



**HAL**  
open science

## Quelques notions d'espaces stratifiés

Benoît Kloeckner

► **To cite this version:**

Benoît Kloeckner. Quelques notions d'espaces stratifiés. Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, 2008, 26, pp.13-28. hal-01224986

**HAL Id: hal-01224986**

**<https://hal.science/hal-01224986v1>**

Submitted on 5 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Benoît KLOECKNER

**Quelques notions d'espaces stratifiés**

Volume 26 (2007-2008), p. 13-28.

[<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2007-2008\\_\\_26\\_\\_13\\_0>](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2007-2008__26__13_0)

© Institut Fourier, 2007-2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## QUELQUES NOTIONS D'ESPACES STRATIFIÉS

Benoît Kloeckner

À partir d'une idée commune (considérer des espaces partitionnés en éléments « simples », comme des variétés) et en fonction de différents objectifs, de nombreuses définitions voisines de la notion d'espaces stratifiés ont été données. Cet article se veut une présentation succincte de quelques-unes de ces notions. En plus de définitions précises, on indiquera les liens qu'elles entretiennent les unes par rapport aux autres et on présentera quelques résultats emblématiques. Les choix qui ont été faits comportent une bonne part d'arbitraire, et ont plus été guidés par les limitations de l'auteur que par un quelconque jugement de valeur. L'ordre choisi n'est pas chronologique, on trouvera une brève présentation historique dans [4], pages 33–35. Le survol [9] contient beaucoup d'informations complémentaires au contenu du présent article, en particulier certains aspects topologiques des espaces stratifiés y sont détaillés.

Les sections qui suivent abordent respectivement : le cœur commun à toutes les notions de stratification (section 1), puis les définitions de Whitney (section 2), Thom–Mather (section 3), Siebenmann et Goresky–MacPherson (section 4), et enfin Quinn (section 5). Pour limiter les risques de confusion, on a choisi de donner à chaque type d'espace le nom du mathématicien ayant introduit sa définition plutôt que le nom que celui-ci lui a donné initialement.

## 1. Stratifications : une partie commune

### 1.1. Stratification et condition de frontière

Un espace stratifié est un espace topologique, auquel on demande en général des conditions minimales (séparation, base dénombrable d'ouverts, etc.). Pour plus de simplicité, on le supposera métrisable et séparable, ce qui couvrira tous nos besoins au prix d'une légère restriction dans certains cas.

Le noyau de toutes les définitions qui vont suivre est la décomposition d'un espace topologique en parties « bien agencées » les unes par rapport aux autres. Cet agencement est le principal point sur lequel les définitions diffèrent, mais il comporte toujours la « condition de frontière ».

**DÉFINITION 1.1.** — *Soit  $X$  un espace topologique métrisable et séparable. On appelle stratification de  $X$  une partition localement finie  $\mathcal{S} = (X^{(s)})_{s \in S}$  de  $X$  dont les éléments, appelés strates, sont localement fermés et qui vérifie la condition de frontière : pour tous  $r, s \in S$ ,*

$$X^{(r)} \cap \bar{X}^{(s)} \neq \emptyset \text{ si et seulement si } X^{(r)} \subset \bar{X}^{(s)}$$

*Le couple  $(X, \mathcal{S})$  est un espace stratifié.*

*Une application  $\Phi : X \rightarrow Y$  entre deux espaces munis de stratifications est un isomorphisme si c'est un homéomorphisme qui envoie strate sur strate.*

Rappelons qu'une partition est localement finie si tout point de  $X$  admet un voisinage qui n'en rencontre qu'un nombre fini d'éléments. Une partie  $A$  est localement fermée si chacun de ses points admet un voisinage  $U$  tel que  $A \cap U$  soit fermé dans  $U$ . Ceci revient à demander que  $A$  soit l'intersection d'un ouvert et d'un fermé, ou encore que  $A$  soit ouverte dans son adhérence.

La condition de frontière peut se formuler ainsi : l'adhérence d'une strate est une union de strates. Il convient de la rapprocher de la propriété analogue demandée aux complexes simpliciaux, où l'adhérence d'une face est une union de faces. Elle est parfois cachée : il arrive qu'on définisse une stratification comme une filtration

$$(1.1) \quad X = X_{(n)} \supset X_{(n-1)} \supset \cdots \supset X_{(1)} \supset X_{(0)} \supset X_{(-1)} = \emptyset$$

où les  $X_{(k)}$  sont fermés et où, en définissant  $X^{(k)} := X_{(k)} \setminus X_{(k-1)}$ , on a  $\bar{X}^{(k)} = X_{(k)}$ . Une telle stratification rentre dans le cadre de la définition 1.1, et dans la plupart des cas intéressants (les stratifications de profondeur finie, voir plus loin) les stratifications au sens de la définition 1.1 peuvent être modifiées pour obtenir une telle filtration.

Étant donné une stratification  $\mathcal{S} = (X^{(s)})_{s \in S}$  de  $X$ , on peut définir une relation d'incidence  $\preccurlyeq$  sur l'ensemble  $S$  des indices par :

$$r \preccurlyeq s \quad \text{si et seulement si} \quad X^{(r)} \cap \bar{X}^{(s)} \neq \emptyset$$

Le résultat suivant est une conséquence simple mais importante de la condition de frontière.

PROPOSITION 1.2. — *Dans une stratification, la relation d'incidence est une relation d'ordre.*

*Démonstration.* — Considérons un espace stratifié  $(X, \mathcal{S} = (X^{(s)})_{s \in S})$ . La relation  $\preccurlyeq$  est clairement réflexive ; montrons qu'elle est transitive et anti-symétrique.

Supposons  $r \preccurlyeq s$  et  $s \preccurlyeq t$ . Alors d'après la condition de frontière on a  $X^{(s)} \subset \bar{X}^{(t)}$  donc  $\bar{X}^{(s)} \subset \bar{X}^{(t)}$ . On a également  $X^{(r)} \subset \bar{X}^{(s)}$ , d'où on tire  $X^{(r)} \subset \bar{X}^{(t)}$ . Ainsi,  $r \preccurlyeq t$ .

Supposons  $r \preccurlyeq s$  and  $s \preccurlyeq r$ . Alors  $\bar{X}^{(s)} = \bar{X}^{(r)}$ , encore par la condition de frontière. Soit  $x$  un point de  $X^{(s)}$  et  $U$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$  tel que  $\bar{X}^{(s)} \cap U$  soit fermé dans  $U$ . Comme  $x \in X^{(s)} \subset \bar{X}^{(r)}$ , la partie  $X^{(r)} \cap U$  est non vide et on peut y choisir un point  $y$ . Comme  $X^{(r)} \subset \bar{X}^{(s)}$ , ce point est dans  $U$  et dans l'adhérence de  $X^{(s)}$ , donc  $y \in X^{(s)}$ . On a montré que  $X^{(s)}$  et  $X^{(r)}$  ont un point commun, et comme  $\mathcal{S}$  est une partition on a nécessairement  $s = r$ . □

On note  $r \prec s$  si  $r \preccurlyeq s$  et  $r \neq s$ . La proposition 1.2 amène naturellement à la notion de profondeur.

DÉFINITION 1.3. — *Dans un espace stratifié  $(X, \mathcal{S})$ , la profondeur d'une strate  $X^{(s)}$  est la longueur maximale  $k$  d'une suite*

$$s = s_0 \prec s_1 \prec \dots \prec s_k.$$

*La profondeur de  $(X, \mathcal{S})$  est la borne supérieure des profondeurs des strates.*

Cette définition de la profondeur n'est pas universelle, mais c'est la plus adaptée à la définition 1.1.

La profondeur d'une strate est toujours finie (car la partition  $\mathcal{S}$  est localement finie, donc l'ensemble des indices supérieurs à  $s$  est fini) mais celle de la stratification peut être infinie.

Si  $(X, \mathcal{S})$  est de profondeur finie  $n$ , en notant  $X_{(n-k)}$  l'union des strates de profondeur au moins  $k$  on obtient une filtration en parties fermées de la forme (1.1).

## 1.2. Exemples

*Exemple 1.4.* — Un complexe simplicial localement fini est naturellement stratifié par ses faces.

*Exemple 1.5.* — Considérons un espace  $Y$  et un entier naturel  $n$ . Le groupe  $\mathfrak{S}_n$  agit sur  $Y^n$  par permutation des facteurs, et on note  $Y_{[n]}$  le quotient. L'image d'un élément  $(x_1, \dots, x_n) \in Y^n$  est notée  $[x_1, \dots, x_n]$ .

Soit  $P$  l'ensemble des suites croissantes d'entiers  $(p_1, \dots, p_\ell)$  dont la somme vaut  $n$ . À un élément  $[x_1, \dots, x_n] \in Y_{[n]}$  on associe un élément de  $P$  de la façon suivante. On définit une relation d'équivalence sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  par :  $i \sim j$  si et seulement si  $x_i = x_j$ . L'élément de  $P$  associé est alors la suite ordonnée des cardinaux des classes d'équivalence de cette relation ; elle est indépendante de l'ordre des  $x_i$ , donc bien définie en fonction de  $[x_1, \dots, x_n]$ .

On note  $Y_{[n]}^{(p)}$  l'ensemble des éléments de  $X$  dont l'élément de  $P$  associée est  $p$ . Alors

$$\mathcal{P} = \left( Y_{[n]}^{(p)} \right)_{p \in P}$$

est une stratification de  $Y_{[n]}$ , de profondeur  $n - 1$ .

Si  $Y$  est le cercle, on peut vérifier que  $Y_{[2]}$  est un ruban de Möbius fermé, avec comme strates l'intérieur et le bord.

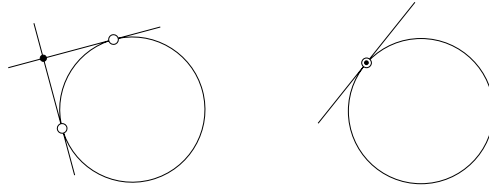


FIG. 1.1. L'espace  $S_{[2]}^1$  est un ruban de Möbius fermé : le cercle est considéré plongé dans le plan projectif, une paire de points distincts est identifiée à l'intersection de leur droites tangentes. Lorsque les points convergent l'un vers l'autre, cette intersection converge vers un point du cercle.

*Exemple 1.6.* — Donnons un exemple d'espace stratifié « pathologique », de profondeur infinie. Soit  $C_0 = ]0, 1[$  et  $C_1$  une partie de  $\mathbb{R}^2$  composée d'un segment  $I = ]0, 1[ \times \{0\}$  et de l'image d'un chemin simple  $\gamma$  s'accumulant sur  $I$ . L'image de  $\gamma$  et  $I$  forment une stratification de  $C_1$  de profondeur 1. Le chemin  $\gamma$  est une application  $]0, 1[ \rightarrow C_1$  qui est un

isomorphisme sur son image. On définit  $C_2$  comme l'union de deux copies de  $C_1$ , recollée ensemble par l'application  $\gamma$  (la strate minimale de la première copie étant ainsi identifiée à la strate maximale de la seconde). On définit récursivement  $C_k$  comme l'union disjointe de  $C_{k-1}$  et  $C_1$ , la strate minimale de  $C_{k-1}$  étant identifiée par  $\gamma$  à la strate maximale de  $C_1$  (voir figure 1.2). Pour tout  $k$  on dispose d'une injection  $C_{k-1} \rightarrow C_k$ , et on note  $C_\infty$  la limite inductive associée. C'est un espace topologique métrisable et séparable, naturellement stratifié, de profondeur infinie.

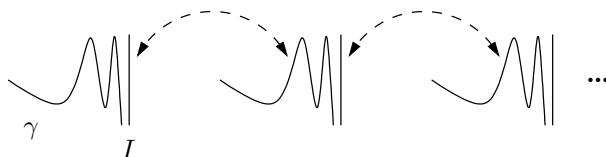


FIG. 1.2. Un espace stratifié de profondeur infinie.

*Exemple 1.7.* — Si  $(X, \mathcal{S})$  et  $(Y, \mathcal{T})$  sont des espaces stratifiés, l'ensemble  $\mathcal{S} \cdot \mathcal{T}$  des produits  $X^{(s)} \times Y^{(t)}$  d'une strate de chacun des espaces est une stratification de  $X \times Y$  qu'on appelle stratification produit.

On définit le cône (ouvert) sur  $X$  comme le quotient

$$cX = X \times ]0, 1[ / X \times \{0\}.$$

La famille formée des produits  $X^{(s)} \times ]0, 1[$  et du sommet du cône (le point du quotient qui est l'image de  $X \times \{0\}$ ) est alors une stratification de  $cX$ .

De la même façon, on munit le joint  $X \star Y$ , quotient de  $X \times Y \times [0, 1]$  par les relations  $(x, y, 0) \sim (x', y, 0)$  et  $(x, y, 1) \sim (x, y', 1)$ , d'une stratification dont les strates sont : les produits  $X^{(s)} \times Y^{(t)} \times ]0, 1[$ , les images des produits  $X \times Y^{(t)} \times \{0\}$  et les images des produits  $X^{(s)} \times Y \times \{1\}$ .

Remarquons que le produit de deux cônes est encore un cône, grâce à la relation :

$$cX \times cY \simeq c(X \star Y)$$

voir la figure 1.3 pour un exemple.

### 1.3. Stratifications dont les strates sont des variétés

La plupart du temps, on demande que les strates appartiennent à une catégorie d'espace topologique particulière. On note TOP la catégorie des variétés topologiques, DIFF celle des variétés lisses, ANA celle des variétés

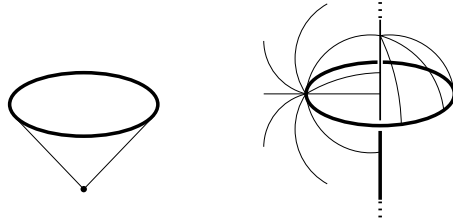


FIG. 1.3. Exemple de produit de cônes : le cône sur un cercle est un disque ; le joint de deux cercles est une sphère  $S^3$  ; le produit de deux disques est bien isomorphe au cône sur  $S^3$ .

analytiques réelles et PL celle des variétés affines par morceaux ; ce sont les plus usitées. Dans chacune de ces catégories, on a de plus une notion de dimension, et on demande en général que des strates incidentes aient des dimensions ordonnées.

DÉFINITION 1.8. — Si  $CAT$  est une catégorie de variétés ( $TOP$ ,  $DIFF$ ,  $ANA$  ou  $PL$ ), une  $CAT$  stratification est une stratification dont les strates sont des objets de  $CAT$ , dont la dimension est bornée et vérifiant la condition suivante : si  $r < s$  alors  $\dim X^{(r)} < \dim X^{(s)}$ .

Si on note  $d_1 > d_2 > \dots$  les différentes dimensions des strates d'un espace  $CAT$  stratifié  $(X, \mathcal{S})$ , on dit que  $d_1$  est la dimension de  $X$  et  $d_1 - d_2$  sa codimension singulière.

Cette définition permet, dans le cas où les dimensions des strates sont bornées, d'obtenir une filtration de la forme (1.1) en notant  $X_{(k)}$  l'union des strates de dimension au plus  $k$ . Ce n'est en général pas la même filtration que celle obtenue à l'aide de la profondeur.

Exemple 1.9. — Une variété lisse à bord est naturellement  $DIFF$  stratifiée par son bord et son intérieur.

Une  $CAT$  stratification est ainsi de profondeur finie. L'exemple 1.6 n'est  $CAT$  stratifié pour aucune catégorie, tandis que l'exemple 1.5 est  $CAT$  stratifié si  $Y$  est un objet de  $CAT$ . Il ne faut cependant pas croire que cette définition élimine toutes les pathologies.

Exemple 1.10. — Un plongement lisse bien choisi (figure 1.4) de la droite dans le plan, s'accumulant sur un point, fournit un espace  $DIFF$  stratifié qui n'est pas localement connexe.

Pour obtenir des théorèmes généraux, il est nécessaire de réduire la classe d'espaces considérée en requérant des conditions sur la façon dont les



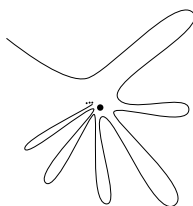


FIG. 1.4. Un espace *DIFF* stratifié non localement connexe.

strates se recollent les unes sur les autres. C'est sur ce point que diffèrent les définitions qui suivent.

## 2. Whitney : une structure plongée

Hassler Whitney s'est intéressé à la topologie de parties d'une variété, en particulier celle des variétés algébriques dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$ . On peut le considérer comme l'initiateur des stratifications, qu'il a d'abord appelés complexes de variétés (*complexes of manifolds* en anglais, [23]).

Sa définition est donc extrinsèque : elle fait intervenir la structure de la variété ambiante. Rappelons que si  $M$  est une variété de dimension  $n$  et si  $d \leq n$ , on définit le fibré des grassmanniennes  $G^d M$ , formé des couples  $(x, V)$  où  $x$  est un point de  $M$  et  $V$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $d$  de  $T_x M$ . C'est comme son nom l'indique un fibré sur  $M$ , en particulier il possède une topologie naturelle.

DÉFINITION 2.1. — Soit  $R$  et  $S$  des sous-variétés (en général pas fermées) d'une variété  $M$  dont on note  $n$  la dimension.

Les conditions de (A) et (B) de Whitney pour le couple  $(R, S)$  sont définies ainsi : pour tout  $x \in R$ , pour toute suite  $(y_k)$  de  $S$  vérifiant :

- $y_k$  converge vers  $x$  ;
- $T_{y_k} S$  converge vers un sous-espace vectoriel  $\tau$  de  $T_x M$  ;
- pour la condition (B) : il existe une carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie sur un voisinage de  $x$ , telle que les droites  $(x_k y_k)$  convergent vers une droite  $\ell \in T_x M$  (le mot droite est à interpréter dans la carte  $\phi$ ),

$$(A) \quad T_x R \subset \tau$$

$$(B) \quad \ell \subset \tau$$

On dit encore que  $(R, S)$  est (A)- ou (B)-régulier s'il vérifie la condition (A) ou (B), respectivement.

On peut vérifier (voir par exemple [15], page 36) que si la condition (B) est vérifiée pour une carte, elle l'est pour toute carte. La condition (A) est citée pour sa sobriété, mais on peut également vérifier qu'elle est entraînée par la condition (B).

Le couple formé des deux strates de l'exemple 1.10 est trivialement (A)-régulier, mais il n'est pas (B)-régulier. Dans le plan, un couple formé d'un point et d'une spirale s'y accumulant peut être (B)-régulier ou pas (voir la figure 2.1 et [15] pour une démonstration).

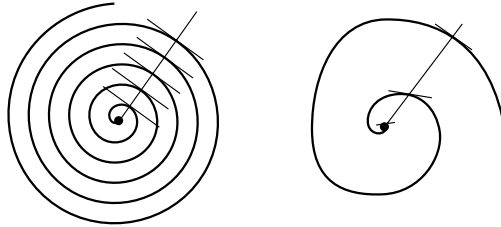


FIG. 2.1. Le couple (point, spirale) est (B)-régulier à droite, pas à gauche.

DÉFINITION 2.2. — Soit  $X$  une partie d'une variété  $M$ . Une ANA stratification  $(X^{(s)})_{s \in S}$  de  $X$  est une stratification de Whitney si les strates sont des sous-variétés analytiques de  $M$ , et si tout couple de strates  $(X^{(r)}, X^{(s)})$  est (B)-régulier. Il suffit de vérifier cette condition quand  $r < s$ .

On pourrait de même définir des stratifications de Whitney lisses.

Si  $R \subset \bar{S}$ , la condition (A) implique directement que  $\dim R \leq \dim S$ . On peut de plus montrer (voir par exemple [13]) : que si  $(R, S)$  est (B)-régulier, alors on a même automatiquement la condition  $\dim R < \dim S$  requise pour avoir une CAT stratification.

Le premier résultat important concernant les stratifications de Whitney est qu'elles représentent des espaces intéressants.

THÉORÈME 2.3 ([24, 25]). — Soit  $V$  une sous-variété algébrique de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ . Alors  $V$  admet une stratification de Whitney.

Ce résultat a été étendu aux variétés semi-analytiques [11] (c'est-à-dire les unions finies de parties définies par des équations et inéquations polynômiales) et sous-analytiques [7, 6] (classe comprenant les variétés semi-analytiques et stable par passage à l'image par une application analytique).

### 3. Thom et Mather : une structure différentiable intrinsèque

René Thom et John Mather ont donné des définitions assez proches [22, 21, 13, 14], dont l'objectif initial était de permettre l'étude des niveaux d'une application lisse entre deux variétés. Contrairement à la définition de Whitney elle est intrinsèque, c'est-à-dire qu'on considère un espace topologique quelconque plutôt qu'une partie d'une variété.

Pour éviter une trop grande redondance, nous ne donnons que la définition de Mather. Lui même parlait de stratifications de Thom-Whitney. Le choix de nommer ici ces stratifications d'après Mather plutôt que Thom n'est pas une façon de lui attribuer les idées sous-jacentes, mais de réserver le terme « stratification de Thom » à la définition subtilement différente de ce dernier. De plus, pour des raisons de simplicité, nous nous limiterons à ce que Mather appelait préstratification (*abstract prestratified set* pour être précis). Cela ne change pas la classe d'espace considérés.

DÉFINITION 3.1. — Soit  $(X, \mathcal{S})$  un espace DIFF stratifié. Un système de tubes est une famille  $\mathbb{T}$  de triplets  $(T_s, \pi_s, \rho_s)_{s \in S}$ , où

- (1)  $T_s$  est un voisinage ouvert de la strate  $X^{(s)}$ , appelé son voisinage tubulaire;
- (2)  $\pi_s$  est une rétraction  $T_s \rightarrow X^{(s)}$  (c'est-à-dire que  $\pi_s$  est continue et  $\pi_s(x) = x$  pour tout  $x \in X^{(s)}$ );
- (3)  $\rho_s$  est une fonction continue  $T_s \rightarrow \mathbb{R}^+$ , appelée la fonction distance de la strate, telle que  $X^{(s)} = \rho_s^{-1}(0)$ ;
- (4) pour toute paire d'indices  $r \prec s$ , la restriction de  $(\pi_r, \rho_r)$  à  $T_r \cap X^{(s)} \rightarrow X^{(t)} \times \mathbb{R}^+$  est une submersion lisse et
- (5) pour tout  $x \in T_s \cap T_r$  on a  $\pi_s(x) \in T_r$ ,  $\pi_r \pi_s(x) = \pi_r(x)$  et  $\rho_r(\pi_s(x)) = \rho_r(x)$  (figure 3.1).

Le couple  $(\mathcal{S}, \mathbb{T})$  est appelé une stratification de Mather et le triplet  $(X, \mathcal{S}, \mathbb{T})$  un espace stratifié de Mather.

Encore une fois, on peut donner la même définition dans la catégorie ANA. Toutefois, ici c'est la catégorie DIFF qui est la plus naturelle.

Le lien entre les stratifications de Mather et de Whitney sont très forts, comme le montrent les résultats suivants.

THÉORÈME 3.2 ([13, 14]). — Toute partie d'une variété qui admet une stratification de Whitney admet une stratification de Mather.

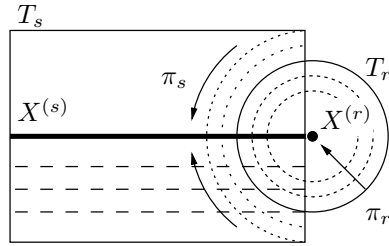


FIG. 3.1. Deux strates incidentes : les courbes en pointillés sont les images réciproques par  $\pi_s$  de points de  $X^{(s)}$  et des ligne de niveau de  $\rho_r$ . Certains niveaux de  $\rho_s$  sont représentés par des courbes en tirets.

THÉORÈME 3.3 ([19]). — *Tout espace stratifié de Mather peut être plongé dans  $\mathbb{R}^n$  (pour  $n$  assez grand), de façon à ce que son image soit une stratification de Whitney lisse.*

### 3.1. Stabilité topologique des applications lisses

Un des principaux objectifs qui ont présidés au développement de la théorie de Thom-Mather est l'étude de la stabilité des applications lisses  $N \rightarrow P$  entre variétés. Pour plus de simplicité, on suppose  $N$  compacte mais en général il suffit de se restreindre aux applications propres. On note  $C^\infty(N, P)$  l'ensemble des applications lisses  $N \rightarrow P$  munit de la topologie de Whitney (celle de la convergence uniforme de l'application et de ses dérivées puisque  $N$  est compacte). On dit que deux applications  $f, g \in C^\infty(N, P)$  sont  $C^\infty$  équivalentes (respectivement, topologiquement équivalentes) s'il existe des difféomorphismes (respectivement, des homéomorphismes)

$$\Phi : N \rightarrow N \quad \text{et} \quad \Psi : P \rightarrow P \quad \text{tels que} \quad f\Phi = \Psi g.$$

Une application  $f$  est *stable* (respectivement, topologiquement stable) si l'ensemble des applications (topologiquement) équivalentes à  $f$  en est un voisinage. Autrement dit, une application est stable si toutes ses déformations suffisamment petites lui sont équivalentes.

Le modèle de cette étude concerne les fonctions  $N \rightarrow \mathbb{R}$  : la théorie de Morse assure l'existence d'un ouvert dense de fonctions, dites de Morse, qui sont stables et bien comprises. Rappelons qu'une fonction  $f$  est de Morse si sa Hessienne  $D^2f$  est non-dégénérée en tout point critique. La signature de  $D^2f$  décrit alors complètement la forme locale de  $f$ , à conjugaison près.

Les stratifications de Mather ont permis d'étudier les niveaux singuliers des applications lisses [20] et leur équivalence topologique [22], avec en particulier le résultat majeur qui suit.

**THÉORÈME 3.4** ([13]). — *Si  $N$  et  $P$  sont des variétés et si  $N$  est compacte, alors les applications topologiquement stables de  $C^\infty(N, P)$  forment un ouvert dense.*

On peut trouver une démonstration complète dans [1]. Ce résultat n'est en général pas vrai pour la stabilité lisse ; une série d'articles de Mather [12] s'attache à décrire les conditions sur les dimensions de  $N$  et  $P$  qui l'assurent.

### 3.2. Triangulabilité

On sait que toute variété est triangulable, c'est-à-dire homéomorphe à un complexe simplicial. Étant donné un espace stratifié, il est naturel de se demander s'il est triangulable ; on sous-entend par là qu'il est homéomorphe à un complexe simplicial et que de plus, toute strate est identifiée par cet homéomorphisme à une union de faces.

**THÉORÈME 3.5** ([10, 5]). — *Tout espace stratifié de Mather est triangulable.*

L'article de Johnson donne plus de détails sur les nombreux auteurs ayant obtenu ce résultat ; notons qu'il y utilise la définition de Thom.

La triangulabilité implique une certaine docilité de l'espace, les stratifications de Mather (ou celles de Whitney, vu le théorème 3.2) ne peuvent donc pas être trop sauvages.

## 4. Siebenmann et Goresky–MacPherson : trivialité topologique locale

Thom avait introduit une notion de trivialité topologique locale dans les stratifications, idée reprise ensuite sous différentes formes par Laurent Siebenmann [18] d'une part, Mark Goresky et Robert MacPherson [2, 3] d'autre part.

**DÉFINITION 4.1.** — *Un espace stratifié  $(X, \mathcal{S})$  est dit localement conique si pour toute strate  $X^{(s)}$  et tout point  $x$  dans cette strate, il existe*

des voisinages ouverts  $U, V$  de  $x$  dans  $X^{(s)}$  et  $X$  respectivement, un espace stratifié compact  $L$  et un isomorphisme d'espaces stratifiés  $\phi : U \times cL \rightarrow V$  tel que pour tout  $u \in U$ ,  $\phi(u, \cdot) = u$ . On dit que  $L$  est une<sup>(1)</sup> étoile (en anglais, link) du point  $x$ .

Un espace TOP stratifié et localement conique est appelé espace stratifié de Siebenmann (cet auteur parle de CS ensemble).

On définit récursivement sur la dimension un espace CAT stratifié de Goresky-MacPherson comme un espace CAT stratifié de dimension  $n$  et localement conique, tel que chaque point a une étoile qui est CAT stratifiée au sens de Goresky-MacPherson, de dimension  $< n$ . Goresky et MacPherson parlent simplement de stratification CAT.

Enfin, on définit une pseudo-variété CAT (pseudomanifold chez ces auteurs) comme un espace CAT stratifié de Goresky-MacPherson de codimension singulière au moins 2.

Toute stratification de Goresky-MacPherson est bien sûr également une stratification de Siebenmann. La réciproque n'est pas claire, conjecturée prudemment par Siebenmann dans [18].

#### 4.1. Liens avec les définitions précédentes

L'une des conséquences du « premier lemme d'isotopie » de Thom est :

**THÉORÈME 4.2.** — *Toute stratification de Mather est une DIFF stratification de Goresky-MacPherson.*

Voir [14], [15] section 3.9, [4] section I.1.4. Notons qu'en particulier, une variété algébrique complexe admet une structure de pseudo-variété.

Par ailleurs, Siebenmann a esquissé la démonstration de :

**THÉORÈME 4.3** ([17]). — *Il existe des espaces stratifiés de Siebenmann non localement triangulables. Il existe des espaces stratifiés de Siebenmann localement triangulables mais non triangulables.*

D'après le théorème 3.5, posséder une stratification de Siebenmann est donc pour un espace topologique une condition strictement plus faible que posséder une stratification de Mather.

---

<sup>(1)</sup> Il n'y a en général pas unicité de l'étoile d'un point, car il existe par exemple des espaces non homéomorphes dont les cônes sont homéomorphes.

## 4.2. Motivations

La condition de locale conicité permet d'obtenir des résultats forts sur les homéomorphismes d'un espace topologique. Citons :

THÉORÈME 4.4 ([18]). — *Soit  $X$  un espace topologique compact admettant une stratification de Siebenmann. Son groupe d'homéomorphismes, muni de la topologie compacte-ouverte, est localement contractile.*

En particulier, ce théorème s'applique aux complexes simpliciaux compacts.

La motivation principale de Goresky et MacPherson est différente : il s'agit de généraliser, autant que possible, la dualité de Poincaré à des espaces singuliers. Elle est fautive telle quelle (pour une suspension par exemple), il faut donc introduire un décalage dans les indices, appelé *perversité*. Pour plus de détails, voir [2, 3] où est introduite l'homologie d'intersection des pseudo-variétés.

## 5. Quinn : trivialité homotopique

Frank Quinn a introduit dans [16] une définition à la fois plus souple et plus globale que celles de Siebenmann et Goresky-MacPherson. Son objectif est de trouver « le bon » équivalent topologique des stratifications de Mather. Il considère les stratifications de Siebenmann trop rigides, et remplace la trivialité topologique locale par une trivialité seulement « homotopique », mais plus globale.

Commençons par des définitions préliminaires.

DÉFINITION 5.1. — *Soit  $X$  un espace topologique et  $Y$  une partie de  $X$ .*

*On dit que  $Y$  est docile dans  $X$  (forward tame en anglais) s'il existe un voisinage  $U$  de  $Y$  dans  $X$  et une homotopie  $h : U \times [0, 1] \rightarrow X$ , (on note  $h_t$  l'application  $u \mapsto h(u, t)$ ) telle que :*

- $h_0$  est l'inclusion  $U \rightarrow X$  et  $h_1(U) = Y$  ;
- pour tout  $t \in [0, 1]$ , la restriction de  $h_t$  à  $Y$  est l'inclusion  $Y \rightarrow X$  ;
- pour tout  $t < 1$ ,  $h_t(U \setminus Y) \cap Y = \emptyset$ .

*On appelle étoile homotopique de  $Y$  dans  $X$  (homotopy link en anglais) l'ensemble de chemins*

$$\text{holink}(X, Y) = \{\omega : [0, 1] \rightarrow X \mid \omega(0) \in Y \ \& \ \forall t > 0, \omega(t) \notin Y\}$$

*muni de la topologie compact-ouvert. L'évaluation au temps 0 définit une application  $q : \text{holink}(X, Y) \rightarrow Y$ .*

Supposons que  $X$  est muni d'une stratification  $\mathcal{S}$ . Soit  $X^{(s)}$  une strate et  $x_0$  un point de cette strate. On appelle étoile homotopique locale en  $x_0$  l'ensemble

$$\begin{aligned} \text{holink}(X, x_0) \\ = \left\{ \omega \in \text{holink}(X, X^{(s)}) \mid \omega(0) = x_0 \ \& \ \exists r \in S, \forall t > 0, \omega(t) \in X^{(r)} \right\} \end{aligned}$$

Cet ensemble (encore muni de la topologie compact-ouvert) est naturellement partitionné par les ensembles :

$$\text{holink}(X, x_0)^{(r)} = \{ \omega \in \text{holink}(X, x_0); \omega(1) \in X^{(r)} \}$$

La définition suivante est celle donnée dans [8] sous le terme *manifold stratified space*.

DÉFINITION 5.2. — Un espace stratifié de Quinn est un espace localement compact TOP stratifié  $(X, \mathcal{S})$  avec un nombre fini de strates, vérifiant les conditions suivantes.

- (1) Docilité : pour toute paire d'indices  $r < s$ , la strate  $X^{(r)}$  est docile dans  $X^{(r)} \cup X^{(s)}$ .
- (2) Fibrations normales : pour toute paire d'indices  $r < s$ , l'évaluation

$$q : \text{holink}(X^{(r)} \cup X^{(s)}, X^{(r)}) \rightarrow X^{(r)}$$

est une fibration (c'est-à-dire que toute homotopie à valeur dans  $X^{(r)}$  dont le temps 0 se relève par  $q$ , peut être entièrement relevée).

- (3) Étoiles homotopiques locales dominées par des compacts : pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une partie compacte  $C$  de  $\text{holink}(X, x_0)$  et une homotopie

$$h : \text{holink}(X, x_0) \times I \rightarrow \text{holink}(X, x_0)$$

qui respecte les strates (c'est-à-dire, envoie chaque strate de gauche dans la strate de même indice à droite), telle que  $h_0$  est l'identité et  $h_1$  est à valeur dans  $C$ .

Cette définition, bien que technique, est assez souple pour être relativement facile à obtenir. Pour finir, donnons très brièvement deux résultats vérifiés par ces espaces (pour plus de détails, consulter les références citées).

THÉORÈME 5.3 (Quinn [16]). — Soit  $Y$  une union fermée de strates d'un espace stratifié de Quinn  $X$  qui ne contient pas de strate de dimension 4. Toute isotopie de  $Y$  qui préserve les strates et en fixe les bords se prolonge



en une isotopie de  $X$  qui préserve les strates et fixe leurs bords et le complémentaire d'un voisinage de  $Y$ .

En particulier, les composantes connexes des strates de  $X$  sont homogènes (pour tous  $x, y$  dans une même composante de  $X^{(s)}$ , il existe un homéomorphisme de  $X$  envoyant  $x$  sur  $y$ ).

THÉORÈME 5.4 (Hughes [8]). — Soit  $X$  un espace stratifié de Quinn dont les strates non minimales sont de dimension au moins 5. Toute union fermée de strates de  $X$  possède un voisinage tubulaire approché dans  $X$ .

Un voisinage tubulaire approché de  $Y \subset X$  est, grossièrement, un voisinage ouvert  $U$  de  $Y$  muni d'une application  $p : U \setminus Y \rightarrow Y \times \mathbb{R}$  qui vérifie une propriété faible de relèvement (stratifié) des homotopies.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Christopher G. Gibson, Klaus Wirthmüller, Andrew A. du Plessis, and Eduard J. N. Looijenga, *Topological stability of smooth mappings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552, Springer-Verlag, Berlin, 1976. MR MR0436203 (55 #9151)
- [2] Mark Goresky and Robert MacPherson, *Intersection homology theory*, *Topology* **19** (1980), no. 2, 135–162. MR MR572580 (82b :57010)
- [3] ———, *Intersection homology. II*, *Invent. Math.* **72** (1983), no. 1, 77–129. MR MR696691 (84i :57012)
- [4] ———, *Stratified Morse theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, vol. 14, Springer-Verlag, Berlin, 1988. MR MR932724 (90d :57039)
- [5] R. Mark Goresky, *Triangulation of stratified objects*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **72** (1978), no. 1, 193–200. MR MR0500991 (58 #18473)
- [6] Robert M. Hardt, *Stratification of real analytic mappings and images*, *Invent. Math.* **28** (1975), 193–208. MR MR0372237 (51 #8453)
- [7] Heisuke Hironaka, *Subanalytic sets*, Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Yasuo Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp. 453–493. MR MR0377101 (51 #13275)
- [8] Bruce Hughes, *The approximate tubular neighborhood theorem*, *Ann. of Math. (2)* **156** (2002), no. 3, 867–889. MR MR1954237 (2004b :57031)
- [9] Bruce Hughes and Shmuel Weinberger, *Surgery and stratified spaces*, *Surveys on surgery theory*, Vol. 2, *Ann. of Math. Stud.*, vol. 149, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001, pp. 319–352. MR MR1818777 (2002a :57047)
- [10] F. E. A. Johnson, *On the triangulation of stratified sets and singular varieties*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **275** (1983), no. 1, 333–343. MR MR678354 (84e :58007)
- [11] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, 1965, miméographié, IHES, Bures-sur-Yvette.
- [12] John N. Mather, « Stability of  $C^\infty$  mappings I–VI. », *Ann. of Math. (2)* **87** (1968), p. 89–104, *Ann. of Math. (2)* **89** (1969), p. 254–291, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1968), no. 35, p. 279–308, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1969), no. 37, p. 223–248, *Advances in Math.* **4** (1970), p. 301–336 (1970), *Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium, I (1969/70)* (Berlin), Springer, 1971, p. 207–253. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 192.

- [13] ———, *Notes on topological stability*, 1970, miméographié, Harvard University.
- [14] ———, *Stratifications and mappings*, Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, New York, 1973, pp. 195–232. MR MR0368064 (51 #4306)
- [15] Markus J. Pflaum, *Analytic and geometric study of stratified spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1768, Springer-Verlag, Berlin, 2001. MR MR1869601 (2002m :58007)
- [16] Frank Quinn, *Homotopically stratified sets*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 2, 441–499. MR MR928266 (89g :57050)
- [17] L. C. Siebenmann, *Topological manifolds*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 133–163. MR MR0423356 (54 #11335)
- [18] ———, *Deformation of homeomorphisms on stratified sets. I, II*, Comment. Math. Helv. **47** (1972), 123–136; *ibid.* **47** (1972), 137–163. MR MR0319207 (47 #7752)
- [19] Michael Teufel, *Abstract prestratified sets are (b)-regular*, J. Differential Geom. **16** (1981), no. 3, 529–536 (1982). MR MR654642 (84f :58010)
- [20] R. Thom, *Local topological properties of differentiable mappings*, Differential Analysis, Bombay Colloq., Oxford Univ. Press, London, 1964, pp. 191–202. MR MR0195102 (33 #3307)
- [21] ———, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 240–284. MR MR0239613 (39 #970)
- [22] René Thom, *La stabilité topologique des applications polynomiales*, Enseignement Math. (2) **8** (1962), 24–33. MR MR0148079 (26 #5588)
- [23] Hassler Whitney, *Complexes of manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **33** (1947), 10–11. MR MR0019306 (8,398a)
- [24] ———, *Local properties of analytic varieties*, Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965, pp. 205–244. MR MR0188486 (32 #5924)
- [25] ———, *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 496–549. MR MR0192520 (33 #745)

Benoît KLOECKNER  
 Université Joseph Fourier - Grenoble 1  
 Institut Fourier - UMR CNRS 5582  
 100 rue des Maths  
 BP 74  
 38402 St Martin d'Hères (France)  
 Benoit.Kloeckner@ujf-grenoble.fr