

Computing Tools and Arithmetical Properties / Instruments de calcul et propriétés arithmétiques

Baptiste Mèlès

Université de Clermont-Ferrand, PHIER / Archives Poincaré

Cinquième Rencontre française
de philosophie des mathématiques,
Clermont-Ferrand, 17–19 octobre 2013

- 1 Introduction
- 2 Structures de données
 - Qu'est-ce qu'un boulier ?
 - Compter sur un boulier
 - Structures de données du boulier
- 3 Style de programmation
 - Addition et soustraction
 - Multiplication et division
 - Curryfication et programmation fonctionnelle
 - Propriétés des opérations
- 4 Sémantiques pédagogiques
 - Sémantique dénotationnelle de Fibonacci
 - Sémantique opérationnelle de Cheng Dawei
 - Les extensions d'instruments
- 5 Conclusion

- Les mathématiques sont-elles toujours le meilleur outil théorique pour étudier l'histoire des mathématiques ?
- Qu'est-ce que calculer avec un instrument de calcul ?
- En quoi les instruments de calcul diffèrent-ils les uns des autres ?
 - aspect matériel : boulier, abaque, surface à calculer chinoise, tables de logarithmes, règle à calcul, calcul sur papier de l'école primaire française... ;
 - une pédagogie, un ensemble d'opérations et d'algorithmes : addition sur l'abaque, multiplication sur la règle à calcul, systèmes d'équations linéaires sur papier ou sur la surface à calculer (pivot de Gauss)... ;
 - certaines limitations internes : pas d'addition sur la règle à calcul ou les tables de logarithmes, pas de systèmes d'équations linéaires à trois inconnues sur le boulier.
- D'où viennent ces limitations ? Et comment savoir ce que permet de calculer un instrument de calcul donné ?

- Les mathématiques sont-elles toujours le meilleur outil théorique pour étudier l'histoire des mathématiques ?
- Qu'est-ce que calculer avec un instrument de calcul ?
- En quoi les instruments de calcul diffèrent-ils les uns des autres ?
 - aspect matériel : boulier, abaque, surface à calculer chinoise, tables de logarithmes, règle à calcul, calcul sur papier de l'école primaire française... ;
 - une pédagogie, un ensemble d'opérations et d'algorithmes : addition sur l'abaque, multiplication sur la règle à calcul, systèmes d'équations linéaires sur papier ou sur la surface à calculer (pivot de Gauss)... ;
 - certaines limitations internes : pas d'addition sur la règle à calcul ou les tables de logarithmes, pas de systèmes d'équations linéaires à trois inconnues sur le boulier.
- D'où viennent ces limitations ? Et comment savoir ce que permet de calculer un instrument de calcul donné ?

- Les mathématiques sont-elles toujours le meilleur outil théorique pour étudier l'histoire des mathématiques ?
- Qu'est-ce que calculer avec un instrument de calcul ?
- En quoi les instruments de calcul diffèrent-ils les uns des autres ?
 - aspect matériel : boulier, abaque, surface à calculer chinoise, tables de logarithmes, règle à calcul, calcul sur papier de l'école primaire française... ;
 - une pédagogie, un ensemble d'opérations et d'algorithmes : addition sur l'abaque, multiplication sur la règle à calcul, systèmes d'équations linéaires sur papier ou sur la surface à calculer (pivot de Gauss)... ;
 - certaines limitations internes : pas d'addition sur la règle à calcul ou les tables de logarithmes, pas de systèmes d'équations linéaires à trois inconnues sur le boulier.
- D'où viennent ces limitations ? Et comment savoir ce que permet de calculer un instrument de calcul donné ?

- Les mathématiques sont-elles toujours le meilleur outil théorique pour étudier l'histoire des mathématiques ?
- Qu'est-ce que calculer avec un instrument de calcul ?
- En quoi les instruments de calcul diffèrent-ils les uns des autres ?
 - aspect matériel : boulier, abaque, surface à calculer chinoise, tables de logarithmes, règle à calcul, calcul sur papier de l'école primaire française... ;
 - une pédagogie, un ensemble d'opérations et d'algorithmes : addition sur l'abaque, multiplication sur la règle à calcul, systèmes d'équations linéaires sur papier ou sur la surface à calculer (pivot de Gauss)... ;
 - certaines limitations internes : pas d'addition sur la règle à calcul ou les tables de logarithmes, pas de systèmes d'équations linéaires à trois inconnues sur le boulier.
- D'où viennent ces limitations ? Et comment savoir ce que permet de calculer un instrument de calcul donné ?

- Les mathématiques sont-elles toujours le meilleur outil théorique pour étudier l'histoire des mathématiques ?
- Qu'est-ce que calculer avec un instrument de calcul ?
- En quoi les instruments de calcul diffèrent-ils les uns des autres ?
 - aspect matériel : boulier, abaque, surface à calculer chinoise, tables de logarithmes, règle à calcul, calcul sur papier de l'école primaire française... ;
 - une pédagogie, un ensemble d'opérations et d'algorithmes : addition sur l'abaque, multiplication sur la règle à calcul, systèmes d'équations linéaires sur papier ou sur la surface à calculer (pivot de Gauss)... ;
 - certaines limitations internes : pas d'addition sur la règle à calcul ou les tables de logarithmes, pas de systèmes d'équations linéaires à trois inconnues sur le boulier.
- D'où viennent ces limitations ? Et comment savoir ce que permet de calculer un instrument de calcul donné ?

- Les mathématiques sont-elles toujours le meilleur outil théorique pour étudier l'histoire des mathématiques ?
- Qu'est-ce que calculer avec un instrument de calcul ?
- En quoi les instruments de calcul diffèrent-ils les uns des autres ?
 - aspect matériel : boulier, abaque, surface à calculer chinoise, tables de logarithmes, règle à calcul, calcul sur papier de l'école primaire française... ;
 - une pédagogie, un ensemble d'opérations et d'algorithmes : addition sur l'abaque, multiplication sur la règle à calcul, systèmes d'équations linéaires sur papier ou sur la surface à calculer (pivot de Gauss)... ;
 - certaines limitations internes : pas d'addition sur la règle à calcul ou les tables de logarithmes, pas de systèmes d'équations linéaires à trois inconnues sur le boulier.
- D'où viennent ces limitations ? Et comment savoir ce que permet de calculer un instrument de calcul donné ?

Thèses :

- nos connaissances arithmétiques peuvent nous abuser sur l'usage des instruments de calcul ;
- certains concepts de l'informatique et de l'informatique théorique (structures de données, curryfication, sémantique des langages de programmation) peuvent être de meilleurs guides pour décrire la pratique des instruments de calcul.

Thèses :

- nos connaissances arithmétiques peuvent nous abuser sur l'usage des instruments de calcul ;
- certains concepts de l'informatique et de l'informatique théorique (structures de données, curryfication, sémantique des langages de programmation) peuvent être de meilleurs guides pour décrire la pratique des instruments de calcul.

Comment articuler les concepts arithmétiques (le concept de nombre, les propriétés des opérations) à la pratique des instruments ?

Définition

Représentabilité : un concept arithmétique est représentable sur un instrument donné s'il peut y être montré par des actes concrets.

- Exemple : l'associativité de l'addition est représentable sur un instrument si l'ajout de c à $a + b$ suit la même procédure que l'ajout de $b + c$ à a .
- Remarque : la représentabilité n'a rien de subjectif ; c'est une représentation objective sur l'instrument. Par exemple, on ne se demande pas comment les Chinois se représentaient les nombres et les opérations, mais comment ils les représentaient sur l'instrument. Notre question n'est pas une noble question ontologique, mais purement bureaucratique.

Comment articuler les concepts arithmétiques (le concept de nombre, les propriétés des opérations) à la pratique des instruments ?

Définition

Représentabilité : un concept arithmétique est représentable sur un instrument donné s'il peut y être montré par des actes concrets.

- Exemple : l'associativité de l'addition est représentable sur un instrument si l'ajout de c à $a + b$ suit la même procédure que l'ajout de $b + c$ à a .
- Remarque : la représentabilité n'a rien de subjectif ; c'est une représentation objective sur l'instrument. Par exemple, on ne se demande pas comment les Chinois se représentaient les nombres et les opérations, mais comment ils les représentaient sur l'instrument. Notre question n'est pas une noble question ontologique, mais purement bureaucratique.

Comment articuler les concepts arithmétiques (le concept de nombre, les propriétés des opérations) à la pratique des instruments ?

Définition

Représentabilité : un concept arithmétique est représentable sur un instrument donné s'il peut y être montré par des actes concrets.

- Exemple : l'associativité de l'addition est représentable sur un instrument si l'ajout de c à $a + b$ suit la même procédure que l'ajout de $b + c$ à a .
- Remarque : la représentabilité n'a rien de subjectif ; c'est une représentation objective sur l'instrument. Par exemple, on ne se demande pas comment les Chinois se représentaient les nombres et les opérations, mais comment ils les représentaient sur l'instrument. Notre question n'est pas une noble question ontologique, mais purement bureaucratique.

Deux sortes de sources :

- *A posteriori* (histoire des mathématiques) :
 - Cheng Dawei 程大位 (1533–1606), *Suanfa Tongzong* 算法統宗 (1592) : dernière grande compilation des mathématiques chinoises avant le mélange avec les mathématiques occidentales (Matteo Ricci).
 - Mais les textes ne montrent pas les limites théoriques des instruments : seulement des exemples de ce qui est à leur portée.
- *A priori* (informatique) :
 - Turing, “On Computable Numbers” (1936) ;
 - Lambek, “How to Program an Infinite Abacus” (1961).
 - Mais ces concepts occultent l’aspect pratique de l’instrument : les limites de l’outil, de la main humaine, de la mémoire de l’utilisateur, les méthodes pédagogiques...

Deux sortes de sources :

- *A posteriori* (histoire des mathématiques) :
 - Cheng Dawei 程大位 (1533–1606), *Suanfa Tongzong* 算法統宗 (1592) : dernière grande compilation des mathématiques chinoises avant le mélange avec les mathématiques occidentales (Matteo Ricci).
 - Mais les textes ne montrent pas les limites théoriques des instruments : seulement des exemples de ce qui est à leur portée.
- *A priori* (informatique) :
 - Turing, “On Computable Numbers” (1936) ;
 - Lambek, “How to Program an Infinite Abacus” (1961).
 - Mais ces concepts occultent l’aspect pratique de l’instrument : les limites de l’outil, de la main humaine, de la mémoire de l’utilisateur, les méthodes pédagogiques...

Deux sortes de sources :

- *A posteriori* (histoire des mathématiques) :
 - Cheng Dawei 程大位 (1533–1606), *Suanfa Tongzong* 算法統宗 (1592) : dernière grande compilation des mathématiques chinoises avant le mélange avec les mathématiques occidentales (Matteo Ricci).
 - Mais les textes ne montrent pas les limites théoriques des instruments : seulement des exemples de ce qui est à leur portée.
- *A priori* (informatique) :
 - Turing, “On Computable Numbers” (1936) ;
 - Lambek, “How to Program an Infinite Abacus” (1961).
 - Mais ces concepts occultent l’aspect pratique de l’instrument : les limites de l’outil, de la main humaine, de la mémoire de l’utilisateur, les méthodes pédagogiques...

Deux sortes de sources :

- *A posteriori* (histoire des mathématiques) :
 - Cheng Dawei 程大位 (1533–1606), *Suanfa Tongzong* 算法統宗 (1592) : dernière grande compilation des mathématiques chinoises avant le mélange avec les mathématiques occidentales (Matteo Ricci).
 - Mais les textes ne montrent pas les limites théoriques des instruments : seulement des exemples de ce qui est à leur portée.
- *A priori* (informatique) :
 - Turing, “On Computable Numbers” (1936) ;
 - Lambek, “How to Program an Infinite Abacus” (1961).
 - Mais ces concepts occultent l’aspect pratique de l’instrument : les limites de l’outil, de la main humaine, de la mémoire de l’utilisateur, les méthodes pédagogiques...

Deux sortes de sources :

- *A posteriori* (histoire des mathématiques) :
 - Cheng Dawei 程大位 (1533–1606), *Suanfa Tongzong* 算法統宗 (1592) : dernière grande compilation des mathématiques chinoises avant le mélange avec les mathématiques occidentales (Matteo Ricci).
 - Mais les textes ne montrent pas les limites théoriques des instruments : seulement des exemples de ce qui est à leur portée.
- *A priori* (informatique) :
 - Turing, “On Computable Numbers” (1936) ;
 - Lambek, “How to Program an Infinite Abacus” (1961).
 - Mais ces concepts occultent l’aspect pratique de l’instrument : les limites de l’outil, de la main humaine, de la mémoire de l’utilisateur, les méthodes pédagogiques...

Nous allons donc décrire la pratique *historique* d'un instrument de calcul comme s'il s'agissait d'un *langage de programmation* :

- structures de données : quels sont les objets manipulés ?
(registres, listes, tableaux...)
- style de programmation : quelle est la nature des algorithmes ?
(programmation fonctionnelle, impérative, orientée objet...)

Nous allons donc décrire la pratique *historique* d'un instrument de calcul comme s'il s'agissait d'un *langage de programmation* :

- structures de données : quels sont les objets manipulés ?
(registres, listes, tableaux...)
- style de programmation : quelle est la nature des algorithmes ?
(programmation fonctionnelle, impérative, orientée objet...)

Nous allons donc décrire la pratique *historique* d'un instrument de calcul comme s'il s'agissait d'un *langage de programmation* :

- structures de données : quels sont les objets manipulés ? (registres, listes, tableaux...)
- style de programmation : quelle est la nature des algorithmes ? (programmation fonctionnelle, impérative, orientée objet...)

La représentation des nombres

Qu'est-ce qu'être un nombre sur un instrument de calcul ?

- les instruments de calcul font un *choix* parmi les propriétés des nombres ;
- les nombres sont codés sur l'instrument au moyen de *structures de données* (registre, liste, tableau...);
- ces structures de données sont munies de *fonctions natives* (écriture, effacement, ajout, retrait, déplacement...), qui décident de la manière dont les nombres seront ultérieurement manipulés ;
- nous focaliserons notre attention sur le boulier.

La représentation des nombres

Qu'est-ce qu'être un nombre sur un instrument de calcul ?

- les instruments de calcul font un *choix* parmi les propriétés des nombres ;
- les nombres sont codés sur l'instrument au moyen de *structures de données* (registre, liste, tableau...);
- ces structures de données sont munies de *fonctions natives* (écriture, effacement, ajout, retrait, déplacement...), qui décident de la manière dont les nombres seront ultérieurement manipulés ;
- nous focaliserons notre attention sur le boulier.

La représentation des nombres

Qu'est-ce qu'être un nombre sur un instrument de calcul ?

- les instruments de calcul font un *choix* parmi les propriétés des nombres ;
- les nombres sont codés sur l'instrument au moyen de *structures de données* (registre, liste, tableau...);
- ces structures de données sont munies de *fonctions natives* (écriture, effacement, ajout, retrait, déplacement...), qui décident de la manière dont les nombres seront ultérieurement manipulés ;
- nous focaliserons notre attention sur le boulier.

La représentation des nombres

Qu'est-ce qu'être un nombre sur un instrument de calcul ?

- les instruments de calcul font un *choix* parmi les propriétés des nombres ;
- les nombres sont codés sur l'instrument au moyen de *structures de données* (registre, liste, tableau...);
- ces structures de données sont munies de *fonctions natives* (écriture, effacement, ajout, retrait, déplacement...), qui décident de la manière dont les nombres seront ultérieurement manipulés ;
- nous focaliserons notre attention sur le boulier.

La représentation des nombres

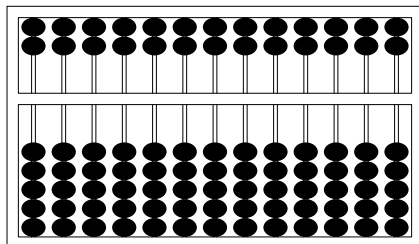
Qu'est-ce qu'être un nombre sur un instrument de calcul ?

- les instruments de calcul font un *choix* parmi les propriétés des nombres ;
- les nombres sont codés sur l'instrument au moyen de *structures de données* (registre, liste, tableau...);
- ces structures de données sont munies de *fonctions natives* (écriture, effacement, ajout, retrait, déplacement...), qui décident de la manière dont les nombres seront ultérieurement manipulés ;
- nous focaliserons notre attention sur le boulier.

Qu'est-ce qu'un boulier ?

Il existe différentes sortes de bouliers :

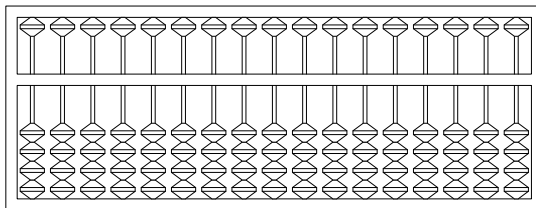
1. Le *suanpan* 算盤 chinois :



- environ 13 tringles identiques ;
- 2 boules quinaires et 5 boules unaires par tringle ;
- notation décimale positionnelle, puis décomposition modulo 5 ;
- notation « semi-flottante ».

Les types de boulier

2. Le *soroban* 算盤 japonais :



- de 13 à 21 tringles identiques ;
- 1 boule quinaire et 4 boules unaires par tringle ;
- notation décimale positionnelle, puis décomposition modulo 5 ;
- notation « semi-flottante ».

Les types de boulier

3. Le *schoty* (счёты) russe :



- 7 tringles non uniformes ;
- 10 boules unaires par tringle standard (sans boule quinaire) ;
- tringles à quatre boules (quarts de rouble ou de kopecks) ;
- notation décimale positionnelle, sans décomposition modulo 5 ;
- notation absolue (à cause des tringles à quatre boules).

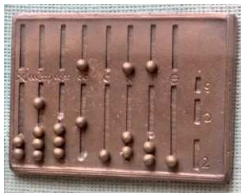
Les types de boulier

4. Boulier français :

- une dizaine de triangles identiques ;
- 10 boules unaires par triangle ;
- notation décimale positionnelle, sans décomposition modulo 5 ;
- notation semi-flottante.

Les types de boulier

5. L'abaque romain portatif :



- 1 boule quinaire et 4 boules unaires par colonne ;
- les unités sont quelquefois fixées (I, X, C, M...).
- notation décimale positionnelle, avec décomposition modulo 5 ;
- notation absolue.

- Classification des bouliers :

	Modulo 10	Modulo 5
Notation absolue	<i>schoty</i>	abaque romain portatif
Notation semi-flottante	« boulier »	<i>suanpan / soroban</i>

- La *représentation des nombres* diffère selon les bouliers ; chaque type de boulier sélectionne les propriétés qu'il permettra de manipuler.
- La représentation des nombres a une influence sur la représentation des opérations et sur la représentabilité de leurs propriétés.
- Examinons plus précisément le boulier chinois.

- Classification des bouliers :

	Modulo 10	Modulo 5
Notation absolue	<i>schoty</i>	abaque romain portatif
Notation semi-flottante	« boulier »	<i>suanpan / soroban</i>

- La *représentation des nombres* diffère selon les bouliers ; chaque type de boulier sélectionne les propriétés qu'il permettra de manipuler.
- La représentation des nombres a une influence sur la représentation des opérations et sur la représentabilité de leurs propriétés.
- Examinons plus précisément le boulier chinois.

- Classification des bouliers :

	Modulo 10	Modulo 5
Notation absolue	<i>schoty</i>	abaque romain portatif
Notation semi-flottante	« boulier »	<i>suanpan / soroban</i>

- La *représentation des nombres* diffère selon les bouliers ; chaque type de boulier sélectionne les propriétés qu'il permettra de manipuler.
- La représentation des nombres a une influence sur la représentation des opérations et sur la représentabilité de leurs propriétés.
- Examinons plus précisément le boulier chinois.

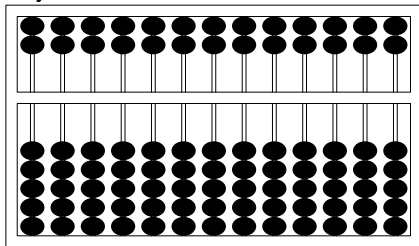
- Classification des bouliers :

	Modulo 10	Modulo 5
Notation absolue	<i>schoty</i>	abaque romain portatif
Notation semi-flottante	« boulier »	<i>suanpan / soroban</i>

- La *représentation des nombres* diffère selon les bouliers ; chaque type de boulier sélectionne les propriétés qu'il permettra de manipuler.
- La représentation des nombres a une influence sur la représentation des opérations et sur la représentabilité de leurs propriétés.
- Examinons plus précisément le boulier chinois.

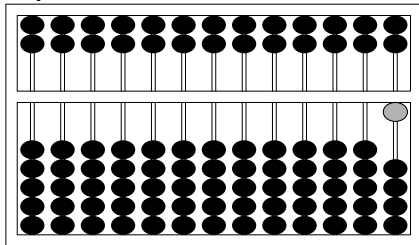
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



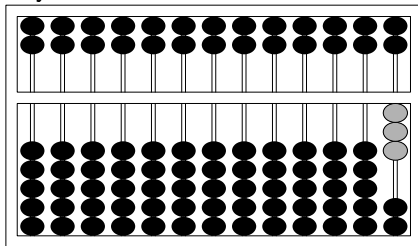
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



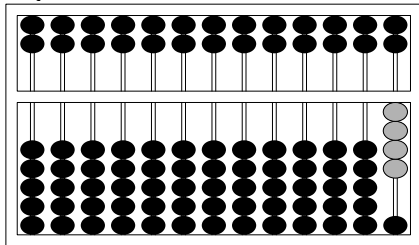
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



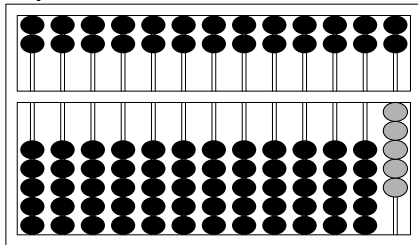
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



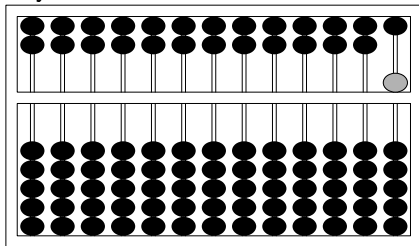
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



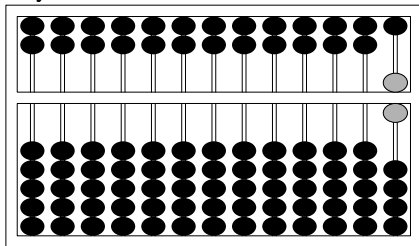
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



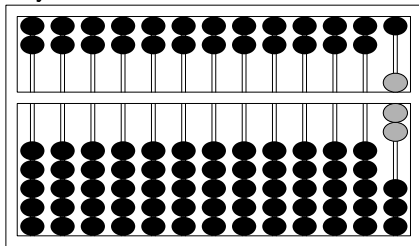
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



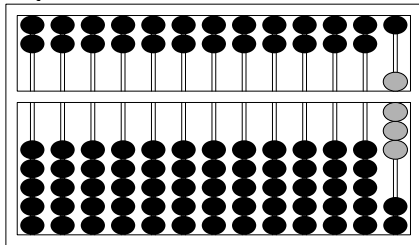
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



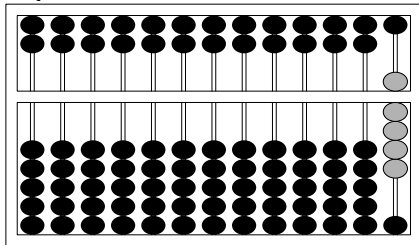
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



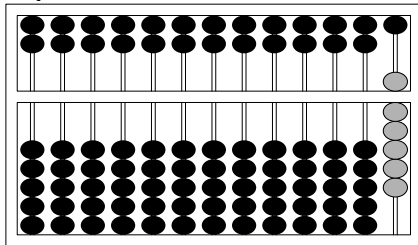
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



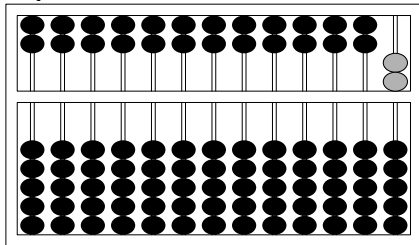
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



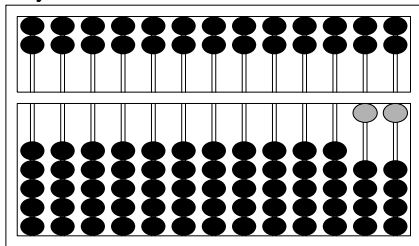
Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



Compter sur un boulier

Voyons d'abord comment les nombres sont codés sur un *suapan* :



Le boulier est un instrument fondamentalement *additif* (par opposition à la table de logarithmes et à la règle à calcul, qui sont des instruments nativement multiplicatifs).

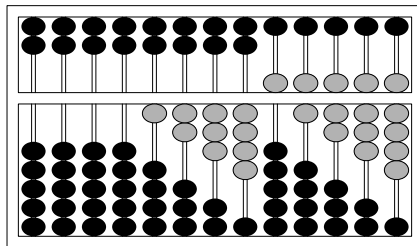
Structures de données du boulier

- Quelle sont les structures de données du boulier ? Registre, liste, tableau, pile ?
- Exemple de la surface à calculer comme tableau de nombres :

5	4	3
7	6	5
8	7	9
17	8	8

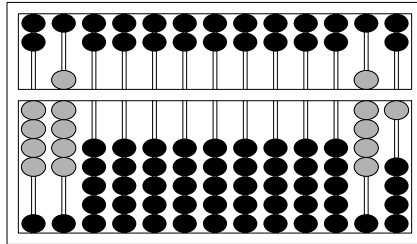
Structures de données du boulier

Généralement, on ne représente qu'un seul nombre, par exemple
123 456 789 :



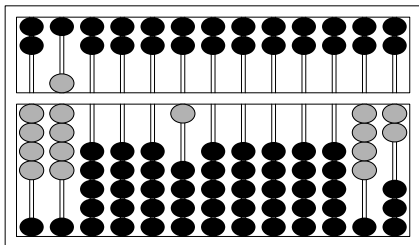
Structures de données du boulier

Il est parfois utile de représenter **deux** nombres, typiquement pour calculer le plus grand dénominateur commun :



Structures de données du boulier

- On peut également (rarement) représenter **trois** nombres, par exemple pour la division « euclidienne » (diviseur, quotient, dividende/reste). Par exemple, $91 = 49 \times 1 + 42$:



- Mais il faut faire attention au télescopage des nombres ! La seule façon de l'éviter absolument est de n'écrire qu'un seul nombre.

Structures de données du boulier

Quelle est donc la structure de données du boulier ?

- 1 La structure de données du boulier chinois consiste en un *registre*, ou en une très courte *liste* de nombres (grande différence avec la surface à calculer).
- 2 L'espace est très limité sur le boulier chinois (contrairement au boulier japonais) : on peut difficilement écrire plus d'un grand nombre. Ce sera un grand problème, car la plupart de nos opérations arithmétiques est binaire.
- 3 Comment sont donc effectuées sur le boulier les opérations que nous savons binaires (addition, soustraction, multiplication, division) ? Étudions le style de programmation du boulier.

Structures de données du boulier

Quelle est donc la structure de données du boulier ?

- 1 La structure de données du boulier chinois consiste en un *registre*, ou en une très courte *liste* de nombres (grande différence avec la surface à calculer).
- 2 L'espace est très limité sur le boulier chinois (contrairement au boulier japonais) : on peut difficilement écrire plus d'un grand nombre. Ce sera un grand problème, car la plupart de nos opérations arithmétiques est binaire.
- 3 Comment sont donc effectuées sur le boulier les opérations que nous savons binaires (addition, soustraction, multiplication, division) ? Étudions le style de programmation du boulier.

Structures de données du boulier

Quelle est donc la structure de données du boulier ?

- 1 La structure de données du boulier chinois consiste en un *registre*, ou en une très courte *liste* de nombres (grande différence avec la surface à calculer).
- 2 L'espace est très limité sur le boulier chinois (contrairement au boulier japonais) : on peut difficilement écrire plus d'un grand nombre. Ce sera un grand problème, car la plupart de nos opérations arithmétiques est binaire.
- 3 Comment sont donc effectuées sur le boulier les opérations que nous savons binaires (addition, soustraction, multiplication, division) ? Étudions le style de programmation du boulier.

Structures de données du boulier

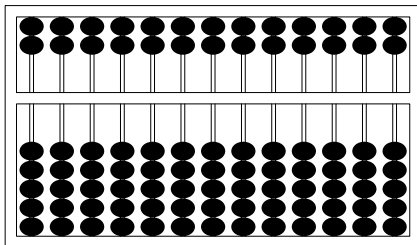
Quelle est donc la structure de données du boulier ?

- 1 La structure de données du boulier chinois consiste en un *registre*, ou en une très courte *liste* de nombres (grande différence avec la surface à calculer).
- 2 L'espace est très limité sur le boulier chinois (contrairement au boulier japonais) : on peut difficilement écrire plus d'un grand nombre. Ce sera un grand problème, car la plupart de nos opérations arithmétiques est binaire.
- 3 Comment sont donc effectuées sur le boulier les opérations que nous savons binaires (addition, soustraction, multiplication, division) ? Étudions le style de programmation du boulier.

Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

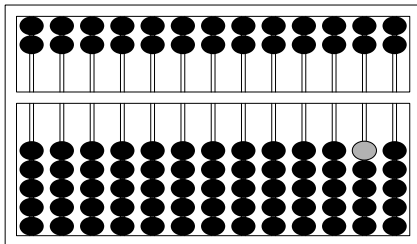
- 1 Remise à zéro du boulier :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

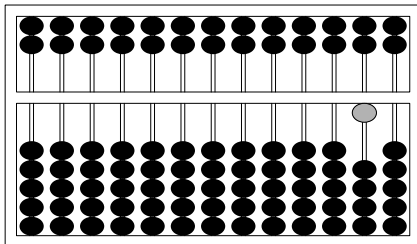
② Codage du premier nombre :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

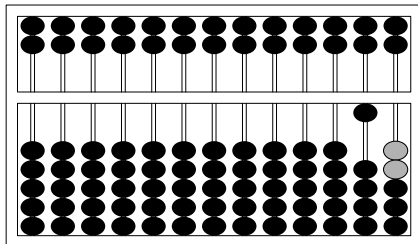
② Codage du premier nombre :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

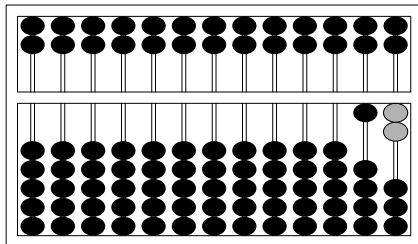
② Codage du premier nombre :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

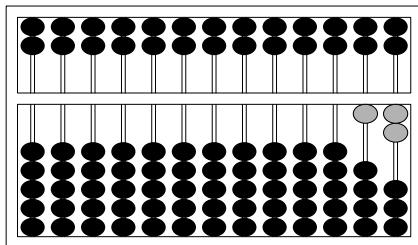
② Codage du premier nombre :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

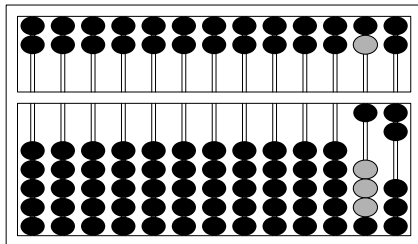
② Codage du premier nombre :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

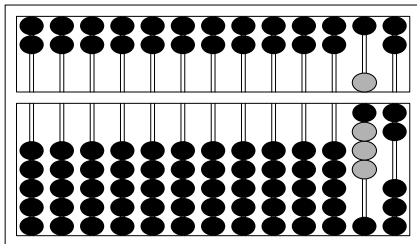
③ Ajout du second nombre :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

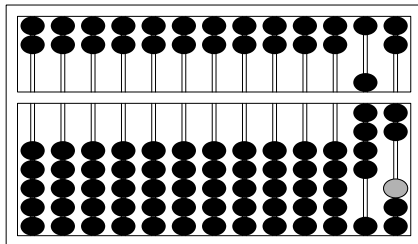
③ Ajout du second nombre :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

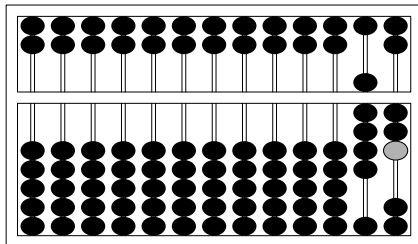
③ Ajout du second nombre :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

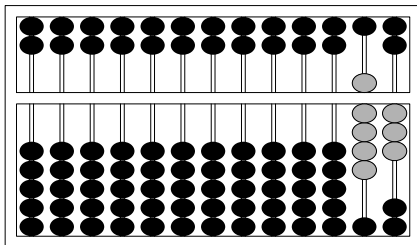
③ Ajout du second nombre :



Addition sans retenue

Commençons par une addition sans retenue : $12 + 81$.

④ Lecture du résultat :



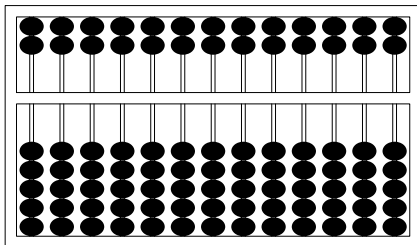
Théorème

$$12 + 81 = 93.$$

Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

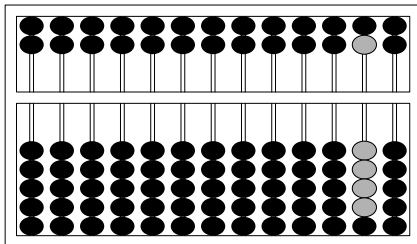
- 1 Remise à zéro du boulier :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

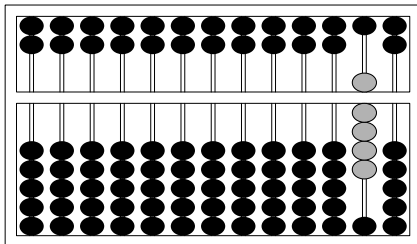
② Codage du premier nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

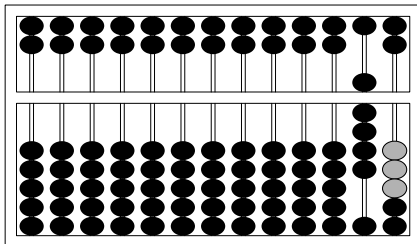
② Codage du premier nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

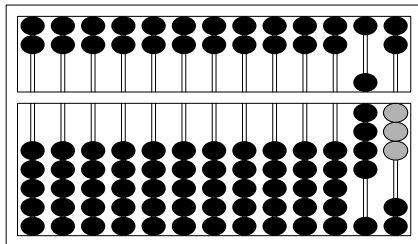
② Codage du premier nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

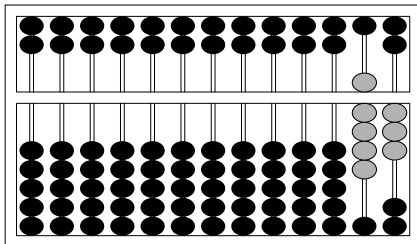
② Codage du premier nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

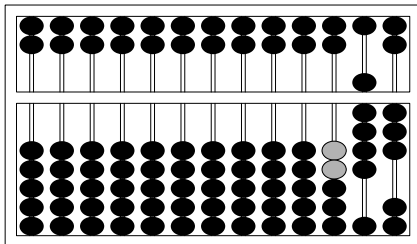
② Codage du premier nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

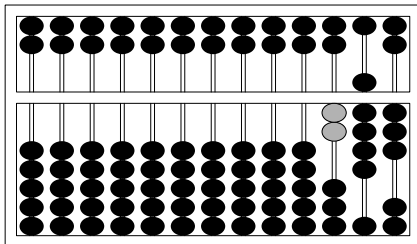
③ Ajout du second nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

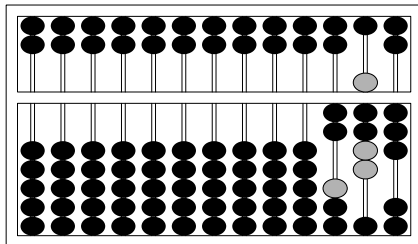
③ Ajout du second nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

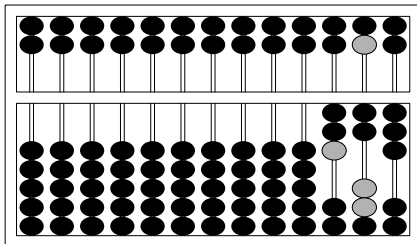
③ Ajout du second nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

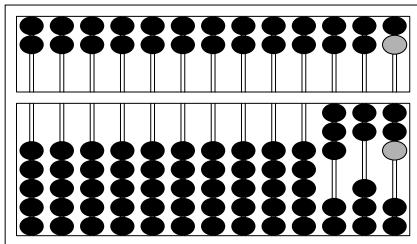
③ Ajout du second nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

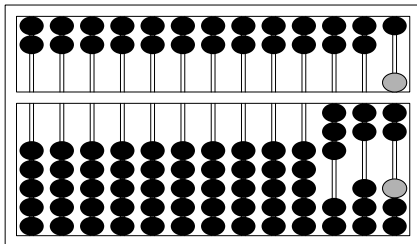
③ Ajout du second nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

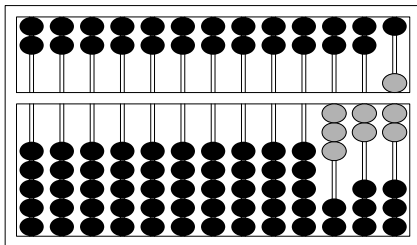
③ Ajout du second nombre :



Addition avec retenue

Calculons une addition avec retenue : $93 + 234$.

④ Lecture du résultat :



Théorème

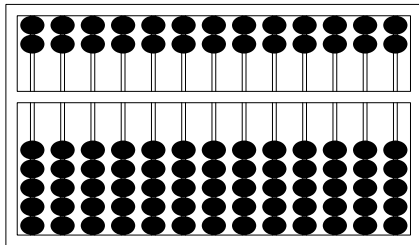
$$93 + 234 = 327.$$

Soustraction

Pour la soustraction, l'algorithme est le même, mais à l'envers.

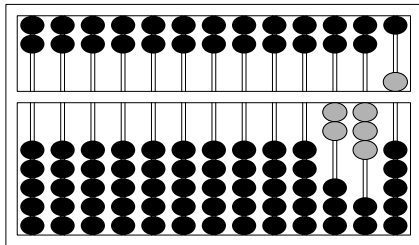
Multiplication

Calculons 235×14 .



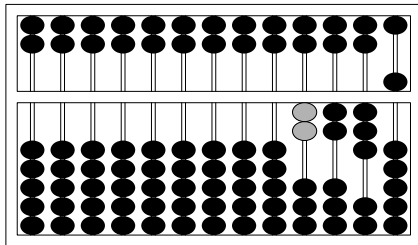
Multiplication

Calculons 235×14 .



Multiplication

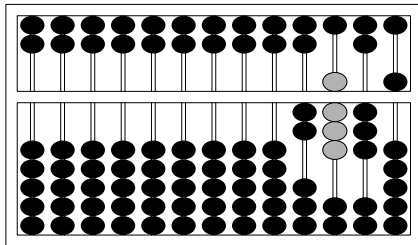
Calculons 235×14 .



car $2 \times 1 = 2$

Multiplication

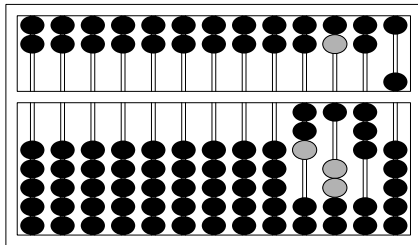
Calculons 235×14 .



car $2 \times 4 = 8$

Multiplication

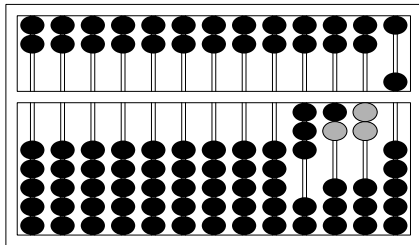
Calculons 235×14 .



car $3 \times 1 = 3$

Multiplication

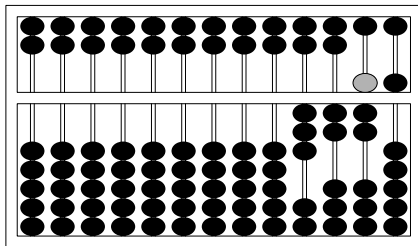
Calculons 235×14 .



car $3 \times 4 = 12$

Multiplication

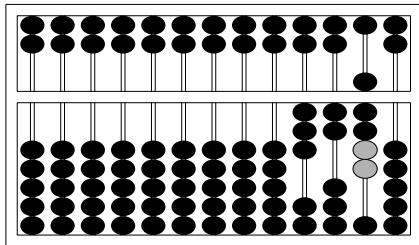
Calculons 235×14 .



car $5 \times 1 = 5$

Multiplication

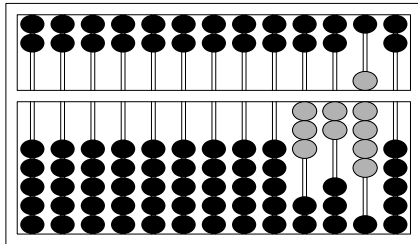
Calculons 235×14 .



car $5 \times 4 = 20$

Multiplication

Calculons 235×14 .



Théorème

$$235 \times 14 = 3290.$$

Division

Pour la division, il existe deux méthodes :

- diviseur quelconque : utilisation à l'envers de la table de multiplication ;
- diviseur à un chiffre : une transformation progressive du dividende, à l'aide d'une table de division.

Division

Pour la division, il existe deux méthodes :

- diviseur quelconque : utilisation à l'envers de la table de multiplication ;
- diviseur à un chiffre : une transformation progressive du dividende, à l'aide d'une table de division.

Division

Pour la division, il existe deux méthodes :

- diviseur quelconque : utilisation à l'envers de la table de multiplication ;
- diviseur à un chiffre : une transformation progressive du dividende, à l'aide d'une table de division.

Opérations unaires

Qu'observons-nous ?

- À chaque étape du calcul, il y a un et un seul nombre sur le boulier.
- Addition, multiplication etc. sont donc effectuées comme s'il s'agissait d'opérations unaires.
- Comment est-ce possible ? Comment peut-on transformer une opération binaire en une opération unaire ?

Opérations unaires

Qu'observons-nous ?

- À chaque étape du calcul, il y a un et un seul nombre sur le boulier.
- Addition, multiplication etc. sont donc effectuées comme s'il s'agissait d'opérations unaires.
- Comment est-ce possible ? Comment peut-on transformer une opération binaire en une opération unaire ?

Opérations unaires

Qu'observons-nous ?

- À chaque étape du calcul, il y a un et un seul nombre sur le boulier.
- Addition, multiplication etc. sont donc effectuées comme s'il s'agissait d'opérations unaires.
- Comment est-ce possible ? Comment peut-on transformer une opération binaire en une opération unaire ?

Curryfication

Définition

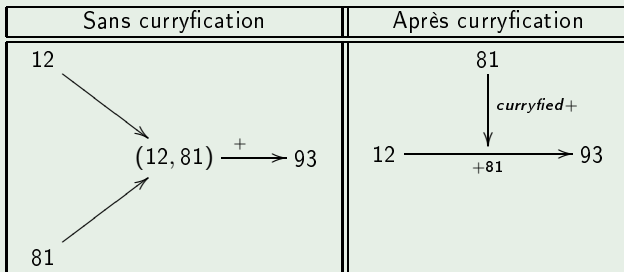
Curryfication (Schönfinkel, Curry) = transformation d'une fonction *n-aire* en une composition de fonctions *unaires* (à condition que la valeur d'une fonction puisse elle-même être une fonction).

Curryfication

Définition

Curryfication (Schönfinkel, Curry) = transformation d'une fonction *n-ire* en une composition de fonctions *unaires* (à condition que la valeur d'une fonction puisse elle-même être une fonction).

Exemple



Curryfication

La curryfication a ainsi été mise en pratique sur des instruments de calcul bien avant d'être théorisée par Schönfinkel et Curry.

Curryfication

Lorsque nous calculons $12 + 81$ sur le boulier :

- les opérandes jouent des rôles asymétriques :
 - 12 est un « nombre », un objet passif, représenté en tant que tel sur l'instrument ;
 - 81 fait partie d'une fonction : il est transformé en actes de main. Il est invisible sur le boulier. On ne voit que ses effets.
- On distingue facilement un addende et un additeur, ce qui n'est pas le cas quand on calcule sur papier l'opération

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 81 \\ \hline \end{array}$$

Curryfication

Lorsque nous calculons $12 + 81$ sur le boulier :

- les opérandes jouent des rôles asymétriques :
 - 12 est un « nombre », un objet passif, représenté en tant que tel sur l'instrument ;
 - 81 fait partie d'une fonction : il est transformé en actes de main. Il est invisible sur le boulier. On ne voit que ses effets.
- On distingue facilement un addende et un additeur, ce qui n'est pas le cas quand on calcule sur papier l'opération

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 81 \\ \hline \end{array}$$

Curryfication

Lorsque nous calculons $12 + 81$ sur le boulier :

- les opérandes jouent des rôles asymétriques :
 - 12 est un « nombre », un objet passif, représenté en tant que tel sur l'instrument ;
 - 81 fait partie d'une fonction : il est transformé en actes de main. Il est invisible sur le boulier. On ne voit que ses effets.
- On distingue facilement un addende et un additeur, ce qui n'est pas le cas quand on calcule sur papier l'opération

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 81 \\ \hline \end{array}$$

- Le résultat du calcul n'occupe pas une place à part sur l'espace de l'instrument : il résulte de la transformation même du nombre de départ.
- Il n'y a pas d'« assignation de variable » (contrairement à la surface à calculer, cf. Karine Chemla 2004).
- Le style de calcul du boulier est purement fonctionnel (cf. Lisp, Haskell...) : pas d'assignation de variable ; les algorithmes sont des compositions de fonctions.
- Par opposition, le style de programmation de la surface à calculer est impératif : assignation de variable ; les algorithmes sont des suites d'instructions (Chemla 2004).

- Le résultat du calcul n'occupe pas une place à part sur l'espace de l'instrument : il résulte de la transformation même du nombre de départ.
- Il n'y a pas d'« assignation de variable » (contrairement à la surface à calculer, cf. Karine Chemla 2004).
- Le style de calcul du boulier est purement fonctionnel (cf. Lisp, Haskell...) : pas d'assignation de variable ; les algorithmes sont des compositions de fonctions.
- Par opposition, le style de programmation de la surface à calculer est impératif : assignation de variable ; les algorithmes sont des suites d'instructions (Chemla 2004).

- Le résultat du calcul n'occupe pas une place à part sur l'espace de l'instrument : il résulte de la transformation même du nombre de départ.
- Il n'y a pas d'« assignation de variable » (contrairement à la surface à calculer, cf. Karine Chemla 2004).
- Le style de calcul du boulier est purement fonctionnel (cf. Lisp, Haskell...) : pas d'assignation de variable ; les algorithmes sont des compositions de fonctions.
- Par opposition, le style de programmation de la surface à calculer est impératif : assignation de variable ; les algorithmes sont des suites d'instructions (Chemla 2004).

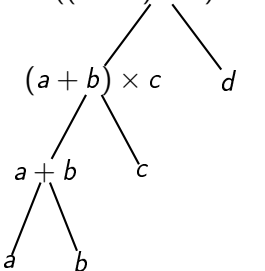
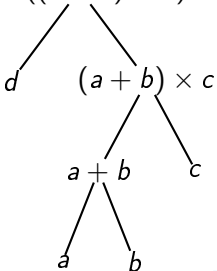
- Le résultat du calcul n'occupe pas une place à part sur l'espace de l'instrument : il résulte de la transformation même du nombre de départ.
- Il n'y a pas d'« assignation de variable » (contrairement à la surface à calculer, cf. Karine Chemla 2004).
- Le style de calcul du boulier est purement fonctionnel (cf. Lisp, Haskell...) : pas d'assignation de variable ; les algorithmes sont des compositions de fonctions.
- Par opposition, le style de programmation de la surface à calculer est impératif : assignation de variable ; les algorithmes sont des suites d'instructions (Chemla 2004).

Conséquences calculatoires

Quelles sont les conséquences pour l'effectuation des calculs au boulier ?

Conséquences calculatoires

Comme il n'y a pas d'assignation de variable, les résultats intermédiaires ne peuvent pas être mémorisés. Par conséquent, certaines opérations ne sont pas possibles, de par leur arbre syntaxique même.

Calcul possible	Erreur de syntaxe
$((a + b) \times c) + d$ 	$d + ((a + b) \times c)$ 

Conséquences calculatoires

- $(a + b) + c$ est représentable,
- $a + (b + c)$ n'est pas représentable.

Calcul possible	Erreur de syntaxe
$(a + b) + c$	$a + (b + c)$

- L'associativité de l'addition n'est pas représentable sur le boulier (cf. les calculatrices de collège).

Conséquences calculatoires

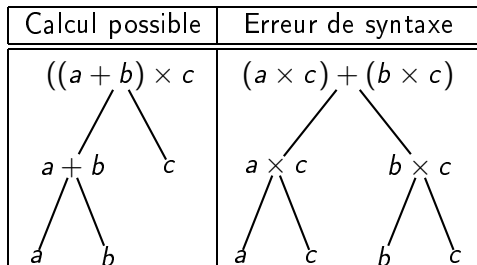
- $(a + b) + c$ est représentable,
- $a + (b + c)$ n'est pas représentable.

Calcul possible	Erreur de syntaxe
$(a + b) + c$	$a + (b + c)$

- L'associativité de l'addition n'est pas représentable sur le boulier (cf. les calculatrices de collègue).

Computational consequences

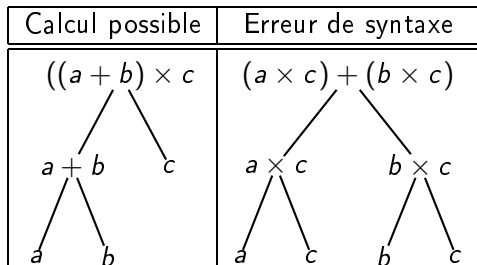
- $(a + b) \times c$ est représentable,
- $(a \times c) + (b \times c)$ n'est pas représentable.



- La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition n'est pas représentable sur le boulier.

Computational consequences

- $(a + b) \times c$ est représentable,
- $(a \times c) + (b \times c)$ n'est pas représentable.



- La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition n'est pas représentable sur le boulier.

Conséquences calculatoires

Peut-être peut-on au moins sauver la commutativité de l'addition ?

- Question de sémantique : comment les opérations sont-elles interprétées ?
- Question de pédagogie : comment sont-elles enseignées ? Nous allons étudier la sémantique induite par les pédagogies.

- Question de sémantique : comment les opérations sont-elles interprétées ?
- Question de pédagogie : comment sont-elles enseignées ? Nous allons étudier la sémantique induite par les pédagogies.

L'addition commutative de Fibonacci

2	and	2	make	4																
2		3		5	3	and	3	make	6											
2		4		6	3		4		7	4	and	4	make	8						
2		5		7	3		5		8	4		5		9						
2		6		8	3		6		9	4		6		10						
2		7		9	3		7		10	4		7		11						
2		8		10	3		8		11	4		8		12						
2		9		11	3		9		12	4		9		13						
2		10		12	3		10		13	4		10		14						

5	and	5	make	10	6	and	6	make	12	7	and	7	make	14										
5		6		11	6		7		13	7		8		15										
5		7		12	6		8		14	7		9		16										
5		8		13	6		9		15	7		10		17										
5		9		14	6		10		16															
5		10		15																				

8	and	8	make	16	9	and	9	make	18	10	and	10	make	20										
8		9		17	9		10		19	20	and	20	make	40										
8		10		18																				

L'addition commutative de Fibonacci

Table d'additions triangulaire :

+	1	2	3	...
1	2			
2	3	4		
3	4	5	6	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Théorème

$3 + 2 = 2 + 3$. L'addition de nombres à un chiffre est commutative.

Comparons maintenant $14 + 27$ et $27 + 14$.

$14 + 27 :$	$27 + 14 :$
$\begin{array}{r} 14 \\ + 27 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ + 14 \\ \hline \end{array}$

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

$14 + 27 :$	$27 + 14 :$
1	1
1 4	2 7
+ 2 7	+ 1 4
<hr/> 1	<hr/> 1

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

$14 + 27 :$	$27 + 14 :$
1	1
1 4	2 7
+ 2 7	+ 1 4
<hr/> 4 1	<hr/> 4 1

Théorème

$14 + 27 = 41 = 27 + 14$ (et pour les mêmes raisons).

L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Cheng Dawei, *Suanfa Tongzong*, ch. 1 :

Texte chinois	Instructions	Opération
下五除三	descends (une boule de) cinq (et) ôte trois (boules unaires)	$4 + 2 = 4 + 5 - 3$
下五除一	descends (une boule de) cinq (et) ôte une (boule unaire)	$2 + 4 = 2 + 5 - 1$

Théorème

$$2 + 4 \neq 4 + 2.$$

Texte chinois	Instructions	Opération
下五除一	descends (une boule de) cinq (et) ôte une (boule unaire)	$2 + 4 = 2 + 5 - 1$
下五除一	descends (une boule de) cinq (et) ôte une (boule unaire)	$3 + 4 = 3 + 5 - 1$

Théorème

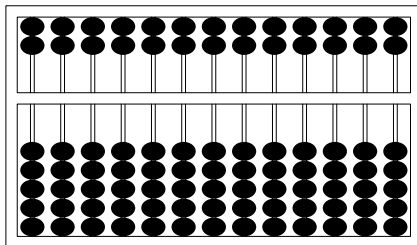
$$2 + 4 = 3 + 4.$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

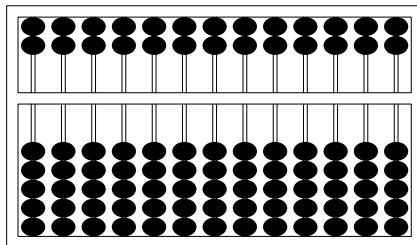
$14 + 27$:

Remise à zéro du boulier :



$27 + 14$:

Remise à zéro du boulier :

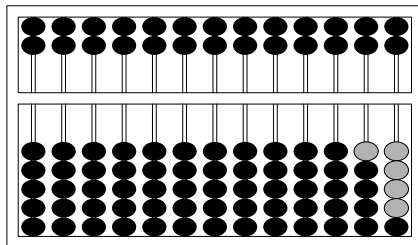


L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

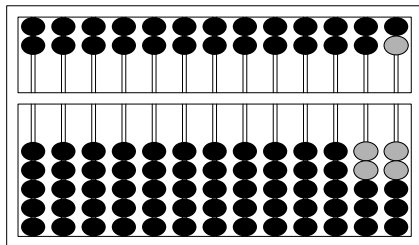
$14 + 27$:

Codage du premier nombre :



$27 + 14$:

Codage du premier nombre :

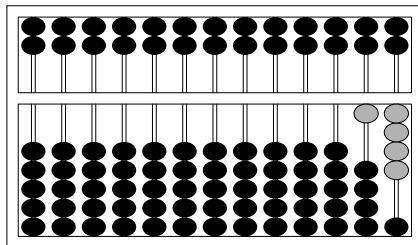


L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

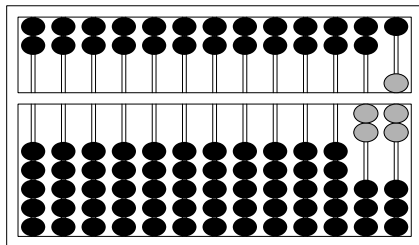
$14 + 27$:

Codage du premier nombre :



$27 + 14$:

Codage du premier nombre :

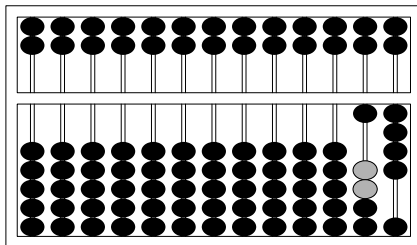


L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

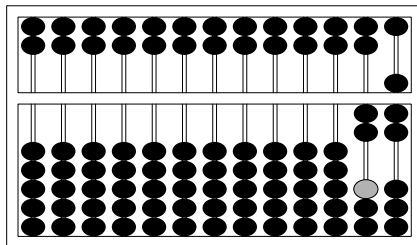
$14 + 27$:

Ajout du second nombre :



$27 + 14$:

Ajout du second nombre :

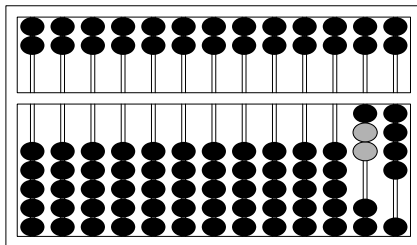


L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

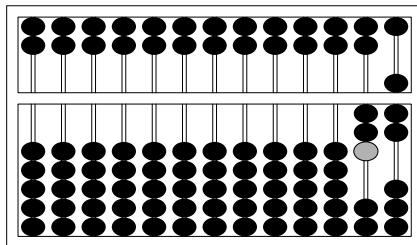
$14 + 27$:

Ajout du second nombre :



$27 + 14$:

Ajout du second nombre :

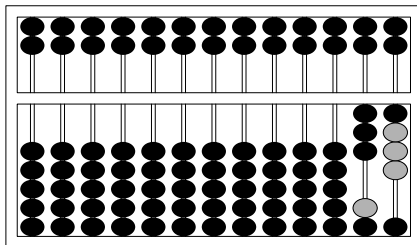


L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

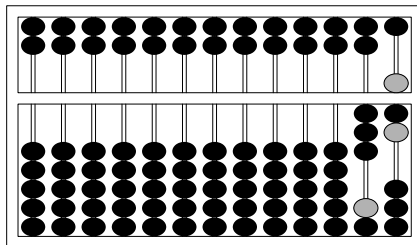
$14 + 27$:

Ajout du second nombre :



$27 + 14$:

Ajout du second nombre :

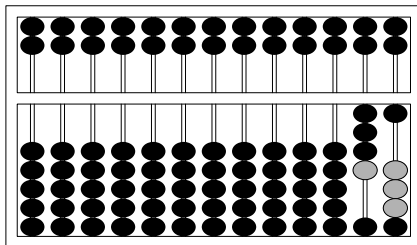


L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

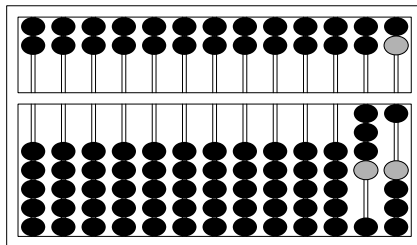
$14 + 27$:

Ajout du second nombre :



$27 + 14$:

Ajout du second nombre :

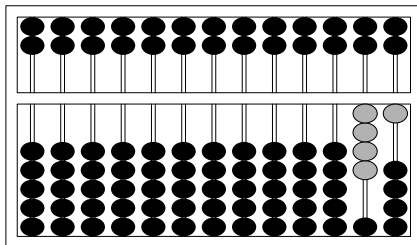


L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Comparons $14 + 27$ et $27 + 14$.

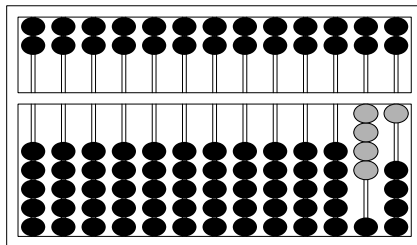
$14 + 27$:

Ajout du second nombre :



$27 + 14$:

Ajout du second nombre :



Théorème

$14 + 27 = 41 = 27 + 14$ (mais pour des raisons différentes).

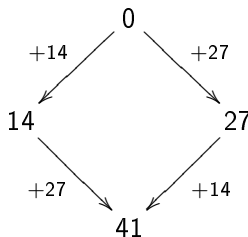
L'addition au boulier chez Cheng Dawei

L'addition sur le boulier est :

- *dénotationnellement* commutative (le résultat est identique),
- mais *opérationnellement* non commutative (les opérations sont différentes).

sémantique opérationnelle

sémantique dénotationnelle



L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Peut-on seulement parler d'une table d'additions chez Cheng Dawei ?

L'addition au boulier chez Cheng Dawei

當以初行爲右次行爲左以理而推之法當從右算當 在左此乃不易之位也	
九九八十一 便家通用	
① 一上一	二上二
② 五下五	六上六
③ 九上九	七上七
④ 一上一	二上二
⑤ 四下五除一	三下五除二
⑥ 六上一起五還一十	五起五還一十
⑦ 八退二還一十	七上二起五還一十
⑧ 九退一還一十	九退一還一十
⑨ 一上一	二下五除三
⑩ 四退六還一十	五下五
⑪ 七退三還一十	六上六
⑫ 九退一還一十	八退二還一十
⑬ 一上一	二上二
⑭ 四下五除一	三退七還一十
⑮ 六退四還一十	五起五還一十
⑯ 八上三起五還一十	七退三還一十
⑰ 一下五除四	九退一還一十
⑱ 三下五除二	二退八還一十
	四退六還一十

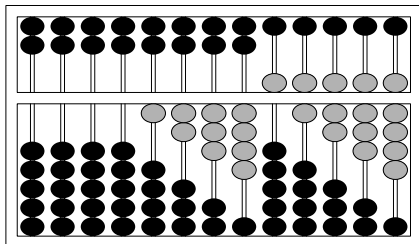
二 一 一 二 三 一

L'addition au boulier chez Cheng Dawei

中國科學技術典籍通集 數學卷

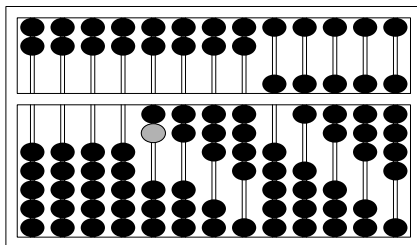
五下五	六上一起五還一十	七上七
八退二還一十	九退一還一十	
一上一	二上二	三退七還一十
四下五除一	五起五還一十	
六上六	七退三還一十	
八退二還一十	九上四起五還一十	
一上一	二下五除三	三上三
四退六還一十	五下五	
六退四還一十	七上二起五還一十	
八退二還一十	九退一還一十	
一上一	二上二	三下五除二
四下五除一	五起五還一十	
六上一起五還一十	七退三還一十	
八退二還一十	九退一還一十	
一上一	二上二	三上三
四下五	六上六	七上七
八上八		
九退一還一十		
九九合數	乘除加減 皆呼此數	故呼小數在上大數在下
〇一一如一	〇一二如一	一二如四
〇一三如三	二三如六	三三如九

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



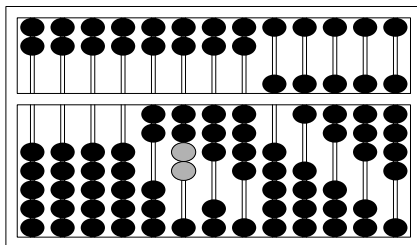
123456789

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



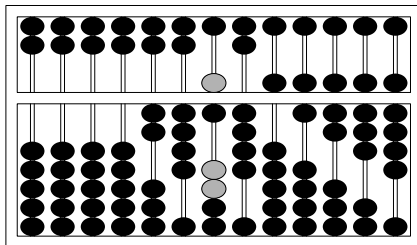
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ + 100000000 \\ \hline 223456789 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



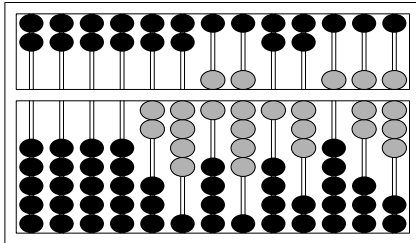
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +100000000 \\ +200000000 \\ \hline 243456789 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



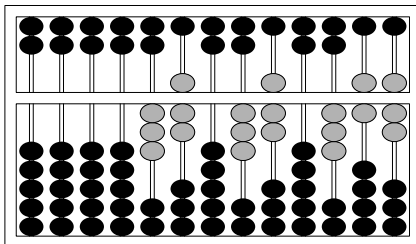
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +100000000 \\ +20000000 \\ +3000000 \\ \hline 246456789 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



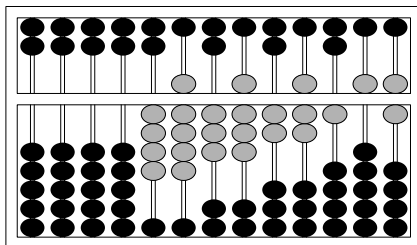
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +123456789 \\ \hline 246913578 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



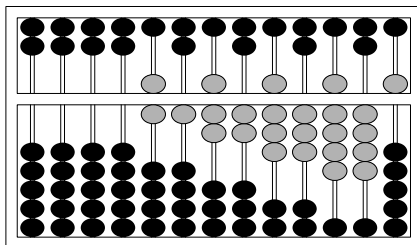
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ \hline 370370367 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



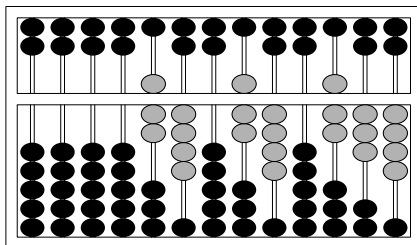
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ \hline 493827156 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



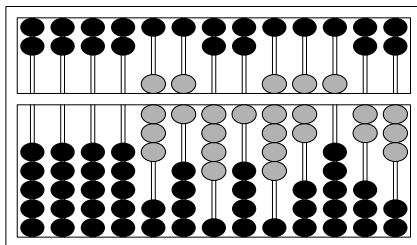
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ \hline 617283945 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



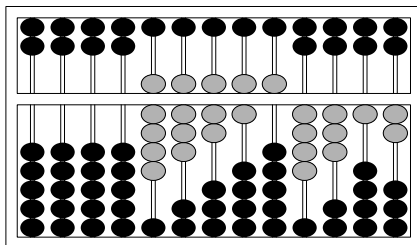
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ \hline 740740734 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



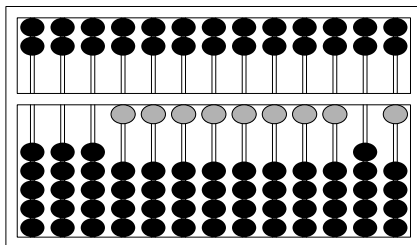
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ \hline 864197523 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



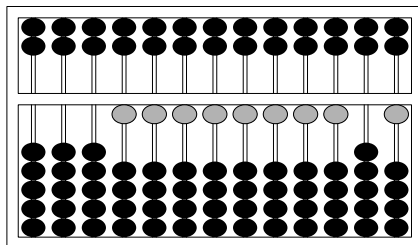
$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ \hline 987654312 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ \hline 1111111101 \end{array}$$

L'addition au boulier chez Cheng Dawei



$$\begin{array}{r} 123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ +123456789 \\ \hline 1111111101 \end{array}$$

On n'a pas de table d'additions! Seulement un exercice d'addition.
Est-il au moins exhaustif?

L'addition au boulier chez Cheng Dawei

La « table d'additions » de Cheng Dawei n'est même pas complète :

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	1	3	1	1	3	1	1	1
1		1	1		1	1		1	1	
2		1	1		1	1			1	1
3		1		2	1		2	2	1	1
4		1	2	1	1	1	1		1	1
5						2		2	1	1
6		1	1	1	1		1		1	1
7		1	1	2	1	1	2	2	1	1
8		1	1		1	1			1	1
9		1	1		1	1		1		1

L'addition au boulier chez Cheng Dawei

Même à commutativité près, cette « table » n'est pas complète :

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	1	3	1	1	3	1	1	1
1		1	2	1	2	1	1	2	2	1
2			1		3	1	1	1	2	2
3				2	2		3	4	1	1
4					1	1	2	1	2	2
5						2		3	2	2
6							1	2	1	1
7								2	1	2
8									1	1
9										1

- Cette « table » n'enseigne pas la liste de toutes les additions possibles, mais seulement l'ensemble des techniques élémentaires.
- C'est une *pédagogie opérationnelle* : on n'enseigne pas des résultats mais des méthodes. Un élève peut ne pas savoir combien font $3 + 8$, mais il doit savoir comment le calculer.

- Cette « table » n'enseigne pas la liste de toutes les additions possibles, mais seulement l'ensemble des techniques élémentaires.
- C'est une *pédagogie opérationnelle* : on n'enseigne pas des résultats mais des méthodes. Un élève peut ne pas savoir combien font $3 + 8$, mais il doit savoir comment le calculer.

Les extensions d'instruments

- Peut-on dépasser les limites d'un instrument ?
- Pour cela, il faut utiliser des extensions d'outils (cf. les automates à pile, les machines de Turing à oracle...) :
 - la mémoire humaine : des permutations mentales permettent de retrouver la commutativité et l'associativité ;
 - des outils extérieurs : Cheng Dawei (chapitre 11) permet la résolution de systèmes d'équations linéaires à n inconnues par pivot de Gauss en utilisant un support extérieur (surface à calculer, papier...).

Les extensions d'instruments

- Peut-on dépasser les limites d'un instrument ?
- Pour cela, il faut utiliser des extensions d'outils (cf. les automates à pile, les machines de Turing à oracle...) :
 - la mémoire humaine : des permutations mentales permettent de retrouver la commutativité et l'associativité ;
 - des outils extérieurs : Cheng Dawei (chapitre 11) permet la résolution de systèmes d'équations linéaires à n inconnues par pivot de Gauss en utilisant un support extérieur (surface à calculer, papier...).

Les extensions d'instruments

- Peut-on dépasser les limites d'un instrument ?
- Pour cela, il faut utiliser des extensions d'outils (cf. les automates à pile, les machines de Turing à oracle...) :
 - la mémoire humaine : des permutations mentales permettent de retrouver la commutativité et l'associativité ;
 - des outils extérieurs : Cheng Dawei (chapitre 11) permet la résolution de systèmes d'équations linéaires à n inconnues par pivot de Gauss en utilisant un support extérieur (surface à calculer, papier...).

Les extensions d'instruments

- Peut-on dépasser les limites d'un instrument ?
- Pour cela, il faut utiliser des extensions d'outils (cf. les automates à pile, les machines de Turing à oracle...) :
 - la mémoire humaine : des permutations mentales permettent de retrouver la commutativité et l'associativité ;
 - des outils extérieurs : Cheng Dawei (chapitre 11) permet la résolution de systèmes d'équations linéaires à n inconnues par pivot de Gauss en utilisant un support extérieur (surface à calculer, papier...).

Conclusion

En résumé, sur le boulier chinois,

- tous les « nombres » ne sont pas des « objets » : certains sont des actes ;
- ni l'addition ni la multiplication n'apparaissent comme des opérations binaires ;
- plusieurs propriétés arithmétiques élémentaires (associativité, commutativité, distributivité) ne sont pas représentables ;
- l'addition ne nécessite pas la connaissance d'une table ;
- tout ceci rompt avec ce que l'on pourrait attendre d'un point de vue arithmétique.

Conclusion

En résumé, sur le boulier chinois,

- tous les « nombres » ne sont pas des « objets » : certains sont des actes ;
- ni l'addition ni la multiplication n'apparaissent comme des opérations binaires ;
- plusieurs propriétés arithmétiques élémentaires (associativité, commutativité, distributivité) ne sont pas représentables ;
- l'addition ne nécessite pas la connaissance d'une table ;
- tout ceci rompt avec ce que l'on pourrait attendre d'un point de vue arithmétique.

Conclusion

En résumé, sur le boulier chinois,

- tous les « nombres » ne sont pas des « objets » : certains sont des actes ;
- ni l'addition ni la multiplication n'apparaissent comme des opérations binaires ;
- plusieurs propriétés arithmétiques élémentaires (associativité, commutativité, distributivité) ne sont pas représentables ;
- l'addition ne nécessite pas la connaissance d'une table ;
- tout ceci rompt avec ce que l'on pourrait attendre d'un point de vue arithmétique.

Conclusion

En résumé, sur le boulier chinois,

- tous les « nombres » ne sont pas des « objets » : certains sont des actes ;
- ni l'addition ni la multiplication n'apparaissent comme des opérations binaires ;
- plusieurs propriétés arithmétiques élémentaires (associativité, commutativité, distributivité) ne sont pas représentables ;
- l'addition ne nécessite pas la connaissance d'une table ;
- tout ceci rompt avec ce que l'on pourrait attendre d'un point de vue arithmétique.

Conclusion

En résumé, sur le boulier chinois,

- tous les « nombres » ne sont pas des « objets » : certains sont des actes ;
- ni l'addition ni la multiplication n'apparaissent comme des opérations binaires ;
- plusieurs propriétés arithmétiques élémentaires (associativité, commutativité, distributivité) ne sont pas représentables ;
- l'addition ne nécessite pas la connaissance d'une table ;
- tout ceci rompt avec ce que l'on pourrait attendre d'un point de vue arithmétique.

Conclusion

On peut en conclure les choses suivantes :

- 1 L'arithmétique n'est pas toujours un guide fiable pour décrire les pratiques mathématiques, car elle peut nous conduire à négliger les contraintes liées à la représentation des nombres et des opérations, et à attribuer trop de propriétés aux opérations. L'arithmétique est parfois un outil théorique trop puissant.
- 2 Les outils de l'informatique théorique, qui servent généralement à découvrir des connaissances *théoriques* pour le *futur*, peuvent également être utilisés pour décrire les *pratiques* mathématiques du *passé*.
- 3 À ce titre, certains concepts de l'informatique mériteraient d'être intégrés dans la boîte à outils de l'historien des mathématiques intéressé par les pratiques.

Conclusion

On peut en conclure les choses suivantes :

- 1 L'arithmétique n'est pas toujours un guide fiable pour décrire les pratiques mathématiques, car elle peut nous conduire à négliger les contraintes liées à la représentation des nombres et des opérations, et à attribuer trop de propriétés aux opérations. L'arithmétique est parfois un outil théorique trop puissant.
- 2 Les outils de l'informatique théorique, qui servent généralement à découvrir des connaissances *théoriques* pour le *futur*, peuvent également être utilisés pour décrire les *pratiques* mathématiques du *passé*.
- 3 À ce titre, certains concepts de l'informatique mériteraient d'être intégrés dans la boîte à outils de l'historien des mathématiques intéressé par les pratiques.

Conclusion

On peut en conclure les choses suivantes :

- 1 L'arithmétique n'est pas toujours un guide fiable pour décrire les pratiques mathématiques, car elle peut nous conduire à négliger les contraintes liées à la représentation des nombres et des opérations, et à attribuer trop de propriétés aux opérations. L'arithmétique est parfois un outil théorique trop puissant.
- 2 Les outils de l'informatique théorique, qui servent généralement à découvrir des connaissances *théoriques* pour le *futur*, peuvent également être utilisés pour décrire les *pratiques* mathématiques du *passé*.
- 3 À ce titre, certains concepts de l'informatique mériteraient d'être intégrés dans la boîte à outils de l'historien des mathématiques intéressé par les pratiques.

Bibliography

- Cheng Dawei 程大位, *Suanfa Tongzong* 算法統宗 (*Traité systématique de mathématiques*), 1592.
- Karine Chemla and Guo Shuchun, *Les Neuf Chapitres*, 2004.
- Chen Yifu, *Les Différents Modes de manipulation des boules du boulier chinois à l'époque des Ming en Chine*, 2007.
- Kojima Takashi, *The Japanese Abacus : its Use and Theory*, 1954; *Advanced Abacus : Theory and Practice*, 1963.
- Joachim Lambek, « How to Program an Infinite Abacus », 1961.
- Alain Schärli, *Compter avec des cailloux*, 2001.
- Moses Schönfinkel, « Über die Bausteine der mathematischen Logik », 1924.