

# Concavité de la branche d'excitation collective d'un gaz de fermions dans la zone de raccordement CBE-BCS

H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra

*Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités et Collège de France, Paris, France*

Nous étudions la concavité de la relation de dispersion  $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$  des excitations bosoniques d'un gaz tridimensionnel de fermions de spin 1/2 telle que décrite par l'Approximation de la Phase Aléatoire (RPA). Dans la limite des faibles nombres d'onde  $q$  nous obtenons le spectre analytiquement jusqu'à l'ordre 5 en  $q$ . Au voisinage de  $q = 0$ , un changement de concavité entre une branche concave dans la limite BCS et convexe dans la limite CBE se produit en  $\Delta/\mu \simeq 0,869$  ( $1/(k_F a) \simeq -0,144$ ), où  $a$  est la longueur de diffusion entre fermions de spins opposés,  $k_F$  le nombre d'onde de Fermi et  $\Delta$  le *gap* d'après la théorie BCS, et  $\mu$  le potentiel chimique. En ce point, la branche est concave du fait d'un terme d'ordre 5 négatif. Ces résultats sont complétés par une étude numérique qui montre l'évolution dans tout le plan  $(q, \Delta)$  de la frontière entre la zone où  $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$  est concave et celle où  $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$  est convexe.

PACS numbers: 03.75.Kk, 67.85.Lm, 47.37.+q

## I. INTRODUCTION

Les gaz d'atomes froids permettent d'explorer le problème à  $N$  corps avec une grande flexibilité dans le choix de ses paramètres microscopiques. En particulier, dans les gaz de fermions de spin 1/2, on peut ajuster expérimentalement la force des interactions entre les particules grâce à des résonances de Feshbach. Cette liberté, unique dans les systèmes fermioniques, a permis aux expériences d'atomes froids [1–9] d'étudier comment l'on passe continûment d'un superfluide de paires de Cooper dans le régime dit de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) à un superfluide de dimères quasi-bosoniques dans le régime de Condensation de Bose-Einstein (CBE). L'autre avantage des gaz d'atomes froids est de permettre une description théorique simple des interactions, qui ont lieu dans un régime dilué et de basse énergie. Pour un gaz de fermions dans deux états de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$ , on montre ainsi que les seules interactions significatives à basse température et faible densité ont lieu dans l'onde  $s$ , entre fermions de spins opposés, et se caractérisent par un unique paramètre appelé longueur de diffusion et noté  $a$ . Ce cadre théorique avantageux autorise des études entièrement analytiques de propriétés expérimentalement accessibles du gaz en interaction, dans lesquelles cet article s'inscrit.

À température nulle, notre gaz tridimensionnel de fermions spatialement homogène non polarisé est entièrement apparié, et son spectre d'excitation se compose de deux branches : une branche fermionique d'excitation des degrés de liberté internes des paires de fermions  $\uparrow\downarrow$  et une branche bosonique d'excitation de leur centre de masse, branche qui devient phononique dans la limite des grandes longueurs d'onde. Cette dernière branche est aussi dite collective car elle met en jeu un grand nombre de modes fermioniques d'excitation interne des paires. La branche fermionique est décrite à l'ordre le plus bas par la théorie BCS; la branche bosonique, elle, est abordée par différentes approches :

l'Approximation de la Phase Aléatoire (Random Phase Approximation, RPA) d'Anderson [10], une approximation gaussienne de l'action dans un cadre d'intégrale de chemin [11, 12], une approche par les fonctions de Green associée à une approximation diagrammatique [13], et une linéarisation des équations variationnelles BCS dépendant du temps [14]. Ces différentes théories, toutes approchées, convergent pour donner le même spectre d'excitation bosonique, décrit par la même équation implicite.

La concavité de ce spectre a été étudiée dans la limite BCS [11] et de manière qualitative dans la zone de raccordement CBE-BCS [13, 15, 16]. Il manque donc une étude quantitative exhaustive, et c'est ce qui fait l'objet de cet article. En particulier, nous obtenons analytiquement le spectre jusqu'à l'ordre 5 en le nombre d'onde  $q$  du centre de masse des paires et nous en déduisons la concavité de la branche d'excitation sur un voisinage de  $q = 0$  dans toute la zone de raccordement CBE-BCS.

L'intérêt physique de notre étude est de déterminer quels processus d'amortissement des modes collectifs dominant à basse température. Si la branche est convexe sur un voisinage de  $q = 0$  alors ce sont les processus d'interaction entre phonons 2 phonons  $\leftrightarrow$  1 phonon de Beliaev-Landau [17, 18] qui dominent, tandis que si elle est concave ce sont les processus 2 phonons  $\leftrightarrow$  2 phonons de Landau-Khalatnikov [19]. En effet, on montre à partir de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement des trois excitations mises en jeu que les processus Beliaev-Landau sont interdits pour une branche d'excitation concave. À basse température, la branche fermionique, dont le spectre possède une bande interdite, ne participe pas à l'amortissement des modes collectifs, sa contribution étant exponentiellement réduite [20]. En outre, la connaissance quantitative du paramètre de concavité  $\gamma$  permet de prédire le taux d'amortissement des phonons par les processus 2 phonons  $\leftrightarrow$  1 phonon dans le cas convexe au-delà de l'hydrodynamique quantique [16], ou 2 phonons  $\leftrightarrow$  2 phonons dans le cas concave où l'interaction effective prédite par l'hydrodynamique

quantique fait intervenir des processus 2 phonons  $\leftrightarrow$  1 phonon virtuels et dépend de  $\gamma$  [19]. La connaissance de  $\gamma$  donne enfin accès au coefficient de diffusion de la phase du condensat de paires, processus fondamental qui limite le temps de cohérence intrinsèque du gaz [14].

## II. ÉQUATION DE LA RPA SUR LE SPECTRE D'EXCITATION

L'équation de la RPA donnant implicitement l'énergie  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$  des excitations collectives en fonction du vecteur

d'onde  $\mathbf{q}$  s'écrit :

$$I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = \hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 [I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)]^2. \quad (1)$$

Les quantités  $I_{\sigma\sigma'}$  traduisent le caractère collectif des modes bosoniques; ce sont des intégrales sur le vecteur d'onde relatif  $\mathbf{k}$  des paires, fonctions de  $\omega_{\mathbf{q}}^2$  via le dénominateur de leur intégrande :

$$I_{++}(\omega, q) = \int d^3k \left[ \frac{(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})(U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})^2}{\hbar^2\omega^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \quad (2)$$

$$I_{--}(\omega, q) = \int d^3k \left[ \frac{(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})(U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})^2}{\hbar^2\omega^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \quad (3)$$

$$I_{+-}(\omega, q) = \int d^3k \frac{(U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})(U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} - V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})}{\hbar^2\omega^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})^2}. \quad (4)$$

Nous avons introduit ici les amplitudes  $U_{\mathbf{k}}$  et  $V_{\mathbf{k}}$  et les énergies propres  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  des modes propres de la théorie BCS [21] :

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2} \quad (5)$$

$$U_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)} \quad (6)$$

$$V_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)} \quad (7)$$

où  $m$  est la masse d'un fermion. Les deux paramètres naturels de la théorie BCS, qui nous serviront aussi à exprimer l'énergie  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ , sont le potentiel chimique  $\mu$  du gaz, commun aux deux états de spin, et le *gap*  $\Delta$ , largeur de la bande interdite dans le spectre BCS des excitations fermioniques lorsque  $\mu$  est positif. Ils peuvent à loisir être échangés avec la longueur de diffusion  $a$  et la densité totale du gaz  $\rho$  en inversant les deux relations [22, 23] :

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2a} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \frac{m}{\hbar^2k^2} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) \quad (8)$$

$$\rho = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2|V_{\mathbf{k}}|^2. \quad (9)$$

En pratique, plutôt que la densité, on utilise souvent le nombre d'onde de Fermi  $k_F$  défini par  $\rho = k_F^3/(6\pi^2)$ .

## III. ÉTUDE NUMÉRIQUE GLOBALE DE LA CONCAVITÉ

La figure 1 synthétise les résultats sur la concavité de la branche bosonique obtenus par résolution numérique de l'équation de dispersion (1). Plusieurs domaines se dégagent en fonction de la valeur de  $\Delta/\mu$ , ou s'il on préfère, de  $1/(k_F a)$ . (i) Lorsque la longueur de diffusion est négative  $a < 0$ , autrement dit pour  $\Delta/\mu < 1,162$  (pointillé inférieur), le domaine d'existence des solutions de l'équation (1) en fonction de  $q$  est compact et simplement connexe [13], de la forme  $[0, q_{\text{sup}}]$ . La relation de dispersion est entièrement concave pour  $\Delta/\mu < 0,869$ , puis, lorsque  $0,869 < \Delta/\mu < 1,162$ , elle est d'abord convexe aux faibles  $q$  puis concave. Entre ces deux zones elle présente donc un point d'inflexion dont nous calculons analytiquement la position  $q_{\text{infl}}(\Delta/\mu)$  aux faibles  $q$  (voir le tireté et l'équation (29) de la section IV). (ii) De l'autre côté de la résonance ( $a > 0$ ), et jusqu'à  $\Delta/\mu = 1,729$  (pointillé supérieur), le domaine d'existence des solutions de l'équation (1) se sépare en deux composantes connexes  $[0, q_{\text{sup}}]$  et  $[q_{\text{inf}}, +\infty[$  [13]. Tandis que la branche est toujours convexe dans la seconde composante  $[q_{\text{inf}}, +\infty[$ , d'intéressantes variations apparaissent dans la première composante  $[0, q_{\text{sup}}]$  : dans le sens des  $q$  croissants, la branche est convexe puis concave pour  $1,162 < \Delta/\mu < 1,22$ , convexe puis concave puis à nouveau convexe pour  $1,22 < \Delta/\mu < 1,710$  et enfin entièrement convexe pour  $1,710 < \Delta/\mu < 1,729$ . (iii) Lorsque  $\Delta/\mu$  est supérieur à 1,729, ou est négatif, les deux composantes du domaine d'existence se rejoignent, si bien qu'une solution à l'équation (1) existe pour tout

$q$  [13]. La branche est alors entièrement convexe.

Toutes ces valeurs numériques sont prédites par la RPA ou la théorie BCS, donc sont approchées. La valeur de  $\Delta/\mu$  à la limite unitaire est la seule que l'on puisse à ce jour comparer aux expériences : les résultats expérimentaux  $\Delta \simeq 0,44\hbar^2 k_F^2/(2m)$  [24] et  $\mu \simeq 0,376\hbar^2 k_F^2/(2m)$  [8] conduisent à  $\Delta/\mu \simeq 1,17$ , remarquablement proche de la prédiction de la théorie BCS  $\Delta/\mu \simeq 1,162$ . Rappelons aussi que le spectre de la RPA est issu d'un traitement linéarisé des fluctuations quantiques du champ de paires, qui néglige les interactions entre les quasi-particules bosoniques. Dans la réalité, ces interactions vont donner lieu à un déplacement des énergies propres  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ ; elles vont aussi faire apparaître, même à température nulle, une partie imaginaire dans  $\omega_{\mathbf{q}}$ , décrivant la durée de vie finie des excitations, lorsque la concavité de la relation de dispersion permet d'avoir des processus de Beliaev 1 phonon  $\rightarrow$  2 phonons résonnants [16].

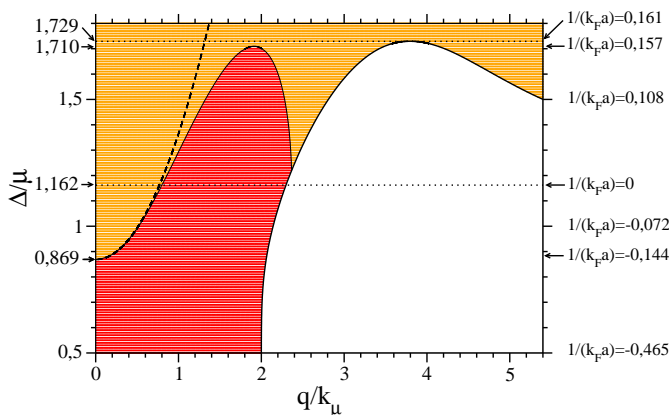


FIGURE 1: Concavité locale de la branche bosonique  $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$  selon les valeurs de  $\Delta/\mu$  et du nombre d'onde  $q$  mesuré en unités de  $k_{\mu} = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$ . Les valeurs de  $1/(k_F a)$  correspondant à celles de  $\Delta/\mu$  sont indiquées sur le bord droit du graphe. Les points rouges correspondent à une branche localement concave, les points orange à une branche localement convexe. La ligne épaisse en trait plein délimite le domaine d'existence des solutions de l'équation de dispersion (1). La ligne tiretée est une prédiction analytique à faible  $q$  (cf. l'équation (29) de la section IV) de la frontière entre les zones rouge et orange, lieu des points d'inflexion de la courbe  $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$  représenté par un trait fin. L'ordonnée  $\Delta/\mu = 0,869$  du point où cette ligne rejoint l'axe  $q = 0$  et l'ordonnée  $\Delta/\mu = 1,710$  au-delà de laquelle la zone de concavité disparaît sont indiquées par des flèches. Enfin les deux lignes pointillées, dont les ordonnées sont elles aussi indiquées par des flèches, encadrent l'intervalle des valeurs de  $\Delta/\mu$  ou  $1/(k_F a)$  sur lequel le domaine d'existence en  $q$  de la solution de l'équation (1) n'est pas simplement connexe. La ligne pointillée inférieure correspond à la limite unitaire, où la longueur de diffusion diverge  $|a| \rightarrow +\infty$ .

#### IV. ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA CONCAVITÉ DANS LA LIMITE DES GRANDES LONGUEURS D'ONDE

La relation de dispersion peut être obtenue analytiquement dans la limite des grandes longueurs d'onde  $q \rightarrow 0$ . Pour cela nous développons l'énergie propre du mode collectif jusqu'à l'ordre 5 en  $q$  :

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} \underset{q \rightarrow 0}{=} \hbar c q \left[ 1 + \frac{\gamma}{8} \left( \frac{\hbar q}{mc} \right)^2 + \frac{\eta}{16} \left( \frac{\hbar q}{mc} \right)^4 + O \left( \frac{\hbar q}{mc} \right)^6 \right]. \quad (10)$$

À l'ordre le plus bas, comme pour tout système superfluide, l'énergie est phononique avec une vitesse du son  $c$  donnée par la formule hydrodynamique

$$mc^2 = \rho \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_a, \quad (11)$$

où la dérivée est prise à longueur de diffusion  $a$  fixée comme le suggère la notation. Appliquée à l'équation d'état approchée (9), l'expression hydrodynamique (11) permet d'obtenir la vitesse du son prédite par la RPA, comme l'a établi la référence [13] par développement de la solution  $\omega_{\mathbf{q}}$  de l'équation (10) au premier ordre en  $q$ . Nous en proposons ici une expression explicite sous forme d'une fraction rationnelle

$$\frac{mc^2}{\mu} = \frac{2(xy + 1)}{3(y^2 + 1)}, \quad (12)$$

en les variables

$$x = \frac{\Delta}{\mu} \quad \text{et} \quad y = \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \right)_a. \quad (13)$$

La variable  $y$  s'exprime à son tour en fonction de  $x$  grâce à la relation

$$y = \frac{\int d^3 k \frac{\hbar^2 k^2 / (2m) - \mu}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}}{\int d^3 k \frac{\Delta}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}} = \frac{\int_0^{+\infty} du \frac{u^2 (u^2 - x^{-1})}{[(u^2 - x^{-1})^2 + 1]^{3/2}}}{\int_0^{+\infty} du \frac{u^2}{[(u^2 - x^{-1})^2 + 1]^{3/2}}} \quad (14)$$

qui s'obtient en dérivant l'équation (8) par rapport à  $\mu$  à longueur de diffusion  $a$  fixée et en exprimant les vecteurs d'onde en unités de  $k_{\Delta} = (2m\Delta)^{1/2}/\hbar$  pour faire apparaître la variable d'intégration  $u$  sans dimension. Les intégrales apparaissant au numérateur et au dénominateur du troisième membre de (14) peuvent s'exprimer en termes d'intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce [11]. Notons qu'à la limite unitaire  $y = x$ , puisque  $\Delta$  et  $\mu$  sont proportionnels par invariance d'échelle.

Pour obtenir l'expression (12) de la vitesse du son adimensionnée, nous dérivons l'équation d'état (9) par rapport à  $\mu$  à  $a$  fixé et exprimons toutes les intégrales utiles en fonction de  $x$  et  $y$  à l'aide de (14) et de la relation

$$\frac{\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\Delta^3}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}}{\rho} = \frac{\int_0^{+\infty} du \frac{u^2}{[(u^2 - x^{-1})^2 + 1]^{3/2}}}{\int_0^{+\infty} du u^2 \left( 1 - \frac{u^2 - x^{-1}}{[(u^2 - x^{-1})^2 + 1]^{1/2}} \right)} = \frac{3x/2}{1 + xy}, \quad (15)$$

qui se démontre en intégrant par parties le dénominateur du second membre,  $u^2$  étant la fonction à intégrer.

Pour obtenir les coefficients sans dimension  $\gamma$  et  $\eta$  des ordres supérieurs en  $q$  de  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$  dans l'équation (10), on ne peut s'appuyer sur des expressions thermodynamiques connues et on n'échappe donc pas au développement laborieux de l'équation (1) en puissances de  $q$ . Le résultat peut s'écrire tout de même sous la forme de fractions rationnelles en  $x$  et  $y$  :

$$\gamma = \frac{\sum_{i=0}^4 P_i(y)x^i}{135x^2(x^2+1)(y^2+1)^3} \quad (16)$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^8 Q_i(y)x^i}{1020600(y^2+1)^6 x^4(x^2+1)^2}. \quad (17)$$

Les polynômes  $P_i(y)$  et  $Q_i(y)$  qui apparaissent aux numérateurs ordonnés par puissances croissantes de  $x$  des expressions de  $\gamma$  et de  $\eta$  valent :

$$\begin{aligned} P_0(y) &= -4(13y^4 + 16y^2 + 8) \\ P_1(y) &= 4y(13y^4 + 41y^2 + 8) \\ P_2(y) &= 50y^6 - 21y^4 - 252y^2 - 61 \\ P_3(y) &= 2y(y^4 + 32y^2 + 71) \\ P_4(y) &= 35y^6 + 56y^4 - 13y^2 - 54 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Q_0(y) &= 16(7745y^8 + 19528y^6 + 20304y^4 + 8384y^2 + 1088) \\ Q_1(y) &= 32y(2857y^8 + 67y^6 - 3186y^4 - 7920y^2 - 2624) \\ Q_2(y) &= -8(12882y^{10} + 28061y^8 - 26936y^6 + 7221y^4 - 24496y^2 - 5232) \\ Q_3(y) &= -8y(8456y^{10} - 9859y^8 + 9977y^6 + 145295y^4 + 3523y^2 + 23720) \\ Q_4(y) &= -17500y^{12} - 247996y^{10} - 1249743y^8 - 1341332y^6 + 337202y^4 - 694392y^2 + 18321 \\ Q_5(y) &= -4y(25564y^{10} + 36027y^8 - 66984y^6 + 92206y^4 + 387932y^2 - 56121) \\ Q_6(y) &= -2(12250y^{12} + 115637y^{10} + 558246y^8 + 1071518y^6 + 589478y^4 - 248499y^2 + 53082) \\ Q_7(y) &= -4y(12957y^{10} + 33764y^8 - 41904y^6 - 173106y^4 - 96189y^2 + 53406) \\ Q_8(y) &= -8575y^{12} - 44544y^{10} - 149742y^8 - 360644y^6 - 477615y^4 - 270756y^2 - 20412. \end{aligned} \quad (19)$$

Nous avons obtenu les expressions analytiques (16) et (17) par développement limité des intégrales  $I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$ ,  $I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$  et  $I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$  après remplacement de  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$  par le développement (10). Nous réutilisons à chaque ordre les résultats des ordres inférieurs : la valeur (12) de  $c$  pour obtenir  $\gamma$ , puis celles de  $c$  et de  $\gamma$  (16) pour obtenir  $\eta$ . Au cours du calcul, nous rencontrons des intégrales avec des puissances élevées de  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  (ou  $[(u^2 - x^{-1})^2 + 1]^{1/2}$  après adimensionnement) au dénominateur ; leur calcul par intégrations par partie répétées est expliqué dans l'annexe A.

Nous représentons sur la figure 2 les coefficients  $\gamma$  et  $\eta$  en fonction de  $1/(k_F a)$ , variable que nous avons préférée ici à  $\Delta/\mu$ . Commentons brièvement leurs comportements asymptotiques dans les limites CBE  $1/(k_F a) \rightarrow +\infty$  et BCS  $1/(k_F a) \rightarrow -\infty$  ainsi que leurs valeurs remarquables dans les régimes intermédiaires.

*a. Limite CBE* Dans la limite CBE,  $k_F a \rightarrow 0^+$ , le système est assimilable à un gaz de bosons de masse  $2m$  en interaction faible, de potentiel chimique

$$\mu_B = 2\mu - E_{\text{dim}}, \quad (20)$$

où  $E_{\text{dim}} = -\hbar^2/(ma^2)$  est l'énergie interne d'un dimère [25, 26]. On sait alors que la relation de dispersion des excitations bosoniques est convexe et se réduit à celle

des excitations de Bogolioubov au potentiel chimique  $\mu_B$  lorsque  $q = o(1/a)$  [13] :

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{\text{Bog}} = \left[ \frac{\hbar^2 q^2}{4m} \left( \frac{\hbar^2 q^2}{4m} + 2\mu_B \right) \right]^{1/2}, \quad (21)$$

auquel cas la vitesse du son est telle que  $2mc^2 = \mu_B$ . Les coefficients  $\gamma$  et  $\eta$  devraient donc admettre les limites suivantes :

$$\gamma \xrightarrow{k_F a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \eta \xrightarrow{k_F a \rightarrow 0^+} -\frac{1}{128}. \quad (22)$$

C'est bien ce que donnent les équations (16) et (17) prises à la limite CBE, c'est-à-dire avec  $x = O(k_F a)^{3/2} \rightarrow 0^-$  [22] et, comme le montre l'équation (14) après le changement de variable  $u = u'/|x|^{1/2}$ , avec  $y \sim -4/x$ .

*b. Limite BCS* Quand  $k_F a \rightarrow 0^-$ , le bord inférieur du continuum à deux excitations fermioniques (à nombre d'onde total  $q < q_{\text{sup}}$  fixé) devient exponentiellement faible et contraint la branche d'excitation bosonique, qui ne peut pénétrer dans ce continuum, à se courber vers le bas [13, 15]. Cette courbure se produit sur une échelle de nombre d'onde  $q_c$  telle que  $\hbar c q_c = \Delta$ , c'est-à-dire telle que le terme dominant dans le développement (10) soit de l'ordre de  $\Delta$ . Physiquement, ceci signifie que les modes

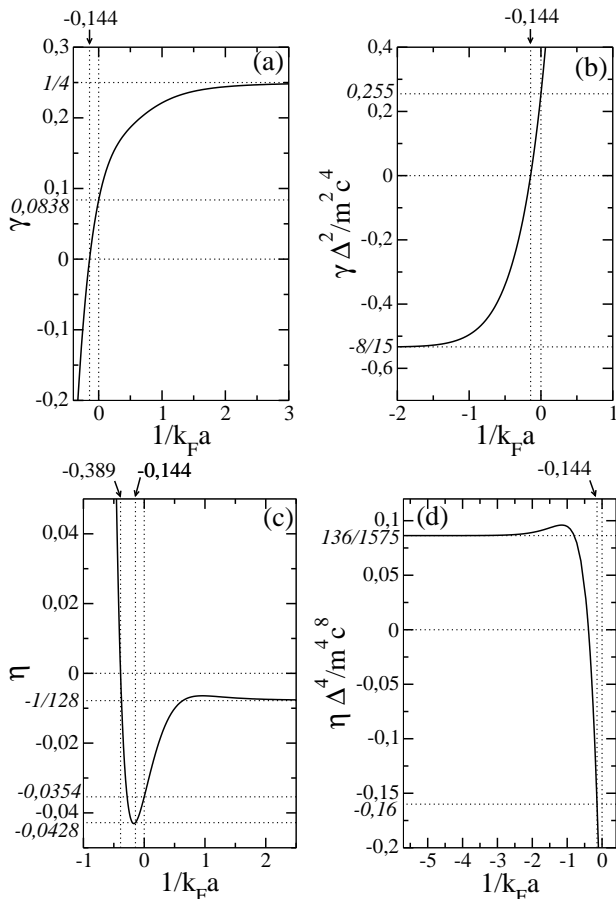


FIGURE 2: Dans l'approximation de la RPA, coefficients adimensionnés  $\gamma$  et  $\eta$  des termes  $q^3$  et  $q^5$  de la relation de dispersion des excitations bosoniques pour  $q \rightarrow 0$ , voir l'équation (10), en fonction de l'inverse  $1/(k_F a)$  de la force des interactions. Dans la limite CBE, ils admettent une limite finie, qui correspond à la relation de dispersion de Bogolioubov, voir les équations (21,22) et les panneaux (a) et (c). Dans la limite BCS, ils divergent; il vaut alors mieux adimensionner le nombre d'onde  $q$  par  $\Delta/(\hbar c)$ , ce qui revient à considérer les quantités  $\gamma\Delta^2/(m^2c^4)$  et  $\eta\Delta^4/(m^4c^8)$ , qui admettent une limite finie, voir les panneaux (b) et (d). Entre ces deux limites,  $\gamma$  et  $\eta$  s'annulent en changeant de signe, respectivement en  $1/(k_F a) \simeq -0,144$  et  $1/(k_F a) \simeq -0,389$ , et ils sont respectivement faiblement positif ( $\gamma \simeq 0,0838$ ) et faiblement négatif ( $\eta \simeq -0,0354$ ) à la limite unitaire. La valeur de  $\eta$  importe particulièrement au point où  $\gamma$  s'annule; en ce point,  $\eta \simeq -0,0428$ , donc la relation de dispersion de la RPA est concave sur un voisinage de  $q = 0$ .

collectifs sont affectés par la structure interne des paires dès que leur longueur d'onde devient de l'ordre de la taille des paires dans l'espace réel  $\approx \hbar^2 k_F / (m\Delta)$  [11], quantité qui est effectivement d'ordre  $1/q_c$  puisque  $c \propto \hbar k_F / m$  dans cette limite.

Ceci explique qualitativement pourquoi la relation de dispersion est concave aux faibles valeurs de  $q$  et de  $\Delta/\mu$  sur la figure 1, et donc pourquoi  $\gamma < 0$  dans la limite BCS. Plus quantitativement, on s'attend à ce que

l'énergie adimensionnée  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}/\Delta$  devienne une fonction universelle de  $q/q_c = \hbar c q / \Delta$  lorsque  $k_F a \rightarrow 0^-$ , auquel cas tous les termes entre crochets dans l'équation (10) sont du même ordre de grandeur en  $q = q_c$ , c'est-à-dire  $|\gamma(\hbar q_c / mc)^2| \approx 1$ ,  $|\eta(\hbar q_c / mc)^4| \approx 1$ . En prenant la limite  $x \rightarrow 0$  et  $y \rightarrow 0$  dans les équations (16) et (17), c'est bien ce que l'on obtient :

$$\gamma_{k_F a \rightarrow 0^-} \sim -\frac{8}{15} \left( \frac{mc^2}{\Delta} \right)^2 \quad \text{et} \quad \eta_{k_F a \rightarrow 0^-} \sim \frac{136}{1575} \left( \frac{mc^2}{\Delta} \right)^4, \quad (23)$$

le premier résultat reproduisant celui de la référence [11].

*c. Régimes intermédiaires* Dans la zone de raccordement entre CBE et BCS,  $\gamma$  est une fonction croissante de  $1/(k_F a)$  et s'annule en changeant de signe pour la valeur  $x_0$  de  $\Delta/\mu$  qui suit :

$$x_0 \simeq 0,868567. \quad (24)$$

Ceci correspond à  $1/(k_F a) \simeq -0,144292$  et confirme le résultat numérique de la figure 1 ainsi que celui de la référence [16]. La RPA prédit donc que la limite unitaire se situe du côté où la relation de dispersion est convexe sur un voisinage de  $q = 0$  :

$$\gamma_{(k_F a)^{-1}=0} \simeq 0,083769 \quad (25)$$

Le coefficient  $\eta$  change lui aussi de signe, pour une valeur  $x_1$  de  $\Delta/\mu$  donnée par

$$x_1 \simeq 0,566411, \quad (26)$$

ce qui correspond à  $1/(k_F a) \simeq -0,389027$ . Il est négatif tant à la limite unitaire

$$\eta_{(k_F a)^{-1}=0} \simeq -0,035416, \quad (27)$$

qu'au point où  $\gamma$  s'annule :

$$\eta(x_0) \simeq -0,042794. \quad (28)$$

En ce point, le signe de  $\eta$  nous importe particulièrement car il détermine la concavité de la relation de dispersion au voisinage de  $q = 0$ .

*d. Lieu des points d'inflexion* Les coefficients  $\gamma$  et  $\eta$  permettent finalement de donner un équivalent aux faibles  $q$  de la frontière entre les zones rouge et orange de la figure 1, autrement dit de l'ensemble des valeurs de  $(q/k_\mu, \Delta/\mu)$  pour lesquelles la dérivée seconde  $d^2\omega_{\mathbf{q}}/dq^2$  s'annule. En prenant pour  $\omega_{\mathbf{q}}$  le développement (10) et en développant les coefficients  $\gamma(x)$  et  $\eta(x)$  autour de  $x = x_0$  respectivement à l'ordre un et à l'ordre zéro en  $x - x_0$ , on obtient l'équation

$$\frac{q_{\text{infl}}^2}{k_\mu^2} \underset{x \rightarrow x_0^+}{\sim} -\frac{3\gamma'(x_0)}{10\eta(x_0)} \frac{mc^2}{\mu} (x - x_0) \simeq 2,015858(x - x_0). \quad (29)$$

Ceci conduit à la courbe noire tiretée de la figure 1, qui rejoint l'axe  $q = 0$  avec une tangente horizontale.

En revanche, la frontière entre les zones rouge et orange de la figure 1 rejoint le bord du domaine d'existence de la branche d'excitation collective avec une tangente oblique car la dérivée troisième de  $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$  au point de contact (où  $q = q_{\text{sup}}$ ) ne s'annule pas, au contraire de ce qui se passe en  $q = 0$ .

## V. CONCLUSION

Pour un gaz spatialement homogène de fermions de spin 1/2 non polarisé et à température nulle, nous avons obtenu l'énergie propre  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$  de la branche d'excitation bosonique prédite par la RPA jusqu'à l'ordre 5 en le nombre d'onde  $q$  au voisinage de  $q = 0$ , avec des coefficients qui sont des fractions rationnelles en  $\Delta/\mu$  et  $(\partial\Delta/\partial\mu)_a$ , la seconde variable pouvant être analytiquement reliée à la première via l'équation d'état de la théorie BCS. Ceci nous permet de montrer analytiquement que la relation de dispersion  $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$  est concave sur un voisinage de  $q = 0$  lorsque  $1/(k_F a)$  est compris entre  $-\infty$  et une valeur proche de  $-0,144$ , point où la première correction à l'énergie phononique est quintique et faiblement négative. Pour  $-0,144 < 1/(k_F a) < 0,157$  la branche est convexe sur voisinage de  $q = 0$  mais redevient concave lorsque  $q$  augmente (et le demeure jusqu'à la valeur maximale accessible de  $q$  si  $1/(k_F a) < 0,022$ , sinon elle redevient convexe). Au-delà de  $1/(k_F a) = 0,157$ , elle est entièrement convexe sur son domaine d'existence.

Nos résultats sur la concavité au voisinage de  $q = 0$  peuvent être testés expérimentalement dans un gaz d'atomes fermioniques froids piégé dans un potentiel à fond plat [27] en mesurant des effets dissipatifs, comme le taux d'amortissement des excitations collectives à basse température, des effets dispersifs, comme l'étalement au cours de sa propagation dans le gaz d'un paquet d'ondes sonores créé par une impulsion lumineuse [9, 28], ou en accédant directement à la relation de dispersion à basse température via le facteur de structure dynamique du gaz de fermions par excitation de Bragg à un vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  bien défini [29–31].

Couplés à des équations cinétiques sur les nombres d'occupation des modes collectifs, nos résultats ouvrent aussi la voie à une détermination analytique du coefficient de diffusion de phase à basse température, donc de la limite intrinsèque fondamentale au temps de cohérence du condensat de paires dans un gaz de fermions de taille finie [14].

### Annexe A: Expression d'intégrales en termes des variables $x$ et $y$

Dans le développement de  $I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$ ,  $I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$  et  $I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$  à faible  $q$ , et après adimensionnement des vecteurs d'onde par  $k_{\Delta}$  comme dans l'équation (14), nous

rencontrons des intégrales de la forme

$$I_{n,p} = \frac{k_{\Delta}^3}{2\pi^2\rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^{2p+2}}{\epsilon_u^n} \quad (\text{A1})$$

$$J_{n,p} = \frac{k_{\Delta}^3}{2\pi^2\rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^{2p+2}\xi_u}{\epsilon_u^n} \quad (\text{A2})$$

avec  $n \in 2\mathbb{N}^* + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\xi_u = u^2 - \frac{1}{x} \quad (\text{A3})$$

$$\epsilon_u = \sqrt{\xi_u^2 + 1} \quad (\text{A4})$$

et la densité totale  $\rho$  du gaz est donnée par l'équation (9). L'intégrale donnant  $I_{n,p}$  est convergente pour  $n - p \geq 2$ , tandis que celle donnant  $J_{n,p}$  l'est pour  $n - p \geq 3$ . Les intégrales que nous rencontrons dont l'intégrande n'est pas fonction uniquement du module de  $\mathbf{k}$  se ramènent facilement à (A1) ou (A2) par intégration angulaire :

$$\int d^3k f(k) \left( \frac{\hbar^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{m} \right)^{2p} = \frac{4\pi}{1 + 2p} \left( \frac{\hbar^2 q^2}{m} \right)^p \int_0^{+\infty} dk k^2 f(k) \left( \frac{\hbar^2 k^2}{m} \right)^p \quad (\text{A5})$$

où  $f(k)$  est une fonction arbitraire du module de  $\mathbf{k}$ .

Établissons d'abord les quatre relations de récurrence suivantes :

$$I_{n,p} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-2,p} - \frac{2p+1}{2(n-2)} J_{n-2,p-1} \quad (\text{A6})$$

$$J_{n,p} = \frac{2p+1}{2(n-2)} I_{n-2,p-1} \quad (\text{A7})$$

$$I_{n,p} = J_{n,p-1} + \frac{I_{n,p-1}}{x} \quad (\text{A8})$$

$$J_{n,p} = \frac{J_{n,p-1}}{x} + I_{n-2,p-1} - I_{n,p-1}, \quad (\text{A9})$$

avec la condition  $1 \leq p \leq n-4$  dans la première relation,  $1 \leq p \leq n-3$  dans la deuxième,  $1 \leq p \leq n-2$  dans la troisième et  $1 \leq p \leq n-3$  dans la dernière. Pour établir la relation (A6), on intègre par parties l'intégrale

$$\frac{k_{\Delta}^3}{2\pi^2\rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^{2p+2}\xi_u^2}{\epsilon_u^n} = I_{n-2,p} - I_{n,p}, \quad (\text{A10})$$

en dérivant la fonction  $u \mapsto u^{2p+1}\xi_u$ . Pour établir la relation (A7), on intègre par parties l'intégrale définissant  $J_{n,p}$  dans l'équation (A2), en dérivant la fonction  $u \mapsto u^{2p+1}$ . Dans les deux cas, on note que la fonction  $u \mapsto u\xi_u/\epsilon_u^n$  admet comme primitive  $u \mapsto -[2(n-2)\epsilon_u^{n-2}]^{-1}$ . Enfin, on écrit simplement  $u^{2p+2} = u^{2p}(\xi_u + x^{-1})$  dans l'intégrande de (A1) pour obtenir (A8), et  $u^{2p+2}\xi_u = u^{2p}(\epsilon_u^2 - 1 + x^{-1}\xi_u)$  dans l'intégrande de (A2) pour obtenir (A9). Cette procédure généralise celle de la référence [11].

Montrons ensuite par récurrence que les relations (A6,A7,A8,A9) permettent d'exprimer  $I_{n,p}$  et  $J_{n,p}$  en

fonction de  $I_{3,0}$  et  $J_{3,0}$ , pour tout  $n$  impair  $\geq 3$  et pour tout  $p$  positif dans le domaine d'existence des intégrales. Soit un tel  $n$ . Supposons que l'on connaisse tous les  $I_{n,p}$ ,  $0 \leq p \leq n-2$ , et tous les  $J_{n,p}$ ,  $0 \leq p \leq n-3$ . Alors (i)  $I_{n+2,1}$  et  $J_{n+2,1}$  s'en déduisent grâce à (A6) et (A7), (ii) on obtient grâce à (A9) et (A8) le système de Cramer sur  $I_{n+2,0}$  et  $J_{n+2,0}$  :

$$x^{-1}J_{n+2,0} - I_{n+2,0} = J_{n+2,1} - I_{n,0} \quad (\text{A11})$$

$$J_{n+2,0} + x^{-1}I_{n+2,0} = I_{n+2,1} \quad (\text{A12})$$

que l'on résout, (iii) on utilise (A8) et (A9) pour accéder aux valeurs de  $I_{n+2,p}$  et  $J_{n+2,p}$  pour  $p \geq 2$ . On initialise la récurrence à  $n=3$ , en exprimant  $I_{3,1}$  en fonction de  $I_{3,0}$  et  $J_{3,0}$  grâce à (A8).

On relie enfin  $I_{3,0}$  et  $J_{3,0}$  à  $x$  et  $y$  grâce aux relations (14) et (15) données dans le corps de l'article, qui s'écrivent avec les notations de cette annexe sous la forme  $y = J_{3,0}/I_{3,0}$  et  $I_{3,0} = 3x/[2(1+xy)]$ .

- 
- [1] K. M. O'HARA, S. L. HEMMER, M. E. GEHM, S. R. GRANADE et J. E. THOMAS : Observation of a Strongly Interacting Degenerate Fermi Gas of Atoms. *Science*, 298(5601):2179–2182, 2002.
- [2] T. BOURDEL, J. CUBIZOLLES, L. KHAYKOVICH, K. M. F. MAGALHÃES, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, G. V. SHLYAPNIKOV et C. SALOMON : Measurement of the Interaction Energy near a Feshbach Resonance in a  $^6\text{Li}$  Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 91:020402, juillet 2003.
- [3] M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOCHIM, C. CHIN, J. Hecker DENSCHLAG et R. GRIMM : Crossover from a Molecular Bose-Einstein Condensate to a Degenerate Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 92:120401, mars 2004.
- [4] M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOCHIM, C. CHIN, J. Hecker DENSCHLAG et R. GRIMM : Collective Excitations of a Degenerate Gas at the BEC-BCS Crossover. *Phys. Rev. Lett.*, 92:203201, mai 2004.
- [5] M. W. ZWIERLEIN, C. A. STAN, C. H. SCHUNCK, S. M. F. RAUPACH, A. J. KERMAN et W. KETTERLE : Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 92:120403, mars 2004.
- [6] M. W. ZWIERLEIN, J. R. ABO-SHAER, A. SCHIROTZEK, C. H. SCHUNCK et W. KETTERLE : Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas. *Nature*, 435(7045):1047–1051, juin 2005.
- [7] S. NASCIBÈNE, N. NAVON, K. J. JIANG, F. CHEVY et C. SALOMON : Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas. *Nature*, 463(7284):1057–1060, février 2010.
- [8] Mark J. H. KU, Ariel T. SOMMER, Lawrence W. CHEUK et Martin W. ZWIERLEIN : Revealing the Superfluid Lambda Transition in the Universal Thermodynamics of a Unitary Fermi Gas. *Science*, 335(6068):563–567, 2012.
- [9] Leonid A. SIDORENKO, Meng Khoon TEY, Rudolf GRIMM, Yan-Hua HOU, Lev PITAEVSKII et Sandro STRINGARI : Second sound and the superfluid fraction in a Fermi gas with resonant interactions. *Nature*, 498(7452):78–81, juin 2013.
- [10] P.W. ANDERSON : Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 112:1900–1916, 1958.
- [11] M. MARINI, F. PISTOLESI et G.C. STRINATI : Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation : analytic results for the crossover in three dimensions. *European Physical Journal B*, 1:151–159, 1998.
- [12] M RANDERIA et E TAYLOR : BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas. *Ann. Rev. Cond. Mat. Phys.*, 5(6):065027, juin 2014.
- [13] R. COMBESCOT, M. Yu. KAGAN et S. STRINGARI : Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 74:042717, octobre 2006.
- [14] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Brouillage thermique d'un gaz cohérent de fermions. *arXiv :1502.05644 & hal-01118346*, 2015.
- [15] Y. CASTIN, I. FERRIER-BARBUT et C. SALOMON : La vitesse critique de Landau d'une particule dans un superfluide de fermions. *C. R. Physique*, 16:241, 2015.
- [16] G. BIGHIN, L. SALASNICH, P. A. MARCHETTI et F. TOIGO : Beliaev damping of the Goldstone mode in atomic Fermi superfluids. *Phys. Rev. A*, 92:023638, août 2015.
- [17] S.T. BELIAEV : Application of the Methods of Quantum Field Theory to a System of Bosons. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 34:417, août 1958.
- [18] P. O. FEDICHEV et G. V. SHLYAPNIKOV : Finite-temperature perturbation theory for a spatially inhomogeneous Bose-condensed gas. *Phys. Rev. A*, 58:3146–3158, octobre 1998.
- [19] Lev LANDAU et Isaak KHALATNIKOV : Teoriya vyazkosti Geliya-II. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 19:637, 1949.
- [20] Zixu ZHANG et W. Vincent LIU : Finite-temperature damping of collective modes of a BCS-BEC crossover superfluid. *Phys. Rev. A*, 83:023617, février 2011.
- [21] J. BARDEEN, L.N COOPER et J.R. SCHRIEFFER : Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:5, 1957.
- [22] Yvan CASTIN : Basic Theory Tools for Degenerate Fermi Gases. In M. INGUSCIO, W.KETTERLE et C. SALOMON, éditeurs : *Ultra-cold Fermi Gases*. Società italiana di fisica, Bologna, Italia, 2007.
- [23] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Phase operators and blurring time of a pair-condensed Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 88:063623, décembre 2013.
- [24] André SCHIROTZEK, Yong-il SHIN, Christian H. SCHUNCK et Wolfgang KETTERLE : Determination of the Superfluid Gap in Atomic Fermi Gases by Quasiparticle Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 101:140403, octobre 2008.
- [25] X. LEYRONAS et R. COMBESCOT : Superfluid Equation of State of Dilute Composite Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 99:170402, octobre 2007.
- [26] R. COMBESCOT et X. LEYRONAS : Superfluid equation of state of cold fermionic gases in the Bose-Einstein regime. *Phys. Rev. A*, 78:053621, novembre 2008.
- [27] Alexander L. GAUNT, Tobias F. SCHMIDTUTZ, Igor GOTLBOVYCH, Robert P. SMITH et Zoran HADZIBABIC : Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential.

- Phys. Rev. Lett.*, 110:200406, mai 2013.
- [28] M. R. ANDREWS, D. M. KURN, H.-J. MIESNER, D. S. DURFEE, C. G. TOWNSEND, S. INOUE et W. KETTERLE : Propagation of Sound in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 79:553–556, juillet 1997.
- [29] J. STENGER, S. INOUE, A. P. CHIKKATUR, D. M. STAMPER-KURN, D. E. PRITCHARD et W. KETTERLE : Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4569–4573, juin 1999.
- [30] J. STEINHAUER, R. OZERI, N. KATZ et N. DAVIDSON : Excitation Spectrum of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 88:120407, mars 2002.
- [31] E. D. KUHNLE, H. HU, X.-J. LIU, P. DYKE, M. MARK, P. D. DRUMMOND, P. HANNAFORD et C. J. VALE : Universal Behavior of Pair Correlations in a Strongly Interacting Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 105(7):070402, août 2010.