



**HAL**  
open science

## Stratégies événementielles de réinitialisation pour un consensus dans les systèmes multi-agents

Jihene Ben Rejeb, Irinel-Constantin Morarescu, Jamal Daafouz

### ► To cite this version:

Jihene Ben Rejeb, Irinel-Constantin Morarescu, Jamal Daafouz. Stratégies événementielles de réinitialisation pour un consensus dans les systèmes multi-agents. 6e Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2015, Jun 2015, Bourges, France. hal-01226786

**HAL Id: hal-01226786**

**<https://hal.science/hal-01226786v1>**

Submitted on 10 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Stratégies événementielles de réinitialisation pour un consensus dans les systèmes multi-agents

Jihene BEN REJEB<sup>1</sup>, Irinel Constantin MORĂRESCU<sup>1</sup>, Jamal DAAFOUZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Centre de Recherche en Automatique de Nancy,

UMR 7039 – Université de Lorraine, CNRS

2, Avenue de la forêt de Haye. 54516 Vandœuvre, France.

*jihene.ben-rejeb, constantin.morarescu, jamal.daafouz@univ-lorraine.fr*

**Résumé**— Cet article porte sur le problème du consensus dans un réseau partitionné en plusieurs clusters. Au sein de chaque cluster, les agents interagissent de manière continue. En plus chaque cluster contient un agent spécifique appelé leader ayant la capacité de communiquer avec d'autres leaders en vue de s'accorder avec eux. Ces interactions s'avèrent coûteuses puisqu'elles requièrent des échanges sur des distances longues ou mal protégées. Néanmoins, ces interactions sont nécessaires pour accomplir l'objectif global du réseau. Nous traitons dans cet article différentes stratégies d'interconnexions entre les leaders en vue d'optimiser le coût et la consommation d'énergie et nous essayons de mettre l'accent sur l'apport de la technique événementielle par rapport aux approches quasi-périodiques classiques.

**Mots-clés**— Système multi-agents, consensus, systèmes interconnectés, stratégies de réinitialisation.

## I. INTRODUCTION

La décennie qui vient de s'écouler a vu naître un regain d'attention de l'approche multi-agents et les récents développements en robotique exigent des performances de plus haut niveau en termes de minimisation du temps de traitement, adaptation du flux d'informations, temps de réponse, etc. Les problèmes qui apparaissent autour de l'étude des systèmes multi-agents se retrouvent dans des disciplines comme la biologie [1], [2], sociologie [3], [4], [5], économie [6] et l'ingénierie [7], [8]. Ces agents qui forment le réseau sont interconnectés et peuvent interagir avec leurs semblables dans le but de s'accorder sur des valeurs communes (un objectif à atteindre, un lieu de rendez-vous, une répartition de la charge de travail, etc.). Ainsi, le problème de consensus joue un rôle central dans l'étude des systèmes multi-agents. Ce problème a été largement traité dans le cas où le réseau est donné par un modèle linéaire [9], [10], [11]. La littérature dans le cadre non linéaire est aussi diversifiée pour des applications telles que les oscillateurs couplés [12], [13], [14] et les robots non holonomes [15], [8]. D'autre part, les connections qui relient les agents et les échanges qu'ils peuvent établir constituent un critère majeure dans l'analyse de tels systèmes. La topologie des graphes attribués à ces systèmes peut être fixe ou variable [3], [4], [5], [16]. Par ailleurs, les échanges établis entre les leaders caractérisent en outre l'évolution des agents vers un accord global au sein du réseau. En effet, ces échanges définissent la valeur du consensus mais également la vitesse de convergence. La distance et les contraintes de transmission sont notamment prises en compte dans un tel processus. Une approche classique de communications inter-clusters est de considérer des échanges quasi-périodiques [17]. Cette approche invoque des remises à zéro périodiques et synchrones. Le

nombre de resets dans ce cas est prédéfini et les interactions sont persistentes notamment quand tous les agents sont synchronisés. Un aspect de réinitialisation asynchrone où la séquence de reset est définie indépendamment pour chaque leader, a été traité dans [18]. Les auteurs considèrent des échanges inter-clusters régis par une séquence temporelle telle que l'intervalle de temps entre deux sauts consécutifs soit borné.

L'objectif de cette communication est de caractériser les interactions établies entre les leaders dans un réseau partitionné en plusieurs communautés. Cette caractérisation repose sur une séquence événementielle propre à chaque cluster qui permet d'atteindre un accord. Les agents d'un même cluster évoluent selon une dynamique continue vers un accord local. La loi événementielle ainsi choisie permet de ramener ces accords locaux vers un consensus global en assurant la persistance des resets et détourner tout problème d'accumulation à un instant donné connu sous le phénomène de Zeno. Un intérêt majeur de cette stratégie est d'optimiser les échanges entre les leaders et réduire les transmissions inutiles qui nécessite généralement un apport énergétique important.

Nous essayons dans cette communication de valoriser l'apport de cette stratégie, traitée explicitement dans [19], à travers une analyse numérique comparant la méthode de réinitialisation événementielle à celle quasi-périodique.

Le reste du papier est structuré comme suit : la section II introduit une formulation mathématique du problème. Nous posons dans la section III les hypothèses requises pour le traiter et nous rappellerons quelques résultats qui seront utilisés par la suite. IV présente une analyse du problème par une mise en oeuvre des stratégies événementielles. Nous essayons dans la section V de développer une analyse numérique mettant l'accent sur l'apport de cette approche et nous terminons par une conclusion.

**Notations.** L'ensemble des entiers, des réels et celui des réels positifs sont donnés respectivement par  $N$ ,  $R$  et  $R_+$ . Pour un vecteur donné  $x$ , on note  $\|x\|$  sa norme Euclidienne. La transposée d'une matrice  $A$  est donnée par  $A^\top$ . Pour une matrice symétrique  $A \in R^{n \times n}$ , la notation  $A > 0$  ( $A \geq 0$ ) est équivalente à dire que  $A$  est définie positive (semi-définie positive). La matrice  $I_k$  est la matrice identité de dimensions  $k \times k$ . Les vecteurs colonnes de dimensions  $k$  dont tous les éléments sont 1 et 0 sont donnés par  $\mathbf{1}_k$  et  $\mathbf{0}_k$ . On définit notamment  $x(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k, t \leq t_k} x(t)$ .

## II. FORMULATION DU PROBLÈME

### A. Prérequis : Théorie des graphes

Soit un réseau de  $n$  agents décrit par un graphe dirigé  $G = (V, E)$  tel que  $V$  décrit l'ensemble des agents et  $E \subset V \times V$  représente leurs interactions.

**Définition 1** : Un **chemin orienté de longueur  $p$**  pour un graphe dirigé  $G = (V, E)$  est l'union des liaisons dirigées  $\bigcup_{k=1}^p (i_k, j_k)$  tel que  $i_{k+1} = j_k, \forall k \in \{1, \dots, p-1\}$ . Le sommet  $j$  est **connecté** à  $i$  dans un graph orienté  $G = (V, E)$  s'il existe au moins un chemin dirigé dans  $G$  partant de  $i$  vers  $j$  (c.a.d  $i_1 = i$  et  $j_p = j$ ). Un **graphe dirigé fortement connexe** est tel que n'importe quelle paire de sommets est connectée. On dit que le sommet  $i$  est parent de  $j$  dans un graphe dirigé  $G = (V, E)$  si  $(i, j) \in E$ . Un **arbre dirigé** est un sous-graphe orienté pour lequel il n'existe qu'un seul sommet ne possédant aucun ascendant appelé **racine** tandis que tous les autres sommets ont exactement un seul parent. Un **arbre couvrant dirigé** d'un graphe orienté est un arbre dirigé qui relie tous les sommets. Un graphe orienté  $G$  est **faiblement connexe** s'il contient au moins un arbre couvrant. Pour un graphe donné  $G = (V, E)$ , le sous-graphe **induit** par un sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$  est le graphe  $(U, E \cap (U \times U))$ .

Dans ce qui suit, nous considérons un ensemble de sommets  $V$  partitionné en  $m$  communautés  $C_1, \dots, C_m$ . On note  $n_i$  le cardinal de chaque communauté  $C_i$ . On désigne le graphe des liaisons intra-clusters  $G_l = (V, E_L)$  contenant les arêtes reliant les leaders dans  $G$  par l'ensemble  $E_L = \{(i, j) \in E \mid \exists k \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } i, j \in C_k\}$ .

### B. Modélisation du système

L'état de chaque agent évolue de manière continue en tenant compte des états de ses voisins au sein du même cluster en vue d'atteindre un accord local qui soit probablement différent d'une communauté à une autre. En vue de ramener tous les agents vers un même accord global, il est indispensable de faire interagir les leaders à des instants précis, selon une dynamique discrète. En activant la liaison  $(j, i) \in E \setminus E_L$ , l'état de l'agent  $i$  est réinitialisé à une moyenne pondérée des états de  $i$  et de  $j$ . Si plusieurs liaisons arrivant à  $i$  sont activées simultanément, la moyenne pondérée prend en compte tous les états précédent de ces agents. On note l'état de chaque agent par  $x_i$  tel que le vecteur global réunissant tous les états des agents est donné par  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  et  $x_{C_i}$  regroupant tous les agents appartenant à une communauté  $i$ .

Soit  $T$  un ensemble dénombrable des instants de resets décrits par la séquence croissante  $(t_k)_k$ . Le système que nous présentons, dans ce travail, est un système largement utilisé pour modéliser le processus du consensus linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Lx(t), & \forall t \in \mathbb{R}_+ \setminus T \\ x(t_k) = P(t_k)x(t_k^-) & \forall t_k \in T \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Avec  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice Laplacienne généralisée associée au graphe  $G_l$  et  $P(t_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice stochastique associée au graphe  $G_P(t_k) = (V, E_P(t_k))$  où  $E_P(t_k) \neq \emptyset$  est l'ensemble des arêtes entre les communautés activées à l'instant  $t_k$  ainsi  $E_P(t_k) \subseteq \{(h, l) \in E \mid \exists i, j \in$

$\{1, \dots, m\}, i \neq j, h \in C_i, l \in C_j\}$ .

Précisément, les composantes de  $L$  et  $P(t_k)$  vérifient :

$$\begin{cases} L_{i,j} = 0, & \text{si } (j, i) \notin E_L \\ L_{i,j} < 0, & \text{si } (j, i) \in E_L, i \neq j \\ L_{i,i} = -\sum_{j \neq i} L_{i,j}, & \forall i \in \{1, \dots, n\}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} P_{i,j}(t_k) = 0, & \text{si } (j, i) \notin E_P(t_k), i \neq j \\ P_{i,i}(t_k) > 0, & \forall i = \{1, \dots, n\} \\ P_{i,j}(t_k) > 0, & \text{si } (j, i) \in E_P(t_k), i \neq j \\ \sum_{j=1}^n P_{i,j}(t_k) = 1, & \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \quad (3)$$

En se référant à (3), pour  $i$  donné, si  $P_{i,j}(t_k) = 0$  pour tout  $j \neq i$  alors  $P_{i,i}(t_k) = 1$ , aucun saut ne se produit pour l'agent  $i$  à l'instant  $t_k$ . Les valeurs  $L_{i,j}$  et  $P_{i,j}(t_k)$  représentent le poids de l'état de l'agent  $j$  dans le processus de réinitialisation de l'agent  $i$ . Les matrices  $L$  et  $P(t_k)$  traduisent le degré d'influence de chaque agent au sein de sa communauté et en dehors de celle-ci. Les poids  $P_{i,j}$  peuvent varier dans le temps pour un même couple  $(j, i)$ .

La matrice Laplacienne  $L$  relative au système multi-agents défini précédemment, est donnée par une structure diagonale :  $L = \text{diag}(L_i), \forall i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $L_i \mathbf{1}_{n_i} = \mathbf{0}_{n_i}$  et  $P(t_k) \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_m$ .

## III. PRÉREQUIS

Dans ce paragraphe, nous introduisons les hypothèses requises à l'analyse du problème posé et nous nous penchons sur les résultats [18] indispensables à l'analyse de stabilité.

### A. Les hypothèses

Nous nous interrogeons si, pour toute condition initiale  $x_0$ , l'algorithme proposé (1) garantit une convergence asymptotique vers le consensus. Quelques hypothèses standards s'imposent. Une première définit une propriété de connectivité minimale pour tout le réseau ainsi que pour chaque communauté.

**Hypothèse 1** (Structure du réseau) Soit le graphe  $G = (V, E)$  tel que

- Pour chaque communauté  $C_i$ , le graphe induit  $(C_i, E_L \cap (C_i \times C_i))$  contient un arbre couvrant et une racine  $r_i$
- Pour tout  $i \geq 2$  il existe  $j < i$  et  $l_i \in C_j$  tel que  $(l_i, r_i) \in E$ . On note  $E_T = \{(l_i, r_i) \mid i \in \{2, \dots, m\}\}$  l'ensemble de ces  $m-1$  arêtes.

Cette supposition implique que  $G$  contient un arbre couvrant ayant une racine dans  $C_1$ . L'hypothèse est satisfaite si les graphes induits par communautés ainsi que  $G$  sont fortement connexes.

Le premier point de l'hypothèse 1 influe sur la dynamique continue puisque l'équation (2) impose que les valeurs  $L_{i,j} < 0$  pour  $(j, i) \in E_L$ . La deuxième partie de cette hypothèse garantit l'existence des interactions inter-clusters. L'hypothèse qui suit est largement utilisée dans la littérature (voir [20]) et assure une influence minimale sur les états des agents durant les phases de réinitialisation.

*Hypothèse 2* (Influence minimale) Il existe une constante  $\alpha \in (0, 1)$  telle que, pour tout instant  $t_k$ , si  $P_{i,j}(t_k) \neq 0$  et  $(i, j) \in E_T$  alors  $P_{i,j}(t_k) \geq \alpha$ .

*Remarque 1* : Comme il a été mentionné dans la section précédente,  $P_{i,j}$  peut varier dans le temps. Alors  $P_{i,j}$ ,  $(i, j) \in E \setminus E_L$  peut converger vers 0. Mais, afin d'atteindre le consensus, les interactions entre les communautés ne doivent pas disparaître totalement. Dans ce contexte, l'hypothèse 2 garantit une influence minimale d'une communauté à une autre aux instants de réinitialisation.

Pour définir les agents d'une communauté  $C_i$  qui réinitialisent leurs états à l'instant  $t_k$ , nous caractérisons une fonction  $\phi_i$  par les instants  $t_{\phi_i(h)}$ ,  $h \in N$  est le  $h$ -ième instant auquel un agent de la communauté  $C_i$  remet à zéro son état :  $\phi_i(h) = \min\{k > \phi_i(h-1) \mid \exists j \in C_i, \ell \in V \setminus C_i, P_{j,\ell}(t_k) > 0\}$ .

Pour une cohérence en terme de définition, on impose  $\phi_i(-1) = -1$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

### B. Conditions requises pour atteindre un consensus

Il a été démontré, dans [18], qu'afin d'atteindre le consensus, deux hypothèses supplémentaires s'avèrent nécessaires : il s'agit de supposer que les échanges entre les clusters sont persistents dans le temps et aucune racine relative aux communautés constituant le réseau, n'accumule de resets infinis en un instant donné, un tel problème est connu sous le Phénomène de Zeno. Ainsi, la stratégie de réinitialisation événementielle vient substituer de telles hypothèses et contourner un tel phénomène pouvant affecter la dynamique du système mais également sa stabilité et ses performances. Dans ce qui suit, nous rappelons le résultat principal cité dans [18] ainsi que les hypothèses requises.

*Hypothèse 3* : Il existe une constante  $\delta_{max} > 0$  satisfaisant : pour tout  $(l, r) \in E_T$ ,

- Il existe  $k \in N$  tel que  $t_k \leq \delta_{max}$  et  $(l, r) \in E_P(t_k)$ ,
- Si  $(l, r) \in E_P(t_k)$  il existe  $\tau \in [t_k, t_k + \delta_{max}]$  tel que  $(l, r) \in E_P(\tau)$ .

*Hypothèse 4* : Il existe une constante  $\delta < \delta_{max}$  telle que  $t_{\phi_i(k+1)} - t_{\phi_i(k)} \geq \delta$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ .

En d'autres termes, il existe une borne inférieure, strictement positive, minorant la période entre deux instants consécutifs de reset. On note que conformément aux hypothèses 1 et 3, toutes les communautés  $\{2, \dots, m\}$  réinitialisent l'état de leur leader à plusieurs reprises voire infiniment, alors pour ces clusters,  $\phi_i$  est bien définies. Le cluster  $C_1$  n'effectue qu'un nombre fini de saut, alors  $t_{\phi_1}(k)$  est uniquement défini pour  $k$  plus petit qu'une certaine borne finie, et peut aussi satisfaire l'hypothèse 4 pour ces  $k$ . On introduit le diamètre global du réseau à l'instant  $t \in R_+$  comme étant  $\Delta(t) = \max_{i \in V} x_i(t) - \min_{i \in V} x_i(t)$ .

*Théorème 2* (Théorème 9 dans [18]) Nous supposons que les hypothèses 1, 2, 3 et 4 sont admises. Il existe un taux de croissance  $\beta \in [0, 1)$  tel que pour tout  $t \in R_+$ ,  $\Delta(2(m+1)\delta_{max} + t) \leq \beta \Delta(t)$  garantit une convergence asymptotique vers un consensus au sein du système.

## IV. CONCEPTION D'UNE LOI ÉVÉNEMENTIELLE SEMI-DÉCENTRALISÉE

Pour éviter les communications inutiles entre les leaders, nous définissons une séquence de remise à zéro fondée sur

une condition événementielle. Dans cette section, nous proposons une loi événementielle et nous essayons de prouver qu'elle satisfait les hypothèses 3 et 4 et permet d'appliquer le théorème 2 pour démontrer qu'un tel système converge vers un accord global.

La condition définissant la séquence d'échange entre les leaders n'est pas totalement décentralisée, en effet, chaque élément de réinitialisation  $r_i$  aurait à collecter et traiter les états de tous les agents dans sa propre communauté  $C_i$  aux instants de reset  $t_{\phi_i(k)}$ . L'agent recalcule ainsi son état et interagit avec ses voisins pour les guider vers l'accord local  $x_i^*(t_k)$ . Il est à noter que cette information, qui est centralisée dans chaque cluster, n'est requise qu'aux instants de réinitialisation. Un agent n'aurait pas à rassembler tous les états de ses voisins. Cependant, la fonction  $x_i^*(\cdot)$  est constante sur l'intervalle  $[t_{\phi_i(k)}, t_{\phi_i(k+1)})$ . Dans ce qui suit, nous supposons que :

*Hypothèse 5* : Les composantes de la matrice Laplacienne  $L$  sont uniformément bornées, il existe  $\bar{\alpha} > 0$  un nombre fini tel que  $|L_{i,j}| \leq \bar{\alpha}$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

Cette propriété est indispensable pour garantir, pendant la phase continue, que les agents ne se rapprochent pas les uns des autres de manière infiniment rapide. Dans la pratique, cette hypothèse est souvent satisfaite.

Soit le diamètre de chaque communauté  $C_i$  donné par  $\Delta_i(t) = \max_{j \in C_i} x_j(t) - \min_{j \in C_i} x_j(t)$ .

*Définition 3* : La distance entre le sommet  $r_i$  et la valeur de l'accord local du cluster  $C_i$  à l'instant  $t$  est donnée par  $d_i(t) = |x_{r_i}(t) - x_i^*(t)|$ . Nous considérons  $\epsilon > 0$  un scalaire donné, la séquence de reset  $(t_k)_{k \in N}$  associée à la dynamique (1) est définie par : pour tout élément  $i \in \{1, \dots, m\}$  et pour tout  $k \geq 0$ ,

- Si  $d_i(t_{\phi_i(k-1)}) > \epsilon$

$$t_{\phi_i(k)} = \min_{t \geq t_{\phi_i(k-1)}} \left\{ d_i(t) \leq \frac{d_i(t_{\phi_i(k-1)})}{a_i} \right\},$$

- Sinon,  $t_{\phi_i(k)} = t_{\phi_i(k-1)} + \delta$  avec

$$\delta = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\epsilon}{2n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)},$$

où les constantes  $a_i > 1$  sont des paramètres fixés a priori. (Nous rappelons la notation  $t_{\phi_i(-1)} = 0$ ).

*Remarque 2* : Pour les simulations, nous considérons  $a_i = a_j$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ , ces valeurs peuvent être conçues par le designer pour varier la fréquence des sauts d'une communauté à une autre.

*Théorème 4* : Soit le système (1) sous les hypothèses 1, 2 et 5. Alors, la séquence de réinitialisation associée définie par 3 satisfait 3, 4.

*Preuve 1* : Si  $d_i(t_{\phi_i(k)}) \leq \epsilon$ , les hypothèses 3, 4 sont satisfaites. Néanmoins, le premier point s'applique et pour une communauté donné  $C_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  nous devons démontrer que la séquence de reset satisfait 3 et 4.

• Nous commençons par prouver que l'hypothèse 4 est atteinte. Ceci implique l'existence d'un temps de maintien  $\delta$  entre un instant de réinitialisation  $t_{\phi_i(k)}$  et le premier instant  $t$  défini par  $d_i(t) \leq \frac{d_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i}$ . Nous rappelons que,

pour tout  $t \in [t_{\phi_i(k)}, t_{\phi_i(k+1)})$ , nous avons  $\dot{x}_i^*(t) = 0$  et

$$\dot{x}_{r_i}(t) = - \sum_{j \in C_i} L_{r_i, j} (x_j(t) - x_{r_i}(t))$$

En se basant sur l'hypothèse 5, nous obtenons, entre deux instants de réinitialisation :

$$\dot{d}_i(t) \geq -n_i \bar{\alpha} \Delta_i(t).$$

D'autre part,  $\Delta(\cdot)$  est une fonction non-décroissante, alors :

$$\dot{d}_i(t) \geq -n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0).$$

En intégrant l'équation qui précède

$$d_i(t) \geq d(t_{\phi_i(k)}) - n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)(t - t_{\phi_i(k)}).$$

Ainsi, pour que  $d_i(t) \leq \frac{d_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i}$  il faut que

$$\frac{d_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i} \geq d(t_{\phi_i(k)}) - n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)(t - t_{\phi_i(k)})$$

qui est équivalent à

$$(t - t_{\phi_i(k)}) \geq \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{d(t_{\phi_i(k)})}{n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)} > \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\epsilon}{n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)}$$

La preuve finit en choisissant :

$$\delta = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{a_i - 1}{a_i} \frac{\epsilon}{n_i \bar{\alpha} \Delta_i(0)}.$$

• Prouvons maintenant que 3 est également satisfaite. Entre  $d_i(t_{\phi_i(k)})$  et  $d_i(t_{\phi_i(k+1)})$  la dynamique générale d'un cluster  $C_i$  est décrite par une matrice Laplacienne à termes constants

$$\dot{x}_{C_i}(t) = -L_i x_{C_i}(t).$$

Il existe alors  $M_i > 0$  et  $\rho_i > 0$  tel que

$$\Delta_i(t) \leq M_i e^{-\rho_i(t - t_{\phi_i(k-1)})} \Delta_i(t_{\phi_i(k)}) \quad (4)$$

où  $\rho_i$  est la vitesse de convergence (voir [21]) associée à la matrice Laplacienne  $L_i$ . Toutefois, nous avons  $d_i(t) \leq \Delta_i(t)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  et  $\forall t \geq 0$ . Combiné avec (4), nous obtenons  $d_i(t) \leq M_i e^{-\rho_i(t - t_{\phi_i(k-1)})} \Delta_i(t_{\phi_i(k)})$ .

Utilisant (1), une simple manipulation mathématique prouve que si  $d_i(t) > \frac{d_i(t_{\phi_i(k)})}{a_i}$  alors

$$\begin{aligned} t - t_{\phi_i(k-1)} &< \frac{1}{\rho_i} \ln \left( \frac{a_i M_i \Delta_i(t_{\phi_i(k)})}{d_i(t_{\phi_i(k)})} \right) \\ &< \frac{1}{\rho_i} \ln \left( \frac{a_i M_i \Delta_i(0)}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Nous définissons alors, pour clôturer la preuve :

$$\delta_{max} = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \frac{1}{\rho_i} \ln \left( \frac{a_i M_i \Delta_i(0)}{\epsilon} \right).$$

## V. APPORTS DE LA STRATÉGIE ÉVÉNEMENTIELLE D'UN POINT DE VUE OPTIMISATION ÉNERGÉTIQUE

Dans cette section, nous présentons une analyse numérique mettant l'accent sur les performances de la stratégie événementielle appliquée pour atteindre un consensus pratique (la distance entre l'état des agents est négligeable - inférieure à un certain  $\epsilon \sim 0$  positif suffisamment petit). Cette analyse présente une des performances les plus intéressante au niveau de la consommation d'énergie discutée tout au début de cet article : l'optimisation du nombre de resets. Nous comparons la stratégie événementielle à la stratégie périodique et nous essayons de mettre l'accent sur l'apport d'une telle technique qui permet d'optimiser le nombre de reset et la vitesse de convergence. Nous traitons l'exemple d'un système multi-agents formé par 5 agents partitionné en 2 clusters. Nous fixons une condition initiale  $x_0 = [8, 7, 9, 2, 3]^T$  et les paramètres  $\delta_{min} = 0.1s$ ,  $\delta_{max} = 1s$ ,  $\delta_{ave} = \frac{\delta_{max} + \delta_{min}}{2}$  et  $\delta'$  prenant valeur dans l'intervalle  $[0, 0.001]$ .

Soit :

$$\begin{aligned} T_1 &= t_{k_{k \geq 1}} \text{ où } t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \delta_{min} + \delta', \forall k \geq 0, \\ T_2 &= t_{k_{k \geq 1}} \text{ où } t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \delta_{max} + \delta', \forall k \geq 0, \\ T_3 &= t_{k_{k \geq 1}} \text{ où } t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \delta_{ave} + \delta', \forall k \geq 0, \\ T_4 &= t_{k_{k \geq 1}} \text{ définie par 3 avec les paramètres } a_1 \text{ et } a_2. \end{aligned}$$

*Remarque 3 :* - Les séquences de reset  $T_1, T_2, T_3$  définissent des séquences quasi-périodiques. Néanmoins ces sauts sont synchrones tel que tous les leaders interagissent simultanément. Il existe alors une matrice unique  $P(t_k) = P, \forall k$ . Dans ce cas, traité en [17], la valeur du consensus est indépendante de la séquence de réinitialisation choisie.

- La séquence  $T_4(a_1, a_2)$  est définie par une condition événementielle, tel que chaque agent interagit indépendamment des autres leaders. Un agent peut interagir à plusieurs reprises avant qu'un autre n'établisse un lien. Pour ce faire, deux sous-séquences sont définies :  $(t_{\phi_1(k)})_k$  et  $(t_{\phi_2(k)})_k$  contiennent les instants  $t_k$  associés aux agents appartenant, respectivement, au premier et au second cluster.

### A. Cas des clusters ayant des vitesses de convergence de même ordre

Nous considérons un réseau formé par 5 agents, partitionné en deux communautés de 2 et 3 agents respectivement. Le graphe orienté régi par les interactions établies durant la phase continue, est décrit par la matrice Laplacienne généralisée suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ayant une structure diagonale par bloc correspondant aux clusters. Il est à noter que la vitesse de convergence au sein des deux communautés est quasiment la même (les valeurs propres de  $L$  ont un ordre de multiplicité unitaire). Nous supposons que seuls les agents 1 et 4 peuvent interagir en

dehors des clusters auxquels ils appartiennent et réinitialisent leurs états suivant la dynamique :

$$\begin{aligned} x_1(t_{\phi_1(k)}) &= 0.45x_1(t_{\phi_1(k)}^-) + 0.55x_4(t_{\phi_1(k)}^-) \\ x_4(t_{\phi_2(k)}) &= 0.25x_1(t_{\phi_2(k)}^-) + 0.75x_4(t_{\phi_2(k)}^-) \end{aligned} \quad (6)$$

Dans ce qui suit nous comparons et nous évaluons les performances du système (1) en termes de vitesse de convergence et nombre de resets pour les séquences  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4(a_1, a_2)$ . Les trajectoires des agents sont représentées par les Figures 1-4 pour une condition initiale  $x_0 = [8, 7, 9, 2, 3]^\top$  et  $a_1 = a_2 = 2$ .

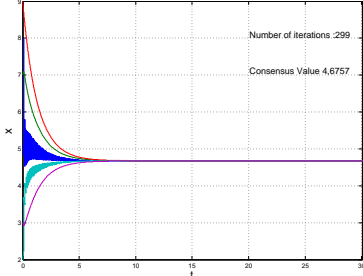


Fig. 1. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  appartenient à  $T_1$ .

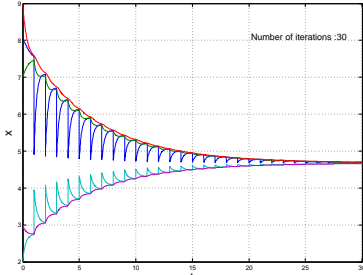


Fig. 2. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  appartenient à  $T_2$ .

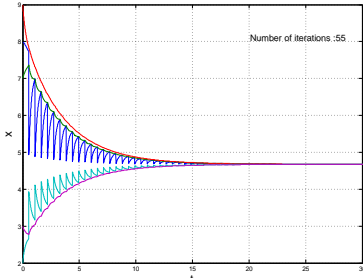


Fig. 3. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  appartenient à  $T_3$ .

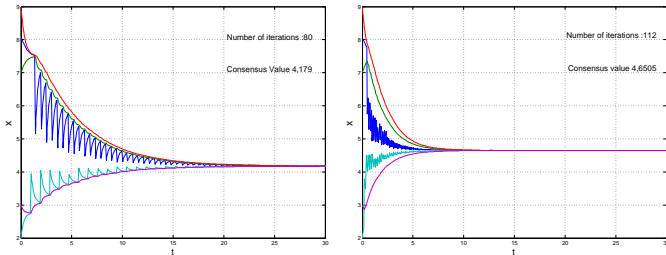


Fig. 4. Consensus des cinq agents pour  $t_{\phi_1(k)}$  et  $t_{\phi_2(k)}$  appartenent à  $T_4(20, 40)$  à gauche et  $T_4(2, 2)$  à droite.

*Remarque 4 :* – Pour les trois premières figures, nous observons que les agents convergent vers la même valeur avec différentes vitesses. Pour une période de réinitialisation évaluée à  $\delta_{min}$ , le consensus est atteint plus rapidement mais nécessite certainement une consommation d'énergie plus élevée vu le grand nombre de resets requis. Chaque leader effectue 299 sauts pour 30 et 55 sauts quand la période est évaluée respectivement à  $\delta_{max}$  et  $\delta_{ave}$ .

– Les trajectoires des cinq agents illustrées par la Figure 3 montrent qu'une optimisation de l'énergie consommée et celle de la vitesse de convergence est réalisée en utilisant la moyenne de  $\delta_{min}$  et  $\delta_{max}$  comme période de reset.

– Pour le cas événementiel, Figure 4, les instants de réinitialisation ne sont pas synchronisés et chaque leader évolue à sa propre cadence : A gauche, 53 resets pour le premier leader et 27 sauts pour le deuxième. A droite, 71 et 41 sauts pour la première et la deuxième communauté respectivement.

– Dans la Figure 4 gauche le consensus est atteint plus rapidement que la Figure 2 avec une moyenne de 40 sauts. La stratégie événementielle, donnée par la définition 3, réalise une meilleure optimisation entre l'énergie et la vitesse de convergence que le cas quasi-périodique utilisant  $\delta_{ave}$ .

– La valeur du consensus dépend de la séquence de réinitialisation : plus nous diminuons  $a_1$  et  $a_2$  plus le nombre de resets augmente.

### B. Cas des clusters ayant des vitesses de convergence de différent ordre

Dans ce paragraphe, nous considérons le réseau de 5 agents partitionnés en deux clusters tel que la vitesse de convergence dans le premier cluster est remarquablement plus élevée qu'au second. Cette situation se réalise quand la deuxième communauté présente une réduction d'un modèle large de cluster. Nous pouvons considérer aussi que les interactions dans ce dernier sont déficientes et les agents attribuent une importance modérée à ces échanges. Soient les dynamiques (1) et (6) avec :

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

Pour les mêmes conditions de simulation, nous obtenons les résultats numériques dans la Figure 5.

Dans ce cas, la stratégie événementielle s'avère plus performante que l'utilisation d'une période fixe : le système évolue vers le consensus selon, principalement, la dynamique de la communauté ayant la vitesse de convergence la plus élevée et tend ainsi à ramener le leader du second cluster vers cette valeur à travers les échanges établis. Contrairement à la technique événementielle, la stratégie de reset périodique requiert que l'agent 4 établisse des liens inutiles

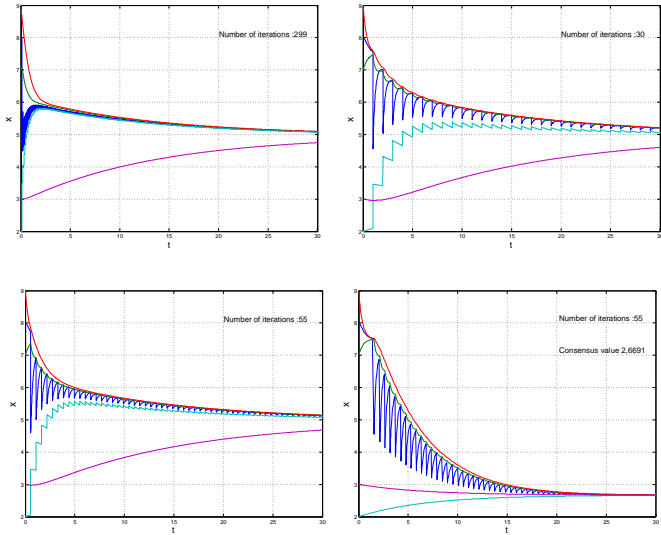


Fig. 5. En haut à gauche :  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  dans  $T_1$ , En haut à droite :  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  dans  $T_2$ , En bas à gauche :  $t_{\phi_1(k)} = t_{\phi_2(k)} = t_k$  dans  $T_3$ , En bas à droite :  $t_{\phi_1(k)}$  et  $t_{\phi_2(k)}$  dans  $T_4(20, 40)$ .

nécessitant un échange énergétique important. Il est intéressant de souligner que la séquence  $T_3$  permet à chaque communauté d'interagir 55 fois en 30 secondes sans pouvoir converger vers la même valeur. D'autre part, utilisant la séquence  $T_4(20, 40)$ , nous comptons un nombre total de 55 sauts (54 pour le premier cluster et 1 pour le second) requis pour atteindre un consensus pratique. Ceci montre que les échanges inutiles non seulement consomment de l'énergie mais affecte également la vitesse de convergence du système.

## VI. CONCLUSION

Dans le présent article, nous avons analysé le consensus dans les systèmes multi-agents partitionnés. Chaque agent interagit en permanence à l'intérieur de son groupe et certains d'entre eux réinitialisent leurs états en prenant en compte les informations provenant de leurs semblables. Ainsi, nous nous retrouvons avec des réseaux hétérogènes d'agents ayant à la fois des dynamiques linéaires et impulsives. Nous supposons que le réseau satisfait une certaine connectivité ayant une influence minimale et nous prouvons que, dans ce cas, le consensus est garanti pour autant que la séquence de remise à zéro est divergente et la période séparant deux instants de remise à zéro est délimitée par un temps de séjour strictement positive. Afin de définir les séquences satisfaisant ces propriétés, nous définissons une loi événementielle décentralisée et nous illustrons ces résultats par quelques exemples numériques.

## RÉFÉRENCES

- [1] O. Ratmann, C. Wiuf, and J. W. Pinney, "From evidence to inference : Probing the evolution of protein interaction networks," *HFSP Journal*, vol. 3, no. 5, pp. 290–306, 2009.
- [2] G. Pavlopoulos, M. Secrier, C. Moschopoulos, T. Soldatos, S. Kossida, J. Aerts, R. Schneider, and P. G. Bagos, "Using graph theory to analyze biological networks," *BioData Mining*, vol. 4, no. 10, pp. 1–27, 2011.
- [3] R. Hegselmann and U. Krause, "Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation," *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, vol. 5, no. 3, 2002.

- [4] V. D. Blondel, J. M. Hendrickx, , and J. Tsitsiklis, "On Krause's multi-agent consensus model with state-dependent connectivity," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 54, no. 11, pp. 2586–2597, 2009.
- [5] I.-C. Morărescu and A. Girard, "Opinion dynamics with decaying confidence : Application to community detection in graphs," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 56, no. 8, pp. 1862–1873, 2011.
- [6] J.-M. Andreoli, "Coordination as negotiated transactions." *Object Orientation with Parallelism and Persistence*, pp. 151–173, 1995.
- [7] H. Tanner, A. Jadbabaie, and G. Pappas, "Stable flocking of mobile agents part i : Dynamic topology," in *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2, 2003, pp. 2010–2015.
- [8] F. Bullo, J. Cortés, and S. Martinez, *Distributed Control of Robotic Networks. A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms*. Princeton University Press, 2009.
- [9] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 48, no. 6, pp. 988–1001, 2003.
- [10] W. Ren and R. W. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 50, no. 5, pp. 655–661, 2005.
- [11] L. Moreau, "Stability of multiagent systems with time-dependent communication links," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 50, no. 2, pp. 169–182, 2005.
- [12] D. Gfeller and P. D. L. Rios, "Spectral coarse graining and synchronization in oscillator networks," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 174104, 2008.
- [13] E. Steur, I. Tyukin, and H. Nijmeijer, "Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators," *Physica D*, no. 238, pp. 2119–2128, 2009.
- [14] I.-C. Morărescu, W. Michiels, and M. Jungers, "Synchronization of coupled nonlinear oscillators with shifted gamma-distributed delays," in *Proceedings of American Control Conference*, 2013.
- [15] H. Tanner, A. Jadbabaie, and G. Pappas, "Flocking in teams of nonholonomic agents," in *Cooperative Control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences, V. Kumar, N. Leonard, and A. Morse, Eds. Springer, 2005, vol. 309, pp. 458–460.
- [16] B. Touri and A. Nedic, "On approximations and ergodicity classes in random chains," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 11, pp. 2718–2730, 2012.
- [17] M. C. Bragagnolo, I.-C. Morărescu, J. Daafouz, and P. Riedinger, "Lmi sufficient conditions for the consensus of linear agents with nearly-periodic resets," in *Proc. of the American Control Conference*, 2014.
- [18] I.-C. Morărescu, S. Martin, and A. Girard, "Coordination in networks of linear impulsive agents," in *Proceedings of the 53rd Conference on Decision and Control*, 2014.
- [19] J. B. Rejeb, I.-C. Morărescu, and J. Daafouz, "Event triggering strategies for consensus in clustered networks," in *Proc. of the European Control Conference*, 2014.
- [20] V. D. Blondel, J. M. Hendrickx, A. Olshevsky, and J. Tsitsiklis, "Convergence in multiagent coordination, consensus, and flocking," in *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 2005, pp. 2996–3000.
- [21] A. Olshevsky and J. Tsitsiklis, "Convergence speed in distributed consensus and averaging," *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 48, no. 1, pp. 33–55, 2009.