La Négation en théorie de la démonstration, de Gerhard Gentzen à Jean-Yves Girard

Baptiste Mélès

La négation en théorie de la démonstration, de Gerhard Gentzen à Jean-Yves Girard*

Baptiste Mélès

13 mai 2009

Table des matières

Introduction **2**

I La négation chez Gentzen : d'une « exception gênante » à « l'opération logique la plus importante » **3**

1 La systématisation des règles logiques **3**

2 Première systématisation : la déduction naturelle **4**
- 2.1 Séquents et règles déductives 4
- 2.2 Symétrie des règles 5
- 2.3 La représentation arborescente des démonstrations 6
- 2.4 L'« exception gênante » de la négation 6

3 Deuxième systématisation : le calcul des séquents **7**
- 3.1 De nouveaux séquents 7
- 3.2 Symétrie de la négation 8
- 3.3 La dualité au cœur du système 9
- 3.4 Un nouveau dilemme 10

II La négation linéaire **11**

*Nous remercions vivement Jean Fichot, qui a relu ce texte et proposé de nombreuses corrections en dépit de délais très serrés. Nous avons essayé d'en tenir compte — dans la limite, hélas, de nos compétences ; toute erreur ou imprécision est donc imputable à la seule ignorance de l'auteur.

4 Les connecteurs linéaires **11**
4.1 L'implication linéaire ($\multimap$) 11
4.2 La conjonction multiplicative « fois » ($\otimes$) 13
4.3 La conjonction additive « avec » (&) 15
4.4 La disjonction additive « plus » ($\oplus$) 16
4.5 La disjonction multiplicative « par » ($\parr$) 16

5 Contexte additif et contexte multiplicatif **17**

6 Perfection et imperfection **19**
6.1 Les exponentielles 19
6.2 La rareté des ressources 20

7 Un nouveau concept de négation **21**

8 Subjectivité de la logique **23**

Annexes **26**

A Système de Hilbert **26**

B Déduction naturelle **27**

C Calcul des séquents classique (LK) **28**

D Logique linéaire classique (CLL) **29**

Introduction

La logique linéaire est un système inventé par le logicien Jean-Yves Girard en 1987. Plus qu'un n-ième système logique en un siècle qui vit proliférer cette espèce — formalisations de la logique classique, logique intuitionniste, temporelle, modale, quantique, épistémique, déontique, floue, paraconsistante, polyvalente, etc. — elle entend incarner une refondation de la logique : « La logique linéaire n'est pas simplement une autre logique exotique : elle offre un nouveau regard sur des notions de base qui semblaient avoir été fixées pour l'éternité[1]. »

Ce ne sera pourtant rien ôter à l'originalité de l'œuvre de Girard que de rendre à Gentzen ce qui appartient à Gentzen. Celui-ci n'est en effet pas seulement à la source du formalisme girardien, mais également des problèmes dont l'étude a permis l'invention de cette nouvelle logique. Les travaux de Gentzen ont fourni à Girard à la fois un problème et une ébauche de résolution. Aussi nous paraît-il inévitable de revenir sur ce qui ressemble à une

[1] Girard, Lafont et Taylor, *Proofs and Types*, B.5, p. 161.

dialectique interne des formalismes logiques, de Hilbert à Girard en passant par Gentzen. Nous entendons montrer comment l'attribution d'un rôle central à la négation a donné lieu à une reconstruction en profondeur de la logique.

Première partie

La négation chez Gentzen : d'une « exception gênante » à « l'opération logique la plus importante »

La tendance que nous analyserons dans l'histoire de la théorie de la démonstration, de la déduction naturelle à la logique linéaire, est une prise au pied de la lettre de l'expression « système logique ». D'un sens minimal du mot système — juxtaposition de règles —, on passe progressivement à un sens fort — ensemble de règles rigoureusement structuré. Aux seuls critères de cohérence et de complétude s'ajoute ainsi la symétrie. La systématicité, d'abord possédée par la théorie logique mais non explicitée, tend à se révéler : d'*en soi* elle devient *pour soi*. Gentzen puis Girard s'inscrivent dans cette tendance à la systématisation des principes logiques.

1 La systématisation des règles logiques

À l'instar de nombre de découvertes logiques et mathématiques majeures du XX[e] siècle, la théorie de la démonstration trouve sa source dans la « crise des fondements ». C'est en effet en vue de démontrer la consistance relative de l'arithmétique élémentaire que Gentzen inventa plusieurs systèmes logiques, dans la lignée desquels s'inscrit la logique linéaire. Comme la machine de Turing, les systèmes de Gentzen font partie de ces formalismes inventés originellement pour résoudre un problème très précis, et qui plus tard en furent détachés au vu de leur grande fertilité.

Les systèmes de Gentzen s'appellent la déduction naturelle et le calcul des séquents. Tous deux existent en une version classique et une version intuitionniste, cette dernière se caractérisant par le refus du tiers exclu.

	classique	intuitionniste
déduction naturelle	NK	NJ
calcul des séquents	LK	LJ

La caractéristique fondamentale de ces quatre systèmes est un très haut degré de systématicité. Avant les systèmes à la Gentzen régnaient en maîtres les systèmes de Hilbert, définis par une liste d'axiomes, à la façon des systèmes mathématiques[2] (cf. annexe A).

Sur le fond, ce formalisme se prête à peu d'objections fondamentales. Mais d'un point de vue spéculatif aussi bien que simplement esthétique, ces systèmes manquent pour le moins d'élégance. Les règles sont comme juxtaposées les unes aux autres, et il n'apparaît pas immédiatement quelles sont les raisons de privilégier telle règle, ou telle formulation de cette règle, plutôt qu'une autre qui lui eût été équivalente. Ironiquement, la logique, dont on attendait une mise en ordre de nos pensées, se révélait elle-même bien désordonnée, comme une personne en charge de l'entretien qui négligerait son propre domicile.

Ce défaut de fondation fut identifié assez tôt, dès les *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead : « Le travail préliminaire d'analyse n'apparaît pas dans la présentation finale [...]. Nous ne prétendons pas que l'analyse n'eût pas pu être poursuivie : nous n'avons aucune raison de supposer qu'il soit impossible de trouver des idées et axiomes plus simples au moyen desquels ceux dont nous partons puissent être définis et démontrés. Tout ce que nous affirmons est que les idées et axiomes dont nous partons sont suffisants, mais non qu'ils soient nécessaires[3] ». Introduire du nécessaire dans les axiomes logiques, systématiser les principes de la logique pour pallier ce défaut de structure, en somme « vaincre le hasard » signe par signe : tel est le sens des calculs inventés par Gerhard Gentzen.

2 Première systématisation : la déduction naturelle

2.1 Séquents et règles déductives

Les séquents Pour présenter le formalisme de Gentzen, il nous faut d'abord exposer la notion de séquent[4]. Un séquent est une structure élémentaire de démonstration, une sorte d'atome démonstratif. Il se présente en déduction naturelle sous la forme

$$\Gamma \vdash A$$

où Γ représente une liste de formules d'hypothèses séparées par des virgules, A une formule de conclusion, et le signe $\vdash$, équivalent à l'implication $\rightarrow$, sépare les formules d'hypothèses de la formule de conclusion. Intuitivement, ce séquent signifie que la formule A est vraie sous les hypothèses Γ.

Les règles La déduction naturelle décrit comment ces atomes démonstratifs peuvent, par leurs combinaisons, constituer des démonstrations in-

[2] David, Nour et Raffalli, *Introduction à la logique. Théorie de la démonstration*, section 1.7.4, p. 60–62.

[3] Russell et Whitehead, *Principia Mathematica*, Préface, p. vi.

[4] Il ne va pas sans anachronisme d'exposer la déduction naturelle dans le style des séquents ; mais bousculer légèrement la rigueur historique présente ici l'avantage d'unifier notre formalisme. Aucun dommage collatéral ne résulte, sur le fond, de ce parti pris.

tégrales. Une règle démonstrative est composée de zéro, un ou plusieurs séquents prémisses, séparés par un trait horizontal d'un unique séquent conclusion. Par exemple, la règle d'introduction de la conjonction

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

signifie que si, d'une part, on obtient A sous les hypothèses Γ et que, d'autre part, on obtient B sous les hypothèses Γ, alors, sous les mêmes hypothèses, on prouve $A \wedge B$.

2.2 Symétrie des règles

Introductions et éliminations Dans la déduction naturelle, le système logique n'est plus une énumération d'axiomes juxtaposés les uns aux autres de l'extérieur, mais un tableau rigoureusement construit selon une loi intérieure. Gentzen revendique le caractère systématique de ce nouveau calcul : « Les désignations adoptées plus haut pour les différentes figures de déduction (2.21) nous permettent d'apercevoir que notre calcul possède un caractère *systématique* qui est digne d'attention. À chacun des signes logiques &, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\neg$, appartient exactement une figure de déduction qui "introduit" ce signe — comme signe terminal d'une formule — et une figure qui l'"élimine[5]" ».

La règle d'*introduction* est celle qui, à partir de certaines hypothèses, prouve une formule comportant le signe concerné. Par exemple, la règle d'introduction de la disjonction $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i$ signifie que si l'on détient une preuve de la formule A, on possède *a fortiori* une preuve de la formule $A \vee B$.

La règle d'*élimination* consiste proprement à *utiliser* un signe, et par là le fait disparaître de la formule finale. Ainsi, la règle d'élimination gauche de la conjonction $\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g$ signifie que si l'on prouve $A \wedge B$, on démontre *a fortiori* que A.

À cet éventail d'introductions et d'éliminations, la déduction naturelle joint trois règles particulières, la dernière étant facultative.

Axiome L'identité ou axiome $\frac{}{\Gamma, A \vdash A}$ ax est la seule règle dérivable *ex nihilo*, c'est-à-dire dénuée de séquent prémisse. Elle permet de mesurer la simplification exercée par rapport aux systèmes de Hilbert : au lieu d'une litanie d'axiomes, la déduction naturelle n'en comporte qu'un seul, le plus pauvre et le plus général de tous, accompagné d'un jeu de règles fortement structurées.

[5] Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, §5, section 5.13, p. 26–27.

Affaiblissement L'affaiblissement $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$ aff signifie que l'on peut arbitrairement ajouter des hypothèses sans nuire aux conclusions que l'on en tire.

Absurdité classique La logique classique ajoute au système l'absurdité classique $\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_c$ qui correspond au tiers exclu, employé dans le raisonnement par l'absurde : si la négation d'une hypothèse est absurde, alors l'hypothèse est vraie.

La liste complexe d'axiomes qui caractérisait les systèmes de Hilbert cède ainsi la place à un tableau systématique de règles autorisant leur manipulation. Le système de la déduction naturelle est à la fois une simplification et une systématisation.

2.3 La représentation arborescente des démonstrations

La déduction naturelle, outre cette forte systématicité, présente une conception très innovante de la démonstration. Celle-ci n'est plus une simple succession linéaire d'axiomes et de propositions, mais devient un arbre. Démontrer une proposition revient à se demander « comment on en arrive là », et par conséquent à parcourir de bas en haut une série d'embranchements qui mènent à des hypothèses élémentaires. Voici par exemple comment l'on démontre l'axiome hilbertien $A \to (A \to B) \to B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{ax}}{A, A \to B \vdash A}\text{aff} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to B \vdash A \to B}\text{ax}}{A, A \to B \vdash A \to B}\text{aff}}{A, A \to B \vdash B}\to_e}{A \vdash (A \to B) \to B}\to_i}{\vdash A \to (A \to B) \to B}\to_i$$

La déduction naturelle donne proprement naissance à la théorie de la démonstration en permettant une analyse approfondie de la structure des preuves et de leurs propriétés formelles.

2.4 L'« exception gênante » de la négation

En dépit de toutes ces avancées, la systématicité de la déduction naturelle n'est pas aussi aboutie que l'on eût pu le souhaiter. Dans sa version classique, nécessaire si l'on souhaite conserver le plus grand nombre de résultats des mathématiques courantes, une règle rompt en effet la symétrie : la règle d'absurdité classique, équivalente au tiers exclu.

> « À partir du calcul *NJ*, on obtient un calcul classique complet, le calcul *NK*, par adjonction du "principe du tiers exclu" (*tertium non datur*). Cette adjonction se réalise comme suit : on permet de

prendre comme formules initiales de la dérivation, outre les formules-hypothèses, des "formules fondamentales" du type $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$, d'introduire un nouveau schéma de déduction, par exemple $\frac{\neg\neg\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$ (schéma analogue à celui qui est formé par Hilbert et par Heyting). Cependant, encore une fois, ce schéma de déduction tombe en dehors des cadres des figures de *NJ*-déduction en tant qu'il représente une nouvelle élimination de la négation, dont la validité ne découle nullement de la manière dont le signe de négation se trouve introduit dans le schéma *NE* [introduction de la négation][6]. »

Le tiers exclu fait donc doublement éclater la symétrie de la déduction naturelle, par excès et par défaut. Par excès, car il est la règle de trop : chaque opérateur doit posséder exactement une règle d'introduction et une d'élimination ; en fournissant une deuxième règle d'élimination de la négation, le tiers exclu ne trouve nulle part sa place dans le système. Mais il pèche également par défaut ; car à supposer qu'il doive remplacer l'élimination de la négation, alors un décalage apparaît entre l'introduction et l'élimination, qui perdent toute symétrie. Le tiers exclu introduit donc soit une dissymétrie externe, soit une dissymétrie interne.

La négation en devient le parent pauvre des opérateurs de la déduction naturelle classique. Elle nous place face à un dilemme : ou bien l'on accepte un système légèrement boîteux mais très expressif, celui de la déduction naturelle classique NK, ou bien l'on préfère un système parfaitement symétrique en sacrifiant certaines parties des mathématiques courantes. La responsable du dilemme n'est autre que la négation : pour résoudre ce conflit, Gentzen sera conduit à la placer au cœur d'un nouveau système.

3 Deuxième systématisation : le calcul des séquents

3.1 De nouveaux séquents

Le calcul des séquents peut être vu comme une généralisation de la déduction naturelle. Entre les deux systèmes, la différence tient presque à un détail : la possibilité d'écrire plusieurs formules dans la partie droite d'un séquent. Un séquent n'est donc pas nécessairement de la forme $\Gamma \vdash A$, mais plus généralement $\Gamma \vdash \Delta$, où les lettres grecques désignent, non des formules, mais des ensembles[7] de formules. Les virgules à gauche équivalent à une conjonction, les virgule à droite à une disjonction. Ainsi, le séquent

$$A_1, A_2, ..., A_n \vdash B_1, B_2, ..., B_n$$

équivaut à la formule

$$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n.$$

[6] Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, II, 5.3, p. 28.

[7] Plus précisément, des multiensembles : plusieurs occurrences d'un même élément sont autorisées.

Une fois encore, les règles sont exposées d'une manière systématique, selon un critère de symétrie. Mais la symétrie a changé de nature : elle ne se limite plus aux introductions et éliminations comme dans la déduction naturelle, mais s'étend plus fortement aux rapports entre hypothèses et conclusions, autrement dit entre gauche et droite. L'introduction à gauche de la conjonction est le reflet de l'introduction à droite de la disjonction, l'introduction à gauche de la disjonction celui de l'introduction à droite de la conjonction :

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\wedge_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\vee_d$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\vee_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\wedge_d$$

Gentzen ne préserve donc pas seulement le caractère systématique de son formalisme : il l'enrichit.

3.2 Symétrie de la négation

Mais le plus important à ses yeux est la position nouvelle de la négation dans le calcul des séquents.

> « Une fois un peu familiarisé avec ce nouveau concept de dérivation, on pourra constater qu'il permet d'effectuer des transformations de dérivations et de résoudre d'autres problèmes de théorie de la démonstration avec une simplicité et une élégance particulières. Ses avantages décisifs sont les suivants :
>
> Il y a une symétrie complète entre $\wedge$ et $\vee$, et entre $\forall$ et $\exists$. Tous les signes d'opérateur, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ et $\neg$ sont profondément égaux en droits dans ce système ; aucun d'entre eux n'a la précellence sur les autres. Avant toute chose la situation privilégiée de la négation, qui dans le calcul naturel constitue une exception gênante (cf. 4.56 et 5.26 du précédent travail), disparaît comme par enchantement. Je suis d'autant plus autorisé à le dire que j'ai moi-même, en mettant sur pied le "Calcul LK", été le plus surpris du monde de sa propriété. Le "principe du tiers exclu" et "l'élimination de la double négation" sont contenus dans les nouveaux schémas d'inférence — le lecteur s'en convaincra en les dérivant tous les deux dans le nouveau calcul — mais ils ont perdu tout leur venin [...][8]. »

De fait, le tiers exclu n'est plus la cinquième roue du carrosse logique, mais devient très facilement prouvable à partir du principe d'identité, via le slalom d'une formule entre les parties gauche et droite du séquent :

[8] GENTZEN, « Nouvelle Version de la démonstration de consistance pour l'arithmétique élémentaire », section 1.6, p. 367.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax}}{\vdash A, \neg A}\,\neg_d}{\neg\neg A \vdash A}\,\neg_g}{\vdash \neg\neg A \to A}\,\to_d$$

La preuve du tiers exclu dépend étroitement de la possibilité d'inscrire plusieurs formules de conclusion. Aussi la version intuitionniste du calcul des séquents, qui refuse le tiers exclu, doit-elle exclure cette possibilité, et limiter le nombre de formules de conclusion à zéro ou un :

> « Dans le *calcul classique NK*, le principe du tiers exclu occupait une situation exceptionnelle parmi les procédés de déduction (II, 5.3) parce qu'il n'était pas possible de l'intégrer au système des introductions et des éliminations. Dans le calcul logistique classique *LK* que l'on va décrire dans ce qui suit cette singularité se trouve levée. Ce qui rend la chose possible, c'est que l'on admet des séquences comportant plusieurs formules dans le conséquent, alors que le passage qui vient d'être indiqué, du calcul *NJ* à un calcul logistique, ne nous a conduit qu'à des séquences comportant *une seule* formule au conséquent [...].
>
> La symétrie que l'on obtient ainsi s'avère plus adéquate pour la logique classique.[9] »

3.3 La dualité au cœur du système

Il ne suffit pourtant pas de dire que la négation devient dans le calcul des séquents un opérateur aussi symétrique que les autres : elle devient bien plutôt l'opérateur par excellence.

Le signe $\vdash$ devient une sorte de miroir que toute formule peut traverser, mais à la condition de prendre une forme inversée. En traversant ce miroir, A devient $\neg A$, et réciproquement. En d'autres termes, la négation est *involutive*. Cette propriété n'est pas sans rappeler l'arithmétique élémentaire, dans laquelle une addition ne peut franchir le signe d'égalité qu'à la condition de se transformer en soustraction, et inversement. Et ce qui vaut pour une formule atomique vaut également pour des formules composées : en passant d'un côté à l'autre, une conjonction d'affirmations se transforme en disjonction de négations.

On aura reconnu les lois de De Morgan, ici transcendées : de « simples » théorèmes dérivables dans le système logique, elles sont promues en son cœur même. La systématicité est symétrie, la symétrie devient dualité, la dualité s'incarne dans les lois de De Morgan : des conjonctions d'une part, des disjonctions de l'autre, et la négation comme opérateur de traduction. Gentzen souligne cette symétrie, propriété essentielle du système à ses yeux :

> « Lorsque l'on laisse de côté les schémas *FES* [implication à droite] et *FEA* [implication à gauche[10]], le calcul *LK* jouit d'une *symétrie*,

[9] Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, III, 1.1, p. 42–43.

[10] Respectivement $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \vdash \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \Theta, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}$ FES et $\dfrac{\Gamma \vdash \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \vdash \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda}$ FEA .

au sens suivant : si l'on écrit toutes les séquences d'une LK-dérivation (dans lesquelles ne figure pas le signe $\supset$) sous forme renversée, c'est-à-dire en écrivant

$$\mathfrak{B}_\nu, ..., \mathfrak{B}_1 \vdash \mathfrak{U}_\mu, ..., \mathfrak{U}_1,$$

au lieu de

$$\mathfrak{U}_1, ..., \mathfrak{U}_\mu \vdash \mathfrak{B}_1, ..., \mathfrak{B}_\nu,$$

et si l'on intervertit, dans les figures de dérivation qui contiennent deux prémisses, la prémisse de droite et la prémisse de gauche ainsi que leurs dérivations respectives, si de plus on remplace chacun des signes & par un signe $\vee$, chacun des signes $\forall$ par un signe $\exists$, chacun des signes $\vee$ par un signe & et chacun des signes $\exists$ par un signe $\forall$ (en remplaçant & par $\vee$ et inversement, il faut en même temps échanger les deux champs d'action du signe, remplacer donc par exemple $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{U}$ par $\mathfrak{U} \,\&\, \mathfrak{B}$), on obtient de nouveau une *LK-dérivation*[11]. »

Les lois de De Morgan se trouvent ainsi inscrites dans le saint des saints du nouveau système logique, et fondent une symétrie totale. Toute formule peut passer de gauche à droite et réciproquement, à condition d'être frappée de négation. À travers les lois de De Morgan, c'est donc bien la négation qui acquiert un rôle central dans ce système. Elle devient le passeur entre les deux parties du séquent.

Girard salue cette innovation : « Cette symétrie s'articule autour d'un pivot constitué par le symbole de *négation*, de loin l'opération logique la plus importante et la plus problématique[12] », en précisant ailleurs la révolution sémantique qu'elle induit : « la négation n'est autre que l'échange gauche/droite. Il y a évidemment un changement de paradigme : au lieu de se concentrer sur le sens voulu de la négation, on travaille sur sa géométrie, qui se moque bien de nos intentions. Comparer avec le truisme tarskien : $\neg A$ est vrai quand A *n'est pas* vrai[13]. »

3.4 Un nouveau dilemme

Mais si Gentzen lève un dilemme, c'est pour en conserver un autre. Le dilemme entre symétrie et conservation optimale qui caractérisait la déduction naturelle (NJ et NK) disparaît ; mais reste le dilemme entre les logiques intuitionniste et classique LJ et LK.

La logique classique permet une conservation optimale des mathématiques, et possède l'élégante propriété de l'involutivité de la négation, fondement d'une symétrie parfaite. Mais la logique intuitionniste, plus faiblement symétrique, n'en possède pas moins la tout aussi précieuse propriété de constructivité : on ne peut rien affirmer, notamment dans une disjonction,

[11] Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, III, 2.4.

[12] Girard, *Philosophie de la logique linéaire : logique et informatique, point de vue d'un logicien ; la logique comme science de l'interaction*, « Logique et informatique : point de vue d'un logicien », section 1.6, p. 5.

[13] Girard, *Le Point aveugle. Cours de logique. I : Vers la perfection*, 3.2.4, p. 52.

dont on ne possède pas de preuve directe. Apparaît ainsi un conflit entre deux systèmes : l'un présentant de séduisantes propriétés formelles, l'autre offrant une plus grande certitude. Serions-nous condamnés à choisir entre d'élégantes propriétés formelles et l'assurance des vérités ?

On peut voir dans la succession de ces systèmes comme une série de phénomènes dialectiques. Un effort de systématisation de la logique traditionnelle avait fait apparaître, dans la déduction naturelle, un premier conflit, entre symétrie et conservation optimale. Ce conflit fut dépassé en un nouveau système, le calcul des séquents, garant à la fois de symétrie et de conservation optimale, mais aussitôt révélateur sous sa forme la plus pure d'un autre conflit plus profond, entre involutivité de la négation et constructivité. Résoudre ce nouveau conflit en un nouveau système plus fondamental encore est le défi de la logique linéaire, en cela héritière, non seulement des problèmes, mais de la méthode même de Gentzen.

Deuxième partie
La négation linéaire

La gageure de la logique linéaire fut d'associer en un système ce qui, chez Gentzen, ne se présente que dissocié en deux systèmes différents : la constructivité de LJ et la symétrie de LK.

Un séquent linéaire présente la même structure qu'un séquent traditionnel : une barre de dérivation, et une séparation par le signe $\vdash$ des hypothèses et des conclusions. En première approche, nous pouvons considérer que les virgules de gauche sont une *accumulation de ressources* et les virgules de droite une *obtention de résultats aux dépens les uns des autres*. Ainsi, le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ signifie qu'en accumulant les ressources de la liste Γ, je peux obtenir les résultats de la liste Δ aux dépens les uns des autres. Comme dans le système LK, nous avons donc « une sorte » de conjonction à gauche et « une sorte » de disjonction à droite, à condition que l'on n'y regarde pas de trop près.

4 Les connecteurs linéaires

4.1 L'implication linéaire ($\multimap$)

Le premier connecteur mis au jour par Jean-Yves Girard[14] fut l'implication linéaire $\multimap$. Celle-ci surmonte deux des difficultés que rencontrent certains débutants en logique. Précisons que nous n'allons pas présenter la moindre objection valide à la logique traditionnelle, mais seulement des pa-

[14] Girard, « Linear Logic », II, 2, p. 5.

ralogismes dérivés de confusions qui apparaissent parfois à l'esprit des débutants.

La première difficulté est celle de l'implication matérielle[15]. Une proposition telle que « si Dieu existe, alors $1+1=2$ » est classiquement vraie même si Dieu n'existe pas, et ce aussi longtemps que $1+1=2$.

Même lorsque la prémisse est vraie, une seconde difficulté apparaît, dans le lien entre implication logique et causalité physique. « S'il pleut, alors César a traversé le Rubicon » est vrai au moment où il pleut, quand bien même il paraisse impossible de mettre au jour le moindre rapport entre les deux propositions.

Pire encore : parfois, l'implication lie un événement présent à un événement passé, alors que l'on pourrait s'attendre à ce que la flèche épouse l'ordre temporel des événements. « Si je nage, alors je suis dans l'eau » est logiquement valide (dans le sens de « si je nage, alors *c'est que* je suis dans l'eau »), mais est parfois cause d'une certaine perplexité chez le débutant, qui tendrait plutôt à penser « si je suis dans l'eau, alors je nage », dans le sens où je suis dans l'eau avant de nager. La flèche de l'implication semble parfois parcourir à rebours l'axe temporel.

L'implication linéaire, en ce sens, correspond plus à l'intuition naturelle que nous avons de l'implication. Profitons-en, car c'est pour ainsi dire le seul connecteur linéaire qui soit plus « clair », ou en tout cas plus immédiatement intuitif, que son correspondant traditionnel ! La formule $A \multimap B$ signifie que l'on transforme A en B, le premier précédant généralement le second. Voici la flèche de l'implication réconciliée avec celle du temps. Jean-Yves Girard présente lui-même ce connecteur comme la justification rétrospective de l'implication stricte de Lewis[16].

Sommes-nous injuste avec la logique traditionnelle lorsque nous critiquons son implication au nom de la causalité et de la succession temporelle ? Rien n'est plus facile que de contrecarrer ce paralogisme, en usant d'un minimum de logique temporelle. Au lieu de $A \to B$, disons $A_{t_0} \to B_{t_1}$, et la flèche ira de nouveau dans le sens du temps. Mais ce que la logique traditionnelle ne peut réaliser qu'au prix d'un alourdissement marqué par les indices temporels, la logique linéaire en est capable de façon native. Bien souvent, l'avantage de la logique linéaire est de pratiquer avec la simplicité de l'ingénieur ce qui exigeait en logique traditionnelle le génie du bricolage[17] — bricolage mal ficelé puisqu'il passe finalement à côté du vrai temps logique, celui de la causalité[18]. Une image chère à Jean-Yves Girard est celle des systèmes astronomiques qui peuvent représenter avec élégance au moyen

[15] Girard, *Le Point aveugle. Cours de logique. I : Vers la perfection*, 10.2.1, p. 217–218.

[16] Girard, « Linear Logic », II, 2, p. 5.

[17] Girard, *Philosophie de la logique linéaire : logique et informatique, point de vue d'un logicien ; la logique comme science de l'interaction*, « La Logique comme science de l'interaction », I, 3.

[18] Girard, *Le Point aveugle. Cours de logique. I : Vers la perfection*, 10.A.4, p. 229.

d'ellipses ce que d'autres expriment lourdement avec force épicycles.

L'implication linéaire est définie par les règles suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \vdash \Delta, \Delta'} \multimap_g \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \multimap B, \Delta} \multimap_d$$

La deuxième règle peut être représentée intuitivement par la situation suivante. Soit un distributeur de boissons Γ avec une pièce de monnaie A, je peux obtenir un café B aux dépens des autres boissons de la liste Δ. J'ai donc la possibilité, si je le souhaite, n'étant donné que le distributeur, de transformer une pièce en café, mais ce sera aux dépens des autres boissons.

La première règle signifie que sur un petit lopin de terre Γ, on peut cultiver une citrouille A, aux dépens de toute autre production de la liste Δ (carottes, choux...). D'autre part, étant donné un bal costumé Γ' et un carrosse B, Cendrillon peut rencontrer son prince charmant parmi les danseurs de la liste Δ'. Par conséquent, étant donné le petit lopin de terre Γ, le bal costumé Γ', et étant supposé que la citrouille se transforme en carrosse ($A \multimap B$), alors Cendrillon peut récolter ou bien une production agricole de Δ mais pas de citrouille, ou bien un prince charmant parmi un ensemble Δ' de danseurs, mais chaque résultat sera obtenu aux dépens des autres.

4.2 La conjonction multiplicative « fois » ($\otimes$)

Le tenseur $\otimes$ définit un type de conjonction qui peut nous sembler familière : $A \otimes B$ n'est pas fondamentalement différent de $A \wedge B$. Mais il réside une différence essentielle, cruciale pour la logique linéaire : ce connecteur n'est pas idempotent. En logique traditionnelle on peut prouver $A \wedge A \leftrightarrow A$ (« si et seulement si je suis un chien et que je suis un chien, alors je suis un chien »), tandis qu'en logique linéaire, ni $A \otimes A \multimap A$ ni $A \multimap A \otimes A$ ne sont prouvables : si j'ai cinq euros et que j'ai cinq euros, alors je n'ai pas cinq euros, mais dix ; et si j'ai deux pièces de cinq euros, je n'en ai pas qu'une. On ne peut pas éliminer ni dupliquer impunément les reesources.

En d'autres termes, les règles du calcul des séquents qui ne sont pas acceptables de façon native en logique linéaire sont l'affaiblissement et la contraction[19]. La logique linéaire rend ainsi compte de l'absence d'affaiblis-

[19] L'affaiblissement est nécessaire pour prouver $A \wedge A \to A$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A}\ \mathrm{ax}}{A, A \vdash A}\ \textbf{aff}}{A \wedge A \vdash A}\ \wedge_g}{\vdash A \wedge A \to A}\ \to_d$$

et la contraction pour prouver $A \to A \wedge A$:

sement et de contraction qui caractérise bon nombre de phénomènes quotidiens : « La principale qualité d'une ressource est qu'on ne peut pas la dupliquer, autrement dit, que la règle de contraction ne s'applique pas. À un tel point, qu'on parle de *miracle* de la multiplication des pains et que la loi *réprime* sévèrement la duplication de la monnaie[20] ». Pour l'affaiblissement, il suffit de penser à la permanence de la substance et à l'interdiction de la destruction de monnaie.

La logique traditionnelle est-elle incapable de décrire ces phénomènes pourtant triviaux ? Une fois encore, il semble à première vue qu'il n'y ait rien ici qu'elle ne puisse récupérer à son compte, *modulo* une traduction adéquate, typiquement en marquant par des indices chaque individu. Mais là encore, la logique linéaire réalise nativement ce qui en logique traditionnelle exige un bricolage au moyen d'indices.

Allons plus loin. Sous le refus de l'idempotence se terre une philosophie, que Girard décrit, par provocation, sous le nom d'*existentialisme*, par opposition à l'*essentialisme* de la logique traditionnelle[21]. Cette dernière serait incapable de penser des différences d'existence sans les réduire à des différences d'essence : problème de la différence des indiscernables[22]. Alors même qu'aucune différence macroscopique n'apparaît entre deux billets de cinq euros, la logique traditionnelle paramètre chacun des deux billets, pour rétablir sous forme d'une différence d'indices la différence d'essence qui fait défaut. A et A sont identiques en tout, sauf en existence : mais l'essence revient par une porte dérobée lorsque l'on renomme le premier A en A_1, le second en A_2. Les différences d'existence sont en somme neutralisées par essentialisation.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax}}{A, A \vdash A}\,\text{aff}_g \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax}}{A, A \vdash A}\,\text{aff}_g}{A, A \vdash A \wedge A}\,\wedge_d}{A \vdash A \wedge A}\,\mathbf{contr}_g}{\vdash A \to A \wedge A}\,\to_d$$

La preuve plus courte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax}}{A \vdash A \wedge A}\,\wedge_d}{\vdash A \to A \wedge A}\,\to_d$$

paraît s'en passer ; mais la contraction y est transposée de façon implicite dans l'usage de la règle $\wedge_d$.

[20] Girard, *Le Point aveugle. Cours de logique. I : Vers la perfection*, 10.2.2, p. 219.

[21] Cf. ibid., 1.3.3, p. 12 : « Mon hypothèse est que la logique classique, la vérité classique, ne sont que des illusions essentialistes, qui s'auto-entretiennent. »

[22] Une anecdote de Russell est à cet égard assez révélatrice : « Ma première tentative pour traiter des difficultés relatives aux particuilers aboutit à un article que je lus devant l'*Aristotelician Society* en 1911 : "Sur les relations des Universaux et des Particuliers". Bergson, qui honorait la réunion de sa présence, fit avec surprise la remarque que je semblais penser que c'était l'existence des particuliers, et non celle des universaux, qui avait besoin d'être prouvée » (Russell, *Histoire de mes idées philosophiques*, cf. 14, p. 200–201).

À l'inverse, la logique linéaire est existentialiste en ceci qu'elle tolère nativement les différences d'existence. Au vu de la formule $A \otimes A \multimap A$, le logicien linéaire demande : « Où est passé l'autre A ? ». Voilà les raisons profondes qui font du tenseur $\otimes$ une conjonction sans idempotence, représentant une accumulation de ressources.

Ses règles d'introduction sont les suivantes.

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta}\otimes_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B, \Delta, \Delta'}\otimes_d$$

La première signifie simplement que par défaut, les ressources disponibles sont accumulées. Si j'ai un euro (A) et si j'ai dix centimes (B), alors j'ai un euro *et* dix centimes ($A \otimes B$).

Quant à la seconde règle, supposons que j'aie devant moi deux distributeurs de boissons Γ et Γ'. Le premier peut m'offrir un café A, aux dépens des autres boissons chaudes de la liste Δ ; le second, une bouteille d'eau B, aux dépens des autres boissons froides de la liste Δ'. En utilisant les deux distributeurs, je peux choisir d'obtenir un café et une bouteille d'eau ($A \otimes B$), mais ce sera aux dépens des autres boissons, chaudes comme froides (Δ, Δ').

Outre ces exemples tirés du quotidien, cette conjonction sans idempotence peut coder aisément certains processus chimiques. Utilisée naïvement, ou plutôt nativement — c'est-à-dire sans fioritures —, la logique traditionnelle peut prouver $2H \wedge O_2 \rightarrow 2H_2O$ à partir de $2H \wedge 2H \wedge O_2 \rightarrow 2H_2O$. Refusant l'idempotence, la logique linéaire exclut cette contraction des deux molécules d'hydrogène en une seule. C'est pourquoi l'on dit parfois à la suite de Jean-Yves Girard que la logique linéaire est une logique consciente de la rareté des ressources.

4.3 La conjonction additive « avec » (&)

Intuitivement, le connecteur & renvoie à une alternative qui dépend de nous. $A \& B$ signifie « j'ai le choix entre A et B ». Les formules qui définissent cet opérateur sont les suivantes.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\&_g^g \qquad\qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta}\&_g^d$$
$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta}\&_d$$

En ce qui concerne la première formule, supposons que nous soyons dans un restaurant Γ, et que pour une somme A, je puisse me faire servir un plat parmi ceux de la liste Δ. Alors *a fortiori*, si l'alternative s'offre à moi de donner la somme A ou bien de faire quoi que ce soit d'autre (chanter, sortir etc.), alors j'ai toujours la possibilité d'obtenir l'un de ces plats. Le tout est de faire le bon choix, car il est moins vraisemblable que ma chanson soit récompensée par une généreuse truffade que par une expulsion musclée.

L'introduction du connecteur « avec » à droite permet d'illustrer, outre des situations de la vie courante, certains processus quantiques. Étant donné un électron, je peux connaître sa position ; étant donné un électron, je peux connaître sa vitesse. En logique traditionnelle, rien ne nous interdit de prouver

$$\frac{e \vdash p \qquad e \vdash v}{e \vdash p \wedge v} \wedge_d$$

ce qui, interprété quantiquement, est une aberration : on ne peut connaître à la fois la vitesse et la position d'un électron. En logique linéaire, nous devrons choisir entre deux formulations :

$$\frac{e \vdash p \qquad e \vdash v}{e \vdash p \,\&\, v} \&_d \qquad\qquad \frac{e \vdash p \qquad e \vdash v}{e, e \vdash p \otimes v} \otimes_d$$

Dans le premier cas, les deux électrons sont identifiés, ce qui me force à choisir entre vitesse et position ; dans le deuxième cas, l'on convient qu'il s'agit de deux électrons différents, et je peux connaître une vitesse et une position. Quel que soit mon choix, la physique quantique est respectée.

4.4 La disjonction additive « plus » ($\oplus$)

Le connecteur « plus », noté $\oplus$, désigne l'alternative dont je ne suis pas maître. Dans un menu au restaurant, si une alternative dépend de l'arrivage, le client ne choisit pas son plat, il le subit.

Des deux formules

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta} \oplus_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta} \oplus_d$$

la première signifie que s'il faut un montant A en euros pour obtenir un objet de la liste Δ, et que par ailleurs il faille un montant B en dollars, alors selon la devise que le destin — et l'on ne choisit pas son destin — aura mise dans ma poche, je pourrai obtenir l'un de ces objets.

La seconde formule signifie que si une boulangerie me propose une baguette A aux dépens de divers pains Δ, alors elle me propose *a fortiori* une destinée déterminée entre une baguette et un tournevis, aux dépens des mêmes pains ; destinée qui ne dépend pas de moi, mais de la stratégie commerciale de mon boulanger.

4.5 La disjonction multiplicative « par » ($\parr$)

Venons-en maintenant à ce qui, de l'aveu même de son inventeur, est le connecteur le plus difficile à comprendre de la logique linéaire : « le plus abstrus de tous les connecteurs linéaires est *par*, dont la mise au jour n'eut lieu que par un processus purement formel[23] ». En 1988, Girard écrit encore : « Le connecteur $\parr$ ne s'explique pas facilement par de petits exemples comme ceux qui nous ont amusé jusqu'ici[24]. » Et en 2006 : « avec "Par", on atteint aux limites du langage usuel[25]. »

Autant les traductions intuitives des autres connecteurs convergent fortement selon les diverses expositions de la logique linéaire (causalité, accumulation de ressources, choix voulu, choix subi), autant celles de « par » présentent des visages divers. Girard emploie en plusieurs endroits l'image des vases communicants[26]. Deux phénomènes surviennent en même temps, mais non par simple accumulation extérieure : ils sont dépendants l'un de l'autre. Étant donné deux pistons, l'un s'abaissant à mesure que l'autre remonte, les deux phénomènes sont simultanés, et le mouvement de chaque piston dépend de celui de l'autre. On ne pourra pas baisser les deux pistons en même temps. Les deux phénomènes sont intriqués.

Une autre image est celle de l'échange[27] : dans notre exemple précédent, Cendrillon échange la culture des tomates contre un prince charmant, ou le prince charmant contre la culture des tomates.

L'un des principaux atouts de ce connecteur serait de pouvoir pour la première fois, aux dires de Jean-Yves Girard, coder la notion informatique de parallélisme au niveau logique[28]. On parle par exemple de parallélisme lorsqu'un même calcul est partagé entre plusieurs serveurs, ou plusieurs processeurs, qui échangent leurs résultats, chacun étant à l'écoute des autres en même temps qu'il leur parle. Ce connecteur exprime donc en un certain sens l'*action réciproque*, de même que l'implication linéaire représente une forme de causalité[29].

5 Contexte additif et contexte multiplicatif

Une fois passée la surprise de découvrir deux conjonctions et deux disjonctions au lieu d'une de chaque sorte, on aperçoit rapidement une symétrie : chacun des deux opérateurs existe en une version « multiplicative » et une

[23] Girard, « Linear Logic », II, 2, p. 5. Nous verrons plus loin en quoi consiste précisément cette mise au jour purement formelle.

[24] Girard, *Philosophie de la logique linéaire : logique et informatique, point de vue d'un logicien; la logique comme science de l'interaction*, « La logique comme science de l'interaction », I, 6, p. 11.

[25] Girard, *Le Point aveugle. Cours de logique. I : Vers la perfection*, 10.2.2, p. 221.

[26] Girard, *Philosophie de la logique linéaire : logique et informatique, point de vue d'un logicien; la logique comme science de l'interaction*, « La logique comme science de l'interaction », I, 6, p. 11. Voir aussi Girard, *Du Pourquoi au comment : la Théorie de la démonstration, du programme de Hilbert à la logique linéaire*, 10, p. 36–37.

[27] Lecomte, *La logique et l'informatique. La logique et les processus. Logique linéaire*, transparent n°93.

[28] Girard, « Linear Logic », I, p. 3.

[29] Les deux connecteurs sont par ailleurs traductibles l'un en l'autre : $A \multimap B = A^{\perp} \parr B$.

version « additive ».

Selon les termes de Jean-Yves Girard, le multiplicatif est un contexte « cumulatif », l'additif un contexte « alternatif[30] » ; ou encore, le multiplicatif traite le contexte par « juxtaposition », l'additif par « identification[31] ». Un exemple traditionnel dans la vulgarisation de la logique linéaire illustrera cette nuance cruciale. Avec cinq euros, je peux acheter un paquet de Camel ; avec cinq euros, un paquet de Marlboro. La logique traditionnelle déduit sans peine qu'avec le billet A de cinq euros, je peux acheter des Camel et des Marlboro :

$$\frac{A \vdash C \qquad A \vdash M}{A \vdash C \wedge M} \wedge_d$$

« La ruine de l'économie libérale[32] », conclut Girard. En logique linéaire, seule les formules suivantes sont correctes :

$$\frac{A \vdash C \qquad A \vdash M}{A \vdash C \,\&\, M} \&_d \qquad\qquad \frac{A \vdash C \qquad A \vdash M}{A, A \vdash C \otimes M} \otimes_d$$

Avec un seul billet, j'achète un seul paquet ; pour avoir les deux, il faut deux billets. L'ordre est sauf. Qui remercier ? la distinction entre le multiplicatif et l'additif, autrement dit entre l'accumulation et la fusion des contextes.

Un critère simple permet de distinguer les deux contextes : il suffit de compter les formules des séquents prémisses d'une part, de l'autre celles du séquent conclusion. Si le nombre est le même, nous sommes en contexte multiplicatif : rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme. Si le nombre est supérieur ou inférieur, le contexte est additif[33].

Mais approfondissons encore cette distinction. Pourquoi la logique classique confond-elle les conjonctions multiplicative et additive ? En d'autres termes, pourquoi confond-elle l'alternative et l'accumulation des ressources ? Les responsables de cette erreur sont deux des trois règles structurelles du calcul des séquents, à savoir l'affaiblissement et la contraction. Ce sont ces règles qui rendent équivalentes les deux conjonctions, chacune pouvant être dérivée de l'autre de la façon suivante :

[30] Girard, Lafont et Taylor, *Proofs and Types*, B.2, p. 152.

[31] Girard, « Linear Logic », II, 1, p. 5.

[32] Girard, *Philosophie de la logique linéaire : logique et informatique, point de vue d'un logicien ; la logique comme science de l'interaction*, « La logique comme science de l'interaction », I.2, p. 5.

[33] Peut-on définir, à la manière de Troelstra (Troelstra, *Lectures on Linear Logic*, section 4, p. 41 *sq.* et Troelstra et Schwichtenberg, *Basic Proof Theory*, section 9.3.2, p. 236 ; 9.3.3, p. 238 ; et 9.6.5, p. 257), une implication additive $A \rightsquigarrow B = A^{\perp} \oplus B$? Rien ne nous l'interdit, à la seule condition, comme l'observe Benjamino Accattoli, de ne pas considérer que toute implication $\Rightarrow$ doive vérifier $A \Rightarrow A$; car $A^{\perp} \oplus A$ n'est pas plus prouvable que $A \vee \neg A$ en logique intuitionniste, et pour les mêmes raisons de constructivité. Cf. Accattoli, *Introduction to Linear Logic*, diapositive n°33.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash C \qquad A \vdash M}{A \vdash C \wedge M}\wedge_d}{A, A \vdash C \wedge M}\text{aff}_g}{A \vdash C \wedge M}\text{contr}_g$$

Pour nous préserver de cette confusion, il nous faut donc supprimer l'affaiblissement et la contraction. La seule règle structurelle du calcul des séquents laissée intacte par la logique linéaire est l'échange : la logique linéaire, dans sa version courante, est commutative[34].

6 Perfection et imperfection

6.1 Les exponentielles

Il nous reste à introduire deux opérateurs linéaires, que l'on appelle modalités ou exponentielles.

Définition L'opérateur « bien sûr », noté par un point d'exclamation, correspond à l'abondance d'une ressource ; un billet dans ma poche est noté A ; dans la poche de Rockefeller, pour reprendre un exemple de Jean-Yves Girard, les billets sont notés $!A$. Quel que soit le nombre qu'il en puise, en pratique il en restera toujours un nombre suffisant : « l'infini, c'est ce qui ne s'use pas quand on s'en sert[35] ».

L'exponentielle « pourquoi pas », notée par un point d'interrogation, correspond au résultat potentiel, ou à une infinité potentielle de lectures.

Le « bien sûr » est une généralisation de l'accumulation de ressources (conjonction multiplicative $\otimes$), le « pourquoi pas » du parallélisme entre ressources (disjonction multiplicative $\parr$). Ces deux opérateurs jouent une fonction très importante dans le système.

D'abord, ils supportent l'affaiblissement et la contraction. Il serait donc abusif de dire que la logique linéaire supprime ces règles structurelles : en réalité, elle les soumet simplement à un contrôle. Elle montre que ce ne sont pas des opérations innocentes.

[34]Certaines versions non-commutatives ont été développées ultérieurement ; voir par exemple Abrusci, « Noncommutative Proof Nets », qui crée une logique linéaire non-commutative en supprimant l'échange et en introduisant deux négations : une rétronégation ${}^{\perp}A$ et une postnégation $A^{\perp}$, qui peuvent s'accumuler dans un sens comme dans l'autre, et se neutralisent réciproquement :

$$P^n = P^{\perp \cdots \perp} \tag{1}$$
$$P^{-n} = {}^{\perp \cdots \perp} P \tag{2}$$
$$(P^n)^{\perp} = P^{n+1} \tag{3}$$
$${}^{\perp}P^n = P^{n-1} \tag{4}$$
$${}^{\perp}(P^{\perp}) = ({}^{\perp}P)^{\perp} = P^0 = P \tag{5}$$

[35]Girard, *Le Point aveugle. Cours de logique. I : Vers la perfection*, 1.B.1, p. 15.

Intégration des logiques traditionnelles Par là-même, les exponentielles permettent de reconstituer les logiques classique et intuitionniste. L'implication traditionnelle $A \to B$ se traduit en logique linéaire par $!A \multimap B$: si l'on possède suffisamment de A, on peut en tirer un B. Il apparaît ainsi une opposition entre « une strate perfective (les connecteurs linéaires proprement dits) qui n'est pas obturée par l'essentialisme » et « la partie *imperfective*, les exponentielles, [qui] concentre tout l'aspect essentialiste de la logique [...]. En raccourci, essence = infini = exponentielles = modalités[36] ». Les logiques traditionnelles sont donc préservées en logique linéaire par un passage à la limite, de même que la mécanique classique est préservée par un passage à la limite de la mécanique quantique[37]. Réciproquement, tout énoncé linéaire peut être traduit en un énoncé classique en fusionnant les deux conjonctions en une seule, les deux disjonctions en une seule. L'énoncé reste valide, mais on y perd au change, car toute nuance entre le multiplicatif et l'additif s'efface. La logique linéaire est donc *plus fine* que les logiques traditionnelles : elle rend compte d'un plus grand nombre de différences, sans en perdre une seule.

6.2 La rareté des ressources

La différence fondamentale entre les logiques traditionnelles et la logique linéaire est dans la perception des ressources : les logiques traditionnelles partent du principe qu'elles sont inépuisables, la logique linéaire présuppose leur rareté — un certain concept de rareté, dont l'inépuisabilité n'est finalement qu'un cas particulier ! Cette différence de point de vue explique très naturellement la répartition sociologique de ces logiques : mathématiciens et philosophes se satisfont généralement des logiques traditionnelles, laissant la logique linéaire aux informaticiens théoriciens ou aux linguistes. Ce désintérêt est on ne peut plus naturel : mathématiciens comme philosophes manipulent couramment les ressources inépuisables que sont les axiomes, les théorèmes, les théories — en somme, les vérités éternelles. Or, les logiques traditionnelles sont particulièrement bien conçues pour manipuler des vérités éternelles. La plupart du temps, la logique linéaire ne leur est donc d'aucune utilité. Sauf à vouloir construire des démonstrations à contraintes oulipiennes, on ne voit aucune bonne raison de s'interdire de recourir deux fois au même axiome.

Mais de ce que les logiques traditionnelles soient taillées sur mesure pour les mathématiques et la philosophie, on ne saurait conclure à leur universalité. Nous avons vu plusieurs exemples tirés de la vie quotidienne, de la chimie, de la physique quantique, de l'informatique, qui montrent la grande finesse de la logique linéaire en même temps que l'embarras des logiques traditionnelles devant certains problèmes. En informatique notamment, cette nouvelle logique permet un traitement très fin des problèmes de parallélisme,

[36] Girard, *Le Point aveugle. Cours de logique. I : Vers la perfection*, 1.3.3, p. 12.
[37] Girard, « Linear Logic », II, 3, p. 6 et V, 6, p. 92.

de gestion de base de données, d'effets de bord, d'allocation de mémoire[38], etc.

La logique linéaire est ainsi décrite par son inventeur comme une logique, non des situations ou états de choses, mais des actions : « La logique classique décrivait des *situations*, la logique linéaire décrit des *actions*. La différence entre une *action* et une *situation*, c'est qu'une situation est statique : elle ne rencontre aucune opposition, n'entraîne aucune *réaction*, *elle ne coûte rien*. [...] Les logiques intuitionniste et classique apparaissent comme des *logiques des macro-actions* (la gestion des grandes quantités, comme en macro-économie), tandis que la logique linéaire est la logique des micro-actions, des quantités limitées (comme en micro-économie[39]). Celles-là ne sont donc que des cas limites de celle-ci — un peu comme la thermodynamique est un cas limite de la mécanique, et comme la mécanique classique est un cas limite de la mécanique quantique[40]. »

7 Un nouveau concept de négation

Aucune innovation formelle Qui attend de la négation linéaire une révolution formelle ne peut que s'exposer à une forte déception. Elle est, d'un point de vue formel, largement redevable au calcul des séquents défini par Gentzen. Comme dans le système LK, la dualité réside, via les lois de De Morgan, au cœur du formalisme : conjonction à gauche, disjonction à droite. Pour traverser le « miroir » $\vdash$, une formule doit être frappée de négation. Les opérateurs sont tous duaux entre eux : conjonction multiplicative et disjonction multiplicative, conjonction additive et disjonction additive, les exponentielles « bien sûr » et « pourquoi pas », ainsi que les quantificateurs linéaires[41]. For-

[38]Voir à ce propos :
- Girard, « Linear Logic », I, p. 3 ;
- Girard, *Philosophie de la logique linéaire : logique et informatique, point de vue d'un logicien ; la logique comme science de l'interaction*, « Logique et informatique, le point de vue d'un logicien », 4.2 ; « La Logique comme science de l'interaction », II, 2. ;
- Girard, Lafont et Taylor, *Proofs and Types*, appendice B, p. 150 ;
- Girard, « Intelligence artificielle et logique naturelle », p. 116 *sq.*

[39]Voir aussi Girard, *Philosophie de la logique linéaire : logique et informatique, point de vue d'un logicien ; la logique comme science de l'interaction*, « La Logique comme science de l'interaction », I.4.

[40]Girard, *Du Pourquoi au comment : la Théorie de la démonstration, du programme de Hilbert à la logique linéaire*, section 10, p. 35.

[41]Nous ne les avons pas traités ici car, de l'aveu même du créateur de la logique linéaire, ils innovent peu : Girard, « Linear Logic », II, 4, p. 6. Voir aussi Girard, *Le Point aveugle. Cours de logique. I : Vers la perfection*, 9.4.2, p. 201. Le quantificateur existentiel, comme celui de la logique intuitionniste, est constructif. À l'instar de la disjonction multiplicative linéaire $\parr$, il fut obtenu de manière purement formelle, par De-Morganisation, c'est-à-dire comme dual du quantificateur universel (Girard, « Linear Logic », IV, 4 ;3, p. 53.). Les quantificateurs universel et existentiel sont respectivement les généralisations des connecteurs additifs & et $\oplus$.

mellement, l'innovation est donc relativement restreinte : la négation joue un rôle analogue à celui que lui attribuait déjà le calcul des séquents.

L'absence ponctuelle En revanche, la négation acquiert un statut bien plus original au regard, non plus simplement des symétries du système, mais de la rareté des ressources propre à la logique linéaire — autrement dit, au regard du contrôle exercé sur l'affaiblissement et la contraction. L'idée de la négation comme *absence* dépend en effet d'une logique des vérités éternelles : traditionnellement, $\neg A$ signifie que j'ai beau demander un A aussi longtemps que je le voudrai, il sera en quelque sorte « inépuisablement absent ». La négation linéaire, quant à elle, est simplement ponctuelle : en somme, elle n'est pas moins éphémère que l'affirmation linéaire. $\neg A$ signifie qu'une ressource est absente à volonté ; $A^\perp$ (*nil* A), qu'elle est absente *une fois.*

La négation linéaire permet ainsi de représenter, non ce qui est éternellement faux, mais ce qui est consommé. L'implication linéaire $A \multimap B$, équivalente à $A^\perp \parr B$, signifie proprement que j'échange la consommation d'un A contre l'obtention d'un B. Transformer, c'est perdre une chose pour en gagner une autre. En termes hegeliens, le devenir est unification, en un même processus, de l'être et du non-être : si A devient B, c'est que A doit s'anéantir ($A^\perp$) pour que B fasse son apparition. Et cela ne signifie pas que A soit toujours faux, ou bien qu'il fasse toujours défaut : un seul A fait défaut, celui qui a été transformé. Les deux molécules d'hydrogène et la molécule d'oxygène font défaut, mais au change on a gagné une molécule d'eau. La logique linéaire fait ainsi disparaître simultanément l'éternité des vérités et celle des négations.

Le tiers exclu Le problème du tiers exclu, qui divise les logiques classique et intuitionniste, perd également tout son tranchant. Deux interprétations linéaires en sont possibles. La première, multiplicative, est triviale : on prouve $A \parr A^\perp$ comme le système LK prouve $A \vee \neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{ax}}{\vdash A, \neg A}\,\neg_d}{\neg\neg A \vdash A}\,\neg_g}{\vdash \neg\neg A \to A}\,\to_d \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{ax}}{\vdash A, A^\perp}\,\perp_d}{A^{\perp\perp} \vdash A}\,\perp_g}{\vdash A^{\perp\perp} \multimap A}\,\multimap_d$$

Cette interprétation du tiers exclu est valide jusque dans la logique intuitionniste : elle signifie simplement qu'une affirmation de A se fait nécessairement aux dépens de $A^\perp$; c'est le sens de la formule $A \parr A^\perp$.

Selon une interprétation additive, le tiers exclu est en revanche aussi inacceptable qu'en logique intuitionniste : pour prouver $A \oplus A^\perp$, il faudrait détenir soit une preuve de A, soit une preuve de $A^\perp$, ce qui est impossible en toute généralité. Processus dialectique, une fois encore : la dualité des logiques classique et intuitionniste est comme surmontée, pour devenir, non pas dualité externe entre deux systèmes, mais dualité interne à un seul et même système, en ses versions multiplicative et additive. La logique linéaire réussit le pari risqué d'hériter des propriétés enviables des logiques classique et intuitionniste — la symétrie de l'une, la constructivité de l'autre — sans pour autant verser dans l'éclectisme.

8 Subjectivité de la logique

La négation linéaire met encore en lumière un aspect logique original, à savoir le point de vue de l'observateur. Girard le fait remarquer dès l'article fondateur : « Le changement de point de vue à l'œuvre en logique linéaire est simple et radical : nous devons introduire un *observateur*[42] ». C'est dans les deux opérateurs additifs que la subjectivité du point de vue transparaît le mieux : en tant que client, je choisis entre deux desserts, choix qui s'exprime à l'aide de la conjonction additive « avec » ; mais le contenu des *antipasti* est laissé au libre choix du restaurateur, donc s'exprime pour moi au moyen de la disjonction additive « plus » : c'est un choix subi. Adoptons maintenant le point de vue du restaurateur : le choix du dessert est subi, mais celui des *antipasti* est libre.

Comme le calcul des séquents, la logique linéaire repose tout entière sur la dualité. Mais la dualité n'est plus la même : elle est passée au crible de la suppression de l'affaiblissement et de la contraction. La dualité n'est pas tant celle du vrai et du faux (logique classique), ni même du prouvable et du non-prouvable (logique intuitionniste), que celle de mes actions et de mes « passions », de ce qui dépend de moi et de ce qui n'en dépend pas. Plus qu'à l'opposition action/non-action, la négation linéaire correspond à la dualité action/réaction, lecture/écriture[43], ou encore donner/recevoir, demander/répondre, etc. La logique linéaire est plus une logique des échanges que des faits. La négation d'une action, en logique linéaire, n'est pas l'absence de cette action — le faux — mais l'« action inverse ».

La logique linéaire décrit l'interaction entre un acteur et le reste du monde : « Il y a en logique un point de référence implicite, non spécifié, disons "je" ; les possibilités dynamiques sont jaugées par rapport à ce "je". Maintenant, nous pouvons décider un changement de point de vue, c'est-à-dire intervertir le point de référence et le reste du monde : ce que nous voyons de l'intérieur sera vu de l'extérieur, et réciproquement. Des verbes comme *donner, lire* deviendront *recevoir, écrire* ; ce changement de point de vue est exprimé par la négation linéaire, notée $(-)^{\perp}$[44] ». Si l'on peut se permettre ce

[42] Girard, « Linear Logic », IV, IV.1, p. 17.

[43] Girard, *Du Pourquoi au comment : la Théorie de la démonstration, du programme de Hilbert à la logique linéaire.*

[44] Girard, *Philosophie de la logique linéaire : logique et informatique, point de vue*

rapprochement très approximatif, le fragment additif de la logique linéaire donne en quelque sorte une signification logique à la distinction opérée par Épictète entre ce qui dépend de nous et ce qui ne dépend pas de nous. Mais l'analogie s'arrête très vraisemblablement à ce niveau d'extrême généralité.

On peut par exemple interpréter en termes de don et de réception les connecteurs linéaires : les formules suivantes, toutes équivalentes, signifient que je reçois A et que je donne A. On me donne un objet, je le transmets.

$$\begin{array}{rcl} A & \vdash & A \\ & \vdash & A \multimap A \\ & \vdash & A^{\perp} \parr A \\ & \vdash & A^{\perp}, A \end{array}$$

La formule $\vdash A \otimes B$ signifie que je donne à la fois A et B. Quant à l'involutivité de la négation ($A^{\perp\perp} = A$), elle pourrait avoir la jolie interprétation morale suivante : donner, c'est recevoir une réception ; autrui m'offre l'acceptation de mon cadeau s'il daigne l'accepter. Autrui reçoit mon cadeau, et je reçois son acceptation du cadeau. Donner, c'est en même temps recevoir.

Dans cette dualité d'actions et non plus simplement d'états transparaît l'un des principes cruciaux de la logique linéaire : on pourrait parler d'un caractère orienté des actions. Une action n'a pas lieu dans un monde impersonnel, mais est le fait d'un acteur engagé dans le monde, et possédant une perspective propre. Lorsqu'il agit, il transforme le « reste du monde » ; lorsqu'il pâtit, c'est le reste du monde qui agit sur lui. La dualité qu'exprime la négation est celle de l'acteur et du reste du monde.

Conclusion

Une dialectique est ainsi apparue dans l'histoire de la théorie de la démonstration, dont la négation apparaît comme le principal moteur. Le premier effort de systématisation de la logique qu'était la déduction naturelle a posé une alternative peu satisfaisante entre symétrie et conservation optimale ; le calcul des séquents a dépassé cette alternative pour en raviver une autre, plus profonde, entre symétrie et constructivité ; la logique linéaire a surmonté à son tour cette nouvelle alternative en distinguant deux conjonctions et deux disjonctions. Chacun des systèmes a généralisé le précédent en le délivrant d'un dilemme.

Le plus admirable dans la logique linéaire est sans doute sa faculté d'intégrer élégamment les acquis des autres logiques, qu'elles soient classiques, intuitionnistes, temporelles, modales, quantiques ou autre ; le tout sans ver-

d'un logicien ; la logique comme science de l'interaction, « La Logique comme science de l'interaction », I.6, p. 10–11.

ser dans l'éclectisme ni dans une surenchère d'épicycles, mais au contraire de manière native.

L'histoire se termine-t-elle donc ici ? Rien n'est moins sûr. Girard a plus d'une fois appelé de ses vœux la constitution d'une logique linéaire non-commutative, c'est-à-dire délivrée de l'échange, dernière règle structurelle laissée intacte par la logique linéaire. Et à voir les pistes ouvertes par Michele Abrusci[45], une fois encore la négation est au cœur du processus : c'est en distinguant deux négations, comme Girard avait distingué deux conjonctions et deux disjonctions, que l'on peut se prendre à rêver d'approcher peut-être quelque équivalent logique du savoir absolu.

[45] Abrusci, « Noncommutative Proof Nets ».

Annexes

A Système de Hilbert

Nous reprenons ici le formalisme décrit dans Hilbert, « Les Fondements logiques des mathématiques », p. 134–137.

I. Axiomes de l'implication
   1. $A \to (B \to A)$ (adjonction d'une hypothèse)
   2. $[A \to (A \to B) \to (A \to B)]$ (suppression d'une hypothèse)
   3. $[A \to (B \to C)] \to [B \to (A \to C)]$ (échange des hypothèses)
   4. $(B \to C) \to [(A \to B) \to (A \to C)]$ (élimination d'une proposition)

II. Axiomes de la négation
   5. $A \to (\neg A \to B)$ (principe de non-contradiction)
   6. $(A \to B) \to [(\neg A \to B) \to B]$ (principe du tiers exclu)

III. Axiomes de l'égalité
   7. $a = a$
   8. $a = b \to (A(a) \to A(b))$

IV. Axiomes du nombre
   9. $a + 1 \neq 0$
   10. $\delta(a + 1) = a$

V. Axiome transfini
   11. $A(\tau A) \to A(a)$

VI. Axiomes de définition des quanteurs universel et existentiel
   12. $A(\tau(A)) \to (a)A(a)$
   13. $(a)A(a) \to A(\tau(A))$
   14. $A(\tau(\neg A)) \to (\exists a)A(a)$
   15. $(\exists a)A(a) \to A(\tau(\neg A))$

B Déduction naturelle

Introduction de l'implication $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to_i$

Élimination de l'implication $\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to_e$

Introduction de la conjonction $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$

Élimination de la conjonction $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$

Introduction de la disjonction $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_e^g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_e^d$

Élimination de la disjonction $\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_e$

Introduction de la négation $\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$

Élimination de la négation $\dfrac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot} \neg_e$

Introduction du quantificateur universel $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x A} \forall_i$

Élimination du quantificateur universel $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]} \forall_e$

Introduction du quantificateur existentiel $\dfrac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} \exists_i$

Élimination du quantificateur existentiel $\dfrac{\Gamma \vdash \exists x A \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad x \text{ non libre dans } \Gamma \text{ ou } C}{\Gamma \vdash C}$

Axiome $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ax}$

Affaiblissement $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \text{aff}$

Absurdité classique (propre à NK) $\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_c$

C Calcul des séquents classique (LK)

Axiome $\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax}$

Règles structurelles

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,\text{affaiblissement}_g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,\text{affaiblissement}_d$$

$$\dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,\text{contraction}_g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,\text{contraction}_d$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\,\text{échange}_g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\,\text{échange}_d$$

Règles des connecteurs logiques

$$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,\wedge_g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,\wedge_d$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\vee_g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\vee_d$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\,\to_g \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\,\to_d$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\neg_g \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\neg_d$$

$$\dfrac{\Gamma, A[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\,\forall_g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad x \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\,\forall_d$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad x \text{ non libre dans } \Gamma, \Delta}{\Gamma, \exists A \vdash \Delta}\,\exists_g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A[x := t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\,\exists_d$$

Règle de coupure $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,\text{coupure}$

Calcul des séquents intuitionniste (LJ) Le calcul LJ diffère du calcul LK par l'impossibilité d'écrire plus d'une formule à droite ; ses règles sont donc assez proches de celles de la déduction naturelle intuitionniste NJ.

D Logique linéaire classique (CLL)

Axiome et coupure

$$\frac{}{A \vdash A}\ \text{ax} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{coupure}$$

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ \text{échange}_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ \text{échange}_d$$

Règles des connecteurs logiques

	Conjonction	Disjonction	Implication
Multiplicative	fois $\otimes$	par $\parr$	implication linéaire $\multimap$
Additive	avec $\&$	plus $\oplus$	

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta}\ \otimes_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B, \Delta, \Delta'}\ \otimes_d$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \,\&\, B \vdash \Delta}\ \&_g^g \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \,\&\, B \vdash \Delta}\ \&_g^d \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \,\&\, B, \Delta}\ \&_d$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \parr B \vdash \Delta, \Delta'}\ \parr_g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \parr B, \Delta}\ \parr_d$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}\ \oplus_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}\ \oplus_d \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}\ \oplus_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \vdash \Delta, \Delta'}\ \multimap_g \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \multimap B, \Delta}\ \multimap_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, A^\perp \vdash \Delta}\ \perp_g \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A^\perp, \Delta}\ \perp_d$$

Exponentielles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}\ \text{aff}_! \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}\ \text{contr}_!$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}\ \text{dér}_! \qquad\qquad \frac{!\Gamma \vdash A, ?\Delta}{!\Gamma \vdash !A, ?\Delta}\ \text{prom}_!$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta}\ \text{aff}_! \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta}\ \text{contr}_?$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta}\ \text{dér}_! \qquad\qquad \frac{!\Gamma, A \vdash ?\Delta}{!\Gamma, ?A \vdash ?\Delta}\ \text{prom}_!$$

Bibliographie

ABRUSCI Michele, « Noncommutative Proof Nets », dans : *Advances in Linear Logic*, éd. par Jean-Yves GIRARD, Yves LAFONT et Laurent REGNIER, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge : Cambridge University Press, 1995, p. 271–296.

ACCATTOLI Beniamino, *Introduction to Linear Logic*, sept. 2008, URL : `http://www.dis.uniroma1.it/~seminf/seminars/introduzioneallaLL.pdf`.

BRÄUNER Torben, *Introduction to Linear Logic*, BRICS Lecture Series, déc. 1996, URL : `http://www.brics.dk/LS/96/6/BRICS-LS-96-6/BRICS-LS-96-6.html`.

DAVID René, Karim NOUR et Christophe RAFFALLI, *Introduction à la logique. Théorie de la démonstration*, Sciences Sup, Paris : Dunod, 2003, 2001.

DI COSMO Roberto et Dale MILLER, *Linear Logic*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2006, URL : `http://plato.stanford.edu/entries/logic-linear/`.

GENTZEN Gerhard, « La Consistance de l'arithmétique élémentaire », dans : *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, éd. par Jean LARGEAULT, Mathesis, Première édition : « Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie », *Math. Annal.* 112, 1935, p. 493–565, Paris : Vrin, 1992, chap. XX, p. 285–357.

— « Nouvelle Version de la démonstration de consistance pour l'arithmétique élémentaire », dans : *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, éd. par Jean LARGEAULT, Mathesis, Première édition : « Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie », *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, 4, 1938, p. 19–44, Paris : Vrin, 1992, chap. XXI, p. 359–394.

— *Recherches sur la déduction logique*, Philosophie de la matière, Première édition : « Untersuchungen über das logische Schliessen », *Math. Z.* 39, p. 176–210 et 405–431. Traductions et commentaires par Robert Feys et Jean Ladrière, Paris : Presses Universitaires de France, 1955.

GIRARD Jean-Yves, *Du Pourquoi au comment : la Théorie de la démonstration, du programme de Hilbert à la logique linéaire*, 1997, URL : `http://iml.univ-mrs.fr/~girard/Articles.html`.

— « Intelligence artificielle et logique naturelle », dans : *La Machine de Turing*, éd. par Alan TURING et Jean-Yves GIRARD, Points Sciences, Paris : Seuil, 1995, chap. 3, p. 105–131.

— « La Logique comme géométrie du cognitif (manifeste) », dans : *Logique, dynamique et cognition*, éd. par Jean-Baptiste JOINET, Logique, Langage, Sciences, Philosophie, Paris : Publications de la Sorbonne, 2007, p. 13–29, URL : `http://iml.univ-mrs.fr/~girard/Articles.html`.

GIRARD Jean-Yves, « La Logique linéaire », dans : *Pour la Science* 150 (avr. 1990), p. 74–85.

— « La Machine de Turing : de la calculabilité à la complexité », dans : *La Machine de Turing*, éd. par Alan TURING et Jean-Yves GIRARD, Points Sciences, Paris : Seuil, 1995, chap. 1, p. 11–45.

— *Le Point aveugle. Cours de logique. I : Vers la perfection*, Visions des sciences, Paris : Hermann, 2006.

— *Le Statut paradoxal du paradoxe*, déc. 2007, URL : `http://iml.univ-mrs.fr/~girard/Articles.html`.

— *Les Fondements des mathématiques*, Université de Tous les Savoirs, juin 2000, URL : `http://iml.univ-mrs.fr/~girard/Articles.html`.

— « Linear Logic », dans : *Theorical Computer Science* 50 (1987), p. 1–102, URL : `http://iml.univ-mrs.fr/~girard/Articles.html`.

— *Philosophie de la logique linéaire : logique et informatique, point de vue d'un logicien ; la logique comme science de l'interaction*, 1988, URL : `http://unesdoc.unesco.org/images/0008/000832/083213fb.pdf`.

— *Proof Theory and Logical Complexity, I.*, Studies in Proof Theory, Napoli : Bibliopolis, 1987.

GIRARD Jean-Yves, Yves LAFONT et Paul TAYLOR, *Proofs and Types*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge : Cambridge University Press, 1989.

HILBERT David, « Les Fondements logiques des mathématiques », dans : *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, éd. par Jean LARGEAULT, Mathesis, Paris : Vrin, 1992, chap. VI, p. 131–144.

LAFONT Yves, « From Proof Nets to Interaction Nets », dans : *Advances in Linear Logic*, éd. par Jean-Yves GIRARD, Yves LAFONT et Laurent REGNIER, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge : Cambridge University Press, 1995, p. 271–296.

LALEMENT René, *Logique, réduction, résolution*, Études et recherches en informatique, Paris : Masson, 1990.

LARGEAULT Jean, éd., *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Mathesis, Paris : Vrin, 1992.

LECOMTE Alain, *La logique et l'informatique. La logique et les processus. Logique linéaire*, 2006, URL : `http://lecomte.al.free.fr/college_doctoral.htm`.

LINCOLN Patrick, *Linear Logic*, 1992, URL : `http://www.csl.sri.com/~lincoln/papers/sigact92.ps`.

RUSSELL Bertrand, *Histoire de mes idées philosophiques*, Tel, Paris : Gallimard, 1961.

RUSSELL Bertrand et Alfred North WHITEHEAD, *Principia Mathematica*, t. I, Cambridge : Cambridge University Press, 1910.

TRAONOUEZ Louis-Marie, David DELFIEU et Olivier (H.) ROUX, *Synthèse de contraintes de conception à partir de réseaux de Petri temporels pa-*

ramétrés, Lyon, oct. 2007, URL : http://www.irccyn.ec-nantes.fr/~traonoue/formats08-technical_report.pdf.

TROELSTRA Anne Sjerp, *Lectures on Linear Logic*, Lecture Notes, Stanford : Center for the Study of Language et Information, 1992.

TROELSTRA Anne Sjerp et Helmut SCHWICHTENBERG, *Basic Proof Theory*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge : Cambridge University Press, 1996.