HAL
open science

Groupes de Galois et nombres automatiques

Patrice Philippon

To cite this version:

Patrice Philippon. Groupes de Galois et nombres automatiques. Journal London Mathematical Society, 2015, 92 (3), pp.596-614. 10.1112/jlms/jdv056 . hal-01230858

HAL Id: hal-01230858

https://hal.science/hal-01230858v1

Submitted on 19 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GROUPES DE GALOIS ET NOMBRES AUTOMATIQUES

PATRICE PHILIPPON

Résumé. Nous montrons dans le cadre de la théorie de Mahler, que les relations de dépendance algébrique sur $\overline{\mathbf{Q}}$ entre les valeurs de fonctions solutions d'un système d'équations fonctionnelles proviennent, par spécialisation, des relations entre les fonctions elle-mêmes. Nous en déduisons quelques résultats nouveaux sur l'indépendance linéaire des valeurs de fonctions q-régulières.

Abstract

Galois groups and automatic numbers : In the frame of Mahler's method for algebraic independence, we show that the algebraic relations over $\overline{\mathbf{Q}}$ linking the values of functions solutions of a system of functional equations come from the algebraic relations between the functions themselves, by specialisation. We deduce some new results on the linear independence of values of q-regular functions.

Table des matières

1. Introduction 1
2. Corps à endomorphisme 5
3. Groupes de Galois 7
4. Régularité et spécialisation 10
5. Indépendance linéaire 14
6. Convergence 20
Références 22

1. Introduction

Les relations de dépendance algébrique entre valeurs de fonctions analytiques ou méromorphes font encore l'objet d'un large mystère. Elles héritent bien évidemment, par spécialisation, des relations liant les fonctions elles-mêmes et souvent se cantonnent à cet héritage. C'est par exemple le cas dans la théorie des E-fonctions et plus généralement des séries Gevrey, tout au moins en dehors d'un éventuel ensemble fini d'arguments exceptionnels.

Plus précisément, dans le cadre des E-fonctions en une variable complexe z le théorème de Siegel-Shidlovskii énonce que pour les arguments algébriques en dehors des points singuliers du système différentiel satisfait

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11J81 ; Secondary 12H10, 26A18.

Key words and phrases. théorie de Mahler, fonction q-régulière, groupe de Galois, extension régulière, série automatique.

par une famille de E-fonctions, le degré de transcendance sur $\mathbf{Q}$ des valeurs de ces E-fonctions est égal au degré de transcendance sur $\mathbf{Q}(z)$ des fonctions.

Cet énoncé remarquable ne donne toutefois pas directement la nature exacte des relations liant les valeurs en question. Par exemple, ces valeurs sont-elles linéairement indépendantes sur $\mathbf{Q}$ dès que les fonctions sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{Q}(z)$? Ou bien, la valeur d'une fonction transcendante sur $\mathbf{Q}(z)$ de la famille, est-elle transcendante sur $\mathbf{Q}$?

Cet aspect a été étudié par exemple dans [11] où Y.V.Nesterenko et A.B.Shidlovskii ont montré qu'en dehors d'un ensemble fini effectivement calculable (contenant les singularités du système différentiel impliqué) toute relation algébrique entre les valeurs provient de la spécialisation d'une relation algébrique entre les fonctions. Dans [7] F.Beukers, s'appuyant sur l'approche radicalement nouvelle d'Y.André [4], montre que l'ensemble exceptionnel est en fait réduit aux seules singularités du système différentiel. Et récemment, Y.André [5] remarque que ce dernier énoncé se déduit aussi du théorème de Siegel-Shidlovskii, indépendamment de la méthode de [4], via la théorie de Galois différentielle.

Notons toutefois que la connaissance des relations algébriques liant toutes les fonctions est nécessaire pour en déduire la transcendance de la valeur d'une seule de ces fonctions, par exemple. En effet, par spécialisation une relation de dépendance algébrique impliquant plusieurs fonctions peut se réduire à une relation de dépendance algébrique de la valeur d'une seule d'entre elles. L'idéal des relations algébriques entre les fonctions peut être déterminé par la connaissance du groupe de Galois du système différentiel satisfait par les E-fonctions.

Notre propos ici est d'une part d'obtenir des théorèmes semblables dans le cadre de la théorie de Mahler. Et d'autre part de préciser ces résultats dans le cas des séries automatiques et plus généralement des séries q-régulières, complétant ainsi les résultats de [6]. La méthode de Mahler conduit à un énoncé tout-à-fait similaire au théorème de Siegel-Shidlovskii, obtenu par Ku.Nishioka.

Théorème 1.1. ([13, Theorem 4.2.1]) *Soit $N \geq 1$, $q \geq 2$ des entiers, $\rho > 0$ un réel positif, $\boldsymbol{f}(z)$ un vecteur colonne de N séries $f_1(z), \ldots, f_N(z)$ en z à coefficients dans un corps de nombres, convergeant dans le disque sans bord de rayon ρ centré en l'origine dans $\mathbf{C}$ et satisfaisant le système d'équations fonctionnelles*

$$\boldsymbol{f}(z) = A(z)\boldsymbol{f}(z^q) \ ,$$

où $A(z)$ est une matrice $N \times N$ inversible, à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}(z)$.

Soit α un nombre algébrique non nul, de valeur absolue $< \rho$ tel qu'aucune de ses puissances α^{q^ℓ}, $\ell \in \mathbf{N}$, ne soit pôle d'un coefficient de $A(z)^{-1}$, alors

$$\mathrm{degtr}_{\overline{\mathbf{Q}}}\overline{\mathbf{Q}}(f_1(\alpha), \ldots, f_N(\alpha)) \geq \mathrm{degtr}_{\overline{\mathbf{Q}}(z)}\overline{\mathbf{Q}}(z, f_1(z), \ldots, f_N(z)) \ .$$

P-G.Becker [6] remarque que ce théorème 1.1, à l'instar du théorème de Siegel-Shidlovskii, n'entraîne pas la transcendance des valeurs de fonctions

automatiques transcendantes aux points algébriques du disque de convergence. Pourtant, utilisant une approche complètement différente, via le théorème du sous-espace de Schmidt, B.Adamczewski et Y.Bugeaud [1] ont montré qu'un nombre automatique est transcendant ou rationnel, cette dernière éventualité intervenant lorsque la série automatique associée est une fonction rationnelle. Mais, ce résultat ne découle pas directement du théorème 1.1. On sait par ailleurs qu'une fonction automatique, ou plus généralement q-régulière, algébrique est nécessairement rationnelle, *cf.* [6, Lemma 5].

Soit $q \geq 2$ un entier et $A(z)$ une matrice $N \times N$ inversible, à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}(z)$. Nous supposons qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{f}(z)$, à composantes dans $\overline{\mathbf{Q}}[[z]]$, solution du système d'équations fonctionnelles

$$\boldsymbol{f}(z) = A(z)\boldsymbol{f}(z^q) \ . \tag{1.2}$$

On sait que les composantes de $\boldsymbol{f}(z)$ définissent des fonctions méromorphes dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$, *voir* le lemme 6.1 de la section 6. Nous allons montrer que les relations de dépendance algébrique sur $\overline{\mathbf{Q}}$ entre les valeurs des composantes de $\boldsymbol{f}(z)$ (sauf en un ensemble d'arguments particuliers) proviennent, par spécialisation, des relations de dépendance algébrique sur $\overline{\mathbf{Q}}[z]$ entre les composantes elles-mêmes.

On note $T(z) = T_A(z) \in \overline{\mathbf{Q}}[z]$ le polynôme de plus petit degré satisfaisant $T(0) = 1$ et dont les zéros sont les pôles des coefficients des matrices $A(z)$ et $A(z)^{-1}$, distincts de 0, comptés avec multiplicité. L'union des racines des polynômes $T(z^{q^\ell})$, $\ell \in \mathbf{N}$, sera alors appelée l'*ensemble singulier* (et ses éléments *singularités*) de (1.2). Nous observons qu'avec cette définition tout pôle d'une composante de $\boldsymbol{f}(z)$ est singularité de (1.2).

Théorème 1.3. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$, $0 < |\alpha| < 1$, tel que $T(\alpha^{q^\ell}) \neq 0$ pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, alors pour tout $P \in \overline{\mathbf{Q}}[X]$ tel que $P(\boldsymbol{f}(\alpha)) = 0$, il existe $Q \in \overline{\mathbf{Q}}[z, X]$ de même degré en X que P, tel que $Q(z, \boldsymbol{f}(z)) = 0$ et $P(X) = Q(\alpha, X)$.*

Ce résultat est l'analogue fonctionnel de celui établi par F.Beukers dans [7, Theorem 1.3] dans le cas différentiel des E-fonctions. La démonstration que nous en donnons à la section 4 (voir corollaire 4.5) est toutefois plutôt à rapprocher de celle proposée par Y.André dans [5, Corollary 1.7.1]. Pour élucider les relations de dépendance algébriques liant les composantes de $\boldsymbol{f}(\alpha)$, il faut donc encore trouver des générateurs de l'idéal des relations entre les composantes de $\boldsymbol{f}(z)$ sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$. Et pour cela la connaissance du groupe de Galois associé au système (1.2) peut être une étape cruciale. Nous rappelons aux sections 2 et 3 les éléments de théorie des corps à endomorphisme et de théorie de Galois pertinents dans ce contexte.

B.Adamczewski et C.Faverjon [2, théorème 1.4] déduisent du théorème 1.3 une version homogène : si P est supposé homogène alors Q peut être choisi homogène en X de même degré.

On obtient comme conséquence directe du théorème 1.3 le suivant, qui recopie le corollaire 5.10 démontré à la section 5.

Théorème 1.4. *Soit $\mathbf{k}_0 \subset \mathbf{C}$ un corps de nombres, $\alpha \in \mathbf{k}_0$, $0 < |\alpha| < 1$, tel que $T(\alpha^{q^h}) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbf{N}$ et $1 \leq \ell \leq N$. Supposons que la matrice $A(z)$ du système (1.2) soit à coefficients dans $\mathbf{k}_0(z)$ et le vecteur $\boldsymbol{f}(z)$ à composantes $f_1(z), \ldots, f_N(z)$ dans $\mathbf{k}_0[[z]]$. Si les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_\ell(\alpha)$*

sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}_0$ *alors ils sont linéairement indépendants sur* $\overline{\mathbf{Q}}$.

Nous déduisons du théorème 1.4 le théorème 1.5 suivant pour les systèmes à coefficients polynomiaux (en particulier pour les fonctions q-régulières étudiées dans [6], *voir* aussi [13, Theorem 5.1.2]). Dans ce cas, les composantes dans $\overline{\mathbf{Q}}[[z]]$ du vecteur solution $\boldsymbol{f}(z)$ de (1.2) convergent dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$ et y définissent des fonctions analytiques, *voir* lemme 6.1 à la section 6. L'enjeu est de réintégrer les singularités du système d'équations fonctionnelles dans l'énoncé.

La preuve consiste à se ramener, lorsque α est une singularité, à un système nettoyé de cette singularité. Nous utilisons à cette fin le lemme ad hoc 5.12, inspiré de [7, §3], mais nous remarquons que B.Adamczewski et C.Faverjon disposent d'un lemme de réduction des singularités [2, lemme 6], en fait plus simple et plus efficace que notre énoncé. C'est d'ailleurs après que B.Adamczewski m'ait mentionné ce résultat que j'ai conclu la preuve du lemme 5.12 et le passage du théorème 1.4 au théorème 1.5 leur revient donc.

Théorème 1.5. *Soit* $\mathbf{k}_0 \subset \mathbf{C}$ *un corps de nombres,* $\alpha \in \mathbf{k}_0$, $0 < |\alpha| < 1$, *et* $1 \leq \ell \leq N$. *Supposons que la matrice* $A(z)$ *du système* (1.2) *soit à coefficients dans* $\mathbf{k}_0[z]$ *et le vecteur* $\boldsymbol{f}(z)$ *à composantes* $f_1(z), \ldots, f_N(z)$ *dans* $\mathbf{k}_0[[z]]$. *Si les nombres* $f_1(\alpha), \ldots, f_\ell(\alpha)$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbf{k}_0$ *alors ils sont linéairement indépendants sur* $\overline{\mathbf{Q}}$.

La démonstration de cet énoncé sera donnée avec le corollaire 5.13. Il serait intéressant de l'étendre à tous les systèmes à coefficients dans $\mathbf{k}_0(z)$ (et non seulement $\mathbf{k}_0[z]$). De même, il serait intéressant de développer la théorie pour des transformations rationnelles plus générales, comme dans [18, Chapitre 3] par exemple.

Soit $q, b \geq 2$ des entiers, un nombre (q, b)-automatique est un nombre dont la suite des chiffres dans son écriture en base b est q-automatique, *voir* [3, Chapters 5 & 13]. C'est donc la valeur en $1/b$ de la série génératrice d'une suite automatique, qui est un cas particulier de fonction q-régulière, analytique dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$. On obtient donc comme corollaire du théorème 1.5 la généralisation suivante du théorème 2 de B.Adamczewski et Y.Bugeaud [1].

Corollaire 1.6. *Des nombres* (q, b)*-automatiques linéairement indépendants sur* $\mathbf{Q}$ *sont linéairement indépendants sur* $\overline{\mathbf{Q}}$.

On a plus généralement que, pour tout nombre algébrique réel $\beta > 1$, si des nombres (q, β)-automatiques (*i.e.* dont la suite des chiffres dans le développement en base β, tel qu'introduit dans [16], est q-automatique) sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}(\beta)$, alors ils le sont sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Ceci étend sans condition le théorème 5 de B.Adamczewski et Y.Bugeaud [1].

La transcendance des nombres automatiques irrationnels en découle en ajoutant au besoin la fonction 1 comme composante supplémentaire au vecteur $\boldsymbol{f}(z)$ solution du système d'équations fonctionnelles (1.2). Le nouveau système à considérer s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{f}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{f}(z^q) \end{pmatrix} .$$

Ceci fournit donc une approche alternative à celle de [1].

Lorsque le système (1.2) (avec $A(z)$ à coefficients fonctions rationnelles) admet un vecteur $\boldsymbol{f}(z)$ solution dont les coefficients sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$, on a le résultat suivant.

Théorème 1.7. *Soit $\boldsymbol{f}(z) \in \overline{\mathbf{Q}}[[z]]$ un vecteur solution de* (1.2) *dont les composantes $f_1(z), \ldots, f_N(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$, alors toute relation polynomiale de degré* 1 *à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}(z)$ entre les composantes est de la forme $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(z) f_i(z) = 1$ où le vecteur $\boldsymbol{\lambda}(z)$ de composantes $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_N(z)$ est solution du système dual*

$$\boldsymbol{\lambda}(z) = {}^t A(z)^{-1} \boldsymbol{\lambda}(z^q) \ .$$

En particulier, les pôles des composantes de $\boldsymbol{\lambda}(z)$ sont des points singuliers de (1.2).

C'est le corollaire 5.2, dont la démonstration est donnée à la section 5. On en déduit que, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$, $0 < |\alpha| < 1$, tel que $T(\alpha^{q^\ell}) \neq 0$ pour $\ell \in \mathbf{N}$, les N nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_N(\alpha)$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbf{Q}}$, sans autre forme d'hypothèse, comme me l'ont fait remarquer B.Adamczewski et C.Faverjon. En effet, une relation de la forme prescrite par le théorème 1.7 ne peut se spécialiser en une relation homogène entre $f_1(\alpha), \ldots, f_N(\alpha)$ qu'en un pôle d'au moins une composante de $\boldsymbol{\lambda}(z)$.

Enfin, nous établissons avec le corollaire 6.3 de la section 6 une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une matrice fondamentale de solutions de (1.2) à coefficients méromorphes dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$.

2. Corps à endomorphisme

Un *σ-anneau* est un anneau commutatif, unitaire, $\mathfrak{A}$ muni d'un endomorphisme unitaire (*i.e.* satisfaisant $\sigma(1) = 1$). Un *σ-corps* est un σ-anneau $(\mathfrak{A}, \sigma)$ tel que $\mathfrak{A}$ soit un corps. Les éléments y d'un σ-anneau (*resp.* σ-corps) satisfaisant $\sigma(y) = y$ sont appelés les *σ-constantes*, ils forment un sous-anneau (*resp.* sous-corps), *voir* [12, Définition 1.1.1]. Un homomorphisme de σ-anneau (*resp.* σ-corps) est un homomorphisme d'anneau (*resp.* corps) qui commute aux σ-actions.

Soit $q \geq 2$ un entier, $\mathbf{k} \subset \mathbf{C}$ un sous-corps algébriquement clos dans $\mathbf{C}$ et σ l'endomorphisme (unitaire) du corps $\mathbf{k}(z)$ défini par $\sigma(a(z)) = a(z^q)$, de sorte que $(\mathbf{k}(z), \sigma)$ est un σ-corps, de corps des σ-constantes égal à $\mathbf{k}$. Avec ces notations le système d'équations fonctionnelles (1.2) s'écrit

$$\boldsymbol{f} = A\sigma(\boldsymbol{f}) \quad \text{ou} \quad \sigma(\boldsymbol{f}) = A^{-1}\boldsymbol{f} \ ,$$

avec A une matrice inversible $N \times N$ à coefficients dans $\mathbf{k}(z)$.

Définition 2.1. *Soit $(\mathfrak{A}, \sigma)$ un σ-anneau. Une* matrice fondamentale *de solutions dans $\mathfrak{A}$ du système d'équations fonctionnelles* (1.2) *est une matrice U inversible, $N \times N$ à coefficients dans $\mathfrak{A}$ satisfaisant $U = A\sigma(U)$.*

Nous considérons maintenant un σ-corps $\mathfrak{K}$ contenant $\mathbf{k}(z)$ et tous les coefficients d'une matrice fondamentale de solutions de (1.2). Et nous montrons que tout vecteur solution de (1.2) dans $\mathfrak{K}^N$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{k}$ des vecteurs colonnes de la matrice fondamentale.

Proposition 2.2. *Soit $\mathfrak{K}$ un σ-corps, de corps des σ-constantes égal à $\mathbf{k}$ et contenant les coefficients d'une matrice fondamentale de solutions U. Alors, tout vecteur $\boldsymbol{y}$, de composantes dans $\mathfrak{K}$, solution de* (1.2)*, est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{k}$, des colonnes de U.*

Démonstration. Le vecteur $\boldsymbol{y}$ et les colonnes de U appartiennent à $\mathfrak{K}^N$ et sont donc liés par une relation linéaire non triviale à coefficients dans $\mathfrak{K}$, soit $\boldsymbol{y}b_0 = \sum_{j=1}^N \boldsymbol{u}_j b_j$ avec $b_0, b_j \in \mathfrak{K}$. Comme les vecteurs $\boldsymbol{u}_j$ sont indépendants $(\det(U) \neq 0)$ on a $b_0 \neq 0$ et, quitte à diviser par b_0, on peut supposer $b_0 = 1$:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^N \boldsymbol{u}_j b_j \ . \tag{2.3}$$

En faisant agir σ on obtient $\sigma(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^N \sigma(\boldsymbol{u}_j)\sigma(b_j)$, puis en multipliant à gauche par A il vient $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^N \boldsymbol{u}_j \sigma(b_j)$, car $A\sigma(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ et $A\sigma(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{u}_j$ par (1.2). En retranchant (2.3) on obtient finalement

$$\sum_{j=1}^N \boldsymbol{u}_j(\sigma(b_j) - b_j) = 0$$

qui, vu l'indépendance des vecteurs $\boldsymbol{u}_j$, implique $\sigma(b_j) = b_j$ pour tout $j = 1, \ldots, N$. Enfin, le corps des σ-constantes de $\mathfrak{K}$ étant $\mathbf{k}$ cela montre $b_j \in \mathbf{k}$, $j = 1, \ldots, N$, dans (2.3), et $\boldsymbol{y}$ est bien combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{k}$ des vecteurs colonnes $\boldsymbol{u}_j$ de la matrice U. □

On note $K := \bigcup_{\ell \in \mathbf{N}} \mathbf{k}(z^{q^{-\ell}})$ la *clôture inversive* de $\mathbf{k}(z)$ que nous munissons de l'automorphisme, encore noté σ, étendant l'endomorphisme σ de $\mathbf{k}(z)$.

Soit $1 \leq r \leq N$ un entier et $V = (u_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq r}}$ la matrice des composantes de r vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ solutions de (1.2). L'action de l'endomorphisme σ s'étend naturellement au corps $K(V)$ en posant $\sigma(V(z)) = V(z^q)$.

Soit $X := \big(X_{i,j}\big)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq r}}$ une matrice de variables indépendantes. Notons $K[X]$ l'anneau des polynômes en les variables $X_{i,j}$ à coefficients dans K et $\mathfrak{P}$ l'idéal de $K[X]$ des relations de dépendance algébrique sur K entre les fonctions $(u_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq r}}$. Introduisons les automorphismes de K-algèbres, inverses l'un de l'autre,

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\sigma} : & K[X] & \longrightarrow & K[X] \\ & z & \longmapsto & z^q \\ & X & \longmapsto & A(z)^{-1}X \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tilde{\sigma}^{-1} : & K[X] & \longrightarrow & K[X] \\ & z & \longmapsto & z^{1/q} \\ & X & \longmapsto & A(z^{1/q})X \end{array} .$$

Ceci fait de $K[X]$ une $\tilde{\sigma}$-algèbre sur le σ-corps K. Pour $P \in K[X]$ on vérifie

$$\tilde{\sigma}(P)(V) = \sigma(P(V)) \quad \text{et} \quad P(V) = \sigma(\tilde{\sigma}^{-1}(P)(V)) \ ,$$

car $V = A\sigma(V)$. En particulier, $\tilde{\sigma}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ et l'action de $\tilde{\sigma}$ coïncide avec celle de σ sur $K[V]$ après spécialisation de X en V. Ainsi, la σ-algèbre $K[V]$ est isomorphe à la $\tilde{\sigma}$-algèbre $K[X]/\mathfrak{P}$.

3. Groupes de Galois

Dans cette section on se place sur un sous-corps $\mathbf{k}$ algébriquement clos de $\mathbf{C}$. On notera alors $K := \bigcup_{\ell\in\mathbf{N}} \mathbf{k}(z^{q^{-\ell}})$ la clôture inversive de $\mathbf{k}(z)$, telle qu'introduite à la fin de la section 2 précédente. Nous rappelons quelques éléments de la théorie de Galois des systèmes d'équations fonctionnelles (1.2), qui est un outil de choix pour déterminer les relations algébriques entre les composantes d'une matrice fondamentale de solutions, voir par exemple le lemme 5.1.

Soit $U = U(z)$ une telle matrice, posons $r = N$ dans les notations introduites à la fin de la section 2. On a alors la matrice $X := \big(X_{i,j}\big)_{1\le i,j\le N}$ de variables indépendantes et la K-algèbre $K[X]$ sur laquelle $\tilde\sigma$ agit par $\tilde\sigma(X) = A(z)^{-1}X$ et $\tilde\sigma(z) = z^q$, c'est un $\tilde\sigma$-anneau. Comme U est une matrice fondamentale de solutions de (1.2) l'idéal $\mathfrak{P} = (P \in K[X]; P(z, U(z)) = 0)$ est un $\tilde\sigma$-idéal, *i.e.* $\tilde\sigma(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}$, [12, Définition 2.1.1]. L'action de $\tilde\sigma$ sur la K-algèbre

$$K[X]/\mathfrak{P} \simeq K[U] \ ,$$

déduite de celle sur $K[X]$, coïncide avec l'extension naturelle de σ à $K[U]$: $\sigma(u_{i,j}(z)) = u_{i,j}(z^q) = \tilde\sigma(u_{i,j})(z)$. Ainsi, la K-algèbre $K[U]$ est un σ-anneau dont le corps des σ-constantes est égal à $\mathbf{k}$.

Définition 3.1. *Une σ-algèbre $\mathfrak{A}$ sur K est un anneau de* Picard-Vessiot *du système d'équations fonctionnelles* (1.2) *s'il existe une matrice fondamentale de solutions de* (1.2) *telle que $\mathfrak{A} = K[\det(U)^{-1}, U]$ et $\mathfrak{A}$ ne contient aucun σ-idéal non nul.*

On peut toujours construire un anneau de Picard-Vessiot d'un système d'équations fonctionnelles de la forme (1.2) comme le quotient de la $\tilde\sigma$-algèbre $K[\det(X)^{-1}, X]$ sur K par un $\tilde\sigma$-idéal qui est maximal parmi les $\tilde\sigma$-idéaux de $K[\det(X)^{-1}, X]$. Puisque le corps des σ-constantes de K est supposé algébriquement clos, il y a unicité de l'anneau de Picard-Vessiot de (1.2), à un isomorphisme de $\tilde\sigma$-algèbre sur K près, *cf.* [15, Proposition 1.9].

Les σ-idéaux maximaux d'une σ-algèbre sont radicaux et donc les anneaux de Picard-Vessiot n'ont pas d'éléments nilpotents, [*ibidem*, Lemma 1.7].

Nous montrons que, K étant de caractéristique zéro et de corps des σ-constantes $\mathbf{k}$ algébriquement clos, il existe un anneau de Picard-Vessiot de (1.2) contenant les composantes de vecteurs solutions donnés à l'avance.

Proposition 3.2. *Soit $1 \le r \le N$ et $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$ des vecteurs solutions de* (1.2)*, alors il existe un anneau de Picard-Vessiot de* (1.2) *sur K, contenant les composantes de $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$. Si $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}$, il existe une matrice fondamentale de solutions de* (1.2) *dont les r première colonnes sont les vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$.*

Démonstration. Le corps $\mathfrak{k} = K(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r)$ engendré sur K par les composantes des vecteurs $\boldsymbol{u}_i$ est naturellement muni d'une extension de l'endomorphisme σ, puisque ces vecteurs satisfont $\sigma(\boldsymbol{u}_i) = A^{-1}\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \dots, r$. D'après [12, Proposition 2.1.4] il existe un anneau de Picard-Vessiot $\mathfrak{A}$ de (1.2) sur $\mathfrak{k}$ (unique à isomorphisme près). La σ-algèbre $\mathfrak{A}$ étant un anneau de Picard-Vessiot sur $\mathfrak{k}$, n'a pas d'élément nilpotent. Soit U une matrice fondamentale de solutions de (1.2) engendrant $\mathfrak{A} = \mathfrak{k}[\det(U)^{-1}, U]$ sur $\mathfrak{k}$.

Grâce à la proposition 2.2, les vecteurs $\boldsymbol{u}_i$ sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbf{k}$ des colonnes de la matrice U et donc appartiennent à $R := K[\det(U)^{-1}, U] \subset \mathfrak{A}$. Cette σ-algèbre R, de type fini sur K, n'a pas d'élément nilpotent (puisque $\mathfrak{A}$ n'en a pas) et son corps des σ-constantes est $\mathbf{k}$ (corps des σ-constantes de K supposé algébriquement clos), d'après [15, Lemma 1.8]. La proposition 2.2 implique encore que toute matrice fondamentale de solutions de (1.2) dont les coefficients sont dans $\mathfrak{A}$, engendre $K[\det(U)^{-1}, U]$ sur K. Enfin, le corps K est parfait (étant de caractéristique zéro), de corps des σ-constantes $\mathbf{k}$ algébriquement clos. Ainsi, les hypothèses de [15, Corollary 1.24] sont satisfaites et cet énoncé entraîne que R est un anneau de Picard-Vessiot de (1.2) sur K, contenant les composantes de $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$.

Lorsque les vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}$, nous pouvons les substituer dans une matrice fondamentale de solutions, le déterminant et les coefficients n'étant multipliés que par des éléments de $\mathbf{k}$. □

Un anneau de Picard-Vessiot est unique à isomorphisme près, mais il n'est pas intègre en général. En revanche, d'après [15, Corollary 1.16 et Lemma 1.26] il est toujours un produit d'anneaux de Picard-Vessiot intègres, tous isomorphes à un anneau de Picard-Vessiot sur K du système d'équations fonctionnelles

$$\boldsymbol{u} = A\sigma(A)\dots\sigma^{\ell-1}(A)\sigma^{\ell}(\boldsymbol{u}) \tag{3.3}$$

pour un certain $\ell \in \mathbf{N}^{\times}$. En combinant ce fait avec la proposition 3.2 on obtient :

Proposition 3.4. *Dans les notations de la proposition 3.2 il existe un entier positif ℓ et un σ^{ℓ}-corps contenant $K(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r)$, qui est le corps des fractions d'un anneau de Picard-Vessiot du système d'équations fonctionnelles* (3.3)*, intègre.*

Démonstration. Il suffit d'observer que les vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$, étant solutions de (1.2), sont également solutions de (3.3) et on applique la proposition 3.2 à cette situation. Le σ^{ℓ}-anneau obtenu est isomorphe à un anneau de Picard-Vessiot de (3.3) qui, pour un choix convenable de ℓ, est intègre. □

Dans la suite de cette section on fixe une matrice fondamentale de solutions $U = U(z)$ de (1.2) et on note $R = K[\det(U)^{-1}, U]$. On a

$$R \otimes_K K[\det(X)^{-1}, X] = R \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\det(Y)^{-1}, Y]$$

où $Y = U^{-1}X$. On note $\mathfrak{I}_0$ le σ-idéal de $R \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\det(Y)^{-1}, Y]$ engendré par $\mathfrak{P} \subset K[X]$:

$$\mathfrak{I}_0 = (P(z, U(z)Y), P \in \mathfrak{P}) \subset R \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\det(Y)^{-1}, Y] \ ,$$

puis $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 \cap \mathbf{k}[\det(Y)^{-1}, Y]$. Le *groupe de Galois* G de (1.2) sur K est le sous-groupe algébrique de $\mathrm{Gl}(\mathbf{k}^N)$ défini sur $\mathbf{k}$ par $\mathfrak{I}$, *voir* [15, §1.2]. L'image de U par un élément du groupe de Galois est encore une matrice fondamentale de solutions de (1.2). Donc, tout élément de G est représenté par une matrice $y = (y_{i,j})_{1 \le i,j \le N}$ à coefficients dans $\mathbf{k}$, de déterminant non nul, satisfaisant $P(z, Xy) \in \mathfrak{P}$ pour tout $P(z, X) \in \mathfrak{P}$. Il coïncide avec

le groupe des automorphismes de la K-algèbre $K[X]$ laissant invariant $\mathfrak{P}$ (c'est-à-dire les automorphismes de $K[U]$), qui commutent à l'action de σ.

Notons $K(U)$ l'anneau total des fractions de l'anneau R. La *correspondance de Galois* associe à tout sous-groupe algébrique H du groupe de Galois G l'extension de Picard-Vessiot $K(U)^H \subset K(U)$ sur le corps des éléments de $K(U)$ fixés par tous les éléments de H. Réciproquement, à tout σ-anneau intermédiaire $K \subset \mathfrak{K} \subset K(U)$, dont les éléments non inversibles sont diviseurs de zéro, est associé le sous-groupe de G qui fixe les éléments de $\mathfrak{K}$. Le groupe H est le groupe de Galois de l'extension de Picard-Vessiot $\mathfrak{K} = K(U)^H \subset K(U)$. Lorsque le sous-groupe H est normal alors $K \subset K(U)^H$ est aussi une extension de Picard-Vessiot de groupe de Galois G/H, *voir* [15, Theorem 1.29].

Le schéma $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(K)$ est un torseur sous l'action du groupe de Galois G, *voir* [15, Theorem 1.13]. En particulier, $R^G = K$, R n'a pas d'idéal propre, non trivial, invariant par G et, K étant un C^1-corps, $R = \mathbf{k}[G] \otimes_{\mathbf{k}} K$, *voir* [15, Corollary 1.15 & 1.18]. Ceci conduit à une description du groupe de Galois comme le plus petit sous-groupe algébrique G de $\mathrm{Gl}(\mathbf{k}^N)$ défini sur $\mathbf{k}$ tel qu'il existe $B \in \mathrm{Gl}(K^N)$ satisfaisant $B^{-1}A\sigma(B) \in G(K)$, *voir* [15, Proposition 1.21]. En particulier, si A appartient à un sous-groupe $H(K)$ de $\mathrm{Gl}(K^N)$ défini sur $\mathbf{k}$, alors $G \subset H$.

Si $K(U)$ est un corps (*i.e.* R est intègre) il y a correspondance entre les sous-groupes algébriques connexes du groupe de Galois et les corps intermédiaires algébriquement clos dans $K(U)$, *voir* [15, Theorem 1.29 et page 22]. De plus, la dimension (sur $\mathbf{k}$) du groupe algébrique associé à un σ-corps intermédiaire $K \subset \mathfrak{K} \subset K(U)$ est égal au degré de transcendance de l'extension de Picard-Vessiot $\mathfrak{K} \subset K(U)$.

L'action du groupe de Galois sur l'espace des matrices fondamentales du système d'équations fonctionnelles considéré est donné par la multiplication à droite par la matrice y représentant l'élément du groupe de Galois : $U \mapsto Uy$. Cela induit un endomorphisme de l'espace des solutions $\mathcal{S} = \oplus_{i=1}^N \mathbf{k}\boldsymbol{u}_i$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ U\mathbf{c} = \sum_{i=1}^N c_i \boldsymbol{u}_i & \longmapsto & Uy\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N y_{i,j} c_j\right) \boldsymbol{u}_i \end{array},$$

où $\boldsymbol{c}$ désigne le vecteur colonne transposé de $(c_1, \ldots, c_N) \in \mathbf{k}^N$. Comme $\sigma(Uy\boldsymbol{c}) = \sigma(U)y\boldsymbol{c}$, cet endomorphisme commute à σ et sa matrice dans la base $(\boldsymbol{u}_i)_{1 \le i \le N}$ est y.

Notons G° la composante connexe contenant l'origine de G, c'est un sous-groupe distingué de G. D'après [15, Corollary 1.31], le sous-anneau R^{G° des éléments de R fixés par G° est un K-espace vectoriel de dimension finie, égale à l'indice $[G : G^\circ]$ de G° dans G. Lorsque R est intègre on a le résultat suivant :

Lemme 3.5. *Supposons l'anneau de Picard-Vessiot R intègre, alors le corps $K(U)^{G^\circ}$ est la clôture algébrique de K dans $K(U)$, c'est une extension finie de K de degré $[G : G^\circ]$. En particulier, K est algébriquement clos dans $K(U)$ si et seulement si le groupe de Galois de* (1.2) *est connexe.*

Démonstration. Comme on suppose R intègre et que G° est connexe et distingué, $K(U)^{G^\circ}$ est un sous-corps algébriquement clos dans $K(U)$ et $K \subset$

$K(U)^{G^\circ}$ est une extension de Picard-Vessiot de groupe de Galois G/G°, donc algébrique finie de degré $[G : G^\circ]$.

Ce qui montre que $K(U)^{G^\circ}$ est la clôture algébrique de K dans $K(U)$ (qui est nécessairement un σ-corps).

Ainsi, $K(U)^{G^\circ} = K$ si et seulement si $G^\circ = G$. □

4. Régularité et spécialisation

Nous supposons dorénavant $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{Q}}$ et nous considérons le système d'équations fonctionnelles (1.2), où $A(z)$ est une matrice $N \times N$ à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}(z)$. Soit ρ un réel positif, $1 \leq r \leq N$ un entier et $\boldsymbol{u}_1(z), \ldots, \boldsymbol{u}_r(z)$ des vecteurs solutions de (1.2) dont les composantes $u_{i,j}(z)$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, r$, appartiennent à $\overline{\mathbf{Q}}[[z]]$ et convergent dans un disque de rayon ρ centré en l'origine de $\mathbf{C}$. Rappelons que les séries $u_{i,j}(z)$ définissent des fonctions méromorphes dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$, *voir* lemme 6.1 à la section 6.

Posons $V = V(z) := (u_{i,j}(z))_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq r}}$ et rappelons qu'on note $T(z) = T_A(z)$ le polynôme de $\overline{\mathbf{Q}}[z]$ satisfaisant $T(0) = 1$ et dont les zéros sont les pôles distincts de 0, des matrices $A(z)$ et $A(z)^{-1}$, comptés avec multiplicité. Les *singularités* du système (1.2) sont les points $\xi \in \mathbf{C}$ satisfaisant $T(\xi^{q^\ell}) = 0$ pour au moins un $\ell \in \mathbf{N}$. On vérifie qu'un pôle d'une des fonctions $u_{i,j}(z)$ dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$, est une singularité du système (1.2).

Appliquons le théorème 1.1 à des sommes directes du système (1.2).

Théorème 4.1. *Soit $A(z)$ une matrice carrée $N \times N$ à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}(z)$. Soit $\boldsymbol{u}_1(z), \ldots, \boldsymbol{u}_r(z)$ des vecteurs solutions de* (1.2) *dont les composantes $u_{i,j}(z)$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, r$, appartiennent à $\overline{\mathbf{Q}}[[z]]$.*

Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$, $0 < |\alpha| < \rho$, qui n'est pas une singularité de (1.2)*, alors*

$$\operatorname{degtr}_{\overline{\mathbf{Q}}} \overline{\mathbf{Q}}(V(\alpha)) \geq \operatorname{degtr}_{\overline{\mathbf{Q}}(z)} \overline{\mathbf{Q}}(z, V(z)) \ .$$

.

Démonstration. On applique le théorème 1.1 au système $rN \times rN$ de matrice $B(z)$ composée de r blocs diagonaux $A(z)$, dont le vecteur colonne de composantes les $u_{i,j}(z)$ est solution. Par hypothèses les séries $u_{i,j}(z)$ convergent dans le disque de rayon ρ centré en l'origine de $\mathbf{C}$ et leurs coefficients appartiennent à l'extension finie de $\mathbf{Q}$ engendrée par les coefficients des coefficients de $A(z)$. De plus, les pôles des coefficients de la matrice $B^{-1}(z)$ sont les mêmes que ceux de $A^{-1}(z)$ et les hypothèses du théorème 1.1 se ramènent donc à celles du théorème 4.1. □

Lorsqu'un corps est algébriquement clos dans un plus grand corps, on dit que l'extension est *régulière*. Le lemme 4.2 suivant peut donc se reformuler : $K \subset K(V)$ et $\overline{\mathbf{Q}}(z) \subset \overline{\mathbf{Q}}(z, V)$ sont des extensions régulières.

Lemme 4.2. *Tout élément de $K(V)$ (resp. $\overline{\mathbf{Q}}(z, V)$) algébrique sur K (resp. $\overline{\mathbf{Q}}(z)$) appartient à K (resp. $\overline{\mathbf{Q}}(z)$).*

Démonstration. Grâce à la proposition 3.4, le corps $K(V)$ est contenu dans une extension de Picard-Vessiot de K pour le système d'équations fonctionnelles (3.3). Soit L la clôture algébrique de K dans $K(V)$, elle est contenue

dans la clôture algébrique de K dans l'extension de Picard-Vessiot exhibée qui, d'après le lemme 3.5, est une extension finie de K. L'extension $K \subset L$ est donc elle aussi finie. Soit $f \in L$, alors $\sigma^\ell(f)$ est encore un élément de $K(V)$ algébrique sur K, pour tout $\ell \in \mathbf{N}$. Comme L est un K-espace vectoriel de dimension finie, il existe donc, pour un certain $m \in \mathbf{N}^\times$, une relation de la forme

$$\sigma^m(f) = \sum_{\ell=0}^{m-1} b_\ell \sigma^\ell(f) \tag{4.3}$$

avec $b_\ell \in K$ pour $\ell = 0, \ldots, m-1$. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble (fini) des points de ramification de f et des b_ℓ, on note que ces derniers b_ℓ sont méromorphes dans $\mathbf{C}^\times$ et n'ont de ramification qu'en 0 et ∞. Soit θ l'argument minimal dans $]0, 2\pi]$ d'un élément de $\mathcal{R} \cap \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ (en posant $\theta = 2\pi$ si ce dernier ensemble est vide). Pour tout réel $0 < \varepsilon < 1$ notons encore

$$E(\varepsilon) := \{z \in \mathbf{C}; \theta - \varepsilon < \mathrm{Arg}(z) < \theta, 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\} \quad .$$

Lorsque ε est assez petit l'ensemble $\bigcup_{h=0}^\infty E(\varepsilon)^{q^{-h}}$ ne rencontre pas $\mathcal{R}$, grâce au choix de θ. La fonction algébrique f étant méromorphe en dehors de E, l'est en particulier dans $\bigcup_{h=0}^\infty E(\varepsilon)^{q^{-h}}$.

Maintenant, si f est une fonction méromorphe dans un ensemble de la forme $\bigcup_{h=0}^\infty E_0^{q^{-h}}$ avec $E_0 \subset \mathbf{C}^\times$, alors pour chaque $\ell = 0, \ldots, m-1$ la fonction $\sigma^\ell(f)$ est méromorphe dans $\bigcup_{h=\ell}^\infty E_0^{q^{-h}}$. Et donc, par la relation (4.3), la fonction $\sigma^m(f)$ est méromorphe dans $\bigcup_{h=m-1}^\infty E_0^{q^{-h}}$, ce qui implique finalement la méromorphie de f dans $\bigcup_{h=-1}^\infty E_0^{q^{-h}}$. Appliquant ce raisonnement à $E_0 = E(\varepsilon)$, puis itérant avec $E_0 = E(\varepsilon)^q, E(\varepsilon)^{q^2}, \ldots$ successivement, on montre que la fonction f (et $\sigma^\ell(f)$ pour tout $\ell \in \mathbf{N}$) est méromorphe dans $\bigcup_{h \in \mathbf{Z}} E(\varepsilon)^{q^{-h}} = \mathbf{C}^\times$.

Mais, $f \in L \subset K(V)$ appartient à un corps $\overline{\mathbf{Q}}(z^{q^{-\ell}})(V) \subset \overline{\mathbf{Q}}(z^{q^{-\ell}})[[z]]$ pour un certain $\ell \in \mathbf{N}$, ce qui entraîne que $\sigma^\ell(f)$ n'est pas ramifiée en 0. Avec ce qui précède, elle est donc méromorphe dans $\mathbf{C}$ et la formule de Riemann-Hurwitz impose qu'elle soit rationnelle. Ainsi $\sigma^\ell(f) \in \overline{\mathbf{Q}}(z)$, d'où suit $f \in K$.

Si on suppose $f \in L \cap \overline{\mathbf{Q}}(z, V) \subset \overline{\mathbf{Q}}[[z]]$ alors le raisonnement ci-dessus montre que la fonction f elle-même est méromorphe dans $\mathbf{C}$ et donc appartient à $\overline{\mathbf{Q}}(z)$. □

Remarque. La démonstration ci-dessus est à rapprocher de celle du lemme 5 de [6]. On y ajoute comme ingrédient supplémentaire, en s'appuyant sur la théorie de Galois, que la clôture algébrique de K dans $K(V)$ est une extension finie de K. Comme me l'ont fait remarquer l'arbitre, Boris Adamczewski et Colin Faverjon [2], si on veut se passer de théorie de Galois on peut vérifier directement que toute extension intermédiaire entre K et $K(V)$ est de type fini (et si elle est algébrique, c'est une extension finie de K).

La rationalité des solutions de (4.3) (dans $\overline{\mathbf{Q}}[[z]]$) algébriques sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$, est bien connue, voir par exemple [13, Theorem 5.1.7]

Rappelons la matrice de variables $X := (X_{i,j})_{\substack{1\le i\le N\\ 1\le j\le r}}$ et l'automorphisme $\tilde\sigma$ introduit à la fin de la section 2. On note aussi $\mathfrak{P}$ l'idéal premier de $K[X]$ des relations algébriques entre les coefficients de la matrice V. Adjoignons une nouvelle variable X_0 à X et notons $\tilde X = (X, X_0)$. Soit $\tilde{\mathfrak{P}}$ l'idéal de $K[\tilde X]$ homogénéisé en X de l'idéal $\mathfrak{P}$, c'est un idéal premier de même rang que $\mathfrak{P} \subset K[X]$.

Proposition 4.4. *Il existe un réel $0 < \rho' < \rho$ tel que tout $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$, $0 < |\alpha| \le \rho'$, ait la propriété suivante : pour tout polynôme $P \in \overline{\mathbf{Q}}[X]$ tel que $P(V(\alpha)) = 0$, il existe $Q \in \overline{\mathbf{Q}}[z, X]$ de même degré en X que P, satisfaisant $Q(z, V(z)) = 0$ et $P(X) = Q(\alpha, X)$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{P}_\alpha$ l'idéal premier de $\overline{\mathbf{Q}}[X]$ des relations de dépendance algébrique (à coefficients algébriques) entre les coefficients de $V(\alpha)$ et $\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ son homogénéisé dans $\overline{\mathbf{Q}}[\tilde X]$. Nous notons $\mathfrak{s}_\alpha : \overline{\mathbf{Q}}[z] \to \overline{\mathbf{Q}}$ la spécialisation de z en α, nous allons montrer $\mathfrak{s}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, \tilde X]) = \tilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ pour l'application étendue $\mathfrak{s}_\alpha : \overline{\mathbf{Q}}[z, \tilde X] \to \overline{\mathbf{Q}}[\tilde X]$. Notons qu'on a clairement $\mathfrak{s}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, \tilde X]) \subset \tilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ et que les idéaux premiers $\mathfrak{P}_\alpha$ et $\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ ont même rang.

Comme $\mathrm{Frac}(\overline{\mathbf{Q}}[z, X]/\mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, X]) \simeq \overline{\mathbf{Q}}(z, V)$ est une extension régulière de $\overline{\mathbf{Q}}(z)$ d'après le lemme 4.2, l'idéal $\mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[X]$ est absolument premier, voir [17, Theorem 39, p.230]. L'idéal $\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[\tilde X]$ est l'homogénéisé en X de $\mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[X]$, il est donc également absolument premier de même rang. Et, d'après [10, §3, Satz 16], son image par $\mathfrak{s}_\alpha$ est un idéal premier de $\overline{\mathbf{Q}}[\tilde X]$ de même rang que $\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[\tilde X]$, pour tout α en dehors d'un ensemble fini. On choisit $0 < \rho' < \rho$ strictement plus petit que le plus petit des modules des éléments non nuls de cet ensemble auquel on adjoint les zéros de $T_A(z)$. On suppose dorénavant $0 < |\alpha| \le \rho'$, de sorte que α n'est pas une singularité de (1.2) et $\mathfrak{s}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, \tilde X])$ est un idéal premier de même rang que $\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[\tilde X]$ et donc que $\mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[X]$.

L'anneau $\overline{\mathbf{Q}}(z)[V]$ est de type fini sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$ et intègre, aussi sa dimension de Krull est-elle égale au degré de transcendance sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$ du corps $\overline{\mathbf{Q}}(z, V)$, voir [8, §8.2.1, Theorem A, pp.221]. De plus, comme l'idéal $\mathfrak{s}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, \tilde X])$ a même rang que $\mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[X]$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{degtr}_{\overline{\mathbf{Q}}(z)}\overline{\mathbf{Q}}(z, V) &= \dim\big(\overline{\mathbf{Q}}(z)[V]\big) = \dim\big(\overline{\mathbf{Q}}(z)[X]/\mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[X]\big)\\ &= \dim(\overline{\mathbf{Q}}(z)[X]) - \mathrm{rg}(\mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[X])\\ &= \dim(\overline{\mathbf{Q}}[\tilde X]) - \mathrm{rg}(\mathfrak{s}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, \tilde X])) - 1\ .\end{aligned}$$

De même, l'anneau $\overline{\mathbf{Q}}[X]/\mathfrak{P}_\alpha$ étant de type fini sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et intègre, sa dimension de Krull est égale au degré de transcendance sur $\overline{\mathbf{Q}}$ du corps $\overline{\mathbf{Q}}(V(\alpha))$, voir *ibidem*, on a

$$\mathrm{degtr}_{\overline{\mathbf{Q}}}\overline{\mathbf{Q}}(V(\alpha)) = \dim(\overline{\mathbf{Q}}[X]) - \mathrm{rg}(\mathfrak{P}_\alpha) = \dim(\overline{\mathbf{Q}}[\tilde X]) - \mathrm{rg}(\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha) - 1\ .$$

Le théorème 4.1 entraîne donc

$$\mathrm{rg}(\mathfrak{s}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[\tilde X])) \ge \mathrm{rg}(\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha)$$

et, comme $\mathfrak{s}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, \tilde X]) \subset \tilde{\mathfrak{P}}_\alpha$, on en déduit que les idéaux premiers $\mathfrak{s}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, \tilde X])$ et $\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ sont égaux, comme voulu.

Ainsi, le polynôme $\tilde{P} \in \tilde{\mathfrak{P}}_\alpha \subset \overline{\mathbf{Q}}[\tilde{X}]$, homogénéisé de $P \in \overline{\mathbf{Q}}[X]$, s'écrit $\mathfrak{s}_\alpha(\tilde{Q})$ pour un polynôme $\tilde{Q} \in \tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, \tilde{X}]$, de même degré en $\tilde{X}$ que $\tilde{P}$. Le polynôme $Q \in \mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, X]$ obtenu de $\tilde{Q}$ par spécialisation de X_0 en 1 satisfait la conclusion de la proposition. □

Le corollaire suivant établit le théorème 1.3.

Corollaire 4.5. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$, $0 < |\alpha| < 1$, n'appartenant pas à l'ensemble singulier de* (1.2)*, alors pour tout $P \in \overline{\mathbf{Q}}[X]$ tel que $P(V(\alpha)) = 0$, il existe $Q \in \overline{\mathbf{Q}}[z, X]$ de même degré en X que P, tel que $Q(z, V(z)) = 0$ et $P(X) = Q(\alpha, X)$.*

Lorsque l'idéal $\mathfrak{P}$ est homogène en X et P est un élément homogène de $\mathfrak{P}_\alpha$, on peut choisir le polynôme Q également homogène en X, de même degré que P. Mais B.Adamczewski et C.Faverjon déduisent du corollaire 4.5 cette conservation de l'homogénéité sans supposer l'idéal $\mathfrak{P}$ homogène.

Démonstration. Il existe un entier $\ell \in \mathbf{N}$ tel que $0 < |\alpha^{q^\ell}| \leq \rho'$ dans les notations de la proposition 4.4. Comme α n'est pas singularité de (1.2) la matrice $A^{(\ell)}(\alpha)$ est définie et inversible. Maintenant, si $P \in \overline{\mathbf{Q}}[X]$ satisfait $P(V(\alpha)) = 0$ alors $P_0(X) := P(A^{(\ell)}(\alpha)X) \in \overline{\mathbf{Q}}[X]$ satisfait $P_0(V(\alpha^{q^\ell})) = 0$, car $V(\alpha) = A^{(\ell)}(\alpha)V(\alpha^{q^\ell})$ d'après (1.2) itérée (*i.e.* (3.3)). De plus, P_0 a même degré en X que P. Comme $|\alpha^{q^\ell}| \leq \rho'$, la proposition 4.4 entraîne l'existence de $Q_0 \in \mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}[z, X]$ de même degré en X que P_0, tel que $P_0(X) = Q_0(\alpha^{q^\ell}, X)$.

Appliquons $\tilde{\sigma}^\ell$ à P_0, on obtient d'une part

$$\tilde{\sigma}^\ell(P_0(X)) = \tilde{\sigma}^\ell(Q_0(\alpha^{q^\ell}, X)) = Q_0(\alpha^{q^\ell}, A^{(-\ell)}(z)X)$$

et d'autre part, par la définition de P_0,

$$\tilde{\sigma}^\ell(P_0(X)) = \tilde{\sigma}^\ell(P(A^{(\ell)}(\alpha)X)) = P(A^{(\ell)}(\alpha)A^{(-\ell)}(z)X) \ .$$

On en déduit

$$P(A^{(\ell)}(\alpha)A^{(-\ell)}(z)X) = Q_0(\alpha^{q^\ell}, A^{(-\ell)}(z)X) \ . \tag{4.6}$$

En multipliant $Q_0(\alpha^{q^\ell}, A^{(-\ell)}(z)X) \in \overline{\mathbf{Q}}(z)[X]$ par une puissance convenable de $\Delta(z) := T_A(z)T_A(z^q)\dots T_A(z^{q^{\ell-1}})$ on obtient un polynôme en z et X et, vu la contrainte imposée à α, on a $\Delta(\alpha) \neq 0$. Donc, la spécialisation de z à α dans $Q_0(\alpha^{q^\ell}, A^{(-\ell)}(z)X)$ est bien définie et, avec (4.6), donne l'égalité

$$P(X) = Q_0(\alpha^{q^\ell}, A^{(-\ell)}(\alpha)X) \ ,$$

car $A^{(\ell)}(\alpha)A^{(-\ell)}(\alpha) = \mathrm{Id}$. Mais $Q_0 \in \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}$ est stable par l'action de $\tilde{\sigma}^\ell$, aussi $\tilde{\sigma}^\ell(Q_0) = Q_0(z^{q^\ell}, A^{(-\ell)}(z)X) \in \mathfrak{P} \cap \overline{\mathbf{Q}}(z)[X]$. En posant

$$Q(z, X) = \left(\frac{\Delta(z)}{\Delta(\alpha)}\right)^{\mathrm{d}^\circ_X Q_0} \cdot Q_0(z^{q^\ell}, A^{(-\ell)}(z)X)$$

on a $Q \in \overline{\mathbf{Q}}[z, X]$, $Q(z, V(z)) = 0$, $P(X) = Q(\alpha, X)$ et le degré en X de Q est le même que celui des polynômes Q_0, P_0 et P, comme requis. □

Remarque. La structure des démonstrations des énoncés 4.4 et 4.5 ci-dessus s'apparente à celle de [5, Theorem 1.6.1]. La notion d'idéal absolument premier ici correspond à celle de schéma géométriquement intègre là. Et c'est l'action du groupe de Galois différentiel qui dans [5] assure, au travers de la notion de fibré algébrique, l'uniformité de l'intégrité des fibres, ici remplacée dans la preuve du corollaire 4.5 par l'action de l'endomorphisme $\tilde{\sigma}$.

De ce point de vue, l'utilisation du théorème de Krull dans la démonstration de la proposition 4.4 peut être remplacée par un appel à [9, Theorem 12.2.4(vii) & 12.2.1(iii)], appliqué au morphisme $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}[z,X]/\mathfrak{P}\cap\overline{\mathbf{Q}}[z,X])\to\mathrm{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}[z])$, qui est propre, plat et de présentation finie sur un ouvert de $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}[z])$, en vertu de [*ibidem*, Corollaire 1.6.3].

Corollaire 4.7. *Supposons que le degré de transcendance de $\overline{\mathbf{Q}}(V(z))$ sur $\overline{\mathbf{Q}}$ soit égal à son degré de transcendance sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$. Autrement-dit, on suppose z transcendant sur $\overline{\mathbf{Q}}(V(z))$.*

Soit $\alpha\in\overline{\mathbf{Q}}\subset\mathbf{C}$, $0<|\alpha|<1$, n'appartenant pas à l'ensemble singulier de (1.2)*, alors les relations de dépendance algébrique sur $\overline{\mathbf{Q}}$ entre les coefficients de $V(\alpha)$ sont les relations de dépendance algébrique sur $\overline{\mathbf{Q}}$ entre les coefficients de $V(z)$.*

Démonstration. Il résulte du corollaire 4.5 et de l'hypothèse de l'énoncé qu'on a $\mathfrak{P}_\alpha=\mathfrak{P}\cap\overline{\mathbf{Q}}[X]$, car $\mathfrak{P}$ est engendré par $\mathfrak{P}\cap\overline{\mathbf{Q}}[X]$. □

5. Indépendance linéaire

Dans cette section on reprend les notations des paragraphes précédents avec $\mathbf{k}=\overline{\mathbf{Q}}$ et K sa clôture inversive.

Notre but est d'obtenir des énoncés d'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbf{Q}}$ des valeurs des composantes d'un vecteur solution de (1.2). Notamment, de démontrer le théorème 1.5, avec en particulier l'enjeu de ne pas exclure l'ensemble singulier du système d'équations fonctionnelles.

Commençons par un lemme reliant indépendance linéaire des fonctions et orbite galoisienne.

Lemme 5.1. *Soit $\boldsymbol{f}(z)\in\mathbf{k}[[z]]$ un vecteur solution de* (1.2) *et $\mathcal{S}$ l'espace des solutions engendré par les colonnes $\boldsymbol{u}_1(z),\dots,\boldsymbol{u}_N(z)$ d'une matrice fondamentale de solutions de* (1.2)*, contenant $\boldsymbol{f}(z)$.*

La dimension de la sous-représentation du groupe de Galois sur le $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathcal{S}'\subset\mathcal{S}$ engendré par l'orbite de $\boldsymbol{f}(z)$ est égale à la dimension du K-espace vectoriel engendré par les composantes de $\boldsymbol{f}(z)$.

Démonstration. L'existence d'une extension de Picard-Vessiot R engendrée par une matrice fondamentale de solutions $U(z)=(\boldsymbol{u}_1(z),\dots,\boldsymbol{u}_N(z))$ de (1.2) telle que $\boldsymbol{u}_1(z)=\boldsymbol{f}(z)$, est assurée par la proposition 3.2.

Soit r la dimension de l'orbite de $\boldsymbol{f}(z)$ sous l'action du groupe de Galois et $\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{u}'_1(z),\boldsymbol{u}'_2(z),\dots,\boldsymbol{u}'_r(z)\in R^N$ une base de $\mathcal{S}'$ composée d'images de $\boldsymbol{f}(z)$ par des éléments du groupe de Galois. Notons $\boldsymbol{\lambda}_1,\dots,\boldsymbol{\lambda}_r\in\mathbf{k}^N$ les vecteurs des coordonnées de $\boldsymbol{u}'_1(z),\dots,\boldsymbol{u}'_r(z)$ respectivement, dans la base $\boldsymbol{u}_1(z),\dots,\boldsymbol{u}_N(z)$ de $\mathcal{S}$ et $\boldsymbol{\mu}_1,\dots,\boldsymbol{\mu}_{N-r}\in\mathbf{k}^N$ un ensemble complet de vecteurs orthogonaux aux $\boldsymbol{\lambda}_i$. Alors, un vecteur de $K(U)^N$ orthogonal à

$\boldsymbol{u}'_1(z), \ldots, \boldsymbol{u}'_r(z)$ est combinaison linéaire des vecteurs ${}^tU(z)^{-1}\boldsymbol{\mu}_i$, qui sont linéairement indépendants sur $K(U)$. Ainsi la dimension de l'espace vectoriel engendré sur $K(U)$ par $\boldsymbol{u}'_1(z), \ldots, \boldsymbol{u}'_r(z)$ est égal à la dimension de $\mathcal{S}'$ sur $\mathbf{k}$ et la matrice $N \times r$ des composantes des vecteurs $\boldsymbol{u}'_1(z), \ldots, \boldsymbol{u}'_r(z)$, notée $\mathcal{M}$ dans la suite, est de rang r. Quitte à réordonner les coordonnées on peut supposer que le mineur Δ des r premières lignes de $\mathcal{M}$ est non nul. Pour $1 \leq i \leq r$ et $r+1 \leq j \leq N$ notons $\Delta_{i,j}$ le mineur déduit de Δ par substitution de la j-ième ligne de $\mathcal{M}$ en lieu et place de sa i-ième ligne.

Un élément y du groupe de Galois agit sur $\mathcal{S}'$ et transforme la matrice $\mathcal{M}$ par multiplication à droite par une matrice $r \times r$ à coefficients dans $\mathbf{k}$, notée y'. L'action de y multiplie ainsi chaque $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}$ par $\det(y')$. Il suit que le quotient de deux tels mineurs est invariant par le groupe de Galois et appartient donc à K. Une base du K-espace vectoriel des vecteurs de K^N orthogonaux à $\boldsymbol{u}'_1(z), \ldots, \boldsymbol{u}'_r(z)$ est donnée par les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \Delta_{1,r+1}/\Delta & \ldots & \Delta_{r,r+1}/\Delta & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \Delta_{1,N}/\Delta & \ldots & \Delta_{r,N}/\Delta & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Maintenant, ce K-espace vectoriel coïncide avec le K-espace vectoriel des relations entre les composantes de $\boldsymbol{f}(z)$, qui est donc de dimension $N-r$. Il suit que r est égal à la dimension du K-espace vectoriel engendré par les composantes de $\boldsymbol{f}(z)$. □

On peut encore énoncer :

Corollaire 5.2. *Soit $\boldsymbol{f}(z)$ un vecteur solution de* (1.2) *dont les composantes $f_1(z), \ldots, f_N(z)$ appartiennent à $\overline{\mathbf{Q}}[[z]]$ et sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$. Toute relation linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}(z)$ entre les fonctions $1, f_1(z), \ldots, f_N(z)$ est multiple d'une relation $\sum_{i=1}^N \lambda_i(z) f_i(z) = 1$ où le vecteur $\boldsymbol{\lambda}(z) \in \overline{\mathbf{Q}}(z)^N$ de composantes les $\lambda_i(z)$, est solution du système dual*

$$\boldsymbol{\lambda}(z) = {}^tA(z)^{-1}\boldsymbol{\lambda}(z^q) \ .$$

En particulier, les pôles des composantes de $\boldsymbol{\lambda}(z)$ sont des points singuliers de (1.2).

Démonstration. Comme les fonctions $f_1(z), \ldots, f_N(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$, le coefficient de la fonction 1 dans une relation linéaire entre $1, f_1(z), \ldots, f_N(z)$ doit être non nul. En divisant par ce coefficient on obtient une relation de la forme $\langle \boldsymbol{\lambda}(z), \boldsymbol{f}(z) \rangle := \sum_{i=1}^N \lambda_i(z) f_i(z) = 1$ avec $\boldsymbol{\lambda}(z) \in \overline{\mathbf{Q}}(z)^N$. En particulier, $\langle \boldsymbol{\lambda}(z), \boldsymbol{f}(z) \rangle = \langle \boldsymbol{\lambda}(z^q), \boldsymbol{f}(z^q) \rangle$ et, en utilisant (1.2), on obtient

$$\langle \boldsymbol{\lambda}(z), \boldsymbol{f}(z) \rangle = \langle \boldsymbol{\lambda}(z^q), A(z)^{-1}\boldsymbol{f}(z) \rangle = \langle {}^tA(z)^{-1}\boldsymbol{\lambda}(z^q), \boldsymbol{f}(z) \rangle \ .$$

Comme le vecteur $\boldsymbol{\lambda}(z) - {}^tA(z)^{-1}\boldsymbol{\lambda}(z^q)$ est à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}(z)$ et que les composantes de $\boldsymbol{f}(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbf{Q}}(z)$, on conclut $\boldsymbol{\lambda}(z) - {}^tA(z)^{-1}\boldsymbol{\lambda}(z^q) = 0$ et que $\boldsymbol{\lambda}(z)$ est solution du système dual.

Il est alors facile de voir que les pôles des composantes $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_N(z)$ sont nécessairement pôles de la matrice ${}^tA(z)^{-1}$ et donc singularités du système (1.2). □

Voici deux exemples illustrant le corollaire 5.2 et la théorie de Galois des équations fonctionnelles.

Exemples 5.3. *1) Soit $q \geq 3$ un entier et α un nombre complexe satisfaisant $0 < |\alpha| < 1$, considérons le système d'équations fonctionnelles pour la transformation $z \mapsto z^q$*

$$\begin{pmatrix} -\Delta(z) - 1 & -\Delta(z) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{5.4}$$

où $\Delta(z) = -\frac{(1-z/\alpha)(1-z/\alpha^q)}{(1-z^q/\alpha)(1-z^q/\alpha^q)}$ est le déterminant du système.

Une matrice fondamentale de solutions de ce système s'écrit

$$\begin{pmatrix} f(z) & u(z) \\ f(z^q) & u(z^q) \end{pmatrix} , \tag{5.5}$$

où les fonctions $f(z)$ et $u(z)$ sont données par les développements

$$\begin{cases} f(z) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^q}\right) g(z) + \frac{1}{\alpha^{q+1}} g(z^2) \ , \quad g(z) = \sum_{i \in \mathbf{N}} (-1)^i z^{q^i} \\ u(z) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^q}\right) v(z) + \frac{1}{\alpha^{q+1}} v(z^2) \ , \quad v(z) = \sum_{i \in \mathbf{N}} (-1)^i z^{q^{-i-1}} \end{cases} .$$

On note que $u(z)$ et $v(z)$ ne sont analytiques en aucun point. Les fonctions $g(z)$ et $v(z)$ satisfont $g(z) + g(z^q) = v(z) + v(z^q) = z$, d'où

$$f(z) + f(z^q) = u(z) + u(z^q) = 1 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^q}\right) z + \frac{1}{\alpha^{q+1}} z^2 = \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha^q}\right) \tag{5.6}$$

et aussi que $g(z)$ et $g(z^2)$ sont algébriquement indépendantes sur K. En effet, si $h(z) = \sum_{i \in \mathbf{N}} z^{q^{2i}}$ alors $g(z) = h(z) - h(z^q)$ et, comme $q \geq 3$, on sait que les séries $h(z)$, $h(z^2)$, $h(z^q)$ et $h(z^{2q})$ sont algébriquement indépendantes sur K. En particulier, la fonction $f(z)$ est transcendante sur K.

Le groupe de Galois du système (5.4) est le produit semi-direct $\mathbf{G}_{\mathrm{a}} \rtimes_\iota \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ suivant $\iota : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{G}_{\mathrm{a}})$, $\nu \mapsto (\lambda \mapsto \nu\lambda)$. L'identification s'écrit dans la représentation sur la base (5.5) de l'espace des solutions

$$(\lambda, \nu) \in \mathbf{G}_{\mathrm{a}} \rtimes_\iota \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \mapsto \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda-\nu \\ \lambda & \lambda+\nu \end{pmatrix} .$$

Le vecteur $\frac{1}{(1-z/\alpha)(1-z/\alpha^q)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des coefficients de la relation (5.6) satisfait le système dual de (5.4), de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\Delta(z)} \\ 1 & -1-\frac{1}{\Delta(z)} \end{pmatrix}$.

2) Considérons le système d'équations fonctionnelles de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1+z}{z^2(1+z^3)} & \frac{((z^3+z^6)^2-1)(1+z)}{z^2(1+z^3)} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{5.7}$$

pour la transformation $z \mapsto z^3$. *Son déterminant est* $\frac{(1-(z^3+z^6)^2)(1+z)}{z^2(1+z^3)}$ *et une matrice fondamentale de solutions s'écrit*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z} & f(z) \\ 0 & \frac{1}{1-z^3} & f(z^3) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

avec $f(z)$ *transcendante sur* K. *Plus précisément, en désignant par* $\mathcal{N}$ *l'ensemble des entiers positifs dont le nombre de chiffres non nuls dans l'écriture en base* 3 *est pair, on vérifie que la série* $f(z) = 1 + \sum_{i\in\mathcal{N}} z^i$, *qui converge dans le disque unité sans bord, convient. Si on désigne par* $\overline{\mathcal{N}}$ *le complémentaire de* $\mathcal{N}$ *dans* $\mathbf{N}$, *la série* $\sum_{i\in\overline{\mathcal{N}}} z^i = \frac{1}{1-z} - f(z)$ *convient également.*

La partition $\mathcal{N} = 3\mathcal{N} \sqcup (3\overline{\mathcal{N}}+1) \sqcup (3\overline{\mathcal{N}}+2)$ *induit la relation linéaire*

$$1 = \frac{1-z^3}{z+z^2} f(z) + \frac{(1-z^3)(z^2+z-1)}{z+z^2} f(z^3) \ . \tag{5.9}$$

Le groupe de Galois du système est $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, *sa représentation sur la base* (5.8) *de l'espace des solutions est donnée par* $\lambda \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1-\lambda}{2} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, *qui préserve* (5.9).

On déduit en particulier de (5.9) *l'évaluation* $f((\sqrt{5}-1)/2) = 1/(3-\sqrt{5})$, *tandis que les fonctions* 1 *et* $f(z)$ *sont linéairement indépendantes sur* K. *Enfin,* $((\sqrt{5}-1)/2)^{3^\ell}$ *n'est pas racine du déterminant de la matrice* (5.7) *pour tout* $\ell \in \mathbf{N}$ *et n'est donc pas singularité du système correspondant.*

On observe que le vecteur des coefficients de la relation (5.9) *satisfait le système dual de* (5.7).

Nous pouvons également déduire directement du corollaire 4.5 le théorème 1.4. Le corollaire suivant servira à nouveau pour démontrer le théorème 1.5 aux arguments singuliers.

Corollaire 5.10. *Soit* $\mathbf{k}_0 \subset \mathbf{C}$ *un corps de nombres,* $\alpha \in \mathbf{k}_0$, $0 < |\alpha| < 1$, *et* $1 \le \ell \le N$. *Supposons que la matrice* $A(z)$ *du système* (1.2) *soit à coefficients dans* $\mathbf{k}_0(z)$ *et le vecteur* $\boldsymbol{f}(z)$ *à composantes* $f_1(z), \ldots, f_N(z)$ *dans* $\mathbf{k}_0[[z]]$. *Si* α *n'appartient pas à l'ensemble singulier de* (1.2) *et si les nombres* $f_1(\alpha), \ldots, f_\ell(\alpha)$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbf{k}_0$, *alors ils sont linéairement indépendants sur* $\overline{\mathbf{Q}}$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, soit une relation $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f_i(\alpha) = 0$ avec $\lambda_i \in \overline{\mathbf{Q}}$ non tous nuls. D'après le corollaire 4.5, α n'appartenant pas à l'ensemble singulier de (1.2), il existe une relation $c_0(z) + \sum_{i=1}^{N} c_i(z) f_i(z) = 0$ avec $c_i(z) \in \overline{\mathbf{Q}}[z]$ satisfaisant $c_i(\alpha) = \lambda_i$ pour $i = 1, \ldots, \ell$ et $c_0(\alpha) = 0$, $c_i(\alpha) = 0$, $i = \ell+1, \ldots, N$. Soit $\xi_1, \ldots, \xi_s$ une base du $\mathbf{k}_0$-espace vectoriel engendré dans $\overline{\mathbf{Q}}$ par les coefficients des polynômes $c_i(z)$. On peut donc écrire $c_i(z) = \sum_{j=1}^{s} c_{i,j}(z)\xi_j$ avec $c_{i,j}(z) \in \mathbf{k}_0[z]$, puis

$$\sum_{j=1}^{s} \Big(c_{0,j}(z) + \sum_{i=1}^{N} c_{i,j}(z) f_i(z) \Big) \xi_j = 0 \ .$$

Et comme les séries $f_i(z)$ sont à coefficients dans $\mathbf{k}_0$, cela entraîne

$$c_{0,j}(z) + \sum_{i=1}^{N} c_{i,j}(z) f_i(z) = 0 \ . \tag{5.11}$$

pour $j = 1, \ldots, s$, et donc $c_{0,j}(\alpha) + \sum_{i=1}^{N} c_{i,j}(\alpha) f_i(\alpha) = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Comme $\alpha \in \mathbf{k}_0$, $c_{i,j}(\alpha) \in \mathbf{k}_0$. On observe que $c_i(\alpha) = 0$ si et seulement si $c_{i,j}(\alpha) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, s$. Mais $\lambda_i = c_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{s} c_{i,j}(\alpha)\xi_j$ pour $i = 1, \ldots, \ell$ ne sont pas tous nuls. Ainsi, pour au moins un $j \in \{1, \ldots, s\}$ on obtient une relation non triviale $\sum_{i=1}^{\ell} c_{i,j}(\alpha) f_i(\alpha) = 0$ contredisant l'indépendance linéaire sur $\mathbf{k}_0$ des nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_\ell(\alpha)$. □

Lorsque α est singulier, nous nous ramenons à un système nettoyé de cette singularité. Comme déjà indiqué dans l'introduction B.Adamczewski et C.Faverjon ont obtenu un énoncé jouant le même rôle que le lemme 5.12 ci-dessous. Les approches adoptées pour établir ces résultats diffèrent toutefois sensiblement. Adamczewski et Faverjon utilisent une méthode de dédoublement itérée qui augmente la taille du système d'équations fonctionnelles mais a l'avantage de conserver les fonctions originales inaltérées, tandis que nous construisons ici un système de même taille que le système original, par un procédé de repoussage de l'ensemble singulier du système d'équations fonctionnelles qui modifie le vecteur solution considéré. De plus, notre approche ne fonctionne que moyennant une hypothèse d'indépendance linéaire des valeurs des fonctions, alors que celle de Adamczewski et Faverjon évite cet écueil.

On suppose dorénavant que la matrice du système (1.2) est à coefficients dans $\mathbf{k}_0[z]$ pour un certain corps de nombres $\mathbf{k}_0 \subset \mathbf{C}$. De sorte que l'ensemble singulier du système (1.2) se réduit aux zéros du déterminant de $A(z)$ et à leurs racines q^ℓ-ième, $\ell \in \mathbf{N}$. De plus, les coefficients de $A(z)$ n'ayant pas de pôle il en est de même des composantes dans $\mathbf{k}_0[[z]]$ du vecteur solution $\boldsymbol{f}(z)$ de (1.2), dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$.

Lemme 5.12. *Soit $\mathbf{k}_0 \subset \mathbf{C}$ un corps de nombres, $\alpha \in \mathbf{k}_0$, $0 < |\alpha| < 1$. Supposons que la matrice $A(z)$ du système (1.2) soit à coefficients dans $\mathbf{k}_0[z]$ et soit $\boldsymbol{f}(z)$ un vecteur solution de (1.2) à composantes dans $\mathbf{k}_0[[z]]$. On suppose que les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_\ell(\alpha)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}_0$ pour un certain $\ell \in \{1, \ldots, N\}$.*

Il existe alors une matrice $\tilde{A}(z)$ à coefficients dans $\mathbf{k}_0[z]$ et un vecteur solution $\tilde{\boldsymbol{f}}(z)$, à composantes dans $\mathbf{k}_0[[z]]$, du système d'équations fonctionnelles correspondant tels que $\det(\tilde{A}(\alpha^{q^h})) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbf{N}$ et pour $i = 1, \ldots, \ell$:

$$\mathbf{k}_0 f_1(\alpha) + \cdots + \mathbf{k}_0 f_i(\alpha) = \mathbf{k}_0 \tilde{f}_1(\alpha) + \cdots + \mathbf{k}_0 \tilde{f}_i(\alpha) \ .$$

Démonstration. Soit $\beta \in \mathbf{k}_0$ tel que $\mathrm{ord}_\beta \det(A(z)) > 0$, nous allons construire un nouveau système dont le déterminant de la matrice sera égal à $\det(A(z)) \frac{z^q - \beta}{z - \beta}$. Comme $\det(A(\beta)) = 0$, il existe au moins une relation non triviale entre les lignes de cette matrice. Soit j le plus petit entier dans $\{1, \ldots, N\}$ tel que les j premières lignes de $A(\beta)$ soient liées et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_j \in \mathbf{k}_0$, $\lambda_j = 1$, les coefficients d'une relation entre ces lignes :

$\sum_{k=1}^{j} \lambda_k a_{k,h}(\beta) = 0$, pour tout $h = 1, \ldots, N$. On pose $S(z)$ la matrice dont toutes les lignes coïncident avec la matrice identité $N \times N$, sauf la j-ième qui s'écrit

$$\Big(\frac{\lambda_1}{z-\beta}, \ldots, \frac{\lambda_j}{z-\beta}, 0, \ldots, 0\Big) \ .$$

Cette matrice $S(z)$ est triangulaire inférieure de déterminant $\frac{1}{z-\beta}$. On vérifie que le produit $S(z)A(z)S(z^q)^{-1}$ est à coefficients dans $\mathbf{k}_0[z]$, car $z-\beta$ divise tous les polynômes $\sum_{k=1}^{j} \lambda_k a_{k,h}(z)$, $h = 1, \ldots, N$. Son déterminant est égal à $\det(A(z))\frac{z^q-\beta}{z-\beta}$. De plus, $S(z)\boldsymbol{f}(z)$ est solution du système d'équations fonctionnelles associé à $S(z)A(z)S(z^q)^{-1}$ et a les mêmes composantes que $\boldsymbol{f}(z)$ sauf la j-ième qui s'écrit $\sum_{k=1}^{j} \lambda_k f_k(z)/(z-\beta) \in \mathbf{k}_0[[z]]$. Soit $\alpha \in \mathbf{k}_0$, $0 < |\alpha| < 1$, si $\beta \neq \alpha$ ou $j > \ell$ le bloc des coefficients d'indices $\leq \ell$ de $S(\alpha)$ est une matrice $\ell \times \ell$ triangulaire inférieure inversible à coefficients dans $\mathbf{k}_0$, ce qui assure que pour tout $i = 1, \ldots, \ell$ les $\mathbf{k}_0$-espaces vectoriels engendrés par les i premières composantes de $S(\alpha)\boldsymbol{f}(\alpha)$ d'une part et de $\boldsymbol{f}(\alpha)$ d'autre part, coïncident.

Soit maintenant $\alpha \in \mathbf{k}_0$ comme dans l'énoncé et $m \in \mathbf{N}$ le plus grand entier tel que α^{q^m} soit racine de $\det(A(z))$ (si m n'existe pas l'énoncé est clair avec $\tilde{A}(z) = A(z)$ et $\tilde{\boldsymbol{f}}(z) = \boldsymbol{f}(z)$). Définissons une suite d'entiers $n_0, \ldots, n_m$ de la façon suivante : $n_m = \mathrm{ord}_{\alpha^{q^m}} \det(A(z))$, puis $n_i = n_{i+1} + \mathrm{ord}_{\alpha^{q^i}} \det(A(z))$, pour $i = m-1, \ldots, 0$. Appliquant la construction précédente n_m fois avec $\beta = \alpha^{q^m}$, puis n_{m-1} fois avec $\beta = \alpha^{q^{n_{m-1}}}$ fois et ainsi de suite jusqu'à n_0 fois avec $\beta = \alpha$, on obtient une matrice $\tilde{S}(z)$ triangulaire inférieure (produit de toutes les matrices introduites successivement au cours de la procédure) telle que la matrice $\tilde{A}(z) = \tilde{S}(z)A(z)\tilde{S}(z)^{-1}$ soit à coefficients dans $\mathbf{k}_0[z]$, de déterminant ne s'annulant pas en α^{q^h}, $h \in \mathbf{N}$, et un vecteur solution $\tilde{\boldsymbol{f}}(z) = \tilde{S}(z)\boldsymbol{f}(z) \in \mathbf{k}_0[[z]]$. On observe qu'à chaque pas le nombre de zéros du déterminant (comptés avec multiplicité) dans $\{\alpha^{q^h}, h \in \mathbf{N}\}$ est fini et n'augmente pas, tandis que le nombre de zéros dans ce même ensemble, de valeur absolue minimale, diminue strictement. On remarque aussi que lorsqu'on applique la construction expliquée ci-dessus avec $\beta = \alpha$, l'hypothèse d'indépendance linéaire sur $\mathbf{k}_0$ des valeurs en α des ℓ première composantes du vecteur solution assure que les ℓ premières lignes de la matrice du système sont indépendantes et donc $j > \ell$. Ceci entraîne que, pour $i = 1, \ldots, \ell$, les $\mathbf{k}_0$-espaces vectoriels engendrés par les i premières composantes de $\tilde{\boldsymbol{f}}(\alpha) = \tilde{S}(\alpha)\boldsymbol{f}(\alpha)$ d'une part et de $\boldsymbol{f}(\alpha)$ d'autre part, coïncident. □

L'énoncé suivant établit le théorème 1.5 de l'introduction dans toute sa généralité, en combinant la réduction du lemme 5.12 et le corollaire 5.10.

Corollaire 5.13. *Sous les hypothèses du théorème 1.5 la matrice $A(z)$ est à coefficients dans $\mathbf{k}_0[z]$. Alors, si les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_\ell(\alpha)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}_0$, ils sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbf{Q}}$.*

Démonstration. Les hypothèses du théorème 1.5 valident celles des corollaire 5.10 et lemme 5.12. Le lemme 5.12 fournit un système d'équations fonctionnelles dont α n'est pas singularité et un vecteur solution $\tilde{\boldsymbol{f}}(z)$ dont les

valeurs en α des ℓ premières composantes sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{k}_0$, car

$$\mathbf{k}_0\tilde{f}_1(\alpha)+\cdots+\mathbf{k}_0\tilde{f}_\ell(\alpha)=\mathbf{k}_0 f_1(\alpha)+\cdots+\mathbf{k}_0 f_\ell(\alpha) \tag{5.14}$$

ont même dimension ℓ sur $\mathbf{k}_0$. En particulier, le vecteur $\tilde{\boldsymbol{f}}(\alpha)$ satisfait les hypothèses du corollaire 5.10 et on en conclut que $\overline{\mathbf{Q}}\tilde{f}_1(\alpha)+\cdots+\overline{\mathbf{Q}}\tilde{f}_\ell(\alpha)$ a dimension ℓ sur $\overline{\mathbf{Q}}$, d'où le résultat car il suit de (5.14)

$$\overline{\mathbf{Q}}\tilde{f}_1(\alpha)+\cdots+\overline{\mathbf{Q}}\tilde{f}_\ell(\alpha)=\overline{\mathbf{Q}}f_1(\alpha)+\cdots+\overline{\mathbf{Q}}f_\ell(\alpha)\ .$$

□

6. Convergence

Nous montrons qu'il existe une matrice fondamentale de solutions de (1.2) à coefficients séries en z si et seulement si $A(0)=\mathrm{Id}$. Et que dans ce cas, toute matrice de solutions est méromorphe dans le disque unité et l'une d'entre elles satisfait $U(0)=\mathrm{Id}$.

Commençons par un lemme sur les solutions de (1.2) à composantes séries formelles de Laurent, *i.e.* dans $\mathbf{C}((z))$. Soit S l'ensemble des pôles des coefficients de $A(z)$ distincts de 0, comptés avec multiplicité, et $m(q-1)$ le plus petit multiple de $q-1$ majorant les multiplicités des pôles des coefficients de $A(z)$ en 0, on pose $\Delta_A(z)=z^{m(q-1)}\prod_{\xi\in S}(1-\xi^{-1}z)$.

Lemme 6.1. *Soit $\boldsymbol{f}(z)\in\mathbf{C}((z))^N$ satisfaisant* (1.2)*, alors les composantes de $\boldsymbol{f}(z)$ définissent des fonctions méromorphes dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$, ayant pour dénominateur commun dans ce disque privé de l'origine la fonction analytique définie par le produit $\prod_{\xi\in S,\ell\in\mathbf{N}}(1-\xi^{-1}z^{q^\ell})$.*

Démonstration. Montrons d'abord le résultat lorsque $A(z)$ est à coefficients dans $\mathbf{C}[z]$. Écrivons $\boldsymbol{f}(z)=\sum_{h\geq -n}\boldsymbol{c}_h z^h$ avec $\boldsymbol{c}_h\in\mathbf{C}^N$, $n\in\mathbf{N}$, et $A(z)=\sum_{j=0}^d A_j z^j$ avec A_j matrice $N\times N$ à coefficients dans $\mathbf{C}$. Notons M_h le maximum des normes L^1 des vecteurs $\boldsymbol{c}_{-n},\dots,\boldsymbol{c}_h$. On déduit du système (1.2) les équations

$$\boldsymbol{c}_h=\sum_{\substack{0\leq j\leq\min(h+n,d)\\ j\equiv h(q)}}A_j\boldsymbol{c}_{(h-j)/q}\ .$$

De sorte que $M_h\leq\|A\|M_{[h/q]}$ où $\|A\|$ désigne la somme des normes L^1 des lignes des matrices $A_0,\dots,A_d$. Ainsi a-t-on

$$M_h\leq\|A\|^{[\log(h)/\log(q)]}M_{q-1}\leq h^{\log\|A\|/\log(q)}M_{q-1}$$

pour tout $h\geq q$, ce qui entraîne que les séries composantes de $\boldsymbol{f}(z)$ convergent dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$ (éventuellement privé de l'origine si $n>0$).

Dans le cas général, on applique ce qui précède aux deux systèmes d'équations fonctionnelles associés aux matrices $\Delta_A(z)$ et $\Delta_A(z)A(z)$ à coefficients dans $\mathbf{C}[z]$. Une solution du premier système est donnée par le produit $\delta(z)=z^{-m}\prod_{\xi\in S,\ell\in\mathbf{N}}(1-\xi^{-1}z^{q^\ell})$ qui se développe en un élément de $\mathbf{C}((z))$. La seconde équation a pour solution $\delta(z)\boldsymbol{f}(z)$ qui est également à coefficients dans $\mathbf{C}((z))$. Par la première partie de la preuve, toutes ces séries convergent

dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$ privé de l'origine. En l'origine elles définissent des fonctions méromorphes et on conclut que le quotient $\boldsymbol{f}(z) = \delta(z)\boldsymbol{f}(z)/\delta(z)$ est un vecteur à composantes méromorphes dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$. De plus, $\boldsymbol{f}(z)\prod_{\xi\in S,\ell\in\mathbf{N}}(1-\xi^{-1}z^{q^\ell}) = z^m\delta(z)\boldsymbol{f}(z)$ est analytique dans le disque unité sans bord privé de l'origine. □

Proposition 6.2. *Soit $\mathcal{O}$ un sous-anneau de $\mathbf{C}$ et $A(z)$ une matrice à coefficients dans $\mathbf{C}(z)$ satisfaisant $A(0) = \mathrm{Id}$, telle que $\Delta_A(z) \in \mathcal{O}[z]$ et $\Delta_A(z)A(z)$ soit à coefficients dans $\mathcal{O}[z]$. Alors le produit infini*

$$A(z)A(z^q)\dots A(z^{q^\ell})\dots$$

converge z-adiquement vers une matrice $U(z)$ à coefficients dans $\mathcal{O}[[z]]$, méromorphes dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$. De plus, $U(z)$ satisfait $U(0) = \mathrm{Id}$ et le système d'équations fonctionnelles (1.2).

Un dénominateur commun des coefficients de $U(z)$ est la fonction, analytique dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$, $\prod_{\xi\in S,\ell\in\mathbf{N}}(1-\xi^{-1}z^{q^\ell})$.

Nota Bene. La convergence z-adique du produit infini est à comprendre après développement des coefficients de la matrice $A(z)$ en séries de $\mathcal{O}[[z]]$, lorsque ceux-ci ne sont pas des polynômes.

Démonstration. Appelons $A^{(\ell)}(z)$ la matrice obtenue en tronquant le produit infini à l'exposant $q^{\ell-1}$. Comme $A(0) = \mathrm{Id}$, on vérifie que les coefficients dans $\mathcal{O}[[z]]$ des matrices $A^{(\ell')}(z)$ pour $\ell' \geq \ell$ coïncident modulo z^{q^ℓ}, ce qui montre que le produit converge bien z-adiquement vers une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}[[z]]$.

La méromorphie des coefficients de $U(z)$ dans le disque unité sans bord de $\mathbf{C}$ suit alors du lemme 6.1. Et, de par sa définition, il est clair que la matrice $U(z)$ satisfait $U(0) = \mathrm{Id}$ et le système d'équations fonctionnelles $U(z) = A(z)U(z^q)$. □

Corollaire 6.3. *Supposons que 0 n'est pas pôle du déterminant de $A(z)$ et soit $\mathcal{O}$ le sous-anneau de $\mathbf{C}$ engendré par les coefficients de $\Delta_A(z)$ et des coefficients de $\Delta_A(z)A(z)$.*

Il existe une matrice fondamentale de solutions $U(z)$ de (1.2) *dont les coefficients sont analytiques dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}$ si et seulement si $A(0) = \mathrm{Id}$.*

De plus, dans ce cas les coefficients de $U(z)$ sont méromorphes dans le disque unité sans bord. La matrice $U(z)$ est unique à multiplication à droite par une matrice à coefficients dans $\mathbf{C}$ près, qui peut être choisie de sorte que $U(0) = \mathrm{Id}$ et $U(z)$ soit à coefficients dans $\mathcal{O}[[z]]$. Un dénominateur commun dans $\mathcal{O}[[z]]$ des coefficients de $U(z)$ est $\prod_{\xi\in S,\ell\in\mathbf{N}}(1-\xi^{-1}z^{q^\ell})$.

Démonstration. Dans une direction, si $A(0) = \mathrm{Id}$ l'énoncé suit de la proposition 6.2, car la proposition 2.2 montre que les matrices fondamentales de solutions se déduisent l'une de l'autre par multiplication à droite par une matrice inversible à coefficients dans $\mathbf{C}$.

Dans l'autre direction, l'équation (1.2) entraîne

$$\det(U(z)) = \det(A(z)) \cdot \det(U(z^q)) \tag{6.4}$$

qui montre

$$0 = \mathrm{ord}_0(\det(A(z))) + (q-1).\mathrm{ord}_0(\det(U(z))) \ , \tag{6.5}$$

car $\mathrm{ord}_0(\det(U(z^q))) = q.\mathrm{ord}_0(\det(U(z)))$. Supposons que (1.2) a une matrice fondamentale de solutions à coefficients dans $\mathbf{C}[[z]]$, analytique dans un voisinage de l'origine. Alors, comme on a $q \geq 2$, $\det(U(z)) \in \mathbf{C}[[z]]$ et $\mathrm{ord}_0(\det(A(z))) \geq 0$, (6.5) implique

$$\mathrm{ord}_0(\det(A(z))) = \mathrm{ord}_0(\det(U(z))) = 0 \ .$$

Ainsi la matrice $U(0)$ est inversible et il en est de même de $U(z)$ pour tout z suffisamment proche de 0. L'identité $A(z) = U(z)U(z^q)^{-1}$ entraîne $A(0) = U(0)U(0)^{-1} = \mathrm{Id}$. Le reste de l'énoncé découle à nouveau de la proposition 6.2. □

Je remercie Daniel Bertrand pour son aide *via* de nombreuses discussions sur la théorie de Galois des équations fonctionnelles. Je remercie également Boris Adamczewski pour m'avoir fait part de son travail [2] avec Colin Faverjon et l'arbitre pour ses suggestions.

Références

[1] B.Adamczewski & Y.Bugeaud – On the complexity of algebraic numbers I. Expansion in integer bases, *Ann. of Math.* 165 (2007), 547-565.

[2] B.Adamczewski & C.Faverjon – Transcendance et applications aux nombres automatiques, *Communication personnelle.* Téléchargeable de arxiv:1508.07158 (2015).

[3] J-P.Allouche & J.Shallit – *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*, Cambridge Univ. Press (2003).

[4] Y.André – Séries Gevrey de type arithmétique I & II, *Ann. of Math.* 151 (2000), 705-740 & 741-756.

[5] Y.André – Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties : a new differential Galois correspondence. *Ann. Sci. École Norm Sup.* 47(2) (2014), 449-467.

[6] P-G.Becker – k-regular power series and Mahler type functional equations, *J. Number Theory* 49 (1994), 269-286.

[7] F.Beukers – A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem, *Ann. of Math.* 163 (2006), 369-379.

[8] D.Eisenbud – *Commutative algebra, with a view towards algebraic geometry*, Graduate. Text Math. 150, Springer Verlag (1995).

[9] A.Grothendieck – Éléments de géométrie algébrique IV, *Publ. Math. Inst. Haute Études Sci.* 20 & 28 (1964 & 1966), 222-259 & 5-255.

[10] K.Krull – Parameterspezialisierung in Polynomringen II. Das Grundpolynom, *Arch. Math.* 1 (1948), 129-137.

[11] Y.V.Nesterenko & A.B.Shidlovskii – Linear independence of values of E-functions, *Sb. Math.* 187 (1996), 1197-1211 ; translated from *Mat. Sb.* 187 (1996), 93-108.

[12] P.Nguyen Phu Qui – Équations de Mahler et hypertranscendance, *Thèse* Univ. P. et M. Curie, Paris (Juillet 2012).

[13] K.Nishioka – *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Math. 1631, Springer Verlag (1996).

[14] P.Philippon – *Some aspects of Mahler's method*, Cours à IMSc, Madras (Février 2011) et à TIFR, Bombay (Novembre 2014).

[15] M.van der Put & M.F.Singer – *Galois theory of difference equations*, Lecture Notes in Math. 1666, Springer Verlag (1997).

[16] A. Rényi – Representations for real numbers and their ergodic properties, *Acta Math. Sci. Hungar.* 8 (1957), 477–493.

[17] O.Zariski & P.Samuel – *Commutative algebra II*, Graduate Texts in Math. 29, Springer Verlag (1960).

[18] E.Zorin – Lemmes de zéros et relations fonctionnelles, *Thèse*, Univ. Pierre et Marie Curie (2010). Téléchargeable de http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00558073/fr/

Institut de Mathématiques de Jussieu – U.M.R. 7586 du CNRS, Équipe de Théorie des Nombres. BP 247, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France.

E-mail address: `patrice.philippon@imj-prg.fr`

URL: `http://www.math.jussieu.fr/~pph`