



**HAL**  
open science

## Approche multiéchelle par patches pour les non linéarités localisées en calcul de structures

Julien Pebrel, Pierre Gosselet, Christian Rey

► **To cite this version:**

Julien Pebrel, Pierre Gosselet, Christian Rey. Approche multiéchelle par patches pour les non linéarités localisées en calcul de structures. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, 2007, Grenoble, France. hal-01224399

**HAL Id: hal-01224399**

**<https://hal.science/hal-01224399>**

Submitted on 28 May 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Approche multiéchelle par patchs pour les non linéarités localisées en calcul de structures

Julien Pebrel, Pierre Gosselet & Christian Rey

LMT-Cachan (ENS de Cachan/CNRS UMR8535/Paris 6 University)  
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX, France  
pebrel@lmt.ens-cachan.fr

### Résumé :

*On présente une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement pour la résolution de problèmes d'évolution non linéaire. La décomposition de domaine est introduite du point de vue non linéaire via une partition de l'unité appliquée à l'énergie, les conditions de couplage sont imposées par un Lagrangien augmenté sur l'espace de Sobolev  $H^1$ . Le problème non linéaire décomposé est alors condensé sur le recouvrement en introduisant un opérateur d'interface (analogue de l'opérateur de Steklov Poincaré dans le cas avec recouvrement). Le problème d'interface ainsi obtenu est résolu par un algorithme de Newton-Raphson. Des premiers résultats sont donnés sur des poutres, des problèmes plus évolués seront présentés au congrès.*

### Abstract :

*We present here an overlapping domain decomposition method for nonlinear evolution problems. The decomposition is introduced at the nonlinear stage via a partition of the unity applied to the energy. Coupling conditions are imposed by an Augmented Lagrangian on the Sobolev space  $H^1$ . The nonlinear problem is then condensed on the overlap using an interface operator (analogous of the Steklov Poincaré operator for the overlapping case). The interface problem is then solved by a Newton-Raphson algorithm. For now, beams results are given, more evolved problems will be presented at the conference.*

### Mots-clefs :

**Décomposition de domaine ; Patchs non linéaires ; Problèmes multimodèles**

### 1 Introduction

Les stratégies de calcul actuelles permettent de résoudre efficacement beaucoup de problèmes mécaniques mais sont encore mises en difficulté par un certain nombre de cas pathologiques et souvent déterminants pour la tenue des structures. Par exemple, dans [Cresta et al (2007)] on voit comment l'apparition de micro-flambage dégrade sévèrement la convergence d'une stratégie de type Newton-Schur. Peu de méthodes prennent réellement en compte cette possibilité de non linéarités réparties non uniformément. Pourtant dans un nombre significatif de calculs, le domaine simulé garde un comportement globalement linéaire et les non linéarités se concentrent dans un petit nombre de zones qu'on qualifiera de zones d'intérêt.

Le traitement classique des problèmes non linéaires se fait souvent par des algorithmes de type Newton (Newton-Raphson, Newton sécant, Newton modifié etc). Le principe de ces méthodes est de travailler sur une succession de problèmes linéaires, associés à l'opérateur tangent par exemple dans le cas de Newton-Raphson. Ces problèmes étant ensuite résolus par une méthode de décomposition de domaine [Gosselet, Rey (2007)]. L'opérateur calculé est global (i.e. relatif au domaine complet), la convergence de l'algorithme est donc liée à la non linéarité la plus forte de l'ensemble de la structure. En conséquence, la présence à un endroit d'un phénomène violent va pénaliser l'ensemble de la convergence. C'est la première difficulté

de ce type de calcul : la convergence des stratégies de calcul non linéaire actuelles est souvent gouvernée par les phénomènes locaux.

La seconde difficulté est mieux maîtrisée aujourd'hui : il s'agit du problème du maillage. Une bonne résolution implique une finesse de maillage importante dans certaines zones et un temps de calcul raisonnable impose un maillage grossier dans les zones où des phénomènes moins violents se déroulent. De nombreux progrès ont été faits par les maillages actuels mais le compromis entre ces deux idées est toujours difficile à réaliser et demande souvent une expertise humaine importante. De plus, pour les problèmes d'évolution non linéaire, le suivi de la non linéarité se traduit souvent par un remaillage de la structure.

Partant de ces constats, on peut distinguer deux premiers axes pour l'élaboration d'une stratégie performante pour cette famille de calculs : comment traiter la non linéarité et réussir un découplage maximal entre les non linéarités fortes et celles plus faibles ? Comment gérer les problèmes de maillage et découpler les maillages des zones d'intérêt de celui du reste du domaine ?

L'idée principale (soumise dans [Cresta et al (2007)] dans un cas sans recouvrement) de la stratégie est de ramener les itérations non linéaire d'une échelle globale (celle de la structure) vers une échelle plus locale (celle d'un sous-domaine, pouvant alors être adaptée à celle de la non linéarité). Pour cela, on doit pouvoir gérer la non linéarité à l'échelle du sous-domaine donc réaliser la condensation à l'étape non linéaire. La décomposition de domaine est donc introduite à l'étape non linéaire avant de condenser le problème sur l'interface et de résoudre le problème d'interface non linéaire ainsi obtenu. Le découplage des maillages est effectué (dans le chapitre 3) via une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement inspirée des approches Arlequin [Ben Dhia (1998)], [Rateau (2003)], la décomposition est introduite via une partition de l'unité appliquée à l'énergie. Le découplage des non linéarités est effectué (dans le chapitre 4) en condensant le problème non linéaire sur l'interface à l'aide d'un opérateur non linéaire de Steklov Poincaré. Le problème ainsi obtenu est alors résolu par une approche de Newton-Raphson, faisant apparaître un problème d'interface tangent et un ensemble de problèmes non linéaires indépendants par sous-domaines.

Une telle stratégie permet donc de gérer les non linéarités locales par des patches (représentés chacun par un sous-domaine) indépendants du reste de la structure (représentée également par un sous-domaine). Si l'on est capable de détecter l'apparition d'une non linéarité (comme c'est possible dans de nombreux cas) on peut alors coller sur la zone concernée un modèle suffisamment riche et associé à un maillage suffisamment fin. On peut ainsi capter les informations locales sans bouleverser la structure globale du problème.

## 2 Problème de départ

On considère le problème de minimum suivant, correspondant à la recherche de l'état d'équilibre du domaine  $\Omega$  stockant de l'énergie sous la forme d'une densité d'énergie  $e(\underline{u})$  et soumis à un chargement volumique  $\underline{g}$ , à un chargement extérieur  $\underline{f}$  sur une partie  $\partial_f \Omega$  de son bord  $\partial \Omega$  et à un déplacement imposé  $\underline{w}$  sur la partie complémentaire de  $\partial_f \Omega$  notée  $\partial_u \Omega$  :

Chercher  $\underline{u} \in \mathcal{U}$  tel que :  $E(\underline{u}) = \min_{\underline{c} \in \mathcal{U}} E(\underline{c})$  avec  $E(\underline{u}) = \int_{\Omega} (e(\underline{u}) - \underline{g} \cdot \underline{u}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{f} \cdot \underline{u} d\Gamma$

Le minimum étant recherché sur l'espace  $\mathcal{U}$  des champs cinématiquement admissibles. On associe à cet espace affine son espace vectoriel  $\mathcal{U}^0$  :

$$\mathcal{U} = \left\{ \underline{u} \in \left( H^1(\Omega) \right)^3, \text{ t.q. } \underline{u} = \underline{w} \text{ sur } \partial_u \Omega \right\} \quad \mathcal{U}^0 = \left( H_0^1(\Omega, \partial_u \Omega) \right)^3$$

La formulation variationnelle de ce problème de minimum s'écrit :

Chercher  $\underline{u} \in \mathcal{U}$  tel que :  $\nabla_{\underline{u}} E(\underline{u}) \cdot \delta \underline{u} = 0 \quad \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{U}_0 \quad \Leftrightarrow \quad a(\underline{u}, \delta \underline{u}) = l(\delta \underline{u}) \quad \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{U}_0$

Dans le cas général, la forme  $a(\underline{u}, \delta \underline{u})$  n'étant pas bilinéaire, on résout ce problème par un algorithme de Newton-Raphson. On calcule donc l'opérateur tangent associé à ce problème et on résout la suite de problèmes linéaires associés par une méthode de décomposition de domaine. On propose dans la suite une stratégie mieux adaptée au caractère local de certaines non linéarités.

### 3 Décomposition de domaine avec recouvrement

Dans le cas sans recouvrement on introduit souvent la décomposition de domaine du point de vue géométrique : on utilise la linéarité de l'intégrale par rapport à son domaine d'intégration pour séparer l'énergie totale en contributions locales, puis on utilise les conditions de régularité du problème initial pour en déduire les conditions de raccord à imposer à l'interface. Cette démarche est équivalente à l'introduction dans l'énergie des fonctions indicatrices des sous-domaines. Partant de cette observation on peut imaginer construire une décomposition à partir de ce qui est parfois considéré comme une généralisation des fonctions indicatrices : les partitions de l'unité. Afin d'introduire la décomposition de domaine on va donc utiliser une partition de l'unité appliquée à l'énergie globale. Les fonctions de la partition de l'unité sont notées  $(\phi_i)_{1..n}$ , le support de  $\phi_i$  est noté  $\Omega_i$ . Ces fonctions vérifient par définition  $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$ , on injecte cette égalité dans la définition de l'énergie et on obtient :

$$E(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega_i} \phi_i \cdot (e_i(\underline{u}_i) - \underline{g}_i \cdot \underline{u}_i) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega_i} \phi_i \cdot \underline{f}_i \cdot \underline{u}_i d\Gamma \right\} = \sum_{i=1}^n E_{\phi_i}(\underline{u}_i)$$

L'écriture des conditions de raccord nécessite l'introduction d'un certain nombre de notations. Ainsi on notera  $\Psi_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$  l'interface entre les sous-domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ ,  $\Psi_i = \cup_j \Psi_{ij}$  l'interface totale d'un sous-domaine, union de toutes ses interface avec les autres sous-domaine et  $\Psi = \cup_i \Psi_i$  l'interface complète, union des interfaces de tous les sous-domaines.

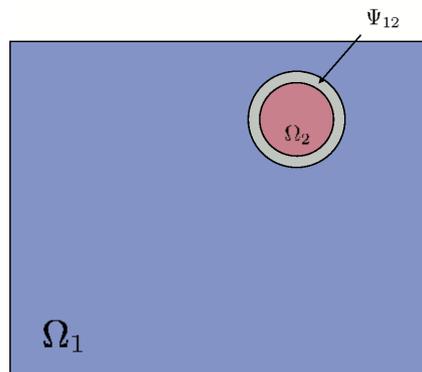


FIG. 1 – Structure  $\Omega_1$ , patch  $\Omega_2$  et recouvrement  $\Psi_{12}$

On aura également besoin d'un certain nombre d'espaces fonctionnels pour décrire les champs utilisés. On notera ainsi  $\mathcal{U}_i$  l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissible du sous-domaine  $\Omega_i$ . L'espace des champs de déplacements de l'interface  $\Psi_i$  est noté  $\mathcal{W}_i$ . Les espaces vectoriels associés seront indicés avec une puissance <sup>0</sup>.

On a ramené le problème initial d'une minimisation sur l'énergie globale à une minimisation sur les énergies locales, sous la contrainte de continuité des champs de déplacement aux interfaces. On introduit un déplacement d'interface et on écrit que le champ d'interface est égal au champ d'un côté et au champ de l'autre côté [Brezzi, Marini (1993)]. La continuité est imposée au sens du produit scalaire de  $H^1$ , ou plutôt d'un produit scalaire modifié assurant un "bon" comportement de la stratégie quand le recouvrement tend vers un recouvrement surfacique. On choisit également d'augmenter [Fortin, Glowinski (1982)] la contrainte afin d'introduire un aspect mixte dans la stratégie. On verra dans la suite de la stratégie que le choix de l'opérateur d'augmentation permet d'améliorer grandement la méthode. On a maintenant affaire à un problème de point selle sur le Lagrangien augmenté :

$$\mathcal{L}^a(\underline{u}, \underline{v}, \underline{\lambda}) = \inf_{\underline{c}} \inf_{\underline{d}} \sup_{\underline{\mu}} \mathcal{L}^a(\underline{c}, \underline{d}, \underline{\mu}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}^a(\underline{u}, \underline{v}, \underline{\lambda}) = \sum_i \mathcal{L}_{\phi_i}^a(\underline{u}_i, \underline{v}_i, \underline{\lambda}_i) \quad (1)$$

Où la contribution de chaque sous-domaine au Lagrangien augmenté s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\phi_i}^a(\underline{u}_i, \underline{v}_i, \underline{\lambda}_i) = E_{\phi}(\underline{u}_i) + \langle \underline{\lambda}_i, \underline{u}_i - \underline{v}_i \rangle_{H^1(\Psi_i)} + \frac{1}{2} \|\underline{u}_i - \underline{v}_i\|_{H^1(\Psi_i)}^2$$

Où on a introduit le produit scalaire euclidien sur  $H^1$  et sa norme associée. Ainsi que le produit scalaire lié à l'augmentation et la norme associée (équivalente à la norme  $H^1$ ) :

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_{H^1(\Psi)} = \int_{\Psi} \underline{u} \cdot \underline{v} + \nabla \underline{u} : \nabla \underline{v} \, d\Omega \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_{H^1(\Psi)} = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle_{H^1(\Psi)}}$$

$$\langle \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \rangle_{H^1(\Psi)} = \sum_i \langle \underline{u}_i, \mathbb{A}_i \underline{v}_i \rangle_{H^1(\Psi_i)} \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_{H^1(\Psi)} = \sqrt{\langle \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \rangle_{H^1(\Psi)}}$$

Il s'agit donc de trouver  $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{\lambda})$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{\underline{u}_i} E_{\phi_i} \cdot \delta \underline{u}_i + \langle \underline{\lambda}_i, \delta \underline{u}_i \rangle_{H^1(\Psi_i)} + \langle \langle \underline{u}_i - \underline{v}_i, \delta \underline{u}_i \rangle \rangle_{H^1(\Psi_i)} = 0 \quad \forall \delta \underline{u}_i \in \mathcal{U}_i^0 \\ \sum_i \left( \langle \underline{\lambda}_i, \delta \underline{v} \rangle_{H^1(\Psi_i)} + \langle \langle \underline{u}_i - \underline{v}_i, \delta \underline{v} \rangle \rangle_{H^1(\Psi_i)} \right) = 0 \quad \forall \delta \underline{v} \in \mathcal{W}^0 \\ \langle \underline{u}_i - \underline{v}_i, \delta \underline{\lambda}_i \rangle_{H^1(\Psi_i)} = 0 \quad \forall \delta \underline{\lambda}_i \in \mathcal{W}_i^0 \end{array} \right. \quad (2)$$

## 4 Stratégie de calcul

### 4.1 Condensation non linéaire

Le principe de la condensation est d'écrire un problème équivalent au problème 2 mais posé seulement sur des grandeurs d'interface. L'élimination des équations à l'intérieur des sous-domaines se fait en utilisant le fait que les champs sont solutions du problème initial et vérifient en particulier l'équilibre global. De manière analogue au cas non recouvrant on introduit l'opérateur  $\mathbb{S}_i$  -dit de Steklov Poincaré dans le cas non recouvrant- qui au déplacement d'interface associe l'effort résultant. Dans le cas non recouvrant  $\mathbb{S}_i$  opère de  $H^1(\Psi_i)$  vers son dual  $H^{-1}(\Psi_i)$ .

$$\mathbb{S}_i : \begin{array}{ccc} H^1(\Psi_i) & \longrightarrow & H^{-1}(\Psi_i) \\ \underline{v}_i & \longmapsto & \underline{\lambda}_i \end{array} \quad (3)$$

Après discrétisation et introduction de l'opérateur discret  $P_{i,h}$  de projection de l'interface  $\Psi$  sur l'interface d'un sous-domaine  $\Psi_i$ , le problème condensé s'écrit dans le cadre de maillages conformes :

$$\sum_i P_{i,h}^T \left( \mathbb{S}_{i,h} \left( P_{i,h} \cdot \underline{v}_h \right) + \mathbb{A}_{i,h} \cdot P_{i,h} \cdot \underline{v}_h \right) = \sum_i \left( P_{i,h}^T P_{i,h} \right) \cdot \underline{b}_h \Leftrightarrow \mathbb{S}_h(\underline{v}_h) + \mathbb{A}_h \cdot \underline{v}_h = \underline{b}_h \quad (4)$$

## 4.2 Résolution du problème condensé

On propose de résoudre le problème non linéaire d'interface par une approche classique de Newton-Raphson. On va donc résoudre une succession de systèmes linéaires portant sur l'opérateur tangent. On commence donc par introduire l'opérateur d'interface tangent, noté  $D\mathbb{S}_h$ , une itération du solveur de Newton Raphson s'écrit alors :

$$\left( D\mathbb{S}_h^n + \mathbb{A}_h \right) \cdot \delta \underline{v}_h^n = \mathbb{S}_h^n(\underline{v}_h^n) + \mathbb{A}_h \cdot \underline{v}_h^n - \underline{b}_h \quad \text{et} \quad \underline{v}_h^{n+1} = \underline{v}_h^n + \delta \underline{v}_h^n \quad (5)$$

La résolution de ce problème tangent peut se décomposer en deux sous-problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Problèmes locaux, non linéaires} \quad \underline{w}_h^n = \mathbb{S}_h^n(\underline{v}_h^n) + \mathbb{A}_h \cdot \underline{v}_h^n - \underline{b}_h \\ \text{Problème global, linéaire} \quad \left( D\mathbb{S}_h^n + \mathbb{A}_h \right) \cdot \delta \underline{v}_h^n = \underline{w}_h^n \end{array} \right. \quad (6)$$

Le premier problème correspond à l'évaluation du résidu d'interface non linéaire. D'après la définition de  $\mathbb{S}$ , il nécessite la résolution de problèmes non linéaires sous-domaines par sous-domaines. Cette partie de la stratégie est ce que l'on appellera une relocalisation non linéaire. Le calcul du second terme correspond à la résolution d'un problème tangent d'interface. La résolution de ce problème est effectuée en utilisant un solveur de Krylov comme pour les méthodes de décomposition de domaine non recouvrantes classiques [Gosselet, Rey (2007)]. Si on examine les opérations à effectuer : les relocalisations non linéaires sont effectuées sous-domaines par sous-domaines, il est seulement nécessaire à la fin d'évaluer le résidu total pour savoir si la stratégie a convergé. Une itération d'un solveur de Krylov nécessite le calcul de produit opérateur-vecteur, opération qui dans le cadre de l'opérateur  $D\mathbb{S}$  est équivalente à la résolution de problèmes linéaires sous-domaine par sous-domaine. La stratégie proposée est donc fortement parallélisable.

## 4.3 Choix de l'opérateur d'augmentation

Un certain nombre de points intéressants sont soulevés par l'utilisation d'une stratégie mixte et donc par le choix de l'opérateur d'augmentation. Certains résultats sur le choix de cet opérateur sont classiques, notamment dans le cas sans recouvrement, on peut en particulier caractériser l'opérateur optimal. Pour un sous-domaine  $\Omega_i$  l'opérateur d'augmentation optimal  $\mathbb{A}_i^{opt}$  est l'opérateur de Steklov Poincaré du complémentaire de  $\Omega_i$  condensé sur  $\Psi_i$ . Dans le cadre de notre stratégie, 2 points sont à noter sur le choix  $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_i^{opt}$  :

- lors de l'étape de relocalisation non linéaire, le choix  $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_i^{opt}$  permet d'éviter l'apparition d'instabilités qui ne seraient pas celles du problème initial. Autrement dit on n'a pas apparition d'instabilités numériques. Dans le cas de la simulation de micro-flambage il a été observé notamment l'apparition de flambage local lors des itérations locales si l'opérateur est choisi "trop rigide" (autrement dit si on se rapproche d'une approche primale).
- l'utilisation de solveurs Krylov pour résoudre le problème tangent permet d'avoir accès facilement à une bonne approximation de cet opérateur par des techniques de réutilisation des sous-espaces de Krylov.

## 5 Premiers résultats

Un des cas classiques de simulation comportant des non linéarités localisées est celui des matériaux endommageables. On étudie donc le comportement de notre méthode sur le premier exemple classique la réponse d'une poutre comportant un défaut et soumise à un chargement de traction. Le modèle du matériau est le suivant

$$\sigma(t) = E_0(1 - d(t)) \langle \epsilon(t) \rangle_+ + E_0 \langle \epsilon(t) \rangle_- \quad d(t) = \left( \frac{\sqrt{Y_m(t)} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \right)^n \quad (7)$$

$$Y_m(t) = \sup_{\tau \leq t} Y(\tau) \quad Y(t) = \frac{1}{2} E_0 \langle \epsilon(t) \rangle_+^2 \quad (8)$$

La simulation débute avec un modèle élastique, quand la force thermodynamique  $Y$  atteint la force thermodynamique d'initiation  $Y_0$  l'endommagement démarre. On place alors un patch endommageable sur cette zone. La convergence nécessite seulement 22 itérations du solveur Newton-Raphson et sur un patch de petite taille.

## 6 Conclusions

On a présenté dans cet article une stratégie permettant de gérer les non linéarités localisées. Le principe de la méthode est d'utiliser des patches associés à des modèles non linéaires et à des maillages plus fins dans les zones où les non linéarités apparaissent. Les patches sont liés aux sous structures par un raccord de type Lagrangien augmenté sur une interface volumique. On propose un schéma de résolution itératif permettant de limiter autant que possible le traitement de la non linéarité au niveau du patch, seules quelques itérations globales sont alors nécessaires.

La méthode permet une grande flexibilité, les patches étant ajoutés où et quand on en a besoin, et une quasi non intrusivité, le patch ne modifiant en effet pas la structure, il constitue une entité à part couplée à la structure par le schéma de résolution proposé. Les premiers résultats sur un cas académique sont encourageants. L'implantation dans le code de calcul Zebulon afin de pouvoir résoudre des problèmes mécaniques plus complexes est en cours.

## Références

- Cresta, P., Allix, O., Rey, C., Guinard, S. 2007 Comparison of multiscale nonlinear strategies for post-buckling analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **196** 1436-1446
- Gosselet, P., Rey, C. 2007 Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering* **13** 515-572
- Ben Dhia, H. 1998 Problèmes mécaniques multiéchelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série Iib, Paris* **326** 899-904
- Rateau, G. 2003 Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles. Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées. *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris*
- Brezzi, F., Marini, L. 1993 A three-field domain decomposition method. *dans Proceedings of the sixth international conference on domain decomposition methods* 27-34
- Fortin, M., Glowinski, R. 1982 Méthodes de Lagrangien augmenté Applications à la résolution numérique de problèmes aux limites. *Dunod-méthodes mathématiques de l'informatique*