floquet, techniques de Fuchs)

« Voici l'analyse par laquelle j'arrive à ce résultat, analyse que je croyais connue mais qui ne doit pas l'être, puisque vous qui êtes si bien au courant de ces questions, vous ne semblez pas la connaître. » [25 août 1883]

Lindstedt étudie l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (n^2 - 2\beta \cos(\lambda t + b))x = 0$$

et écrit la solution générale sous la forme

$$x = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i \cos(mt + \pi + i(\lambda t + b))$$

où les inconnues du problème sont les coefficients μ et le paramètre m .

En introduisant cette série dans l'équation, il obtient des équations de récurrence et une première valeur approchée de m qui est affinée en l'introduisant dans l'équation de récurrence.

Le processus peut être itéré mais Lindstedt précise que

- 1) la seconde approximation est (en général) suffisante pour les applications astronomiques
- 2) lorsque la première approximation n'est pas définissable, il peut y avoir des difficultés (il propose une solution)
- 3) lorsque $\lambda = \pm \frac{1}{i}(n + m)$, il peut y avoir des termes séculaires.

Une question sur le cas où il peut y avoir des termes séculaires et une remarque (sans démonstration) :

« Encore faut-il remarquer que même dans ce cas, l'équation en question admet une intégrale particulière dépouillée de termes séculaires. » [13/08/1883]

Lindstedt répond en expliquant sa méthode pour bien préciser comment il détermine les cas où il y a des termes séculaires et conclut

« Ob in diesem Falle sekuläre Glieder überhaupt auftreten, wage ich nicht zu entscheiden, ebensowenig wie ich glaube, dass meine methode sie zu ermitteln erlaubt. » [20/08/1883]

Dans sa réponse [25/08/1883], Poincaré expose le problème en termes de techniques linéaires : φ et ψ étant deux solutions (indépendantes) de l'équation différentielle linéaire du second degré,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(n^2 - 2\beta \cos t) = 0$$

NB : Tisserand et Callandreau utilise aussi à la même époque ces techniques.

Poincaré définit l'opérateur linéaire qui à $(\varphi(t), \psi(t))$, associe $(\varphi(t + 2\pi), \psi(t + 2\pi))$, noté (φ', ψ') (*équation fondamentale de l'équation différentielle*).

$$\begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

où $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ et $\alpha + \delta = 2 \cos 2m\pi$.

Une solution propre s'écrit sous la forme $x = e^{\pm imt} \phi_1(t)$ où ϕ_1 est « une série de cosinus et de sinus de multiples de t » et ne comporte pas de terme séculaire.

Poincaré distingue deux cas selon que cet opérateur est diagonalisable ou non :

- 1) dans le premier cas, il n'y a pas de termes séculaires.
- 2) le seul cas embêtant est celui où l'opérateur s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

La première solution est propre et ne comporte pas de terme séculaire. Par contre, la seconde peut en comporter. En utilisant une méthode de variation de la constante, Poincaré montre que « l'intégrale générale de l'équation proposée admet des termes séculaires ».

Deuxième point : la robustesse et la convergence des développements de Lindstedt

Poincaré conclut sa lettre du 25 août 1883 en abordant la question de la convergence des développements de Lindstedt :

« Permettez-moi de vous adresser au sujet de vos méthodes que, je vous le répète, je regarde comme supérieures à toutes celles qui ont été proposées jusqu'ici, même à celles de M. Gylden. Comment établissez-vous la convergence des séries auxquelles vous parvenez ? C'est là un point que tous les astronomes ont jusqu'ici négligé d'établir d'une manière rigoureuse. »

Il signale que si cette question est évidente dans le cas d'une équation linéaire à coefficients périodiques, « il n'en est plus de même lorsque l'équation n'est plus linéaire » et qu'« il y a là une discussion très délicate que je voudrais vous voir aborder ».

Dans sa note de la même année « sur la forme des expressions des distances mutuelles, dans le problème des trois corps » (*CRAS*, 97 (1883)), Lindstedt évite explicitement la question :

« Sans entrer ici dans des discussions sur les questions de convergence, nous supposons que ces constantes aient des valeurs telles que les développements obtenus par notre voie soient toujours convergents ».

La réponse de Lindstedt à ce sujet sera tout aussi laconique :

« Auf ihre Frage wegen der Convergenz des Integrals einer Gleichung von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \psi(t)x + \psi_1(t)x^2$$

kann ich deshalb nur die Antwort geben, dass ich damit mich Höchst oberflächlich beschäftigt. » [5 septembre 1883]

Par contre, Poincaré avait (en mentionnant explicitement les applications à la mécanique céleste) déjà publié en 1882 une note concernant la convergence des séries trigonométriques. Dans cette note, Poincaré montre que le module d'une série trigonométrique convergente peut « devenir aussi grand que l'on veut ».

» Voici comment cela peut s'appliquer aux séries que l'on a à envisager en Mécanique céleste. On sait que, si t est le temps et a le grand axe, par exemple, on a pour la dérivée de ce grand axe une expression de la forme

$$\frac{da}{dt} = \Sigma A_p \sin \alpha_p t + \Sigma B_p \cos \beta_p t,$$

les deux séries $\Sigma \text{mod } A_p$ et $\Sigma \text{mod } B_p$ étant convergentes. En négligeant les carrés des masses, on en conclut, pour la variation δa du grand axe, l'expression

$$(4) \quad \delta a = \sum \frac{A_p}{\alpha_p} (1 - \cos \alpha_p t) + \sum \frac{B_p}{\beta_p} \sin \beta_p t.$$

» On serait tenté de conclure que δa reste toujours compris entre certaines limites. Cela a lieu en fait pour certaines valeurs incommensurables du rapport des moyens mouvements. Mais il est d'autres valeurs également incommensurables de ce même rapport pour lesquelles les séries du second membre de l'équation (4) se comportent comme les séries (1) et (3), et peuvent croître indéfiniment.

» Cela n'a pas d'importance au point de vue pratique du calcul des perturbations, puisque le rapport des moyens mouvements ne peut être connu qu'approximativement et que nous ne pouvons reconnaître par conséquent si les séries (4) restent finies ou croissent indéfiniment; puisque d'ailleurs l'équation (4) ne représente la variation du grand axe que si l'on néglige les termes d'ordre supérieur par rapport aux masses, et que nous ignorons si ces termes ne peuvent pas eux-mêmes croître au delà de toute limite.

» Néanmoins, il y a peut-être quelque intérêt à signaler ce fait, car il montre qu'il est impossible d'accepter certaines conséquences théoriques qu'on serait tenté de tirer de l'expression (4). »

À la fin de l'année 1883, le 24 décembre, Poincaré publie dans les *CRAS* une note au sujet des développements de Lindstedt :

« M. Lindstedt a publié récemment, dans les *Comptes rendus* et les *Astronomische Nachrichten*, une solution nouvelle du problème des trois corps, qui lui permet d'exprimer les coordonnées des trois masses par des séries purement trigonométriques. Cet important résultat donne quelque intérêt à une remarque que j'avais faite dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 30 octobre 1882. J'avais montré, dans cette Note, qu'une série purement trigonométrique et toujours convergente peut cependant croître au-delà de toute limite. Ainsi, même en supposant vaincues toutes les difficultés provenant des questions de convergence, le résultat de M. Lindstedt ne permettrait pas de conclure à la stabilité du système solaire, dans le sens rigoureux du mot. »

Poincaré montre dans cette note que 1) si de telles séries convergent sur un intervalle de temps, elles convergent partout, 2) que la méthode de Lindstedt est robuste :

« Cela n'a de sens que si les coordonnées ne peuvent se développer que d'une seule manière en séries trigonométriques convergentes, et c'est certainement là la supposition du géomètre de Dorpat. Je me propose de montrer que cette supposition est fondée, ce qui n'est pas évident *a priori*. »

Enfin, Poincaré affirme savoir « montrer » que les développements de Lindstedt ne sont pas convergents pour toutes les valeurs des constantes :

» Toutes ces suppositions de M. Lindstedt sont donc confirmées. Je ne crois pas qu'il puisse en être de même d'une autre hypothèse faite dans ce même Mémoire. Le savant astronome suppose que l'on pourra choisir les constantes de façon que ces développements soient convergents. Il est vrai que, pour certaines valeurs particulières des constantes, les distances mutuelles des trois corps peuvent être développées en séries trigonométriques convergentes (ne contenant même qu'un argument), ainsi que je l'ai démontré dans une Note du 23 juillet 1883. Mais il n'est pas évident, il est même improbable, que la convergence subsiste lorsque les valeurs des constantes sont suffisamment voisines de ces valeurs particulières. Je connais, en effet, des problèmes tout à fait analogues où la convergence n'a pas lieu.

» Mais, même si elles divergent, les séries de M. Lindstedt peuvent fournir une solution du problème avec une approximation indéfinie, c'est-à-dire que l'on peut trouver des séries convergentes dont les coefficients diffèrent aussi peu que l'on veut de ceux des séries de M. Lindstedt et dont la somme diffère aussi peu que l'on veut des distances mutuelles que l'on cherche à exprimer. C'est dans ce sens que la méthode de M. Lindstedt nous fournit une véritable solution du problème. »

Poincaré montre dans cette note qu'il maîtrise au moins aussi bien que les professionnels qui avaient réceptionné la méthode de Lindstedt avec faveur (Gyldén, Callandreau, Tisserand, ...) un certain nombre de subtilités de cette méthode.

À la fin de 1883, Poincaré a mis en place l'idée de solution périodique, celle de développement asymptotique et une approche fine de la notion de stabilité.

Quant à la convergence des développements de Lindstedt, il faudra attendre le mémoire rédigé à l'occasion du concours du roi Oscar.

J'ai fait voir également que la plupart des séries employées en mécanique céleste et en particulier celles de M. LINDSTEDT qui sont les plus simples, ne sont pas convergentes. Je serais désolé d'avoir par là jeté quelque discrédit sur les travaux de M. LINDSTEDT ou sur les recherches plus profondes de M. GYLDÉN. Rien ne serait plus éloigné de ma pensée. Les méthodes qu'ils proposent conservent toute leur valeur pratique. On

Mais dans la lettre du 8 avril 1884, Poincaré donne des éléments sur les progrès de ses réflexions au sujet de la convergence des séries trigonométriques :

« Il importe d'abord de bien préciser ce que l'on doit entendre par convergence.

Vos séries se présentent sous la forme suivante

$$S_0 + \lambda S_1 + \lambda^2 S_2 + \dots \quad (2)$$

λ étant un coefficient de l'ordre des masses.

On a ensuite

$$S_i = \sum A_i \cos(m\omega + nt + p) \quad (3)$$

Et enfin vous posez

$$w = \omega + t(\sigma_0 + \lambda\sigma_1 + \lambda^2 + \dots) \quad (4)$$

Ainsi les termes de la série (2) sont eux-mêmes des séries trigonométriques dont l'un des arguments s'exprime lui-même par une série (4). Cela posé, on peut concevoir deux modes principaux de convergence de la série (2) :

La série (4) est convergente de sorte que w est parfaitement déterminé. Les séries (3) sont convergentes *pour toutes les valeurs de t* . La série (2) qui a pour termes la somme des diverses séries (3) est convergente également, mais *pour certaines valeurs de t seulement*.

Ce premier mode de convergence ne saurait convenir pour la démonstration de la stabilité, mais il convient pour le calcul des perturbations pendant un intervalle de temps limité (à courte échéance). »

« Deuxième mode.

La série (4) est encore convergente ; posons

$$A = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots \quad (5)$$

où A_i est comme nous l'avons supposé plus haut le coefficient d'un certain terme $\cos(m\omega + nt + p)$ dans la série S_i . Supposons que les séries (5) soient convergentes et mettons la série (2) sous la forme

$$\sum A \cos(m\omega + nt + p). \quad (6)$$

Si la série (6) est convergente, elle l'est toujours et c'est là le deuxième mode possible de convergence de la série (2).

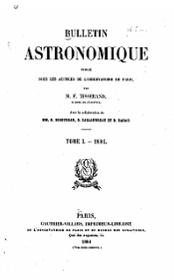
Ce second mode est le seul qui convient pour la démonstration de la stabilité (et encore faut-il que la convergence soit uniforme) et pour le calcul des perturbations à longue échéance.

Voici maintenant ce que je pense de ces deux modes de convergence. En premier lieu je crois, sans l'avoir démontré, que la série (4) est convergente. Les séries (3) ne seront pas convergentes en général si on les prend sous la forme brute que donne l'intégration. Mais il sera toujours possible en groupant les termes d'une manière convenable de leur rendre la convergence qui ne sera toutefois pas uniforme. [...] Cela posé la série (2) serait convergente pour les petites valeurs de t .

Les séries (5) seraient convergentes en général, mais la série (6) ne le serait pas. Voilà ce que je suis porté à croire, sans en avoir toutefois de démonstration rigoureuse.

Ainsi, vos séries présenteraient le premier mode de convergence, mais non le second ; elles pourraient donc servir au calcul à courte échéance, mais non à la démonstration de la stabilité. C'est dans ce sens qu'il faut entendre le dernier paragraphe de ma note du 24 Décembre. »

Poincaré affine et confirme sa position dans une note publiée en 1884 dans le *Bulletin astronomique* :



« Il reste à examiner le cas de la semi-convergence qui peut se présenter dans des circonstances trop variées pour que je les énumère toutes ici. Je me bornerai au cas suivant qui me paraît être le seul qu'on puisse rencontrer dans les applications. Soit

$$s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$$

Une série absolument convergente dont chaque terme est lui-même la somme d'une série trigonométrique absolument convergente. Il peut arriver que, lorsqu'on a affaire à une série de cette forme, il soit impossible de changer l'ordre des termes sans altérer la convergence ; il y a alors semi-convergence. »

Ces séries peuvent converger dans un petit intervalle de temps sans converger pour toutes les valeurs de t . Je citerai comme exemple la série

$$2 \sin^2 t - 4 \sin^4 t + 8 \sin^6 t - \dots + (-1)^{n+1} 2^n \sin^{2n} t + \dots,$$

dont chaque terme peut manifestement s'écrire sous forme de série trigonométrique et qui n'est convergente que si

$$t < \log \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

J'ai lieu de penser que les séries de M. Lindstedt sont semi-convergentes de la façon que je viens de dire, mais non absolument convergentes, d'où il résulterait qu'elles ne représenteraient les distances mutuelles que pendant un intervalle de temps limité.

Troisième point : la possibilité des développements de Lindstedt

La correspondance reprend le 29 mars 1884 à l'initiative de Poincaré autour de la question d'itérer indéfiniment la méthode de Lindstedt :

« Prenons l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \psi_0 + \psi_1x + \psi_2x^2 + \dots$$

À la première approximation vous arrivez à une formule

x_p = une série trigonométrique en t et ω dont le premier terme est $\eta \cos \omega$.

Vous déterminez ensuite x_{p+1} par l'équation

$$\frac{d^2x_{p+1}}{dt^2} + n^2vx_p + \psi_0 + \psi_1x_p + \psi_2x_p^2 + \dots$$

le second membre est une série trigonométrique et vous disposez de v pour en faire disparaître les termes en $\cos \omega$. Mais cela ne suffit pas. Il faut faire disparaître aussi les termes en $\sin \omega$, ce que vous ne pouvez pas faire par le même procédé.

Il faudrait donc démontrer que ces termes disparaissent d'eux-mêmes. Je vois bien, par l'observation, qu'il en est effectivement ainsi mais je ne puis parvenir à le démontrer et cela ne me paraît pas du tout évident a priori. Je vous serais fort obligé si vous vouliez bien me faire savoir comment vous le démontrez. »

Poincaré donnera deux preuves que l'algorithme de Lindstedt peut être indéfiniment poursuivi. En 1886, dans son article récapitulatif sur la méthode de M. Lindstedt (publié dans le *Bulletin astronomique*), il propose une preuve utilisant la technique des invariants intégraux (théorème de Green – un des outils favoris de Poincaré) :

« Donc, dans la méthode de M. Lindstedt, aucune des approximations, n'introduira de termes en $\sin \omega$; donc la méthode n'est jamais en défaut. [...] La même analyse pourrait s'étendre aux équations plus générales considérées par M. Lindstedt, mais j'ai à peine besoin de dire que la question de la convergence est toujours réservée. »
[Poincaré, 1886]

La démonstration de Poincaré :

1) La méthode de Lindstedt est décrite comme la résolution d'une succession d'équations de la forme :

$$\Delta x_k = F_{k-1} + v_k \cos \omega - B_k$$

où F_{k-1} et B_k sont des séries trigonométriques. L'objectif est de déterminer v_k de manière que l'équation puisse être satisfaite par une série trigonométrique :

« Il est aisé de voir comment il faut déterminer v_k ; en effet, pour que l'équation

$$\Delta u = W$$

où le second membre est une série trigonométrique en t et ω , puisse être satisfaite par une série trigonométrique u , il faut et il suffit que W ne contienne ni terme en $\cos \omega$, ni terme en $\sin \omega$. Or nous pouvons disposer de v_k , de façon à détruire les termes en $\cos \omega$; mais nous ne pourrions pas de même détruire les termes en $\sin \omega$, s'il y en avait dans $F_{k-1} - B_k$. »

$\cos \omega$; mais nous ne pourrions pas de même détruire les termes en $\sin \omega$, s'il y en avait dans $F_{k-1} - B_k$.

On voit immédiatement qu'on ne peut en rencontrer dans les premières approximations; mais il n'est pas évident qu'il en serait de même dans les approximations suivantes. Aussi M. Lindstedt croyait-il que sa méthode n'était applicable jusqu'au bout que s'il n'existait aucune relation linéaire à coefficients entiers entre les coefficients du temps dans les divers termes de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$. Cette restriction, qui serait très gênante, est inutile; je vais le démontrer en m'appuyant sur le théorème de Green. Pour cela, je

Un exemple de l'heuristique de Poincaré – la recherche du « bon » cas :

« J'ai l'intention de me restreindre pour le moment à l'étude de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \Psi_0 + \Psi_1x + \Psi_2x^2 + \dots$$

Il me paraît en effet que cette équation présente toutes les difficultés essentielles du problème des trois corps, tout en étant exempte de certaines complications de ce problème, qui ne touchent pas au fond des choses et embrouillent inutilement la pensée. » [20 avril 1884]

Pour montrer qu'il n'y a pas de terme en sinus, Poincaré met en place une preuve (par l'absurde) géométrico-analytique utilisant le théorème de Green.

Il suppose qu'à la $k + 1^e$ approximation, un terme en sinus apparaisse dans $F_{k-1} - B_k$ et que nous devons résoudre une équation du type

$$\Delta x'_k = F_{k-1} + v_k \cos \omega - B_k - S \sin \omega.$$

La solution x'_k sera toujours une série trigonométrique en t et ω mais ne permet plus de poursuivre l'algorithme.

Posons maintenant

$$x = f(t, \omega) = x_0 + \alpha x_1 + \dots + \alpha^{k-1} x_{k-1} + \alpha^k x'_k,$$

$$y = \psi(t, \omega) = \frac{df}{dt} + \mu \frac{df}{d\omega}, \quad z = t.$$

Si nous faisons parcourir à t et à ω toutes les valeurs comprises entre 0 et 2π , le point x, y, z parcourra une certaine surface Σ ; cette surface ne sera pas fermée, mais elle sera limitée aux deux plans $z = 0, z = 2\pi$. Pour achever d'enclorre un volume, il faudra adjoindre à la surface Σ une portion de chacun de ces deux plans; nous aurons alors une sorte de cylindre, avec sa surface latérale Σ , sa base B dans le plan $z = 0$, et sa base B' dans le plan $z = 2\pi$. L'intégrale

$$\int (Xa + Yb + Zc) d\omega,$$

étendue à la surface totale de cette sorte de cylindre, devra être nulle. Mais les intégrales relatives aux deux bases se détruisent, puisque x et y sont des fonctions périodiques de t avec la période 2ω ; donc l'intégrale étendue à la surface Σ est nulle.

17 février 1882 (ED) – Sur l'intégration des équations différentielles par les séries

« Si, par exemple, on voulait l'appliquer aux équations de la Mécanique céleste, les séries resteraient convergentes pour toutes les valeurs réelles du temps. »

30 octobre 1882 (MC) – Sur les séries trigonométriques

« On sait quel est le rôle joué en Mécanique céleste par les séries de la forme

$$\sum A_p \sin(\mu m_p + \nu n_p)t + \sum B_p \cos(\mu m_p + \nu n_p)t$$

où μ et ν sont des nombres indépendants p et où m_p et n_p sont des entiers positifs ou négatifs. C'est ce rôle qui donne un grand intérêt à l'étude de ces expressions et plus généralement à celle des suites infinies de la forme

$$\sum A_p \sin \alpha_p t + \sum B_p \cos \beta_p t. »$$

23 juillet 1883 (MC) – Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps

« Ce résultat [un théorème de valeur intermédiaire en n dimensions montrés par Kronecker] peut s'appliquer au problème des trois corps et montre que ce problème admet une infinité de solutions particulières [périodiques] jouissant de propriétés remarquables que nous allons exposer. »

24 décembre 1883 (MC) – Sur les séries trigonométriques – Note motivée par des notes publiées par l'astronome suédois Lindstedt au sujet de développement trigonométriques.

« Je me propose de faire voir :

1° Que si ces séries [de Lindstedt] convergent pendant un intervalle de temps, si petit qu'il soit, elles convergeront toujours ;

2° Qu'il n'est pas sûr qu'on puisse choisir les constantes de telle façon que les séries convergent ;

3° Que les séries, même lorsqu'elles ne convergent pas, peuvent donner une solution du problème avec une approximation indéfinie. »

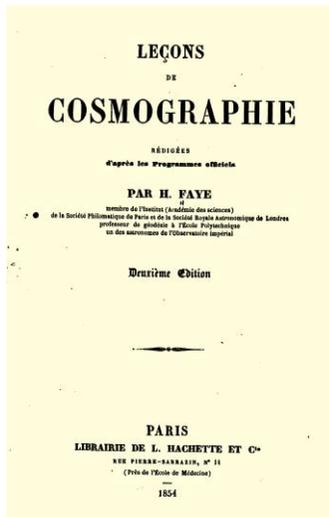
Poincaré fait référence aux deux notes de 1882.

Question : pourquoi et comment Poincaré est amené à proposer des contributions en mécanique céleste alors qu'il a deux programmes de recherche en équations différentielles (fonctions fuchsiennes, équations différentielles générales) et poursuit un programme en arithmétique.

Un certain nombre de travaux classés « théorie des fonctions » se rapportent à ces programmes. Pour les autres, la même question se pose à la différence que l'investissement en mécanique céleste va durer tout le long de la carrière de Poincaré (et c'est le seul).

Les pistes :

- 1) Les mathématiques de Poincaré dans les premières années 1880
- 2) La situation de Poincaré dans les années 1880-1884
- 3) La situation de la jeune génération dans les années 1880-1884
- 4) La formation de Poincaré (école polytechnique)
- 5) Le statut de la mécanique céleste en France
- 6) Les opportunités
- 7) *Le Bulletin astronomique*
- 8) Le succès



Une discipline prestigieuse et populaire qui est au cœur des *curricula* (lycée, école polytechnique, le cours de Faye, de Laussedat (1856-1871)), chaire à la Sorbonne.

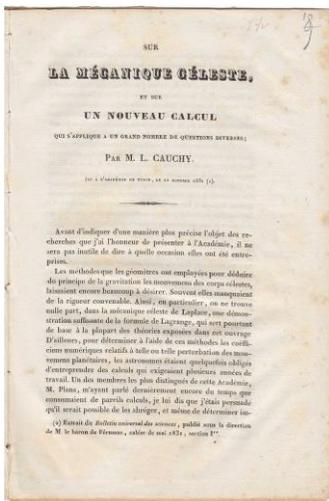
La figure mythique de Laplace, le rapport de Delaunay sur les progrès de l'astronomie et celui de Chasles sur la géométrie, la découverte de Neptune par Le Verrier.

À partir de 1872, une décentralisation, plusieurs observatoires créés ou réformés. (voir *La (Re)fondation des observatoire sous la IIIe république* – Jérôme de La Noë et Caroline Soubiran – 2011).

Commission de Vénus, enjeux internationaux



Un flux continu de contributions aux problèmes des trois corps et en théorie des perturbations : Liouville (1842, 1856), Painvain (1854), Weiler (1869), Allegret (1875, 1876), Mathieu (1876, 1877, 1878), Brassine (1881), Radau (1881) sans oublier Jacobi, Cauchy, Binet, Puiseux, Le Verrier, Delaunay, Bourget, Baillaud, Tisserand, Newcomb, Hill, Gruey, Descombes...



La mécanique céleste, une tradition de l'École polytechnique versus l'astronomie physique naissante défendue par l'École normale ?

Une discipline prestigieuse chez les mathématiciens, « l'analyse appliquée à la mécanique céleste ».

Poincaré met en toile de fond la question des applications à la mécanique céleste dès ses premiers travaux en équation différentielle – discours de justification et de présentation :

« D’ailleurs, cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes et de Mécanique peuvent en effet s’y ramener. Prenons pour exemple le problème des trois corps : ne peut-on se demander si l’un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s’il pourra s’éloigner indéfiniment ; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera à l’infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et si l’on considère un nombre plus grand de corps, qu’est-ce que la question de l’invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de Géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n’a pas de variations séculaires, c’est montrer qu’il oscille constamment entre certaines limites. » [Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I, *JMPA*, (2) 7 (1881), 376].

La carrière professionnelle de Poincaré durant les premières années 80-85

1879	28 mars	Poincaré est nommé ingénieur des mines à Vesoul.
	1 ^{er} août	Soutenance de sa thèse (Jury : O. Bonnet, J. C. Bouquet, G. Darboux).
	1 ^{er} décembre	Chargé de cours à Caen.
1880	15 mars	Pli cacheté sur la théorie générale des formes déposé à l'Académie.
	28 mai	Dépôt de son mémoire pour le Grand prix des sciences mathématiques de l'Académie des sciences.
	28 juin	1 ^{er} supplément.
	6 septembre	2 ^e supplément.
	20 décembre	3 ^e supplément.
		Première candidature à l'Académie des Sciences. « [...] ; viendraient ensuite, et en bloc : Halphen, Poincaré, Appell, Picard et l'affreux Mannheim [...] » [Lettre de Hermite à ML, 11 mars 1881]

- 1881** 14 mars Mention très honorable dans le Grand prix des sciences mathématiques
- 20 avril Mariage avec Mlle. Poulain d'Andecy, de la famille des Geoffroy Saint-Hilaire.
- « De Mr. Poincaré, je vous apprendrai que j'ai reçu la nouvelle de son mariage avec Mlle d'Andecy, la fille du gouverneur ou administrateur du Crédit foncier. » [Lettre de Hermite à ML, 19 avril 1881]
- 19 octobre Maître de conférences d'analyse à la faculté des sciences de Paris.
- Adhère à l'AFAS.
- Présenté par la section de géométrie de l'Académie des sciences en 5^e ligne.
- « Il [Bouquet] trouve que je place et que je vante trop Poincaré dans mon rapport sur ses travaux. Poincaré, Appel et Picard sont mis ex-aequo et en dernière ligne sur notre liste : or entre eux se pose une question qui divise l'Académie. C'est la question d'origine, suivant qu'on soit de l'École Polytechnique ou de l'École Normale. Les polytechniciens sont humiliés que dans les deux dernières élections ce soient les normaliens qui soient entrés à l'Académie, et le bon et excellent Mr. Bouquet a certainement une préférence une préférence pour Appell et Picard élèves de l'École Normale, tandis que Poincaré sort de l'École Polytechnique. » [Lettre de Hermite à ML, 28 mars 1881]

- 1882** Rencontre à Paris avec Mittag-Leffler, Kowalevskaja et Lie.
- 1883** Août Assiste au congrès de Rouen de l'AFAS.
6 novembre Répétiteur d'analyse à l'École polytechnique.
- 1884** Un projet qui n'aura pas de suite :
« Je vous apprendrai qu'on songe à profiter, dans son intérêt, des publications qu'il [Poincaré] a faites sur la Mécanique céleste, pour lui réserver la chaire d'Astronomie du Collège de France, lorsque Mr. Serret, qui en est titulaire, devra d'après les règlement prendre sa retraite, ce qui peut arriver très prochainement.» [Lettre de Hermite à ML, 5 février 1884]
Présenté en 4^e ligne par la section de géométrie de l'Académie des sciences.
« Dans la liste des candidats à la place vacante dans la Section de Géométrie, il paraît probable qu'on laissera ensemble, et dans un même groupe, Appell, Poincaré et Picard, sans faire de classement entre eux. » [Lettre de Hermite à ML, 5 février 1884]
3 mai Membre correspondant de la Société royale des sciences de Göttingen.

1885	16 mars	Chaire de mécanique physique et expérimentale de la Faculté des sciences de Paris.
	Mai	Présenté en 3 ^e ligne par la section de géométrie de l'Académie des sciences. « Notre section de géométrie, en faisant la juste part des droits de l'âge, a mis en première ligne Mr Laguerre, en seconde ligne Mr. Halphen, puis en troisième ligne et sans classer : Appell, Mannheim, Poincaré, Picard. » [Lettre de Hermite à ML, 24 mai 1885]
	27 mai	Membre étranger de la Société royale des sciences d'Uppsala
	21 décembre	Lauréat du prix Poncelet.

Un jeune homme brillant et talentueux qui ne néglige rien pour acquérir du capital symbolique dans le champ universitaire (productions mathématiques nombreuses, de qualité et consacrées à des sujets « chauds », concours, candidatures, académies, sociétés)

Une concurrence – le trio des étoiles montantes des mathématiques françaises

Paul Appell (1 an de moins) et Émile Picard (2 ans de moins) vont un peu plus vite que Poincaré dans la quête d'une chaire à la Sorbonne. Par exemple, durant l'année universitaire 1883-84 à la Sorbonne, Appell et Picard sont annoncés comme donnant des leçons alors que Poincaré ne l'est que comme donnant des conférences.

Picard : suppléance de Bouquet à la chaire de mécanique physique et expérimentale (1878-1885), chargé de conférences à l'ENS en mécanique et astronomie (1883-1885), chargé de cours en calcul différentiel et intégral (octobre 1885-août-1886), chaire de calcul différentiel et intégral (août 1886 – il a 30 ans, juste l'âge légal.).

Appell : chargé de cours à Dijon en mécanique rationnelle (1878-1881), maître de conférences à l'ENS (1881), chargé de cours de mécanique 1883, professeur de mécanique rationnelle (1885)

Des soutiens, des admirations, quelques problèmes institutionnels, l'influence d'Hermite

« Je crois à ce jeune homme, qui a été mon élève à l'Ecole Polytechnique en 1875, un véritable génie. » [Lettre de Hermite à ML, 11 mars 1881]

« Mr Bertrand s'est exprimé dernièrement d'une manière malveillante à son égard ; je crains d'être dans le cas de me refâcher avec lui, en prenant la défense d'un talent qui me semble tout à fait hors ligne. » [Lettre de Hermite à ML 18 août 1881]

« Aujourd'hui je donnerai la seconde partie qui contient les belles formules découvertes par Mr. Gyldén pour l'expression de $\pi \cotg \pi x$. Je l'ai communiquée à Mr Poincaré qui en a pris connaissance avec le plus grand intérêt. » [Lettre de Hermite à ML, 20 mars 1882] (il s'agit d'un développement asymptotique utilisé par Gyldén en théorie des perturbations. – « C'est M. Gyldén qui a donné le premier ces deux développements de la fonction $\pi \cotg \pi x$, et vous savez avec quel succès il les a employés dans le calcul des perturbations. » [Mittag Leffler, CRAS, 94 (1882), 782]

« [...] entre Poincaré, Appell et Picard règnent la concorde et la plus grande cordialité. A vous mon cher Ami et en secret je fais l'aveu que Poincaré me semble d'un génie supérieur, et appelé à jeter un glorieux éclat sur les mathématiques françaises. » [Lettre de Hermite à ML, 6 avril 1882]

« Poincaré est appuyé par le nouveau ministre de l'Instruction publique, qui étant de Nancy a eu pour médecin Mr Poincaré père, professeur à la Faculté de Médecine de cette ville, mais je crains que la faveur du ministre lui fasse tort auprès de beaucoup de nos collègues. » [Lettre de Hermite à ML, entre le 10 et le 20 octobre 1882]

« Tout bas et en confidence, ayant grande crainte d'être entendu de Madame Hermite, je vous dirai que, de nos trois étoiles mathématiques, Poincaré me semble la plus brillante. » [Lettre de Hermite à ML, 4 mars 1883]

« Poincaré est incontestablement supérieur à Appell et à Picard sous le double rapport de l'importance des découvertes et du nombre des travaux publiés. » [Lettre de Hermite à ML, 1^{er} juin 1883]

« [...] une autre fois je vous conterai mes ennuis avec Mr. Bouquet qui me reproche de trop le [Poincaré] louer, [...]. » [Lettre de Hermite à ML, 27 janvier 1884]

« Darboux après son élection est venu me dire, en ne faisant sans aucun doute l'écho de Mr. Bouquet, que j'avais complètement sacrifié Appell et Picard, que j'avais été trop généreux, etc. » [Lettre de Hermite à ML, 14 mars 1884]

« [Monsieur Bouquet] annonçait qu'il choisissait Picard pour le remplacer, et sur ma demande il consentait à proposer Poincaré pour la suppléance du cours de Mécanique expérimentale. Presque tous nos collègues, consultés sur ces choix, nous avaient complètement approuvés, et rien ne pouvait nous faire présumer quels obstacles allaient surgir. C'est Mr. Serret et Mr. Bonnet qui nous ont fait opposition avec une ardeur inouïe, en menant une vraie bataille, où semblaient en cause les Polytechniciens, représentés par Poincaré, et les Normaliens, par Picard. » [Lettre de Hermite à ML, 25 février 1885]

Le bon accueil de la part des mécaniciens célestes français – la correspondance avec Octave Callandreau et Félix Tisserand – *Le Bulletin astronomique*

Poincaré prend contact avec son « camarade » O. Callandreau en 1882 pour avoir des indications sur les travaux de Weierstrass et Gylden sur les développements obtenus par la théorie des perturbations et les questions de stabilité. L'accueil est chaleureux, Callandreau est au courant des travaux de Poincaré (même ceux qui ne sont pas encore publiés) et donne à la fois des indications sur la littérature et quelques suggestions.



Octave Callandreau (1852-1904)

La suggestion d'un programme

« À cet égard, ne pourrais-tu pas, considérant les équations différentielles du mouvement et multipliant les masses troublantes par un paramètre α , voir quelles sont les limites de α , dans le développement des intégrales ordonnées suivant les puissances de α , compatibles avec la convergence des séries. Il y aurait là une justification des procédés jusqu'ici constamment appliqués dans le calcul des perturbations. » [début 1882]

Le point de vue des astronomes et des géomètres sur la stabilité

« D'abord, d'une manière générale, je puis te dire que les astronomes n'ont pas attribué à la question de la stabilité la portée que les géomètres lui ont donnée : ce qu'ils ont voulu, c'est représenter la marche des éléments du système solaire en tenant compte de l'incertitude des données empruntées à l'observation ; de sorte qu'une intégration rigoureuse des équations différentielles voudrait , au point de vue astronomique et pratique, être accompagnée de la connaissance entièrement précise des arbitraires masses éléments ... C'est ce qui explique comment les analyses de Laplace ou de Le Verrier paraissent peu concluantes au premier abord. » [26 février]

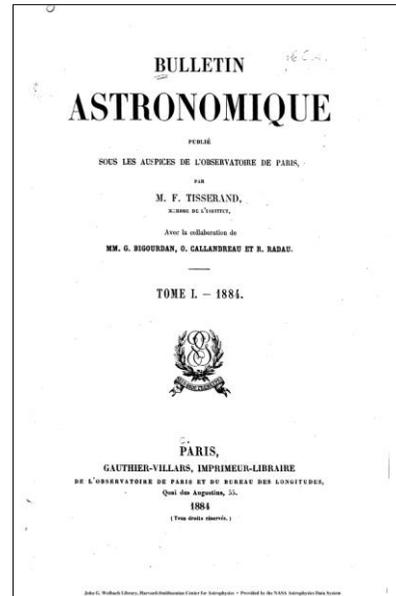
La création du *Bulletin astronomique*

1884 – La transformation du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* en le *Bulletin des sciences mathématiques* – création du *Bulletin astronomique*

« Le Bulletin astronomique, dont on entreprend aujourd'hui la publication est destinée à combler une lacune regrettable dans les revues scientifiques françaises ; aucune, en effet, jusqu'ici, n'était destinée spécialement aux astronomes et hommes de science qui veulent se tenir au courant des progrès de l'astronomie. »

- Efforts du gouvernement pour « contribuer aux progrès de l'instruction publique et des sciences »
- Multiplication des observatoires, multiplication des personnels et donc nécessité de « créer un organe de publicité, où nos astronomes puissent faire connaître leurs travaux en temps utile, et où ils trouvent, avec les nouvelles astronomiques, une analyse des principales publications périodiques étrangères, qui les tiennent constamment au courant des progrès de la Science, sans qu'ils aient besoin de compulsent péniblement des journaux de toute langue, qu'il leur serait d'ailleurs quelquefois difficile de se procurer ».

- Trois types de rubriques : 1) des résultats d'observations et des « mémoires ou notices sur diverses questions d'Astronomie théorique ou pratique », 2) une revue des « nouvelles astronomiques » et l'analyse des publications étrangères et enfin 3) des articles concernant des sciences connexes à l'astronomie.
- Appel à toutes les bonnes volontés françaises et étrangères.
- Le *Bulletin astronomique* est publié sous les auspices de l'Observatoire de Paris par M. F. Tisserand avec la collaboration de M.M. G. Bigourdan, O. Callandreau, R. Radau.



F. Tisserand dès 1883 songe à H. Poincaré comme collaborateur du nouveau journal astronomique :

« Je viens de lire aux *Comptes rendus* votre note sur le travail de M. Lindstedt ; je la trouve très intéressante. J'espère que ce premier travail sera suivi d'autres sur la théorie des perturbations ; avec vos talents, je crois que vous ferez dans ce domaine, de belles découvertes dont nous autres astronomes, pourrons faire notre profit.

On va fonder à l'observatoire un journal astronomique dont je serai probablement le Directeur, officiellement ou officieusement. C'est à ce titre que je viens vous demander si vous ne pourriez pas rédiger un Mémoire contenant l'essentiel de vos communications du 30 Nov. 1882, du 23 Juillet 1883 et du 24 Décembre dernier. Votre Mémoire paraîtrait en Mars 1884. Je vous en serais personnellement très reconnaissant. » [29 décembre 1883]



Une collaboration fructueuse :

Poincaré publie dans le premier tome du *Bulletin astronomique* deux articles qui développent ces deux premières notes aux CRAS :

- Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps (février 1884)
- Sur la convergence des séries trigonométriques (juillet 1884)

Il poursuivra régulièrement à collaborer au *Bulletin astronomique* : 2 notes sur l'équilibre d'une masse fluide et une sur la stabilité des anneaux de Saturne dans le deuxième tome

37 articles tout au long de sa carrière (le journal auquel il contribue le plus (en dehors des CRAS) en nombre d'articles)