

MODÈLE DE LA RÉPONSE TEMPORELLE DE LA DISPERSION CHROMATIQUE

François Bondu¹, Mehdi Alouini¹

¹ Institut de Physique de Rennes UMR CNRS 6251, Université Rennes 1, 35042 Rennes, France

francois.bondu@univ-rennes1.fr

RÉSUMÉ

Nous proposons un modèle numérique de fonction de transfert en z d'un milieu dispersif (fibre, milieux gazeux dense) pour l'enveloppe temporelle (modulations de phase et d'amplitude) de porteuses optiques ou hyperfréquence. Les modélisations existantes (FFT, filtre à réponse impulsionnelle finie, transformée bilinéaire) sont insuffisantes pour des signaux contenant des bruits colorés ou même ne reproduisent pas la dispersion voulue. À partir de développements de Padé des fonctions exponentielle et logarithme, nous obtenons une fonction de transfert sous forme de fraction rationnelle. Les pôles instables sont traités par retournement temporel. Le modèle est étudié pour un objectif de modulation en quadrature à haut débit sur de longues fibres, par exemple plusieurs centaines de mètres de fibre SMF à 2*28 Gb/s en QAM4.

MOTS-CLEFS : *dispersion chromatique ; développement de Padé ; transformée en z ; retournement temporel*

1. INTRODUCTION

La propagation d'une onde monochromatique à travers un milieu se caractérise par un retard βL , où β est la constante de propagation et L la longueur (ou l'épaisseur suivant le contexte) du milieu traversé. Dans le cas général β dépend de la pulsation ω ; les signaux réels, modulés en phase et en amplitude, sur des porteuses comportant des bruits généralement colorés, peuvent être sensiblement déformés.

Nous avons à l'entrée du milieu dispersif une porteuse de fréquence ν_0 avec une modulation d'amplitude $a(t)$ (bruit et signal de modulation d'amplitude) et une modulation de phase $p(t)$ (bruit et signal de modulation de phase). Si le milieu a une fonction de transfert $H(\nu)$, nous montrons qu'il suffit de calculer la propagation du signal complexe $c(t) = (1 + a(t)) \exp(i p(t)) = I(t) + iQ(t)$ où $I(t)$ et $Q(t)$ sont les deux quadratures réelles à travers le filtre $G(f) = H(\nu_0 + f)$, c'est-à-dire $(I_{in}(f) + iQ_{in}(f))G(f) = I_{out}(f) + iQ_{out}(f)$, pour restituer l'enveloppe de la porteuse en sortie.

La dispersion chromatique de l'enveloppe se caractérise par une réponse fréquentielle de la forme

$$G(f) = \exp(-i \phi(f)), \text{ avec } \phi(f) = \frac{1}{2} \beta_2 L (2 \pi f)^2 \quad (1)$$

où f est la fréquence d'écart à la porteuse, β_2 est la dérivée seconde de β par rapport à ω évaluée à la pulsation de la porteuse. Nous avons un signal correspondant à l'enveloppe à l'entrée $c_{in}[n]$ échantillonné à la fréquence F_s . Si z^{-1} est un retard élémentaire

$$z^{-1} = \exp(-i2\pi f / F_s). \quad (2)$$

en inversant l'équation (2) dans (1) on obtient la fonction de z :

$$G(z) = \exp\left(-i \frac{1}{2} \beta_2 L F_s^2 \ln(z)^2\right). \quad (3)$$

Nous cherchons à approximer $G(z)$ de l'équation (3) avec une fraction rationnelle

$$G_a(z) = \frac{b(0)+b(1)z^{-1}+\dots+b(M)z^{-M}}{1+a(1)z^{-1}+\dots+a(N)z^{-N}} \quad (4)$$

pour un traitement numérique du signal temporel : l'enveloppe en sortie sera déterminée par la classique équation aux différences [1] :

$$c_{out}(n) = b(0)c_{in}(n) + \dots + b(M)c_{in}(n - M) - a(2)c_{out}(n - 1) - \dots - a(N)c_{out}(n - N) \quad (5)$$

qui peut se calculer rapidement par un processeur numérique de signal.

2. MODÈLES EXISTANTS

Lorsque la phase $\phi(f)$ de l'exponentielle de $G(f)$ est très petite devant l'unité pour toutes les fréquences d'intérêt, nous montrons un filtre simple avec des coefficients complexes qui répond au besoin. Lorsque la phase est très grande devant l'unité, le développement imaginé pour l'implantation en électronique numérique des réverbérateurs acoustiques mécaniques [2] donne de bons résultats dans la gamme de fréquences où cette phase est très grande ; nous notons cependant numériquement que ce n'est pas le cas dans une échelle plus basse de fréquences. Dans le cas de signaux à très haut débit sur une fibre standard SMF, on est dans un cas intermédiaire : par exemple, avec 1 km de fibre SMF, on a 8 radians à 100 GHz de la porteuse ; les méthodes précédentes ne conviennent pas.

Supposons que nous ayons P échantillons ; la résolution en fréquence du signal est $f_{res} = F_s/P$. Si le signal à l'entrée s'écrit

$$c(t) = \sum_{k=-\frac{P}{2}+1}^{\frac{P}{2}-1} c_k e^{-i2\pi k f_{res} t} \quad (7)$$

avec c_k complexe, alors il suffit de prendre la FFT, puis de multiplier le résultat par la fonction $G(f)$ évaluée aux fréquences kf_{res} . Mais un signal réel ou réaliste n'obéit généralement pas à l'équation (6). Si les P échantillons sont une portion tronquée d'un signal réel, alors la FFT ne représente pas le spectre, mais la convolution de celui-ci avec la transformée de Fourier de la fonction de fenêtrage appliquée. L'écart peut être très sensible (erreur de plusieurs ordres de grandeur) si $c(t)$ contient un bruit d'amplitude ou de phase coloré, même avec une fenêtre de type Hanning si le bruit est en $1/f^n$ avec $n \geq 2$ [3]. Les spectres de bruit de phase de lasers libres sont généralement très colorés, donc inadaptés à la procédure FFT. Si le signal contient une information, il n'est pas imaginable de le traiter par une fenêtre Hanning ou, plus efficace pour les signaux très colorés, « Slepian » [4] : cela ferait estomper la porteuse et la modulation sur une portion temporelle significative.

Pour traiter le problème spécifique de la dispersion, S. Savory remarque que la transformée de Fourier inverse de $G(f)$ est aussi une gaussienne [5], avec un coefficient complexe devant la valeur t^2 dans l'exponentielle temporelle. Il remarque ensuite que la troncature temporelle revient à limiter les fréquences accessibles, et en déduit que cela correspond à la version tronquée en fréquence : en fait, c'est incorrect, la version temporelle tronquée n'est pas la troncature de la transformée de Fourier ; l'incohérence provient de la non-distinction entre fréquence instantanée dans le domaine temporel et fréquence de Fourier. Il obtient un filtre à réponse impulsionnelle finie ; de tels filtres sont connus pour donner des réponses fréquentielles exactes aux fréquences multiples de f_{res} , mais fortement oscillantes entre ces valeurs. Nous vérifions numériquement que la dispersion estimée peut être fautive de plusieurs ordres de grandeur pour des fréquences intermédiaires, voire même montrer pour certaines fréquences un signe erroné. Par ailleurs, pour les déphasages modestes qui nous intéressent, le nombre de coefficients est très réduit, ce qui conduit inévitablement à des fortes erreurs d'approximation.

3. APPROXIMANTS DE PADÉ POUR LA DISPERSION

Les fractions rationnelles sont connues pour donner de meilleures approximations de fonctions que les polynômes [6]. Un approximant de Padé d'une fonction $f(x)$ est une fonction rationnelle $f_a(x)$ de numérateur de degré N et de dénominateur de degré M telle que $f(x) - f_a(x) = O(x^{N+M+1})$. L'approximation d'une fonction quelconque n'est pas aisée [7]. La virtuosité mathématique de la détermination à un ordre quelconque des fonctions exponentielle [8] et

récemment logarithme [9] est hors de notre portée : le développement de Padé de l'équation (3) paraît inaccessible. Nous nous replions donc sur le développement de la fonction logarithme, puis exponentielle, comme décrits dans les articles, à la fonction (4), en espérant que la résultante donnera un résultat satisfaisant. Nous retenons des ordres de numérateur et de dénominateur identiques pour une fonction donnée, mais pas forcément identiques pour les fonctions exponentielle et logarithme.

Notons que le développement de Padé de la fonction exponentielle (2) à l'ordre 1 est bien connu : il s'agit de la transformée bilinéaire, qui respecte la stabilité. Wikipedia (entrée « bilinear transform ») propose un développement à des ordres plus élevés, à partir du développement de la fonction logarithme et de la transformée bilinéaire : nous avons vérifié numériquement qu'il donne de moins bons résultats que le véritable développement de Padé.

Nous approximons la fonction logarithme à un ordre donné, puis nous remplaçons la fonction obtenue dans le développement de la fonction exponentielle à un autre ordre. Nous vérifions numériquement que le développement de la fonction exponentielle à des ordres supérieurs à 2 ne donne pas d'amélioration significative.

Le développement de Padé de la fonction logarithmique à des ordres supérieurs ou égal à deux amène des pôles instables symétriques inverses de pôles stables. Nous décomposons donc la fonction résultante en un produit de deux fractions, une avec les pôles stables et les zéros associés, et une avec les pôles instables et les zéros associés. Pour la partie instable, il faut faire la remarque que si un signal $X(z)$ filtré par un filtre $F(z)$ donne en sortie $Y(z) = F(z)X(z)$ alors on a évidemment $Y(1/z) = F(1/z)X(1/z)$ [10], [11]. Les signaux $X(1/z)$ et $Y(1/z)$ sont les signaux renversés dans le temps. La fonction $F(1/z)$ représente un filtre dont tous les pôles initialement instables vont rentrer à l'intérieur du cercle unité : la fonction est donc stable. Nous traitons donc l'enveloppe d'abord par la partie stable de la fonction de transfert en z , puis nous renversons le résultat pour le filtrer par la partie initialement instable et nous renversons de nouveau le résultat.

Nous montrons que la fonction résultante reproduit bien la dispersion souhaitée sur 70% de la bande de fréquence souhaitée : avec un léger sur-échantillonnage ou un filtre anti-repliement adapté, la solution proposée ici est bien plus satisfaisante que les existantes. La réponse temporelle peut présenter un bruit numérique important si l'ordre du développement est trop élevé.

Cette étude est réalisée dans le cadre du projet ANR COM'TONIQ (ANR-13-INFR-0011).

RÉFÉRENCES

- [1] M. Kunt, *Traitement Numérique des Signaux*, vol. XX. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [2] J. S. Abel et J. O. Smith, « Robust Design of very high-order allpass dispersion filters », in *Proc. of the 9th Int. Conference on Digital Audio effects (DAFx-06)*, Montréal, Québec, Canada.
- [3] D. J. Thomson, « Spectrum estimation and harmonic analysis », *Proc. IEEE*, vol. 70, n° 9, p. 1055-1096, sept. 1982.
- [4] D. Slepian et H. O. Pollak, « Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty — I », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 40, n° 1, p. 43-63, janv. 1961.
- [5] S. J. Savory, « Digital filters for coherent optical receivers », *Opt. Express*, vol. 16, n° 2, p. 804, 2008.
- [6] W. Van Assche, « Pade and Hermite-Pade approximation and orthogonality », *arXiv:math/0609094*, sept. 2006.
- [7] A. Hautot, « Leçon sur les approximants de Padé ». www.physinfo.org/Acc_Conv/Acc_Conv_Part3.pdf.
- [8] L. Baratchart, E. B. Saff, et F. Wielonsky, « Rational interpolation of the exponential function », *Can. J. Math.*, vol. 47, n° 6, p. 1121-1147, déc. 1995.
- [9] W. Chu, « Harmonic number identities and Hermite–Padé approximations to the logarithm function », *J. Approx. Theory*, vol. 137, n° 1, p. 42-56, nov. 2005.
- [10] S. R. Powell et P. M. Chau, « Time reversed filtering in real-time », in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1990*, 1990, p. 1239-1243 vol.2.
- [11] J. M. Chen et M. I. Parr, « Time-reversed infinite impulse response filtering in digital communications receivers », in *1994 Third Annual International Conference on Universal Personal Communications, 1994. Record*, 1994, p. 220-224.