HAL
open science

Une approche énergétique et déterministe de la mécanique quantique

Patrick Vaudon

To cite this version:

Patrick Vaudon. Une approche énergétique et déterministe de la mécanique quantique. 2015. hal-01223516v6

HAL Id: hal-01223516

https://hal.science/hal-01223516v6

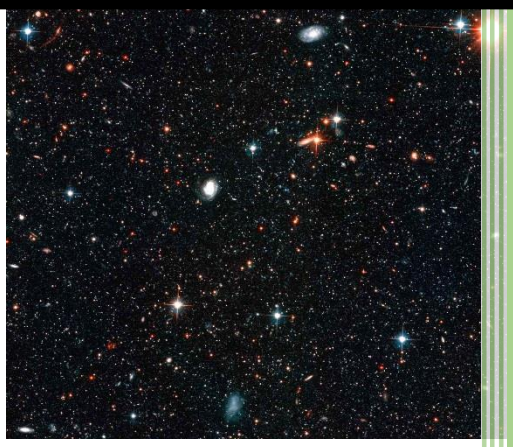
Preprint submitted on 3 Jan 2017 (v6), last revised 11 Mar 2018 (v12)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

http://patrick.vaudon.pagesperso-orange.fr

Une approche énergétique et déterministe de la mécanique quantique



Patrick VAUDON

Xlim - Université de Limoges - France

[Juin 2015]

Table des matières

Première partie :
L'approche classique de l'équation de DIRAC et de ses solutions

Introduction 5
L'équation de DIRAC 10
Les bi-spineurs de DIRAC 17
Le spin ½ de l'électron 24
La covariance de l'équation de DIRAC 35

Deuxième partie :
L'approche énergétique de l'équation de DIRAC et de ses solutions en coordonnées cartésiennes

Les modes stationnaires 39
Les solutions exactes au système de DIRAC 48
La dualité onde-corpuscule 57
Les courants de DIRAC(1) 61
Le principe d'indétermination 68
La longueur d'onde de DE BROGLIE 71
Equation de DIRAC généralisée 75
Les courants de DIRAC(2) 83
Conclusion de la deuxième partie 85

Troisième partie :
L'approche énergétique de l'équation de DIRAC et de ses solutions en coordonnées sphériques

Equation de DIRAC en coordonnées sphériques 87
Equation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques 95
Solutions exactes de l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques 100
Solutions exactes de l'équation de DIRAC pour les modes Yn-net Ynn 102
Autres solutions exactes 109
Quelques éléments de réflexion sur les solutions exactes en coordonnées sphériques 113
Les courants de DIRAC sphériques 120
Equation de Dirac généralisée en coordonnées sphériques 125
Conclusion de la troisième partie 130

Quatrième partie :
Compléments

L'équation de Dirac dans un potentiel variable : approche classique 137
Solutions exactes de l'équation de Dirac dans un potentiel variable en coordonnées cartésiennes 144
Eléments de réflexions sur l'intrication 149

Approche déterministe de la diffraction et de l'interférence de particules..... 155
L'équation de DIRAC peut-elle être admise comme équation fondatrice de la mécanique quantique ? 159
Sur l'invariance des lois de la physique par changement de référentiel..... 164
Conclusion générale 178
BIBLIOGRAPHIE 180

Première partie

L'approche classique de l'équation de DIRAC et de ses solutions

I

Introduction

Ce mémoire retrace un ensemble de réflexions sur le formalisme qui décrit la mécanique quantique dans son état d'avancement en ce début de XXIème siècle. Les premiers chapitres sont consacrés à la reprise des concepts physiques qui accompagnent la théorie à travers le prisme de l'équation de DIRAC. Il est fait abstraction de certains concepts mathématiques forts utiles dans la synthèse de la théorie, mais pas nécessaires pour la compréhension physique des phénomènes. Les chapitres suivants sont entièrement consacrés à la mise en œuvre d'un travail approfondi sur les solutions sous forme de modes stationnaires de l'équation de DIRAC.

Un siècle de recherches, à la fois théoriques et expérimentales ont permis d'affiner considérablement la connaissance de la physique des particules. Si les moyens expérimentaux conduisent régulièrement à des avancées significatives dans l'observation et la mesure des phénomènes, le cadre théorique semble figé depuis plusieurs dizaines d'années, et sans perspectives convaincantes sur une évolution prochaine.

Ce cadre théorique se heurte à une difficulté qui semble insurmontable : les particules se comportent à la fois sous la forme d'une onde, et sous la forme d'un corpuscule de matière. Devant l'impossibilité de rendre compte de ce phénomène, la théorie en est réduite à traiter les observations expérimentales d'un point de vue statistique et probabiliste. Elle y réussit de manière remarquable, mais au prix d'une complexité mathématique qui est rendue nécessaire pour pallier au fait que la physique sous-jacente aux phénomènes observées ne nous est pas connue avec suffisamment de précision pour la mettre en avant et alléger le formalisme mathématique.

Pour avancer dans une réflexion qui permette de rendre compte physiquement de la dualité onde-corpuscule, il faut développer des éléments qui, tout en étant en parfaite cohérence avec l'ensemble des formalismes existants, sont en rupture avec la vision probabiliste de cette partie de la physique. Ceci ne peut être réalisé que par une approche déterministe permettant de préciser comment la matière évolue entre ses aspects ondulatoires et ses aspects corpusculaires.

Le travail présenté dans ce document s'appuie sur un ensemble de solutions exactes, mais inédites à ce jour, de l'équation de DIRAC. Cette approche garantit donc, de manière intrinsèque, la cohérence avec l'ensemble des propriétés théoriques construites autour de cette équation. Elle conduit, in fine, à une description déterministe, et non plus probabiliste, de la dualité onde-corpuscule.

I – Une approche énergétique

Dans les équations d'ondes classiques, la dimension de la grandeur qui se propage sous la forme d'une onde est en général fixée par le second membre. On peut illustrer cette remarque par un exemple pris en électromagnétisme, concernant les potentiels vecteurs et scalaire :

$$\vec{\nabla}^2.\vec{A} - \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0.\vec{J} \qquad \text{(I-1)}$$

$$\vec{\nabla}^2.\varphi - \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(I-2)}$$

Dans l'équation d'onde de Schrödinger ou de Klein-Gordon, la fonction solution ψ est une grandeur sans information sur sa dimension, car elle est présente dans le second membre de l'équation :

$$j\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2(\psi) + E_p\psi \qquad \text{(I-3)}$$

$$\nabla^2(\psi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi \qquad \text{(I-4)}$$

ce qui signifie que la solution ψ traduit la fonction de propagation de l'onde. La grandeur propagée peut donc être choisie en fonction de considérations physiques.

Le fait que la fonction ψ soit complexe, associée à une vision probabiliste de la mécanique quantique, ont conduit à donner à la quantité $\psi\psi^*$ la signification d'une densité volumique de probabilité, impliquant une normalisation sur tout volume où la particule se trouve avec certitude :

$$\iiint_V \psi\psi^* dv = 1 \qquad \text{(I-5)}$$

Si on se place dans une vision déterministe des phénomènes, il n'y a plus de densité de probabilité. La grandeur physique qui se propage peut être considérée comme une énergie, et la cohérence avec la vision probabiliste suggère de donner à la quantité $\psi\psi^*$ la signification d'une densité volumique d'énergie. La condition de normalisation se traduit alors en exprimant que l'intégration sur le volume V où s'étend la particule doit donner l'énergie totale E de la particule :

$$\iiint_V \psi\psi^* dv = E \qquad \text{(I-6)}$$

Les fonctions d'ondes issues de la théorie probabiliste et de la théorie déterministe sont donc proportionnelles dans un rapport égal à racine carrée de E.

La fonction d'onde ψ devient homogène à la racine carrée d'une énergie. Et puisqu'il existe des énergies négatives, le nombre complexe $j = \sqrt{-1}$ apparaît de manière naturelle et avec une signification physique claire dans les solutions de l'équation de Dirac qui décrivent à la fois des particules d'énergies positives et des particules d'énergies négatives.

I -1 Les différents types d'énergie

En relativité restreinte, les quadri-vecteurs sont identifiés comme des grandeurs physiques invariantes par changement de référentiel. Il s'ensuit que leur pseudo-norme est constante, et ne dépend pas du référentiel dans laquelle elle est évaluée.

Pour une masse m évoluant à la vitesse v, le quadri-vecteur impulsion-énergie s'exprime de la manière suivante :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} m\dfrac{dx}{dt} \\ m\dfrac{dy}{dt} \\ m\dfrac{dz}{dt} \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} \qquad \text{(I-7)}$$

Dans cette expression, E désigne l'énergie totale de la particule de masse m, animée d'une vitesse v, et donc liée à la masse au repos par la relation :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(I-8)}$$

La pseudo-norme au carré du quadri-vecteur impulsion énergie s'écrit :

$$\left(m\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(m\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(m\frac{dz}{dt}\right)^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = cte \qquad \text{(I-9)}$$

soit encore :

$$E^2 - p^2c^2 = cte \qquad \text{(I-10)}$$

où p désigne le module de l'impulsion :

$$p = \sqrt{\left(m\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(m\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(m\frac{dz}{dt}\right)^2} = m\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = mv \qquad \text{(I-11)}$$

On détermine la constante en écrivant que, suivant la relation qui relie l'énergie à la masse, l'énergie totale d'une particule de masse m est aussi égale à :

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(I-12)}$$

où m_0 désigne la masse au repos.

On en déduit la valeur de la constante :

$$E^2 - p^2c^2 = \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - \left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 c^2 = \left(m_0c^2\right)^2 \qquad \text{(I-13)}$$

et enfin l'expression de la conservation de l'énergie en relativité restreinte :

$$E^2 = (pc)^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \qquad \text{(I-14)}$$

Nous admettrons comme un postulat découlant de l'expression ci-dessus, qu'au sein d'une particule de masse m et évoluant à la vitesse v, il ne peut exister que trois formes particulières d'énergie :

- Une forme d'énergie représentant l'énergie totale E, dont nous justifierons par la suite l'appellation d'énergie ondulatoire
- Une forme d'énergie représentant l'énergie impulsionnelle : pc
- Une forme d'énergie représentant son énergie de masse au repos : m_0c^2

Nous admettrons également que, dans le monde de l'infiniment petit, ces 3 formes d'énergie sont distinctes, à l'image de l'énergie électrique et magnétique en électromagnétisme, ou de l'énergie potentielle et cinétique en mécanique.

I -2 L'énergie stationnaire

Considérons une particule au repos, et qui donc ne possède pas d'énergie impulsionnelle. On est amené à formuler l'hypothèse que son énergie de masse est localisée dans une étendue spatiale finie. Cette énergie est constante dans le temps, et nous la qualifierons donc de stationnaire. Puisque dans ce cas particulier il n'y a pas d'énergie impulsionnelle, l'énergie totale, c'est à dire l'énergie ondulatoire, est égale à l'énergie de masse.

Il convient alors de s'interroger sur ce que nous connaissons de la stationnarité de l'énergie dans la physique des ondes en général. Cette stationnarité est une propriété des systèmes qui conservent l'onde prisonnière dans une portion limitée de l'espace. Si nous supposons le système sans perte, et si nous introduisons de l'énergie ondulatoire dans ce système, celle-ci est conservée dans le temps.

Le fait d'importance est que cette énergie ne reste jamais au repos dans la portion de l'espace où elle est confinée, mais s'installe en modes stationnaires qui comportent au minimum deux types d'énergies qui s'échangent en général en quadrature dans le temps.

En mécanique, les ondes ne peuvent se propager que dans un milieu possédant une certaine élasticité, et l'échange se produit entre l'énergie potentielle élastique et l'énergie cinétique des éléments en mouvement.

En électromagnétisme, l'échange se fait entre l'énergie électrique et l'énergie magnétique.

Si nous revenons maintenant à la situation d'une particule au repos qui contient à la fois de l'énergie ondulatoire et de l'énergie de masse, nous postulons que ces deux formes d'énergie s'échangent dans la portion de l'espace où elles sont confinées. Ce postulat découle directement du comportement onde-corpuscule de la particule.

Si la particule est en mouvement, il apparaît une troisième forme d'énergie qui est l'énergie impulsionnelle. Nous postulons que cette énergie va participer aux échanges avec les deux précédentes dans une forme qui reste à déterminer, mais qui vérifie l'équation de conservation de l'énergie (I-14).

Dans la suite de ce document; nous ne nous interrogerons pas sur la manière dont les différents types d'énergie sont confinées dans une région de l'espace : la réponse à cette question ne nous est pas connue. Mais nous allons montrer que si nous faisons l'hypothèse que les différents types d'énergie s'échangent dans des modes stationnaires, cela conduit à une physique quantique déterministe et cohérente avec la théorie probabiliste actuelle.

II

L'équation de DIRAC

L'équation de DIRAC fait partie des quelques équations fondamentales de la physique contemporaine. Elle a été obtenue dans le prolongement de deux autres équations très importantes de la mécanique quantique : l'équation de SCHRÖDINGER, et l'équation de KLEIN-GORDON. Elle a supplanté ces deux dernières parce qu'elle décrit avec davantage de précision la réalité des phénomènes observés.

L'objectif de ce bref chapitre de présentation n'est pas de discuter de l'apport de cette équation sur la physique quantique que le lecteur trouveras dans les ouvrages et sites relatifs à ce sujet et sur lesquels nous reviendrons ultérieurement. Il s'agit juste dans un premier temps de retracer la démarche qui conduit à l'équation DIRAC, et de souligner quelques difficultés sur l'interprétation physique de sa solution.

I - L'équation de SCHRÖDINGER

Tout phénomène physique linéaire $\psi(x,y,z,t)$ qui se propage à la vitesse v dans un espace à trois dimensions au fur et à mesure que le temps s'écoule peut être décrit par une équation d'onde :

$$\nabla^2\psi(x,y,z,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(II-1)}$$

Lorsqu'on traite un signal dont la variation temporelle est sinusoïdale, on peut poser :

$$\psi(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z)\exp(\pm j\omega t) \qquad \text{(II-2)}$$

et l'équation d'onde portant sur la quantité φ indépendante du temps devient :

$$\nabla^2\varphi(x,y,z) + \frac{\omega^2}{v^2}\varphi(x,y,z) = 0 \qquad \text{(II-3)}$$

Si on suit Louis De BROGLIE en postulant qu'on peut associer à toute particule de masse m animée d'une vitesse v une onde de longueur d'onde $\lambda = h/mv$ où h est la constante de PLANCK, alors l'équation d'onde indépendante du temps attachée à la particule devient :

$$\nabla^2\varphi(x,y,z) + \frac{\omega^2}{v^2}\varphi(x,y,z) = \nabla^2\varphi(x,y,z) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\varphi(x,y,z) = 0 \qquad \text{(II-4)}$$

D'autre part, dans le cadre de la mécanique classique, l'énergie totale E de cette particule correspond à la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p, ce qui permet d'écrire :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = E - E_p \qquad \text{(II-5)}$$

d'où on déduit successivement :

$$mv = \sqrt{2m(E - E_p)} \qquad \text{(II-6)}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - E_p)}} \qquad \text{(II-7)}$$

Cette dernière relation reportée dans l'équation d'onde (I-4) fournit l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps :

$$\nabla^2\varphi(x,y,z) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_p)\varphi(x,y,z) = 0 \qquad \text{avec } \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad \text{(II-8)}$$

L'approche heuristique qui a été proposée pour obtenir cette relation peut être complétée pour faire apparaître la dépendance temporelle.

Pour une onde localement plane et monochromatique s'éloignant vers l'infini, nous pouvons écrire la fonction d'onde d'une manière générale sous la forme :

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \exp\left[j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\right] \qquad \text{avec } j^2 = -1 \qquad \text{(II-9)}$$

Dans le monde quantique où $\lambda = h/mv$ et où l'énergie totale E est liée à la fréquence de l'onde par la relation :

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega \qquad \text{(II-10)}$$

on obtient par substitution :

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \exp\left[\frac{j}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)\right] \quad \text{avec } \vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(II-11)}$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, il en découle :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi(\vec{r},t)) = -\frac{j}{\hbar}E\psi_0 \exp\left[\frac{j}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)\right] = -\frac{j}{\hbar}E\psi(\vec{r},t) \qquad \text{(II-12)}$$

et en prenant le gradient de cette même expression (II-11) :

$$\vec{\nabla}\left(\psi\left(\vec{r},t\right)\right)=\frac{j}{\hbar}\vec{p}\psi\left(\vec{r},t\right) \qquad \text{(II-13)}$$

Des relations (II-12) et (II-13), on déduit les règles de quantification des équations de la mécanique classique ou relativiste qui permettent d'obtenir les équations analogues dans le domaine quantique :

$$j\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\right)=E\psi \qquad \text{(II-14)}$$

$$-j\hbar\vec{\nabla}\left(\psi\right)=\vec{p}\psi \qquad \text{(II-15)}$$

Pour une particule dont l'énergie totale est donnée en mécanique classique par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{p^2}{2m} + E_p \qquad \text{(II-16)}$$

on déduit après multiplication par la fonction d'onde ψ :

$$E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi + E_p\psi \qquad \text{(II-17)}$$

et enfin en utilisant les règles de quantification (II-12) et (II-13) :

$$j\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi) = \frac{\left(-j\hbar\vec{\nabla}\right)^2}{2m}(\psi) + E_p\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2(\psi) + E_p\psi \qquad \text{(II-18)}$$

qui constitue l'équation de SCHRÖDINGER dépendante du temps.

Cette équation permet de retrouver les principales séries décrivant les raies d'émission de l'atome d'hydrogène ainsi que d'autres paramètres comme les rayons de l'orbite de BOHR, mais elle est en défaut lorsqu'on s'intéresse à des phénomènes plus subtils comme les niveaux de quantification fins de l'énergie pour un atome d'hydrogène ou la prise en compte du spin de l'électron.

II - L'équation de KLEIN-GORDON

Les insuffisances de l'équation de SCHRÖDINGER sont attribuées au fait que les règles de quantification ont été appliquées à un bilan énergétique effectué à l'aide de la mécanique classique.

La relativité restreinte introduit une relation dont la portée est beaucoup plus générale puisqu'elle est invariante sous la transformation de LORENTZ :

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad \text{(II-19)}$$

et on obtient immédiatement en appliquant les règles de quantification (II-12) et (II-13) :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi) = -\hbar^2 c^2 \nabla^2(\psi) + m_0^2 c^4 \psi \qquad \text{(II-20)}$$

qui constitue l'équation de KLEIN-GORDON. On peut la présenter sous une forme qui fait apparaître l'équation d'onde avec un second membre :

$$\nabla^2(\psi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi) = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\psi \qquad \text{(II-21)}$$

Un examen détaillé de ses solutions permet de montrer des insuffisances, en particulier dans son impuissance à décrire le spin de l'électron qui est d'ordre 1/2 ainsi que certains niveaux fins d'énergie de l'atome d'hydrogène.

III - L'équation de DIRAC

Partant de l'équation de conservation relativiste de l'énergie :

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \qquad \text{(II-22)}$$

et appliquant les règles de quantification de la mécanique quantique :

$$E \to j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad p_x \to -j\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad p_y \to -j\hbar \frac{\partial}{\partial y} \qquad p_z \to -j\hbar \frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{(II-23)}$$

on transforme l'équation de KLEIN-GORDON sous la forme :

$$\left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2(\psi) = \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial x}\right)^2(\psi) + \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial y}\right)^2(\psi) + \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial z}\right)^2(\psi) + m_0^2 c^4(\psi) \qquad \text{(II-24)}$$

Suivant le formalisme proposé par DIRAC, on recherche ensuite des coefficients α_i tels que l'équation ci-dessus soit vérifiée sous la forme d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre élevée au carré :

$$\left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2(\psi) = \left[\alpha_1\left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial x}\right) + \alpha_2\left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial y}\right) + \alpha_3\left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial z}\right) + \alpha_0\left(m_0 c^2\right)\right]^2(\psi) \qquad \text{(II-25)}$$

Si la relation ci-dessus est vérifiée grâce à la présence des coefficients α_i, la solution peut être obtenue en résolvant l'équation obtenue en enlevant les carrés :

$$\left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)(\psi) = \left[\alpha_1\left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial x}\right) + \alpha_2\left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial y}\right) + \alpha_3\left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial z}\right) + \alpha_0\left(m_0 c^2\right)\right](\psi) \qquad \text{(II-26)}$$

Il est impossible de trouver des α_i réels ou complexes répondant aux conditions (II-25) et (II-26), mais on peut trouver des matrices α_i qui satisfont aux conditions suivantes, nécessaires et suffisantes pour passer de l'équation (II-24) à l'équation (II-25) :

$$\alpha_i^{\,2} = 1 \qquad \text{(II-27)}$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \qquad \text{(II-28)}$$

Ces matrices ne sont pas uniques, mais un choix simple est celui proposé par Dirac :

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(II-29)}$$

Les trois suivantes sont définies à partir des matrices de PAULI désignée par σ_i :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{(II-30)}$$

soit encore explicitement :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(II-31)}$$

La structure matricielle des coefficients α_i impose la recherche de la solution ψ sous la forme d'un vecteur colonne :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(II-32)}$$

Afin de mettre le système d'équations différentielles dans une forme telle que l'énergie de masse apparaisse en facteur avec la matrice identité, on multiplie l'équation (II-26) par la matrice α_0 dont on sait que son carré est égal à la matrice identité :

$$\alpha_0\left(j\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)(\psi) = \left[\alpha_0\alpha_1\left(-j\hbar c\frac{\partial}{\partial x}\right) + \alpha_0\alpha_2\left(-j\hbar c\frac{\partial}{\partial y}\right) + \alpha_0\alpha_3\left(-j\hbar c\frac{\partial}{\partial z}\right) + \left(m_0c^2\right)\right](\psi) \qquad \text{(II-33)}$$

On pose ensuite :

$$\gamma_0 = \alpha_0 \qquad \gamma_1 = \alpha_0\alpha_1 \qquad \gamma_2 = \alpha_0\alpha_2 \qquad \gamma_3 = \alpha_0\alpha_3 \qquad \text{(II-34)}$$

et on regroupe tous les termes aux dérivées partielles :

$$\left[\gamma_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)+\gamma_1\left(c\frac{\partial}{\partial x}\right)+\gamma_2\left(c\frac{\partial}{\partial y}\right)+\gamma_3\left(c\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](\psi)=\frac{m_0c^2}{j\hbar}(\psi) \qquad \text{(II-35)}$$

La matrice identité, implicite dans le terme de droite, sera omise dans la suite du document.

Les matrices γ_i sont obtenues explicitement de la manière suivante :

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \qquad \text{(II-36)}$$

$$\gamma_1=\alpha_0\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{(II-37)}$$

$$\gamma_2=\alpha_0\alpha_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&-j\\0&0&j&0\\0&-j&0&0\\j&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-j\\0&0&j&0\\0&j&0&0\\-j&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{(II-38)}$$

$$\gamma_3=\alpha_0\alpha_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{(II-39)}$$

La forme de ces matrices peut être synthétisée en fonction des matrices de PAULI :

$$\gamma_i=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\-\sigma_i&0\end{pmatrix} \qquad \text{(II-40)}$$

et on peut vérifier la propriété suivante :

$$(\gamma_0)^2=1,(\gamma_1)^2=(\gamma_2)^2=(\gamma_3)^2=-1 \qquad \text{(II-41)}$$

En considérant désormais que la quantité ψ de l'équation d'onde initiale se présente sous la forme d'un vecteur colonne à 4 éléments, l'écriture complète du système matriciel est donnée par :

$$\frac{mc}{\hbar}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=\frac{j}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial t}\end{pmatrix}+j\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$$+j\begin{pmatrix}0&0&0&-j\\0&0&j&0\\0&j&0&0\\-j&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\end{pmatrix}+j\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\end{pmatrix} \qquad \text{(II-42)}$$

soit encore, de manière plus condensée, sous la forme d'un système aux dérivées partielles de 4 équations, après avoir posé $\eta=\frac{mc}{\hbar}$:

$$\begin{aligned}
\eta\psi_0 &= j\frac{\partial\psi_0}{\partial(ct)}+j\frac{\partial\psi_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}+j\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\\
\eta\psi_1 &= j\frac{\partial\psi_1}{\partial(ct)}+j\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}-j\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\\
\eta\psi_2 &= -j\frac{\partial\psi_2}{\partial(ct)}-j\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-j\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\\
\eta\psi_3 &= -j\frac{\partial\psi_3}{\partial(ct)}-j\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\frac{\partial\psi_0}{\partial y}+j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}
\end{aligned} \qquad \text{(II-43)}$$

Ces équations montrent que les 4 quantités associées à l'onde de matière ψ interagissent, sans qu'il soit possible de préciser de manière claire et détaillée la nature physique de leur interaction. La représentation en termes de spineurs fournit un cadre rigoureux sur lequel sont fondés de multiples développements, mais la notion de spineur reste abstraite, malgré les efforts importants de la communauté scientifique pour en donner des illustrations concrètes.

III

Les bi-spineurs de DIRAC

Du chapitre précédent, nous avons conclu que les solutions de l'équation de Dirac se présentent sous la forme d'une grandeur à 4 composantes :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-1)}$$

Un examen attentif du système de Dirac :

$$\begin{aligned}
\eta\psi_0 &= j\frac{\partial\psi_0}{\partial(ct)} + j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \\
\eta\psi_1 &= j\frac{\partial\psi_1}{\partial(ct)} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_3}{\partial z} \\
\eta\psi_2 &= -j\frac{\partial\psi_2}{\partial(ct)} - j\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial z} \\
\eta\psi_3 &= -j\frac{\partial\psi_3}{\partial(ct)} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}
\end{aligned} \qquad \text{(III-2)}$$

montre que ces solutions peuvent être regroupées par 2 dans un comportement présentant des analogies. Pour faire apparaître ces analogies, il est opportun de présenter le système sous une forme légèrement différente :

$$\begin{aligned}
j\frac{\partial\psi_0}{\partial(ct)} &= \eta\psi_0 - j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} - \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \\
j\frac{\partial\psi_1}{\partial(ct)} &= \eta\psi_1 - j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_3}{\partial z} \\
j\frac{\partial\psi_2}{\partial(ct)} &= -\eta\psi_2 - j\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial z} \\
j\frac{\partial\psi_3}{\partial(ct)} &= -\eta\psi_3 - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}
\end{aligned} \qquad \text{(III-3)}$$

Dès lors, si on pose :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \varphi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \chi = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \tag{III-4}$$

le système de Dirac se décompose en deux systèmes couplés :

$$j\frac{\partial}{\partial(ct)}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \eta\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} - j\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \tag{III-5}$$

$$j\frac{\partial}{\partial(ct)}\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = -\eta\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} - j\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \tag{III-6}$$

dans lesquels on peut montrer que les grandeurs à deux composantes φ et χ se comportent comme des objets mathématiques appelés spineurs.

Un allègement d'écriture est proposé en désignant par M la matrice :

$$M = -j\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{III-7}$$

Le système couplé (III-5,6) en termes de spineurs se présente alors sous la forme :

$$\begin{aligned} j\frac{\partial}{\partial(ct)}(\varphi) &= \eta(\varphi) + M(\chi) \\ j\frac{\partial}{\partial(ct)}(\chi) &= -\eta(\chi) + M(\varphi) \end{aligned} \tag{III-8}$$

soit encore :

$$j\frac{\partial}{\partial(ct)}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & M \\ M & -\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{III-9}$$

En l'absence d'hypothèses supplémentaires, il est impossible d'aller plus avant dans l'écriture des relations croisées entre les deux spineurs.

On peut par contre, rechercher des solutions particulières dont la dépendance temporelle est en exp(-jωt) avec une énergie totale $E = \hbar\omega$, soit donc une dépendance temporelle en $\exp\left(-j\frac{E}{\hbar}t\right)$.

Il est important de noter que le j qui apparaît dans l'exponentielle n'a rien à voir avec la représentation complexe d'une onde physique en cos(ωt). Sa signification physique, déjà abordée dans le chapitre I, sera approfondie dans les chapitres suivants.

Après prise en compte de la dérivation par rapport au temps dans la relation (III-9), le système couplé entre les spineurs se présente sous la forme :

$$\frac{E}{\hbar c}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta & M\\ M & -\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \qquad \text{(III-10)}$$

soit encore en tenant compte de $\eta = \frac{mc}{\hbar}$:

$$E\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}mc^2 & \hbar cM\\ \hbar cM & -mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \qquad \text{(III-11)}$$

Une écriture rigoureuse devrait faire apparaître la matrice identité de dimension 2 multipliée par les termes en η pour la relation (III-10) et les termes en mc² pour la relation (III-11). L'usage veut que lorsque cette matrice est implicite, car nécessaire pour la cohérence des dimensions, elle ne soit pas nécessairement indiquée pour des allègements d'écriture.

I - Les spineurs pour une particule immobile

Il est possible de faire apparaître les solutions à énergie positive qui décrivent les particules de masse m, et les solutions à énergie négative qui décrivent les anti-particules de même masse. Pour cela, on traite le cas particulier de particules immobiles : si x, y, z sont fixes et constants, alors les dérivées par rapport à x,y,et z sont nulles, et la matrice M est nulle. On déduit de (III-11) :

$$E\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}mc^2 & 0\\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \qquad \text{(III-12)}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= mc^2(\varphi)\\ E(\chi) &= -mc^2(\chi)\end{aligned} \qquad \text{(III-13)}$$

On identifie ainsi que l'énergie associée au spineur φ est égale à son énergie de masse, tandis que celle associée au spineur χ est égale à son opposée, et représente donc l'énergie associée à l'anti-particule. On en déduit que le spineur φ est associé à la particule, tandis que le spineur χ est associé à l'antiparticule. La solution à l'équation de Dirac, qui comporte les deux

spineurs simultanément, permet donc de décrire à la fois le comportement de la particule, et celui de son antiparticule.

De manière très générale, un spineurs φ quelconque peut être décomposée sur la base canonique de la manière suivante :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-14)}$$

où les deux spineurs indépendants de la base canonique sont associés aux deux états de spin possible pour un électron. L'usage veut que le spineur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit associé à l'état de spin dit « up » (↑), et que le spineur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit associé à l'état de spin dit « down » (↓).

De même pour la particule à énergie négative, nous pouvons adopter la décomposition suivante :

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III-15)}$$

et identifier les deux états de spin décrits précédemment.

En rassemblant ces résultats partiels, on peut représenter quatre états distincts du bi-spinneurs de Dirac dans le référentiel où la particule est au repos :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Particule à énergie positive en spin « up »

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Particule à énergie positive en spin »down »

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Particule à énergie négative en spin « up »

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Particule à énergie négative en spin « down »

II - Les spineurs pour une particule en mouvement

Lorsque la particule est en mouvement, la matrice M n'est pas nulle, et nous devons utiliser la relation (III-11) rappelée pour mémoire :

$$E\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}mc^2 & \hbar cM\\ \hbar cM & -mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \qquad \text{(III-16)}$$

Cette relation montre que les deux spineurs interagissent et qu'ils ne sont pas indépendants l'un de l'autre. Cela a pour nécessaire conséquence que particule et antiparticule forment un tout, et que l'une ne peut se déplacer sans que l'autre soit associée à ce déplacement.

On obtient, en développant la relation matricielle (III-16) :

$$\begin{aligned}E(\varphi)&=mc^2(\varphi)+\hbar cM(\chi)\\ E(\chi)&=\hbar cM(\varphi)-mc^2(\chi)\end{aligned} \qquad \text{(III-17)}$$

soit encore

$$\begin{aligned}(E-mc^2)(\varphi)&=\hbar cM(\chi)\\ (E+mc^2)(\chi)&=\hbar cM(\varphi)\end{aligned} \qquad \text{(III-18)}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}(\varphi)&=\frac{\hbar c}{E-mc^2}M(\chi)\\ (\chi)&=\frac{\hbar c}{E+mc^2}M(\varphi)\end{aligned} \qquad \text{(III-19)}$$

Ces relations indiquent que dans l'hypothèse particulière où nous situons, c'est à dire dans l'hypothèse où les 4 éléments du bi-spineurs de Dirac ont une dépendance temporelle en $\exp\left(-j\frac{E}{\hbar}t\right)$, la connaissance d'un des spineurs permet d'en déduire l'autre.

Il est possible de développer un formalisme plus avancé des relations (III-19) ci-dessus. Il faut pour cela reprendre la matrice M et la décrire sur la base des matrices de PAULI rappelée pour mémoire :

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -j\\ j & 0\end{pmatrix} \qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{(III-20)}$$

On obtient :

$$M = -j\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} - j\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} + j\dfrac{\partial}{\partial y} & -\dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = -j\left(\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{(III-21)}$$

On introduit par substitution aux dérivées partielles de (III-21) l'opérateur impulsion de la mécanique quantique, dont les trois composantes sont explicitement :

$$\hat{p}_x = -j\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad \hat{p}_y = -j\hbar\frac{\partial}{\partial y} \qquad \hat{p}_z = -j\hbar\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{(III-22)}$$

ce qui permet de présenter la matrice M sous la forme :

$$M = \frac{1}{\hbar}\left\{\hat{p}_x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \hat{p}_y\begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} + \hat{p}_z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{(III-23)}$$

Il s'ensuit un abus d'écriture qui donnerait des sueurs froides à plus d'un enseignant de mathématiques :

On désigne par :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad \text{(III-24)}$$

un « vecteur » contenant les trois matrices de PAULI, et par :

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -j\hbar\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -j\hbar\dfrac{\partial}{\partial y} \\ -j\hbar\dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \text{(III-25)}$$

un « vecteur » qui représente l'opérateur impulsion de la mécanique quantique.

Dès lors la relation exprimant la matrice M en (III-23) peut se mettre sous la forme condensée suivante, en utilisant le formalisme habituel du produit scalaire entre deux vecteurs :

$$M = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{\hbar} \qquad \text{(III-26)}$$

On en déduit l'écriture condensée qui exprime la relation entre les deux spineurs qui constituent la solution de DIRAC, dans l'hypothèse d'une dépendance temporelle en $\exp\left(-j\frac{E}{\hbar}t\right)$:

$$\begin{aligned}(\varphi) &= \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}c}{E-mc^2}(\chi) \\ (\chi) &= \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}c}{E+mc^2}(\varphi)\end{aligned} \qquad \text{(III-27)}$$

Par substitution d'une relation dans l'autre, par exemple la deuxième dans la première, on obtient :

$$(\varphi) = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}c}{E-mc^2}\frac{\vec{\sigma}.\vec{p}c}{E+mc^2}(\varphi) = \frac{(\vec{\sigma}.\vec{p}c)^2}{E^2-(mc^2)^2}(\varphi) \qquad \text{(III-28)}$$

En utilisant la propriété des matrices de PAULI dont le carré donne la matrice identité, on obtient finalement :

$$(\varphi) = \frac{(\vec{p}c)^2}{E^2-(mc^2)^2}(\varphi) \qquad \text{(III-29)}$$

Cette relation ne sera vérifiée que si :

$$(\vec{p}c)^2 = E^2-(mc^2)^2 \qquad \text{(III-30)}$$

soit encore :

$$(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2 = E^2 \qquad \text{(III-31)}$$

Cette relation confirme la cohérence des solutions exprimées avec la conservation relativiste de l'énergie, mais également avec la possibilité de solutions à énergies négatives de la forme :

$$E = \pm\sqrt{(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2} \qquad \text{(III-32)}$$

IV

Le spin ½ de l'électron

La solution en termes de spineurs évoquée au chapitre précédent suggère qu'il y a au sein de l'électron quelque chose qui tourne, sans que l'on sache précisément quoi. On va donc s'intéresser dans ce chapitre à la cinématique de rotation, et tenter de la mettre en relation avec la solution au système de DIRAC.

I – La notion de moment cinétique

Pour un point matériel de masse m, situé en M, et évoluant autour d'une origine O, le moment cinétique, que l'on désignera par L, s'exprime comme le moment par rapport à l'origine O de la quantité de mouvement de la masse m :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \qquad \text{(IV-1)}$$

Il s'agit d'une quantité vectorielle qui est portée par l'axe de rotation.

Si on désigne par x,y,z, les composantes du vecteur position, et par p_x, p_y, p_z, les composantes du vecteur quantité de mouvement :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-2)}$$

on obtient les composantes du moment cinétique sous la forme :

$$\begin{aligned} L_x &= y p_z - z p_y \\ L_y &= z p_x - x p_z \\ L_z &= x p_y - y p_x \end{aligned} \qquad \text{(IV-3)}$$

Le passage à la mécanique quantique impose que l'on substitue aux quantités « position » et « quantité de mouvement », des opérateurs « position » et « quantité de mouvement », ce qui permet de définir les composantes de l'opérateur moment cinétique sous la forme :

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\end{aligned} \qquad \text{(IV-4)}$$

où la définition des opérateurs de position et de quantité de mouvement, appliqués à une fonction d'onde ψ est rappelée ci-dessous :

$$\begin{array}{lll} \hat{p}_x(\psi) = -j\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \hat{p}_y(\psi) = -j\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \hat{p}_z(\psi) = -j\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial z} \\ \hat{x}(\psi) = x\psi & \hat{y}(\psi) = y\psi & \hat{z}(\psi) = z\psi \end{array} \qquad \text{(IV-5)}$$

La description de l'opérateur moment cinétique ci-dessus permet de traiter sans problème le moment cinétique orbital d'une particule de masse m qui tourne autour d'une origine O, mais elle est en difficulté pour décrire le moment cinétique de spin. Il s'agit d'un mouvement interne à la particule qui est mal connu et qu'on ne sait pas exprimer en fonction des opérateurs de position et de quantité de mouvement.

Pour pallier à cette difficulté, il a fallu rechercher une propriété du moment cinétique qui ne fasse pas intervenir les opérateurs position et quantité de mouvement, et qui contienne des informations suffisantes pour qualifier la rotation.

Cette propriété est construite à partir d'une fonction appelée commutateur dont on peut donner la définition suivante en mécanique quantique :

Si A et B sont deux opérateurs, le commutateur de A et B est défini par :

$$[A,B] = AB - BA \qquad \text{(IV-6)}$$

A titre d'exemple, on peut monter que les opérateurs position et vitesse appliquées à une fonction d'onde ne commutent pas, ce qui revient à dire que le commutateur de ces deux opérateurs est différent de zéro :

$$\left[x, \frac{\partial}{\partial x}\right](\psi) = x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \psi - x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\psi \qquad \text{(IV-7)}$$

Si on construit les commutateurs des opérateurs de moment cinétique (IV-4), on constate qu'ils possèdent la propriété suivante :

$$\begin{aligned}[\hat{L}_x, \hat{L}_y](\psi) &= (\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x)(\psi) = j\hbar\hat{L}_z(\psi) \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x](\psi) &= (\hat{L}_z\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_z)(\psi) = j\hbar\hat{L}_y(\psi) \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z](\psi) &= (\hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y)(\psi) = j\hbar\hat{L}_x(\psi)\end{aligned} \qquad \text{(IV-8)}$$

La démonstration se fait directement à partir de la définition des opérateurs moment cinétique (IV-4). Sur l'exemple de la première ligne de (IV-8), on obtient successivement :

$$\hat{L}_x(\psi) = -j\hbar\left(y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \qquad \hat{L}_y(\psi) = -j\hbar\left(z\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \tag{IV-9}$$

$$\hat{L}_y\left(\hat{L}_x(\psi)\right) = -\hbar^2\left\{z\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - x\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right\} \tag{IV-10}$$

$$\hat{L}_y\left(\hat{L}_x(\psi)\right) = -\hbar^2\left\{zy\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} - z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - xy\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + x\frac{\partial f}{\partial y} + xz\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y}\right\} \tag{IV-11}$$

et en inversant l'ordre des opérateurs :

$$\hat{L}_x\left(\hat{L}_y(\psi)\right) = -\hbar^2\left\{y\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - z\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\} \tag{IV-12}$$

$$\hat{L}_x\left(\hat{L}_y(\psi)\right) = -\hbar^2\left\{y\frac{\partial\psi}{\partial x} + yz\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} - yx\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} + xz\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y}\right\} \tag{IV-13}$$

Par soustraction de (IV-13) avec (IV-11), on obtient le résultat présenté en (IV-8) :

$$\hat{L}_x\left(\hat{L}_y(\psi)\right) - \hat{L}_y\left(\hat{L}_x(\psi)\right) = -\hbar^2\left\{y\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\} = j\hbar\hat{L}_z \tag{IV-14}$$

La propriété (IV-8) ne dépend plus des opérateurs position et quantité de mouvement. Même si l'image doit être prise avec précautions, on a en quelque sorte construit un système à trois équations et trois inconnues qui présente pour ces inconnues des propriétés analogues à celles qui sont générées par les relations (IV-4) qui définissent le moment cinétique de la mécanique quantique.

II – L'opérateur de moment cinétique de spin

Le raisonnement du paragraphe précédent nous a permis de préciser les relations qui définissent un opérateur de moment cinétique applicable à une fonction d'onde ψ. Cet opérateur est défini à partir des relations de commutations rappelées pour mémoire :

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right](\psi) &= \left(\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x\right)(\psi) = j\hbar\hat{L}_z(\psi) \\
\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right](\psi) &= \left(\hat{L}_z\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_z\right)(\psi) = j\hbar\hat{L}_y(\psi) \\
\left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right](\psi) &= \left(\hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y\right)(\psi) = j\hbar\hat{L}_x(\psi)
\end{aligned} \tag{IV-15}$$

Les solutions issues de la formulation de DIRAC apparaissent sous la forme de spineurs, c'est à dire sous la forme d'un être mathématique contenant deux fonctions d'ondes. Du chapitre précédent, nous avons montré par exemple que la solution à énergie positive était représentée par le spineur :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-16)}$$

La question qui se pose est la suivante : comment peut-on généraliser les relations (IV-15) qui définissent l'opérateur de moment cinétique applicable à une fonction d'onde, afin de définir un opérateur de moment cinétique applicable à un spineur qui contient non pas une mais deux fonctions d'ondes ?

En d'autres termes, si S désigne un tel opérateur, nous voulons pouvoir écrire :

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y](\varphi) &= (\hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x)(\varphi) = j\hbar\hat{S}_z(\varphi) \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x](\varphi) &= (\hat{S}_z\hat{S}_x - \hat{S}_x\hat{S}_z)(\varphi) = j\hbar\hat{S}_y(\varphi) \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z](\varphi) &= (\hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y)(\varphi) = j\hbar\hat{S}_x(\varphi) \end{aligned} \qquad \text{(IV-17)}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y]\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} &= (\hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = j\hbar\hat{S}_z\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x]\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} &= (\hat{S}_z\hat{S}_x - \hat{S}_x\hat{S}_z)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = j\hbar\hat{S}_y\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z]\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} &= (\hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = j\hbar\hat{S}_x\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(IV-18)}$$

Il apparaît que les opérateurs $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ ne peuvent plus être définis comme des opérateurs simples utilisés pour une seule fonction d'onde : ils doivent être constitués par une matrice 2X2 d'opérateurs et ces matrices doivent vérifier les relations caractéristiques des opérateurs de moment cinétique :

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= (\hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x) = j\hbar\hat{S}_z \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x] &= (\hat{S}_z\hat{S}_x - \hat{S}_x\hat{S}_z) = j\hbar\hat{S}_y \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z] &= (\hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y) = j\hbar\hat{S}_x \end{aligned} \qquad \text{(IV-19)}$$

Les matrices de PAULI, rappelées ci-dessous pour mémoire, sont de bonnes candidates pour jouer ce rôle :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-20)}$$

En les multipliant par la quantité ħ, le premier commutateur de (IV-19) s'écrit :

$$\left[\hbar\sigma_1,\hbar\sigma_2\right]=\hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\mathrm{j}\hbar\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{j}\\ \mathrm{j} & 0\end{pmatrix}-\hbar\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{j}\\ \mathrm{j} & 0\end{pmatrix}\mathrm{j}\hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left[\hbar\sigma_1,\hbar\sigma_2\right]=\hbar^2\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{j}\\ \mathrm{j} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{j}\\ \mathrm{j} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} \qquad \text{(IV-21)}$$

$$\left[\hbar\sigma_1,\hbar\sigma_2\right]=\hbar^2\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{j} & 0\\ 0 & -\mathrm{j}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\mathrm{j} & 0\\ 0 & \mathrm{j}\end{pmatrix}\right\}=2\mathrm{j}\hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

soit encore :

$$\left[\hbar\sigma_1,\hbar\sigma_2\right]=2\mathrm{j}\hbar\left(\hbar\sigma_3\right) \qquad \text{(IV-22)}$$

On ne retrouve pas exactement la relation de commutation exprimée en (IV-19), puisqu'il y a un facteur 2 qui intervient. Si on souhaite retrouver exactement la relation qui définit les composantes d'un moment cinétique, il faut nécessairement introduire un facteur ½ dans les matrices de PAULI. C'est ce facteur qui va induire le spin ½ de l'électron.

En résumé, les composantes $\hat{S}_x,\hat{S}_y,\hat{S}_z$ recherchée, et qui donc vérifie (IV-19), sont les suivantes :

$$\hat{S}_x=\frac{\hbar}{2}\sigma_1=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y=\frac{\hbar}{2}\sigma_2=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{j}\\ \mathrm{j} & 0\end{pmatrix} \qquad \text{(IV-23)}$$

$$\hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\sigma_3=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Si nous avons bien avancé dans le formalisme qui permet de décrire le moment cinétique de spin, nous nous sommes éloignés considérablement de sa signification physique. Le passage, qui semble pourtant évident, des relations (IV-3) à (IV-4), est un passage où les relations (IV-3) ont un vrai sens physique, tandis que les relations (IV-4) n'en ont déjà plus, car elles portent sur des opérateurs. Leur généralisation aux spineurs accroît encore le niveau d'abstraction, et l'éloignement avec la représentation physique du moment cinétique que l'on se fait en mécanique classique.

III – L'interprétation de l'opérateur moment cinétique en terme de rotation

La description d'une rotation ne prend sens que si elle permet de préciser l'angle de rotation. On va donc s'attacher dans cette partie à montrer comment on peut exprimer cet angle en fonction des éléments qui nous ont servi à caractériser cette rotation dans les paragraphes précédents, et en particulier les composantes du moment cinétique.

Le problème n'est pas simple, car il est nécessaire de caractériser non pas une rotation classique dans un espace à trois dimensions, mais un opérateur de rotation qui agit sur une fonction d'onde ψ dans un premier temps, puis sur un spineur φ à deux composantes dans un second temps.

Il convient tout d'abord établir la matrice d'une rotation d'angle θ dans un espace euclidien, dont l'axe est choisi arbitrairement dans la direction Oz. Cette rotation s'effectue dans le plan xOy, et nous représentons ci-dessous la rotation entre deux points M et M' de coordonnées M(x,y) et M'(x',y').

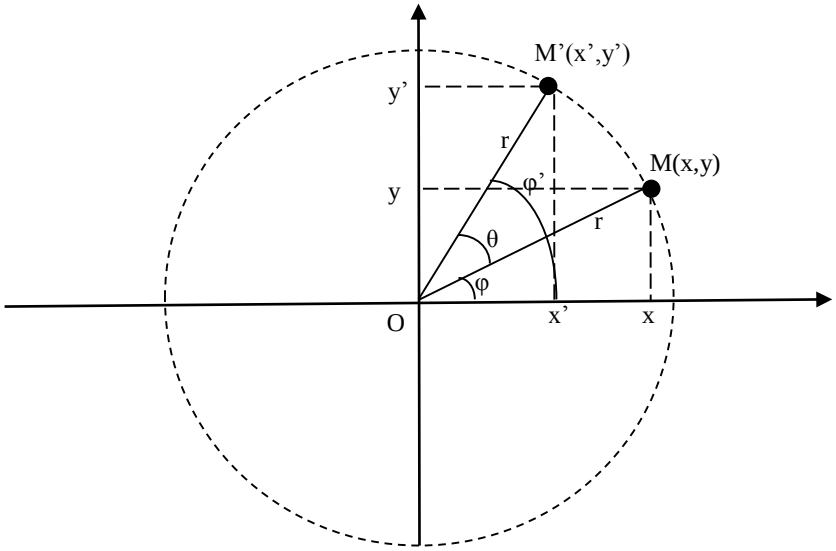


Figure (IV-1) : *Rotation dans le plan xOy*

La relation entre les coordonnées (x,y) et (x',y') peut s'établir géométriquement de la manière suivante :

$$x=r.\cos(\varphi)$$
$$y=r.\sin(\varphi) \qquad \text{(IV-24)}$$

$$x' = r.\cos(\varphi') = r.\cos(\theta+\varphi) = r.(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)) = x.\cos(\theta) - y.\sin(\theta)$$
$$y' = r.\sin(\varphi') = r.\sin(\theta+\varphi) = r.(\sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)) = x.\sin(\theta) + y.\cos(\theta) \qquad \text{(IV-25)}$$

soit encore en écriture matricielle en trois dimensions :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-26)}$$

Pour une rotation d'angle opposé –θ, la matrice s'obtient en changeant le signe du sinus :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-27)}$$

Dans la description de l'opérateur rotation appliqué à une fonction donnée, si on assimile la fonction à un objet pour s'en faire une représentation concrète, une rotation des axes vers la droite peut être considérée comme une rotation équivalente de l'objet vers la gauche.

Pour un opérateur de rotation d'angle θ, tout se passe comme si les coordonnées utilisées par la fonction subissaient une rotation d'angle –θ.

En tenant compte de ces éléments, on peut préciser ce qu'est l'opérateur rotation appliqué à une fonction ψ, et nous adopterons la définition suivante, pour une rotation d'axe Oz, d'angle θ et appliquée à une fonction d'onde ψ :

$$\hat{R}_{z,\theta}\psi(x,y,z) = \psi(x',y',z') \qquad \text{(IV-28)}$$

Dans cette relation, conformément aux remarques précédentes, nous utilisons la transformation de coordonnées (IV-21).

L'étape suivante consiste à établir le lien entre cet opérateur rotation, et l'opérateur moment cinétique $\hat{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ qui nous a servi à caractériser le mouvement de rotation en (IV-4) en s'inspirant des relations (IV-3) issues de la mécanique classique. Ce lien va être formalisé, dans un premier temps, pour une rotation infinitésimale.

Partant de la définition de l'opérateur rotation (IV-28) donnée ci-dessus :

$$\hat{R}_{z,\theta}\psi(x,y,z) = \psi(x.\cos\theta + y.\sin\theta, -x.\sin\theta + y.\cos\theta, z) \qquad \text{(IV-29)}$$

l'introduction des développements limités au premier ordre de sin(θ) et cos(θ) conduit à l'opérateur de rotation infinitésimal d'angle δθ :

$$\hat{R}_{z,\delta\theta}\psi(x,y,z) = \psi(x. + y.\delta\theta, -x.\delta\theta + y, z) \qquad \text{(IV-30)}$$

Faisant usage du développement limité au premier ordre d'une fonction de deux variables x et y qui varient d'une quantité infinitésimale respectivement égale à ε et η :

$$f(x+\varepsilon, y+\eta) = f(x,y) + \varepsilon\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \eta\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad \text{(IV-31)}$$

l'opérateur de rotation infinitésimal (IV-30) se met sous la forme :

$$\hat{R}_{z,\delta\theta}\psi(x,y,z) = \psi(x,y,z) + y(\delta\theta)\frac{\partial\psi}{\partial x} - x(\delta\theta)\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \text{(IV-32)}$$

Il s'interprète en fonction des opérateurs positions et impulsions rappelés pour mémoire ci-dessous :

$$\hat{p}_x(\psi) = -j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad \hat{p}_y(\psi) = -j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \hat{p}_z(\psi) = -j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad \text{(IV-33)}$$
$$\hat{x}(\psi) = x\psi \qquad \hat{y}(\psi) = y\psi \qquad \hat{z}(\psi) = z\psi$$

pour donner l'expression suivante :

$$\hat{R}_{z,\delta\theta}\psi(x,y,z) = \psi(x,y,z) - j\frac{\delta\theta}{\hbar}\left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right)\psi(x,y,z) \qquad \text{(IV-34)}$$

On y reconnaît l'opérateur de moment cinétique (IV-4) :

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \qquad \text{(IV-35)}$$

D'où l'expression de l'opérateur de rotation infinitésimal d'axe Oz et d'angle θ, appliqué à une fonction d'onde ψ, en fonction de l'opérateur de moment cinétique :

$$\hat{R}_{z,\delta\theta}\psi(x,y,z) = \psi(x,y,z) - j\frac{\delta\theta}{\hbar}\hat{L}_z\psi(x,y,z) = \left\{\hat{I} - j\frac{\delta\theta}{\hbar}\hat{L}_z\right\}\psi(x,y,z) \qquad \text{(IV-36)}$$

où $\hat{I}$ désigne l'opérateur identité.

On en déduit l'expression intrinsèque de l'opérateur rotation infinitésimal :

$$\hat{R}_{z,\delta\theta} = \hat{I} - j\frac{\delta\theta}{\hbar}\hat{L}_z \qquad \text{(IV-37)}$$

Cette relation peut être généralisée à une rotation d'angle quelconque θ de plusieurs manières. Une des plus simples consiste à diviser cet angle par un nombre entier N qui tend vers l'infini : on peut ainsi assimiler l'angle infiniment petit δθ de la relation (IV-37) avec l'angle θ/N.

$$\hat{R}_{z,\frac{\theta}{N}} = \hat{I} - \frac{1}{N}\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_z\right) \qquad \text{(IV-38)}$$

On écrit ensuite que pour obtenir une rotation d'angle θ, il faut appliquer N fois la rotation infinitésimal d'angle θ/N :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \left(\hat{R}_{z,\frac{\theta}{N}}\right)^N = \left(\hat{I} - \frac{1}{N}\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_z\right)\right)^N \qquad \text{(IV-39)}$$

Et on effectue pour terminer un passage à la limite :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \lim_{N\to\infty}\left(\hat{R}_{z,\frac{\theta}{N}}\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(\hat{I} - \frac{1}{N}\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_z\right)\right)^N \qquad \text{(IV-40)}$$

Utilisant le résultat connu :

$$\lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \exp(x) \qquad \text{(IV-41)}$$

on obtient finalement l'expression de l'opérateur rotation d'axe Oz et d'angle θ, en fonction de l'opérateur moment cinétique $\hat{L}_z$:

$$\hat{R}_{z,\theta} = \exp\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_z \right) \qquad \text{(IV-42)}$$

Il reste pour conclure ce chapitre, à généraliser cet opérateur à la rotation des spineurs qui sont des fonctions d'ondes à deux dimensions.

Il a été montré supra que l'opérateur $\hat{L} = \left(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z\right)$ doit être remplacé par un opérateur matriciel $\hat{S} = \left(\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\right)$ capable d'agir sur des êtres mathématiques à deux dimensions, et que cet opérateur se déduit des matrices de PAULI suivant la relation (IV-23) rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned} \hat{S}_x &= \frac{\hbar}{2}\sigma_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_y &= \frac{\hbar}{2}\sigma_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_z &= \frac{\hbar}{2}\sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(IV-43)}$$

L'opérateur de rotation d'axe Oz et d'angle θ, capable d'agir sur un spineur, a donc la forme suivante :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \exp\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{S}_z \right) \qquad \text{(IV-44)}$$

soit encore :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \exp\left(j\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{(IV-45)}$$

D'un point de vue pratique, on peut rarement mettre une exponentielle de matrice quelconque sous la forme d'une matrice 2 X 2 dont on connaît avec exactitude chacun des termes. On peut malgré tout en obtenir une solution approchée en utilisant le développement en série de la fonction exponentielle. Pour une matrice quelconque M, cela donne :

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + ... \qquad \text{(IV-46)}$$

Il est toutefois possible d'expliciter la matrice de l'opérateur de rotation autour des axes principaux Ox, Oy, et Oz.

<u>Opérateur de rotation autour de l'axe Oz :</u>

La matrice de l'opérateur est diagonale, ce qui permet de donner la forme explicite de l'exponentielle matricielle :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \exp\left(j\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\exp\left(j\frac{\theta}{2}\right) & 0\\ 0 & \exp\left(-j\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0\\ 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix} \quad \text{(IV-47)}$$

<u>Opérateur de rotation autour de l'axe Oy :</u>

$$\hat{R}_{y,\theta} = \exp\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{S}_y\right) = \exp\left(j\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & -j\\ j & 0\end{pmatrix}\right) = \exp\left(\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right) \quad \text{(IV-48)}$$

La forme particulière de la matrice 2 X 2 permet de montrer que le développement en série de l'exponentielle fait apparaître le développement en série des fonctions cos et sin dans les termes de la matrice résultat suivant la relation :

$$A = \begin{pmatrix}0 & x\\ -x & 0\end{pmatrix} \qquad \exp(A) = \begin{pmatrix}\cos(x) & \sin(x)\\ -\sin(x) & \cos(x)\end{pmatrix} \quad \text{(IV-49)}$$

D'où l'expression de l'opérateur de rotation autour de l'axe Oy :

$$\hat{R}_{y,\theta} = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix} \quad \text{(IV-50)}$$

<u>Opérateur de rotation autour de l'axe Ox :</u>

$$\hat{R}_{x,\theta} = \exp\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{S}_x\right) = \exp\left(j\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) \quad \text{(IV-51)}$$

Comme dans l'exemple précédent, la forme particulière de la matrice 2 X 2 permet de montrer que le développement en série de l'exponentielle fait apparaître le développement en série des fonctions hyperboliques cosh et sinh dans les termes de la matrice résultat suivant la relation :

$$A = \begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix} \qquad \exp(A) = \begin{pmatrix}\cosh(x) & \sinh(x)\\ \sinh(x) & \cosh(x)\end{pmatrix} \quad \text{(IV-52)}$$

D'où l'expression de l'opérateur de rotation autour de l'axe Ox :

$$\hat{R}_{x,\theta} = \begin{pmatrix} ch\left(j\frac{\theta}{2}\right) & sh\left(j\frac{\theta}{2}\right) \\ sh\left(j\frac{\theta}{2}\right) & ch\left(j\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-53)}$$

V

La covariance de l'équation de DIRAC

L'équation de DIRAC sur laquelle nous nous sommes appuyés pour établir le système d'équations différentielles se présente sous la forme :

$$j\left[\gamma_0\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}\right)+\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+\gamma_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](\psi)=\frac{m_0c}{\hbar}(\psi) \qquad \text{(V-1)}$$

En adoptant la notation :

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z \qquad \text{(V-2)}$$

on peut condenser l'écriture de (V-1) à l'aide de la règle de sommation sur les indices :

$$\left(j\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{m_0c}{\hbar}\right)\psi\left(x^\mu\right)=0 \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \qquad \text{(V-3)}$$

Il s'avère que cette équation est covariante, c'est à dire qu'elle garde la même forme lors d'un changement de référentiel tel qu'il est donné par la relativité restreinte.

L'invariance des lois de la physique par changement de référentiel est probablement le critère le plus sûr de la validité générale d'une loi physique. On peut le résumer de la manière suivante :

Soit un référentiel dans lequel l'équation de DIRAC s'écrit sous la forme (V-3) ci-dessus. Si nous changeons de référentiel, cela va induire un changement des coordonnées spatiales et temporelles x^μ de chacun des points de l'espace-temps qui vont devenir x'^μ ; et cela va induire un changement dans la fonction d'onde ψ qui va devenir ψ'.

L'invariance des lois de la physique par changement de référentiel impose que l'équation de DIRAC s'écrive, dans le référentiel (R'), sous la forme :

$$\left(j\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu}-\frac{m_0c}{\hbar}\right)\psi'\left(x'^\mu\right)=0 \qquad \text{(V-4)}$$

Une autre loi très générale de la physique est la loi de conservation locale. Elle exprime le fait que lorsque qu'une grandeur physique évolue dans le temps et dans l'espace, la conservation de cette grandeur s'exprime au moyen d'une quadri divergence égale à 0. Un des

exemples les plus connus concerne la conservation de la charge que l'on obtient à partir du quadrivecteur densité de courant (ρc, j_x, j_y, j_z) sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)}+\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=0 \qquad \text{(V-5)}$$

Il est possible de montrer qu'il existe une grandeur conservée par les solutions de l'équation de DIRAC, et cette grandeur est appelée courant de DIRAC en référence à la relation (V-5) ci-dessus.

Si on désigne par J cette grandeur, l'écriture condensée d'une quadri divergence nulle est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}J^{\mu}=\partial_{\mu}J^{\mu}=0 \qquad \text{(V-6)}$$

Quelques manipulations non triviales permettent de passer de l'équation de DIRAC à la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)=0 \qquad \text{(V-7)}$$

dans laquelle :

$$\overline{\psi}=\left(\psi^{*}\right)^{T}\gamma^{0}=\left(\psi_0^{*},\psi_1^{*},\psi_2^{*},\psi_3^{*}\right)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\left(\psi_0^{*},\psi_1^{*},-\psi_2^{*},-\psi_3^{*}\right) \qquad \text{(V-8)}$$

On en déduit le quadri vecteur courant de DIRAC :

$$J^{\mu}=\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \qquad \text{(V-9)}$$

où les γ^{μ} représentent les matrices de DIRAC introduite dans le chapitre II.

On en déduit les expressions explicites de chacune des composantes du quadri-vecteur J^{μ} qui représente les courants de DIRAC :

<u>composante d'indice 0 :</u>

$$J^{0}=\overline{\psi}\gamma^{0}\psi=\left(\psi_0^{*},\psi_1^{*},-\psi_2^{*},-\psi_3^{*}\right)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_0\\\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}=\left(\psi_0^{*},\psi_1^{*},\psi_2^{*},\psi_3^{*}\right)\begin{pmatrix}\psi_0\\\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix} \qquad \text{(V-10)}$$

$$J^{0}=\psi_0^{*}\psi_0+\psi_1^{*}\psi_1+\psi_2^{*}\psi_2+\psi_3^{*}\psi_3 \qquad \text{(V-11)}$$

composante d'indice 1 :

$$J^1 = \overline{\psi}\gamma^1\psi = \left(\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \left(\psi_3^*, \psi_2^*, \psi_1^*, \psi_0^*\right)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(V-12)}$$

$$J^1 = \psi_3^*\psi_0 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_0^*\psi_3 \qquad \text{(V-13)}$$

composante d'indice 2 :

$$J^2 = \overline{\psi}\gamma^2\psi = \left(\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \left(j\psi_3^*, -j\psi_2^*, j\psi_1^*, -j\psi_0^*\right)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \text{(V-14)}$$

$$J^2 = j\psi_3^*\psi_0 - j\psi_2^*\psi_1 + j\psi_1^*\psi_2 - j\psi_0^*\psi_3 \qquad \text{(V-15)}$$

composante d'indice 3 :

$$J^3 = \overline{\psi}\gamma^3\psi = \left(\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \left(\psi_2^*, -\psi_3^*, \psi_0^*, -\psi_1^*\right)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(V-16)}$$

$$J^3 = \psi_2^*\psi_0 - \psi_3^*\psi_1 + \psi_0^*\psi_2 - \psi_1^*\psi_3 \qquad \text{(V-17)}$$

soit donc en résumé :

$$\begin{aligned} J^0 &= \psi_0^*\psi_0 + \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 \\ J^1 &= \psi_3^*\psi_0 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_0^*\psi_3 \\ J^2 &= j\psi_3^*\psi_0 - j\psi_2^*\psi_1 + j\psi_1^*\psi_2 - j\psi_0^*\psi_3 \\ J^3 &= \psi_2^*\psi_0 - \psi_3^*\psi_1 + \psi_0^*\psi_2 - \psi_1^*\psi_3 \end{aligned} \qquad \text{(V-18)}$$

Les J^μ représentent les courants de densité de probabilité de présence de la particule.

Deuxième partie

L'approche énergétique de l'équation de DIRAC et de ses solutions en coordonnées cartésiennes

VI

Les modes stationnaires

On présente en général des solutions possibles à l'équation de DIRAC sous la forme d'ondes planes du type :

$$\psi(x,y,z,t) = A\exp\left[j\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right] \qquad \text{(VI-1)}$$

Cette relation est caractéristique d'une onde qui se propage à la pulsation ω et suivant le vecteur d'onde $\vec{k}$. Elle ne permet pas de décrire des échanges d'énergie tels que ceux que l'on peut mettre en évidence dans une cavité électromagnétique par exemple. Elle est également sujette à question concernant le nombre $j = \sqrt{-1}$ qui est présent et qui n'à rien à voir avec le formalisme complexe habituel pour la description des ondes.

On peut penser mettre en évidences des modes stationnaires en sommant deux ou plusieurs solutions propagatives, mais les solutions (VI-1) au système de DIRAC ne sont jamais complètement explicitées, ce qui rend cette possibilité inopérante.

Il convient donc de formaliser une méthode de recherche de ces solutions au système de DIRAC rappelé pour mémoire :

$$\begin{aligned}
\eta\psi_0 &= j\frac{\partial\psi_0}{\partial(ct)} + j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \\
\eta\psi_1 &= j\frac{\partial\psi_1}{\partial(ct)} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_3}{\partial z} \\
\eta\psi_2 &= -j\frac{\partial\psi_2}{\partial(ct)} - j\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial z} \\
\eta\psi_3 &= -j\frac{\partial\psi_3}{\partial(ct)} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}
\end{aligned} \qquad \text{(VI-2)}$$

et nous formulons l'hypothèse que toute fonction d'onde s'écrit comme une combinaison linéaire de modes stationnaires susceptibles d'être présents dans une cavité à trois dimensions :

$$\psi_0 = \{a_0S_xS_yS_z + b_0S_xC_yS_z + c_0C_xS_yS_z + d_0C_xC_yS_z + e_0S_xS_yC_z + f_0S_xC_yC_z + g_0C_xS_yC_z + h_0C_xC_yC_z\}C_t$$
$$+ \{i_0S_xS_yS_z + j_0S_xC_yS_z + k_0C_xS_yS_z + l_0C_xC_yS_z + m_0S_xS_yC_z + n_0S_xC_yC_z + o_0C_xS_yC_z + p_0C_xC_yC_z\}S_t$$
$$\psi_1 = \{a_1S_xS_yS_z + b_1S_xC_yS_z + c_1C_xS_yS_z + d_1C_xC_yS_z + e_1S_xS_yC_z + f_1S_xC_yC_z + g_1C_xS_yC_z + h_1C_xC_yC_z\}C_t$$
$$+ \{i_1S_xS_yS_z + j_1S_xC_yS_z + k_1C_xS_yS_z + l_1C_xC_yS_z + m_1S_xS_yC_z + n_1S_xC_yC_z + o_1C_xS_yC_z + p_1C_xC_yC_z\}S_t$$
$$\psi_2 = \{a_2S_xS_yS_z + b_2S_xC_yS_z + c_2C_xS_yS_z + d_2C_xC_yS_z + e_2S_xS_yC_z + f_2S_xC_yC_z + g_2C_xS_yC_z + h_2C_xC_yC_z\}C_t$$
$$+ \{i_2S_xS_yS_z + j_2S_xC_yS_z + k_2C_xS_yS_z + l_2C_xC_yS_z + m_2S_xS_yC_z + n_2S_xC_yC_z + o_2C_xS_yC_z + p_2C_xC_yC_z\}S_t$$
$$\psi_3 = \{a_3S_xS_yS_z + b_3S_xC_yS_z + c_3C_xS_yS_z + d_3C_xC_yS_z + e_3S_xS_yC_z + f_3S_xC_yC_z + g_3C_xS_yC_z + h_3C_xC_yC_z\}C_t$$
$$+ \{i_3S_xS_yS_z + j_3S_xC_yS_z + k_3C_xS_yS_z + l_3C_xC_yS_z + m_3S_xS_yC_z + n_3S_xC_yC_z + o_3C_xS_yC_z + p_3C_xC_yC_z\}S_t$$

(VI-3)

Dans cette définition, la notation abrégée suivante a été utilisée :

$S_x = \sin(k_x\, x)$ $S_y = \sin(k_y\, y)$ $S_z = \sin(k_z\, z)$ $S_t = \sin(k_t\, ct)$ (VI-4)

$C_x = \cos(k_x\, x)$ $C_y = \cos(k_y\, y)$ $C_z = \cos(k_z\, z)$ $C_t = \cos(k_t\, ct)$ (VI-5)

Le vecteur d'onde est représenté par ses composantes k_x, k_y, k_z, tandis que pour une notation homogène et en adéquation avec la relativité, le produit ωt a été remplacé par l'expression $k_t.ct$, ce qui permet de mettre en évidence les deux quadri-vecteurs :

4-vecteur position : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$ 4-vecteur onde : $\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ k_t = \dfrac{\omega}{c} \end{pmatrix}$ (VI-6)

Les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i h_i, i_i, j_i, k_i, l_i, m_i, n_i, o_i p_i , pour i=0,1,2,3, sont des constantes réelles ou complexes qui pondèrent chacun des modes et vont servir d'inconnues dans la recherche des fonctions d'ondes ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 solutions du système de DIRAC.

Cela conduit, pour chaque équation du système de DIRAC, à exprimer les dérivées partielles des fonctions d'onde ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 et à formuler un système homogène de 16 équations relatif aux coefficients a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i h_i, i_i, j_i, k_i, l_i, m_i, n_i, o_i p_i. Le système global obtenu sera donc un système homogène de 64 équations à 64 inconnues.

Les calculs sont un peu laborieux mais sans difficultés. Ils sont présentés dans leur intégralité dans les lignes suivantes ou on rappelle avoir posé $k_t = \omega/c$.

Première équation du système de DIRAC : $j\frac{\partial\psi_0}{\partial(ct)} + j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \eta\psi_0 = 0$

$$j\frac{\partial\psi_0}{\partial(ct)} = -jk_t\{a_0S_xS_yS_z + b_0S_xC_yS_z + c_0C_xS_yS_z + d_0C_xC_yS_z + e_0S_xS_yC_z + f_0S_xC_yC_z + g_0C_xS_yC_z + h_0C_xC_yC_z\}S_t$$
$$+ jk_t\{i_0S_xS_yS_z + j_0S_xC_yS_z + k_0C_xS_yS_z + l_0C_xC_yS_z + m_0S_xS_yC_z + n_0S_xC_yC_z + o_0C_xS_yC_z + p_0C_xC_yC_z\}C_t$$
$$j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} = jk_x\{a_3C_xS_yS_z + b_3C_xC_yS_z - c_3S_xS_yS_z - d_3S_xC_yS_z + e_3C_xS_yC_z + f_3C_xC_yC_z - g_3S_xS_yC_z - h_3S_xC_yC_z\}C_t$$
$$+ jk_x\{i_3C_xS_yS_z + j_3C_xC_yS_z - k_3S_xS_yS_z - l_3S_xC_yS_z + m_3C_xS_yC_z + n_3C_xC_yC_z - o_3S_xS_yC_z - p_3S_xC_yC_z\}S_t$$
$$\frac{\partial\psi_3}{\partial y} = k_y\{a_3S_xC_yS_z - b_3S_xS_yS_z + c_3C_xC_yS_z - d_3C_xS_yS_z + e_3S_xC_yC_z - f_3S_xS_yC_z + g_3C_xC_yC_z - h_3C_xS_yC_z\}C_t$$
$$k_y\{i_3S_xC_yS_z - j_3S_xS_yS_z + k_3C_xC_yS_z - l_3C_xS_yS_z + m_3S_xC_yC_z - n_3S_xS_yC_z + o_3C_xC_yC_z - p_3C_xS_yC_z\}S_t$$
$$j\frac{\partial\psi_2}{\partial z} = jk_z\{a_2S_xS_yC_z + b_2S_xC_yC_z + c_2C_xS_yC_z + d_2C_xC_yC_z - e_2S_xS_yS_z - f_2S_xC_yS_z - g_2C_xS_yS_z - h_2C_xC_yS_z\}C_t$$
$$+ jk_z\{i_2S_xS_yC_z + j_2S_xC_yC_z + k_2C_xS_yC_z + l_2C_xC_yC_z - m_2S_xS_yS_z - n_2S_xC_yS_z - o_2C_xS_yS_z - p_2C_xC_yS_z\}S_t$$
$$\eta\psi_0 = \eta\{a_0S_xS_yS_z + b_0S_xC_yS_z + c_0C_xS_yS_z + d_0C_xC_yS_z + e_0S_xS_yC_z + f_0S_xC_yC_z + g_0C_xS_yC_z + h_0C_xC_yC_z\}C_t$$
$$+ \eta\{i_0S_xS_yS_z + j_0S_xC_yS_z + k_0C_xS_yS_z + l_0C_xC_yS_z + m_0S_xS_yC_z + n_0S_xC_yC_z + o_0C_xS_yC_z + p_0C_xC_yC_z\}S_t$$

(VI-7)

On en déduit le système homogène associé à la première équation du système de DIRAC :

$$\begin{aligned}
&-jk_ta_0 - jk_xk_3 - k_yj_3 - jk_zm_2 - \eta i_0 = 0\\
&-jk_tb_0 - jk_xl_3 + k_yi_3 - jk_zn_2 - \eta j_0 = 0\\
&-jk_tc_0 + jk_xi_3 - k_yl_3 - jk_zo_2 - \eta k_0 = 0\\
&-jk_td_0 + jk_xj_3 + k_yk_3 - jk_zp_2 - \eta l_0 = 0\\
&-jk_te_0 - jk_xo_3 - k_yn_3 + jk_zi_2 - \eta m_0 = 0\\
&-jk_tf_0 - jk_xp_3 + k_ym_3 + jk_zj_2 - \eta n_0 = 0\\
&-jk_tg_0 + jk_xm_3 - k_yp_3 + jk_zk_2 - \eta o_0 = 0\\
&-jk_th_0 + jk_xn_3 + k_yo_3 + jk_zl_2 - \eta p_0 = 0\\
&jk_ti_0 - jk_xc_3 - k_yb_3 - jk_ze_2 - \eta a_0 = 0\\
&jk_tj_0 - jk_xd_3 + k_ya_3 - jk_zf_2 - \eta b_0 = 0\\
&jk_tk_0 + jk_xa_3 - k_yd_3 - jk_zg_2 - \eta c_0 = 0\\
&jk_tl_0 + jk_xb_3 + k_yc_3 - jk_zh_2 - \eta d_0 = 0\\
&jk_tm_0 - jk_xg_3 - k_yf_3 + jk_za_2 - \eta e_0 = 0\\
&jk_tn_0 - jk_xh_3 + k_ye_3 + jk_zb_2 - \eta f_0 = 0\\
&jk_to_0 + jk_xe_3 - k_yh_3 + jk_zc_2 - \eta g_0 = 0\\
&jk_tp_0 + jk_xf_3 + k_yg_3 + jk_zd_2 - \eta h_0 = 0
\end{aligned}$$

(VI-8)

Deuxième équation du système de DIRAC : $j\frac{\partial\psi_1}{\partial(ct)} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_3}{\partial z} - \eta\psi_1 = 0$

$$
\begin{aligned}
j\frac{\partial\psi_1}{\partial(ct)} &= -jk_t\{a_1S_xS_yS_z + b_1S_xC_yS_z + c_1C_xS_yS_z + d_1C_xC_yS_z + e_1S_xS_yC_z + f_1S_xC_yC_z + g_1C_xS_yC_z + h_1C_xC_yC_z\}S_t \\
&+ jk_t\{i_1S_xS_yS_z + j_1S_xC_yS_z + k_1C_xS_yS_z + l_1C_xC_yS_z + m_1S_xS_yC_z + n_1S_xC_yC_z + o_1C_xS_yC_z + p_1C_xC_yC_z\}C_t \\
j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} &= jk_x\{a_2C_xS_yS_z + b_2C_xC_yS_z - c_2S_xS_yS_z - d_2S_xC_yS_z + e_2C_xS_yC_z + f_2C_xC_yC_z - g_2S_xS_yC_z - h_2S_xC_yC_z\}C_t \\
&+ jk_x\{i_2C_xS_yS_z + j_2C_xC_yS_z - k_2S_xS_yS_z - l_2S_xC_yS_z + m_2C_xS_yC_z + n_2C_xC_yC_z - o_2S_xS_yC_z - p_2S_xC_yC_z\}S_t \\
-\frac{\psi_2}{\partial y} &= -k_y\{a_2S_xC_yS_z - b_2S_xS_yS_z + c_2C_xC_yS_z - d_2C_xS_yS_z + e_2S_xC_yC_z - f_2S_xS_yC_z + g_2C_xC_yC_z - h_2C_xS_yC_z\}C_t \\
&- k_y\{i_2S_xC_yS_z - j_2S_xS_yS_z + k_2C_xC_yS_z - l_2C_xS_yS_z + m_2S_xC_yC_z - n_2S_xS_yC_z + o_2C_xC_yC_z - p_2C_xS_yC_z\}S_t \\
-j\frac{\partial\psi_3}{\partial z} &= -jk_z\{a_3S_xS_yC_z + b_3S_xC_yC_z + c_3C_xS_yC_z + d_3C_xC_yC_z - e_3S_xS_yS_z - f_3S_xC_yS_z - g_3C_xS_yS_z - h_3C_xC_yS_z\}C_t \\
&- jk_z\{i_3S_xS_yC_z + j_3S_xC_yC_z + k_3C_xS_yC_z + l_3C_xC_yC_z - m_3S_xS_yS_z - n_3S_xC_yS_z - o_3C_xS_yS_z - p_3C_xC_yS_z\}S_t \\
\eta\psi_1 &= \eta\{a_1S_xS_yS_z + b_1S_xC_yS_z + c_1C_xS_yS_z + d_1C_xC_yS_z + e_1S_xS_yC_z + f_1S_xC_yC_z + g_1C_xS_yC_z + h_1C_xC_yC_z\}C_t \\
&+ \eta\{i_1S_xS_yS_z + j_1S_xC_yS_z + k_1C_xS_yS_z + l_1C_xC_yS_z + m_1S_xS_yC_z + n_1S_xC_yC_z + o_1C_xS_yC_z + p_1C_xC_yC_z\}S_t
\end{aligned}
$$

(VI-9)

On en déduit le système homogène associé à la deuxième équation du système de DIRAC :

$$
\begin{aligned}
&-jk_ta_1 - jk_xk_2 + k_yj_2 + jk_zm_3 - \eta i_1 = 0 \\
&-jk_tb_1 - jk_xl_2 - k_yi_2 + jk_zn_3 - \eta j_1 = 0 \\
&-jk_tc_1 + jk_xi_2 + k_yl_2 + jk_zo_3 - \eta k_1 = 0 \\
&-jk_td_1 + jk_xj_2 - k_yk_2 + jk_zp_3 - \eta l_1 = 0 \\
&-jk_te_1 - jk_xo_2 + k_yn_2 - jk_zi_3 - \eta m_1 = 0 \\
&-jk_tf_1 - jk_xp_2 - k_ym_2 - jk_zj_3 - \eta n_1 = 0 \\
&-jk_tg_1 + jk_xm_2 + k_yp_2 - jk_zk_3 - \eta o_1 = 0 \\
&-jk_th_1 + jk_xn_2 - k_yo_2 - jk_zl_3 - \eta p_1 = 0 \\
&jk_ti_1 - jk_xc_2 + k_yb_2 + jk_ze_3 - \eta a_1 = 0 \\
&jk_tj_1 - jk_xd_2 - k_ya_2 + jk_zf_3 - \eta b_1 = 0 \\
&jk_tk_1 + jk_xa_2 + k_yd_2 + jk_zg_3 - \eta c_1 = 0 \\
&jk_tl_1 + jk_xb_2 - k_yc_2 + jk_zh_3 - \eta d_1 = 0 \\
&jk_tm_1 - jk_xg_2 + k_yf_2 - jk_za_3 - \eta e_1 = 0 \\
&jk_tn_1 - jk_xh_2 - k_ye_2 - jk_zb_3 - \eta f_1 = 0 \\
&jk_to_1 + jk_xe_2 + k_yh_2 - jk_zc_3 - \eta g_1 = 0 \\
&jk_tp_1 + jk_xf_2 - k_yg_2 - jk_zd_3 - \eta h_1 = 0
\end{aligned}
$$

(VI-10)

Troisième équation du système de DIRAC : $-j\frac{\partial\psi_2}{\partial(ct)}-j\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-j\frac{\partial\psi_0}{\partial z}-\eta\psi_2=0$

$$
\begin{aligned}
-j\frac{\partial\psi_2}{\partial(ct)} &= jk_t\{a_2S_xS_yS_z+b_2S_xC_yS_z+c_2C_xS_yS_z+d_2C_xC_yS_z+e_2S_xS_yC_z+f_2S_xC_yC_z+g_2C_xS_yC_z+h_2C_xC_yC_z\}S_t\\
&-jk_t\{i_2S_xS_yS_z+j_2S_xC_yS_z+k_2C_xS_yS_z+l_2C_xC_yS_z+m_2S_xS_yC_z+n_2S_xC_yC_z+o_2C_xS_yC_z+p_2C_xC_yC_z\}C_t\\
-j\frac{\partial\psi_1}{\partial x} &= -jk_x\{a_1C_xS_yS_z+b_1C_xC_yS_z-c_1S_xS_yS_z-d_1S_xC_yS_z+e_1C_xS_yC_z+f_1C_xC_yC_z-g_1S_xS_yC_z-h_1S_xC_yC_z\}C_t\\
&-jk_x\{i_1C_xS_yS_z+j_1C_xC_yS_z-k_1S_xS_yS_z-l_1S_xC_yS_z+m_1C_xS_yC_z+n_1C_xC_yC_z-o_1S_xS_yC_z-p_1S_xC_yC_z\}S_t\\
-\frac{\partial\psi_1}{\partial y} &= -k_y\{a_1S_xC_yS_z-b_1S_xS_yS_z+c_1C_xC_yS_z-d_1C_xS_yS_z+e_1S_xC_yC_z-f_1S_xS_yC_z+g_1C_xC_yC_z-h_1C_xS_yC_z\}C_t\\
&-k_y\{i_1S_xC_yS_z-j_1S_xS_yS_z+k_1C_xC_yS_z-l_1C_xS_yS_z+m_1S_xC_yC_z-n_1S_xS_yC_z+o_1C_xC_yC_z-p_1C_xS_yC_z\}S_t\\
-j\frac{\partial\psi_0}{\partial z} &= -jk_z\{a_0S_xS_yC_z+b_0S_xC_yC_z+c_0C_xS_yC_z+d_0C_xC_yC_z-e_0S_xS_yS_z-f_0S_xC_yS_z-g_0C_xS_yS_z-h_0C_xC_yS_z\}C_t\\
&-jk_z\{i_0S_xS_yC_z+j_0S_xC_yC_z+k_0C_xS_yC_z+l_0C_xC_yC_z-m_0S_xS_yS_z-n_0S_xC_yS_z-o_0C_xS_yS_z-p_0C_xC_yS_z\}S_t\\
\eta\psi_2 &= \eta\{a_2S_xS_yS_z+b_2S_xC_yS_z+c_2C_xS_yS_z+d_2C_xC_yS_z+e_2S_xS_yC_z+f_2S_xC_yC_z+g_2C_xS_yC_z+h_2C_xC_yC_z\}C_t\\
&+\eta\{i_2S_xS_yS_z+j_2S_xC_yS_z+k_2C_xS_yS_z+l_2C_xC_yS_z+m_2S_xS_yC_z+n_2S_xC_yC_z+o_2C_xS_yC_z+p_2C_xC_yC_z\}S_t
\end{aligned}
$$

(VI-11)

On en déduit le système homogène associé à la troisième équation du système de DIRAC :

$$
\begin{aligned}
&jk_ta_2+jk_xk_1+k_yj_1+jk_zm_0-\eta i_2=0\\
&jk_tb_2+jk_xl_1-k_yi_1+jk_zn_0-\eta j_2=0\\
&jk_tc_2-jk_xi_1+k_yl_1+jk_zo_0-\eta k_2=0\\
&jk_td_2-jk_xj_1-k_yk_1+jk_zp_0-\eta l_2=0\\
&jk_te_2+jk_xo_1+k_yn_1-jk_zi_0-\eta m_2=0\\
&jk_tf_2+jk_xp_1-k_ym_1-jk_zj_0-\eta n_2=0\\
&jk_tg_2-jk_xm_1+k_yp_1-jk_zk_0-\eta o_2=0\\
&jk_th_2-jk_xn_1-k_yo_1-jk_zl_0-\eta p_2=0\\
&-jk_ti_2+jk_xc_1+k_yb_1+jk_ze_0-\eta a_2=0\\
&-jk_tj_2+jk_xd_1-k_ya_1+jk_zf_0-\eta b_2=0\\
&-jk_tk_2-jk_xa_1+k_yd_1+jk_zg_0-\eta c_2=0\\
&-jk_tl_2-jk_xb_1-k_yc_1+jk_zh_0-\eta d_2=0\\
&-jk_tm_2+jk_xg_1+k_yf_1-jk_za_0-\eta e_2=0\\
&-jk_tn_2+jk_xh_1-k_ye_1-jk_zb_0-\eta f_2=0\\
&-jk_to_2-jk_xe_1+k_yh_1-jk_zc_0-\eta g_2=0\\
&-jk_tp_2-jk_xf_1-k_yg_1-jk_zd_0-\eta h_2=0
\end{aligned}
$$

(VI-12)

Quatrième équation du système de DIRAC : $-j\frac{\partial\psi_3}{\partial(ct)} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \eta\psi_3 = 0$

$$
\begin{aligned}
-j\frac{\partial\psi_3}{\partial(ct)} &= jk_t\{a_3S_xS_yS_z + b_3S_xC_yS_z + c_3C_xS_yS_z + d_3C_xC_yS_z + e_3S_xS_yC_z + f_3S_xC_yC_z + g_3C_xS_yC_z + h_3C_xC_yC_z\}S_t \\
&- jk_t\{i_3S_xS_yS_z + j_3S_xC_yS_z + k_3C_xS_yS_z + l_3C_xC_yS_z + m_3S_xS_yC_z + n_3S_xC_yC_z + o_3C_xS_yC_z + p_3C_xC_yC_z\}C_t \\
-j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} &= -jk_x\{a_0C_xS_yS_z + b_0C_xC_yS_z - c_0S_xS_yS_z - d_0S_xC_yS_z + e_0C_xS_yC_z + f_0C_xC_yC_z - g_0S_xS_yC_z - h_0S_xC_yC_z\}C_t \\
&- jk_x\{i_0C_xS_yS_z + j_0C_xC_yS_z - k_0S_xS_yS_z - l_0S_xC_yS_z + m_0C_xS_yC_z + n_0C_xC_yC_z - o_0S_xS_yC_z - p_0S_xC_yC_z\}S_t \\
\frac{\partial\psi_0}{\partial y} &= k_y\{a_0S_xC_yS_z - b_0S_xS_yS_z + c_0C_xC_yS_z - d_0C_xS_yS_z + e_0S_xC_yC_z - f_0S_xS_yC_z + g_0C_xC_yC_z - h_0C_xS_yC_z\}C_t \\
&+ k_y\{i_0S_xC_yS_z - j_0S_xS_yS_z + k_0C_xC_yS_z - l_0C_xS_yS_z + m_0S_xC_yC_z - n_0S_xS_yC_z + o_0C_xC_yC_z - p_0C_xS_yC_z\}S_t \\
j\frac{\partial\psi_1}{\partial z} &= jk_z\{a_1S_xS_yC_z + b_1S_xC_yC_z + c_1C_xS_yC_z + d_1C_xC_yC_z - e_1S_xS_yS_z - f_1S_xC_yS_z - g_1C_xS_yS_z - h_1C_xC_yS_z\}C_t \\
&+ jk_z\{i_1S_xS_yC_z + j_1S_xC_yC_z + k_1C_xS_yC_z + l_1C_xC_yC_z - m_1S_xS_yS_z - n_1S_xC_yS_z - o_1C_xS_yS_z - p_1C_xC_yS_z\}S_t \\
\eta\psi_3 &= \eta\{a_3S_xS_yS_z + b_3S_xC_yS_z + c_3C_xS_yS_z + d_3C_xC_yS_z + e_3S_xS_yC_z + f_3S_xC_yC_z + g_3C_xS_yC_z + h_3C_xC_yC_z\}C_t \\
&+ \eta\{i_3S_xS_yS_z + j_3S_xC_yS_z + k_3C_xS_yS_z + l_3C_xC_yS_z + m_3S_xS_yC_z + n_3S_xC_yC_z + o_3C_xS_yC_z + p_3C_xC_yC_z\}S_t
\end{aligned}
$$

(VI-13)

On en déduit le système homogène associé à la quatrième équation du système de DIRAC :

$$
\begin{aligned}
&jk_ta_3 + jk_xk_0 - k_yj_0 - jk_zm_1 - \eta i_3 = 0 \\
&jk_tb_3 + jk_xl_0 + k_yi_0 - jk_zn_1 - \eta j_3 = 0 \\
&jk_tc_3 - jk_xi_0 - k_yl_0 - jk_zo_1 - \eta k_3 = 0 \\
&jk_td_3 - jk_xj_0 + k_yk_0 - jk_zp_1 - \eta l_3 = 0 \\
&jk_te_3 + jk_xo_0 - k_yn_0 + jk_zi_1 - \eta m_3 = 0 \\
&jk_tf_3 + jk_xp_0 + k_ym_0 + jk_zj_1 - \eta n_3 = 0 \\
&jk_tg_3 - jk_xm_0 - k_yp_0 + jk_zk_1 - \eta o_3 = 0 \\
&jk_th_3 - jk_xn_0 + k_yo_0 + jk_zl_1 - \eta p_3 = 0 \\
&-jk_ti_3 + jk_xc_0 - k_yb_0 - jk_ze_1 - \eta a_3 = 0 \\
&-jk_tj_3 + jk_xd_0 + k_ya_0 - jk_zf_1 - \eta b_3 = 0 \\
&-jk_tk_3 - jk_xa_0 - k_yd_0 - jk_zg_1 - \eta c_3 = 0 \\
&-jk_tl_3 - jk_xb_0 + k_yc_0 - jk_zh_1 - \eta d_3 = 0 \\
&-jk_tm_3 + jk_xg_0 - k_yf_0 + jk_za_1 - \eta e_3 = 0 \\
&-jk_tn_3 + jk_xh_0 + k_ye_0 + jk_zb_1 - \eta f_3 = 0 \\
&-jk_to_3 - jk_xe_0 - k_yh_0 + jk_zc_1 - \eta g_3 = 0 \\
&-jk_tp_3 - jk_xf_0 + k_yg_0 + jk_zd_1 - \eta h_3 = 0
\end{aligned}
$$

(VI-14)

Le système complet de 64 équations relatif aux coefficients a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i h_i, i_i, j_i, k_i, l_i, m_i, n_i, o_i p_i. pour i = 0,1,2,3 peut maintenant être récapitulé sur 2 colonnes :

$$-jk_ta_0 - jk_xk_3 - k_yj_3 - jk_zm_2 - \eta i_0 = 0$$
$$-jk_tb_0 - jk_xl_3 + k_yi_3 - jk_zn_2 - \eta j_0 = 0$$
$$-jk_tc_0 + jk_xi_3 - k_yl_3 - jk_zo_2 - \eta k_0 = 0$$
$$-jk_td_0 + jk_xj_3 + k_yk_3 - jk_zp_2 - \eta l_0 = 0$$
$$-jk_te_0 - jk_xo_3 - k_yn_3 + jk_zi_2 - \eta m_0 = 0$$
$$-jk_tf_0 - jk_xp_3 + k_ym_3 + jk_zj_2 - \eta n_0 = 0$$
$$-jk_tg_0 + jk_xm_3 - k_yp_3 + jk_zk_2 - \eta o_0 = 0$$
$$-jk_th_0 + jk_xn_3 + k_yo_3 + jk_zl_2 - \eta p_0 = 0$$
$$jk_ti_0 - jk_xc_3 - k_yb_3 - jk_ze_2 - \eta a_0 = 0$$
$$jk_tj_0 - jk_xd_3 + k_ya_3 - jk_zf_2 - \eta b_0 = 0$$
$$jk_tk_0 + jk_xa_3 - k_yd_3 - jk_zg_2 - \eta c_0 = 0$$
$$jk_tl_0 + jk_xb_3 + k_yc_3 - jk_zh_2 - \eta d_0 = 0$$
$$jk_tm_0 - jk_xg_3 - k_yf_3 + jk_za_2 - \eta e_0 = 0$$
$$jk_tn_0 - jk_xh_3 + k_ye_3 + jk_zb_2 - \eta f_0 = 0$$
$$jk_to_0 + jk_xe_3 - k_yh_3 + jk_zc_2 - \eta g_0 = 0$$
$$jk_tp_0 + jk_xf_3 + k_yg_3 + jk_zd_2 - \eta h_0 = 0$$

$$-jk_ta_1 - jk_xk_2 + k_yj_2 + jk_zm_3 - \eta i_1 = 0$$
$$-jk_tb_1 - jk_xl_2 - k_yi_2 + jk_zn_3 - \eta j_1 = 0$$
$$-jk_tc_1 + jk_xi_2 + k_yl_2 + jk_zo_3 - \eta k_1 = 0$$
$$-jk_td_1 + jk_xj_2 - k_yk_2 + jk_zp_3 - \eta l_1 = 0$$
$$-jk_te_1 - jk_xo_2 + k_yn_2 - jk_zi_3 - \eta m_1 = 0$$
$$-jk_tf_1 - jk_xp_2 - k_ym_2 - jk_zj_3 - \eta n_1 = 0$$
$$-jk_tg_1 + jk_xm_2 + k_yp_2 - jk_zk_3 - \eta o_1 = 0$$
$$-jk_th_1 + jk_xn_2 - k_yo_2 - jk_zl_3 - \eta p_1 = 0$$
$$jk_ti_1 - jk_xc_2 + k_yb_2 + jk_ze_3 - \eta a_1 = 0$$
$$jk_tj_1 - jk_xd_2 - k_ya_2 + jk_zf_3 - \eta b_1 = 0$$
$$jk_tk_1 + jk_xa_2 + k_yd_2 + jk_zg_3 - \eta c_1 = 0$$
$$jk_tl_1 + jk_xb_2 - k_yc_2 + jk_zh_3 - \eta d_1 = 0$$
$$jk_tm_1 - jk_xg_2 + k_yf_2 - jk_za_3 - \eta e_1 = 0$$
$$jk_tn_1 - jk_xh_2 - k_ye_2 - jk_zb_3 - \eta f_1 = 0$$
$$jk_to_1 + jk_xe_2 + k_yh_2 - jk_zc_3 - \eta g_1 = 0$$
$$jk_tp_1 + jk_xf_2 - k_yg_2 - jk_zd_3 - \eta h_1 = 0$$

$$jk_ta_2 + jk_xk_1 + k_yj_1 + jk_zm_0 - \eta i_2 = 0$$
$$jk_tb_2 + jk_xl_1 - k_yi_1 + jk_zn_0 - \eta j_2 = 0$$
$$jk_tc_2 - jk_xi_1 + k_yl_1 + jk_zo_0 - \eta k_2 = 0$$
$$jk_td_2 - jk_xj_1 - k_yk_1 + jk_zp_0 - \eta l_2 = 0$$
$$jk_te_2 + jk_xo_1 + k_yn_1 - jk_zi_0 - \eta m_2 = 0$$
$$jk_tf_2 + jk_xp_1 - k_ym_1 - jk_zj_0 - \eta n_2 = 0$$
$$jk_tg_2 - jk_xm_1 + k_yp_1 - jk_zk_0 - \eta o_2 = 0$$
$$jk_th_2 - jk_xn_1 - k_yo_1 - jk_zl_0 - \eta p_2 = 0$$
$$-jk_ti_2 + jk_xc_1 + k_yb_1 + jk_ze_0 - \eta a_2 = 0$$
$$-jk_tj_2 + jk_xd_1 - k_ya_1 + jk_zf_0 - \eta b_2 = 0$$
$$-jk_tk_2 - jk_xa_1 + k_yd_1 + jk_zg_0 - \eta c_2 = 0$$
$$-jk_tl_2 - jk_xb_1 - k_yc_1 + jk_zh_0 - \eta d_2 = 0$$
$$-jk_tm_2 + jk_xg_1 + k_yf_1 - jk_za_0 - \eta e_2 = 0$$
$$-jk_tn_2 + jk_xh_1 - k_ye_1 - jk_zb_0 - \eta f_2 = 0$$
$$-jk_to_2 - jk_xe_1 + k_yh_1 - jk_zc_0 - \eta g_2 = 0$$
$$-jk_tp_2 - jk_xf_1 - k_yg_1 - jk_zd_0 - \eta h_2 = 0$$

$$jk_ta_3 + jk_xk_0 - k_yj_0 - jk_zm_1 - \eta i_3 = 0$$
$$jk_tb_3 + jk_xl_0 + k_yi_0 - jk_zn_1 - \eta j_3 = 0$$
$$jk_tc_3 - jk_xi_0 - k_yl_0 - jk_zo_1 - \eta k_3 = 0$$
$$jk_td_3 - jk_xj_0 + k_yk_0 - jk_zp_1 - \eta l_3 = 0$$
$$jk_te_3 + jk_xo_0 - k_yn_0 + jk_zi_1 - \eta m_3 = 0$$
$$jk_tf_3 + jk_xp_0 + k_ym_0 + jk_zj_1 - \eta n_3 = 0$$
$$jk_tg_3 - jk_xm_0 - k_yp_0 + jk_zk_1 - \eta o_3 = 0$$
$$jk_th_3 - jk_xn_0 + k_yo_0 + jk_zl_1 - \eta p_3 = 0$$
$$-jk_ti_3 + jk_xc_0 - k_yb_0 - jk_ze_1 - \eta a_3 = 0$$
$$-jk_tj_3 + jk_xd_0 + k_ya_0 - jk_zf_1 - \eta b_3 = 0$$
$$-jk_tk_3 - jk_xa_0 - k_yd_0 - jk_zg_1 - \eta c_3 = 0$$
$$-jk_tl_3 - jk_xb_0 + k_yc_0 - jk_zh_1 - \eta d_3 = 0$$
$$-jk_tm_3 + jk_xg_0 - k_yf_0 + jk_za_1 - \eta e_3 = 0$$
$$-jk_tn_3 + jk_xh_0 + k_ye_0 + jk_zb_1 - \eta f_3 = 0$$
$$-jk_to_3 - jk_xe_0 - k_yh_0 + jk_zc_1 - \eta g_3 = 0$$
$$-jk_tp_3 - jk_xf_0 + k_yg_0 + jk_zd_1 - \eta h_3 = 0$$

(VI-15)

Il s'agit d'un système homogène qui n'admet de solution non nulle que si son déterminant est nul. Mais l'expression littérale du déterminant d'un système de 64 équations à 64 inconnues n'est pas triviale à obtenir.

On peut cependant tenter de la cerner par quelques considérations physiques. S'il existe une relation entre k_x, k_y, k_z, k_t et η qui permet d'obtenir des solutions à ce système, cette relation doit exprimer la conservation de l'énergie.

Il a été rappelé en introduction que la pseudo-norme du quadrivecteur impulsion énergie :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} \qquad \text{(VI-16)}$$

ne dépend pas du référentiel dans lequel elle est exprimée et il a été montré que sa constance sert à établir la relation de conservation de l'énergie :

$$E^2 = (pc)^2 + \left(m_0c^2\right)^2 = (p_xc)^2 + (p_yc)^2 + (p_zc)^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \qquad \text{(VI-17)}$$

Le quadrivecteur homologue à (VI-16) en mécanique quantique s'obtient en multipliant la quadrivecteur d'onde par la constante de PLANCK barrée :

$$\tilde{P}_Q = \hbar \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ k_t = \dfrac{\omega}{c} \end{pmatrix} \qquad \text{(VI-18)}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, la pseudo-norme de ce quadrivecteur est constante et cette constante est nécessairement l'énergie de masse au repos divisée par c^2. On en déduit :

$$\hbar^2\left(k_t^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2\right) = \left(m_0c\right)^2 \qquad \text{(VI-19)}$$

soit encore, en faisant usage de la notation utilisée dans l'expression du système de DIRAC rappelé en (V-2) :

$$\eta = \frac{m_0c}{\hbar} \qquad \text{(VI-20)}$$

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 \qquad \text{(VI-21)}$$

En résumé, si le système de DIRAC a des solutions, celles-ci doivent nécessairement respecter l'équation de conservation de l'énergie (VI-21).

Il est maintenant possible de montrer qu'une solution sous forme d'une combinaison linéaire de modes stationnaires est solution de l'équation de KLEIN-GORDON rappelée ci-dessous :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right](\psi) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}(\psi) \qquad \text{(VI-22)}$$

Considérons une fonction d'onde ψ représentant l'un quelconque des modes de cavité à trois dimensions exprimés en (VI-3), par exemple pour fixer les idées :

$$\psi(x,y,z,t) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t ct) \qquad \text{(VI-23)}$$

Par substitution de la fonction ψ de (VI-23) dans (VI-22), on obtient :

$$\left(-k_x^2-k_y^2-k_z^2+k_t^2\right)(\psi)=\eta^2(\psi) \qquad \text{(VI-24)}$$

ce qui laisse présager que le système de DIRAC admet des solutions sous la forme de modes stationnaires sous réserve que l'équation de conservation de l'énergie (VI-21) soit satisfaite.

Sur la base de ces hypothèses, on peut montrer que le déterminant du système complet de 64 équations à 64 inconnues a pour déterminant :

$$\left(-k_t^2+k_x^2+k_y^2+k_z^2+\eta^2\right)^{32} \qquad \text{(VI-25)}$$

On en conclut de manière définitive que lorsque ce déterminant est nul, c'est à dire lorsque l'équation de conservation de l'énergie est vérifiée, il existe des solutions au système de DIRAC sous la forme d'ondes stationnaires.

VII

Les solutions exactes au système de DIRAC

Le chapitre précédent a permis de montrer qu'il existait des solutions stationnaires à ce système. Il faut, pour être convaincant, être en mesure de les expliciter.

Une analyse détaillée du système montre que lorsque le déterminant est nul, c'est à dire lorsque la condition suivante est réalisée :

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 \qquad \text{(VII-1)}$$

le choix de l'un des spineurs est arbitraire, et l'autre s'en déduit.

En tenant compte de cette observation, deux tableaux de solutions ont été construits pour les spineurs définis dans les chapitres précédents :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \chi = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(VII-2)}$$

I – Les solutions avec un seul mode excité sur l'une des composantes des spineurs

Le premier tableau (Tableau VII-1) a été élaboré en choisissant le spineur.φ et en calculant le spineur χ correspondant pour être solution du système de DIRAC. Afin de balayer l'ensemble des solutions, le choix du spineur φ a été fait en affectant à la composante ψ_0 successivement tous les modes possibles tout en maintenant ψ_1=0, puis en affectant à la composante ψ_1 successivement tous les modes possibles tout en maintenant ψ_0=0.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
	SxSySzCt	SxCySzCt	CxSySzCt	CxCySzCt	SxSyCzCt	SxCyCzCt	CxSyCzCt	CxCyCzCt	SxSyzSt	SxCyzSt	CxSyzSt	CxCyzSt	SxSyCzSt	SxCyCzSt	CxSyCzSt	CxCyCzSt
ψ0	a0	b0	c0	d0	e0	f0	g0	h0	i0	j0	k0	L0	m0	n0	o0	p0
ψ1	a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1	i1	j1	k1	L1	m1	n1	o1	p1
ψ2(η²-κ²)	j.e0.η.Kz m0.Kt.Kz b1.η.Ky j.c1.η.Kx -j. j1.Kt.Ky k1.Kt.Kx	j.f0.η.Kz n0.Kt.Kz -a1.η.Ky j.d1.η.Kx j.i1.Kt.Ky L1.Kt.Kx	j.g0.η.Kz o0.Kt.Kz -j.a1.η.Kx d1.η.Ky -i1.Kt.Kx -j.L1.Kt.Ky	j.h0.η.Kz p0.Kt.Kz -j.b1.η.Kx -c1.η.Ky -j1.Kt.Kx j.k1.Kt.Ky	-j.a0.η.Kz -i0.Kt.Kz f1.η.Ky j.g1.η.Kx -j.n1.Kt.Ky o1.Kt.Kx	-j.b0.η.Kz -j0.Kt.Kz -e1.η.Ky j.h1.η.Kx j.m1.Kt.Ky p1.Kt.Kx	-j.c0.η.Kz -k0.Kt.Kz -j.e1.η.Kx h1.η.Ky -m1.Kt.Kx -j.p1.Kt.Ky	-j.d0.η.Kz -L0.Kt.Kz -j.f1.η.Kx -g1.η.Ky -n1.Kt.Kx j.o1.Kt.Ky	-e0.Kt.Kz j.m0.η.Kz j.b1.Kt.Ky -c1.Kt.Kx j1.η.Ky j.k1.η.Kx	-f0.Kt.Kz j.n0.η.Kz -j.a1.Kt.Ky -d1.Kt.Kx -i1.η.Ky j.L1.η.Kx	-g0.Kt.Kz j.o0.η.Kz a1.Kt.Kx j.d1.Kt.Ky -j.i1.η.Kx L1.η.Ky	-h0.Kt.Kz j.p0.η.Kz b1.Kt.Kx -j.c1.Kt.Ky -j.j1.η.Kx -k1.η.Ky	a0.Kt.Kz -j.i0.η.Kz j.f1.Kt.Ky -g1.Kt.Kx n1.η.Ky j.o1.η.Kx	b0.Kt.Kz -j.j0.η.Kz -j.e1.Kt.Ky -h1.Kt.Kx -m1.η.Ky j.p1.η.Kx	c0.Kt.Kz -j.k0.η.Kz e1.Kt.Kx j.h1.Kt.Ky -j.m1.η.Kx p1.η.Ky	d0.Kt.Kz -j.L0.η.Kz f1.Kt.Kx -j.g1.Kt.Ky -j.n1.η.Kx -o1.η.Ky
ψ3(η²-κ²)	-b0.η.Ky j.c0.η.Kx j.j0.Kt.Ky k0.Kt.Kx -j.e1.η.Kz -m1.Kt.Kz	a0.η.Ky j.d0.η.Kx -j.i0.Kt.Ky L0.Kt.Kx -j.f1.η.Kz -n1.Kt.Kz	-j.a0.η.Kx -d0.η.Ky -i0.Kt.Kx j.L0.Kt.Ky -j.g1.η.Kz -o1.Kt.Kz	-j.b0.η.Kx c0.η.Ky -j0.Kt.Kx -j.k0.Kt.Ky -j.h1.η.Kz -p1.Kt.Kz	-f0.η.Ky j.g0.η.Kx j.n0.Kt.Ky o0.Kt.Kx j.a1.η.Kz i1.Kt.Kz	e0.η.Ky j.h0.η.Kx -j.m0.Kt.Ky p0.Kt.Kx j.b1.η.Kz j1.Kt.Kz	-e0.η.Kx -h0.η.Ky -m0.Kt.Kx j.p0.Kt.Ky j.c1.η.Kz k1.Kt.Kz	-j.f0.η.Kx g0.η.Ky -n0.Kt.Kx -j.o0.Kt.Ky j.d1.η.Kz L1.Kt.Kz	-j.b0.Kt.Ky -c0.Kt.Kx -j0.η.Ky j.k0.η.Kx e1.Kt.Kz -j.m1.η.Kz	j.a0.Kt.Ky -d0.Kt.Kx i0.η.Ky j.L0.η.Kx f1.Kt.Kz -j.n1.η.Kz	a0.Kt.Kx -j.d0.Kt.Ky -j.i0.η.Kx -L0.η.Ky g1.Kt.Kz -j.o1.η.Kz	b0.Kt.Kx j.c0.Kt.Ky -j.j0.η.Kx k0.η.Ky h1.Kt.Kz -j.p1.η.Kz	-j.f0.Kt.Ky -g0.Kt.Kx -n0.η.Ky j.o0.η.Kx -a1.Kt.Kz j.i1.η.Kz	j.e0.Kt.Ky -h0.Kt.Kx m0.η.Ky j.p0.η.Kx -b1.Kt.Kz j.j1.η.Kz	e0.Kt.Kx -j.h0.Kt.Ky -j.m0.η.Kx -p0.η.Ky -c1.Kt.Kz j.k1.η.Kz	f0.Kt.Kx j.g0.Kt.Ky -j.n0.η.Kx o0.η.Ky -d1.Kt.Kz j.L1.η.Kz

Tableau VII-1 : *Solutions stationnaires de l'équation de Dirac en ψ_2 et ψ_3 en fonction des modes excités en ψ_0 et ψ_1.*

La lecture de ce tableau s'effectue de la manière suivante : ψ_0 et ψ_1 étant choisis comme un mode stationnaire d'amplitude x_0 ou x_1 (x représente l'une quelconque de lettres comprises entre a et p), ψ_2 et ψ_3 sont déterminés en repérant dans chacune des colonnes les modes relatifs aux amplitudes x_0 ou x_1.

Les fonctions d'onde exprimées dans ces solutions sont sans dimension. D'un point de vue purement mathématique, ces fonctions d'ondes sont définies à une constante multiplicative près, ce qui permet de les exprimer dans différentes unités. Nous utiliserons cette propriété ultérieurement.

Quelques exemples sont proposés afin de se familiariser avec la lecture du tableau (VII-1). Pour une homogénéité de notation, on a posé $x_t = ct$ ce qui permet d'écrire le terme de phase temporelle sous la forme $\omega t = k_t x_t$.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = a_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) \\
&\psi_1 = 0 \\
&\psi_2 = a_0 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) - j a_0 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) \\
&\psi_3 = a_0 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) + j a_0 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) \\
&+ a_0 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) - j a_0 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t)
\end{aligned} \qquad \text{(VII-3)}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = 0 \\
&\psi_1 = a_1 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) \\
&\psi_2 = -a_1 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) - j a_1 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) \\
&+ a_1 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) - j a_1 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) \\
&\psi_3 = -a_1 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + j a_1 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)
\end{aligned} \qquad \text{(VII-4)}$$

Exemple 3 :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = b_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) \\
&\psi_1 = 0
\end{aligned} \qquad \text{(VII-5)}$$

$$\psi_2 = b_0 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) - jb_0 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = -b_0 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) - jb_0 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

$$+ b_0 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) - jb_0 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

Exemple 4 :

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_1 = b_1 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) \qquad \text{(VII-6)}$$

$$\psi_2 = b_1 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) + jb_1 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

$$+ b_1 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) - jb_1 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = -b_1 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + jb_1 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

Le second tableau (Tableau VII-2) a été élaboré en choisissant le spineur.χ et en calculant le spineur φ correspondant pour être solution du système de DIRAC. Comme dans le tableau précédent, le choix du spineur χ a été fait en affectant à la composante ψ_2 successivement tous les modes possibles tout en maintenant ψ_3=0, puis en affectant à la composante ψ_3 successivement tous les modes possibles tout en maintenant ψ_2=0.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
	SxSySzCt	SxCySzCt	CxSySzCt	CxCySzCt	SxSyCzCt	SxCyCzCt	CxSyCzCt	CxCyCzCt	SxSyzSt	SxCyzSt	CxSyzSt	CxCyzSt	SxSyCzSt	SxCyCzSt	CxSyCzSt	CxCyCzSt
ψ0	-j.e2.η.Kz m2.Kt.Kz -b3.η.Ky -j.c3.η.Kx -j.j3.Kt.Ky k3.Kt.Kx	-j.f2.η.Kz n2.Kt.Kz a3.η.Ky -j.d3.η.Kx j.i3.Kt.Ky L3.Kt.Kx	-j.g2.η.Kz o2.Kt.Kz j.a3.η.Kx -d3.η.Ky -i3.Kt.Kx -j.L3.Kt.Ky	-j.h2.η.Kz p2.Kt.Kz j.b3.η.Kx c3.η.Ky -j3.Kt.Kx j.k3.Kt.Ky	j.a2.η.Kz -i2.Kt.Kz -f3.η.Ky -j.g3.η.Kx -j.n3.Kt.Ky o3.Kt.Kx	j.b2.η.Kz -j2.Kt.Kz e3.η.Ky -j.h3.η.Kx j.m3.Kt.Ky p3.Kt.Kx	j.c2.η.Kz -k2.Kt.Kz j.e3.η.Kx -h3.η.Ky -m3.Kt.Kx -j.p3.Kt.Ky	j.d2.η.Kz -L2.Kt.Kz j.f3.η.Kx g3.η.Ky -n3.Kt.Kx j.o3.Kt.Ky	-e2.Kt.Kz -j.m2.η.Kz j.b3.Kt.Ky -c3.Kt.Kx -j3.η.Ky -j.k3.η.Kx	-f2.Kt.Kz -j.n2.η.Kz -j.a3.Kt.Ky -d3.Kt.Kx i3.η.Ky -j.L3.η.Kx	-g2.Kt.Kz -j.o2.η.Kz a3.Kt.Kx j.d3.Kt.Ky j.i3.η.Kx -L3.η.Ky	-h2.Kt.Kz -j.p2.η.Kz b3.Kt.Kx -j.c3.Kt.Ky j.j3.η.Kx k3.η.Ky	a2.Kt.Kz j.i2.η.Kz j.f3.Kt.Ky -g3.Kt.Kx -n3.η.Ky -j.o3.η.Kx	b2.Kt.Kz j.j2.η.Kz -j.e3.Kt.Ky -h3.Kt.Kx m3.η.Ky -j.p3.η.Kx	c2.Kt.Kz j.k2.η.Kz e3.Kt.Kx j.h3.Kt.Ky j.m3.η.Kx -p3.η.Ky	d2.Kt.Kz j.L2.η.Kz f3.Kt.Kx -j.g3.Kt.Ky j.n3.η.Kx o3.η.Ky
ψ1	b2.η.Ky -j.c2.η.Kx j.j2.Kt.Ky k2.Kt.Kx j.e3.η.Kz -m3.Kt.Kz	-a2.η.Ky -j.d2.η.Kx -j.i2.Kt.Ky L2.Kt.Kx j.f3.η.Kz -n3.Kt.Kz	j.a2.η.Kx d2.η.Ky -i2.Kt.Kx j.L2.Kt.Ky j.g3.η.Kz -o3.Kt.Kz	j.b2.η.Kx -c2.η.Ky -j2.Kt.Kx -j.k2.Kt.Ky j.h3.η.Kz -p3.Kt.Kz	f2.η.Ky -j.g2.η.Kx j.n2.Kt.Ky o2.Kt.Kx -j.a3.η.Kz i3.Kt.Kz	-e2.η.Ky -j.h2.η.Kx -j.m2.Kt.Ky p2.Kt.Kx -j.b3.η.Kz j3.Kt.Kz	j.e2.η.Kx h2.η.Ky -m2.Kt.Kx j.p2.Kt.Ky -j.c3.η.Kz k3.Kt.Kz	j.f2.η.Kx -g2.η.Ky -n2.Kt.Kx -j.o2.Kt.Ky -j.d3.η.Kz L3.Kt.Kz	-j.b2.Kt.Ky -c2.Kt.Kx j2.η.Ky -j.k2.η.Kx e3.Kt.Kz j.m3.η.Kz	j.a2.Kt.Ky -d2.Kt.Kx -i2.η.Ky -j.L2.η.Kx f3.Kt.Kz j.n3.η.Kz	a2.Kt.Kx -j.d2.Kt.Ky j.i2.η.Kx L2.η.Ky g3.Kt.Kz j.o3.η.Kz	b2.Kt.Kx j.c2.Kt.Ky j.j2.η.Kx -k2.η.Ky h3.Kt.Kz j.p3.η.Kz	-j.f2.Kt.Ky -g2.Kt.Kx n2.η.Ky -j.o2.η.Kx -a3.Kt.Kz -j.i3.η.Kz	j.e2.Kt.Ky -h2.Kt.Kx -m2.η.Ky -j.p2.η.Kx -b3.Kt.Kz -j.j3.η.Kz	e2.Kt.Kx -j.h2.Kt.Ky j.m2.η.Kx p2.η.Ky -c3.Kt.Kz -j.k3.η.Kz	f2.Kt.Kx j.g2.Kt.Ky j.n2.η.Kx -o2.η.Ky -d3.Kt.Kz -j.L3.η.Kz
$\psi 2(\eta^2-k^2)$	a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2	i2	j2	k2	L2	m2	n2	o2	p2
$\psi 3(\eta^2-k^2)$	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3	i3	j3	k3	L3	m3	n3	o3	p3

Tableau VII-2 : *Solutions stationnaires de l'équation de Dirac en ψ_0 et ψ_1 en fonction des modes excités en ψ_2 et ψ_3.*

Comme précédemment, quelques exemples sont proposés afin de se familiariser avec la lecture du tableau (VII-2). Il est rappelé qu'on a adopté la notation $x_t = ct$ ce qui permet d'écrire le terme de phase temporelle $\omega t = k_t x_t$.

Exemple 5 :

$$\psi_0 = a_2 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + ja_2 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_1 = -a_2 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) + ja_2 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

$$+ a_2 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) + ja_2 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = a_2 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = 0 \qquad \text{(VII-7)}$$

Exemple 6 :

$$\psi_0 = a_3 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) - ja_3 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

$$+ a_3 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) + ja_3 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_1 = -a_3 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) - ja_3 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = 0$$

$$\psi_3 = a_3 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) \qquad \text{(VII-8)}$$

Exemple 7 :

$$\psi_0 = -h_2 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) - jh_2 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_1 = h_2 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) - jh_2 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

$$- h_2 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) - jh_2 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = h_2 \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = 0 \qquad \text{(VII-9)}$$

Exemple 8 :

$$\psi_0 = -h_3 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + jh_3 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$- h_3 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) - jh_3 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$
$$\psi_1 = h_3 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) + jh_3 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = 0$$
$$\psi_3 = h_3 \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) \qquad \text{(VII-10)}$$

Toute combinaison linéaire des solutions au système de Dirac est encore solution au système. On peut ainsi construire d'autres solutions, dont quelques exemples sont donnés ci-après.

II – Solutions propagatives

Une onde qui se propage peut être vue comme la somme de deux ondes stationnaires, ce qui permet d'élaborer des solutions propagatives à partir des tableaux précédents (Tableau VI – 1et 2).

On peut par exemple choisir les modes suivants, dans lesquels on rappelle la notation de la phase temporelle $\omega t = k_t x_t$:

$$\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) \qquad \text{(VII-11)}$$

ce qui donne après mise en facteur :

$$\cos(k_x x)\cos(k_y y)\{\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + \sin(k_z z)\sin(k_t x_t)\} \qquad \text{(VII-12)}$$

une onde stationnaire en x, y, et propagative suivant l'axe z :

$$\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_t x_t - k_z z) \qquad \text{(VII-13)}$$

La démarche est la suivante : on écrit la solution correspondant à chacun des modes que l'on veut sommer en (VII-11), ce qui donne pour le premier mode :

$$\psi_0 = h_0 \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$
$$\psi_1 = 0 \qquad \text{(VII-14)}$$
$$\psi_2 = jh_0 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) - h_0 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$\psi_3 = -h_0 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) - jh_0 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$- h_0 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + jh_0 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

et pour le second :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = l_0 \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) \\
&\psi_1 = 0 \\
&\psi_2 = -jl_0 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) - l_0 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) \\
&\psi_3 = -l_0 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t) + jl_0 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) \\
&+ l_0 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) + jl_0 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)
\end{aligned} \qquad \text{(VII-15)}$$

On pose ensuite $h_0 = l_0 = A$, on effectue la somme terme à terme des solutions (VII-14) et (VII-15), pour obtenir après réduction la solution propagative suivant z :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = A\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_t x_t - k_z z) \\
&\psi_1 = 0 \\
&\psi_2 = jA \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_t x_t - k_z z) - A \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_t x_t - k_z z) \\
&\psi_3 = -A \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_t x_t - k_z z) + jA \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_t x_t - k_z z) \\
&+ A \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_t x_t - k_z z) + jA \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_t x_t - k_z z)
\end{aligned} \qquad \text{(VII-16)}$$

En réitérant ce processus suivant les deux autres directions, on peut élaborer des solutions propagatives en x, y, z dont un exemple est donné ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = \eta\cos(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) - jk_t \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \\
&\psi_1 = 0 \\
&\psi_2 = -jk_z \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \\
&\psi_3 = k_y \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) - jk_x \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z)
\end{aligned} \qquad \text{(VII-17)}$$

III – Autres formes des solutions

Les solutions de base exprimées dans les tableaux 1 et 2 ci-dessus peuvent également être combinées pour obtenir des solutions dont la forme est un peu différente. Deux exemples sont proposés.

Dans le premier exemple, deux modes de la fonction d'onde ψ_1 sont excités, l'un pondéré par (-1), et l'autre pondéré par le terme $(j\eta/k_t)$:

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_1 = -\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + j\frac{\eta}{k_t}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = j\frac{k_y}{k_t}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + \frac{k_x}{k_t}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = \frac{k_z}{k_t}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

(VII-18)

Dans le second exemple, ce sont deux modes de la fonction d'onde ψ_2 qui sont excités, l'un pondéré par (-1), et l'autre pondéré par le terme $(j\eta/k_t)$:

$$\psi_0 = -\frac{k_z}{k_t}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_1 = \frac{k_x}{k_t}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) + j\frac{k_y}{k_t}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = j\frac{\eta}{k_t}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) - \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = 0$$

(VII-19)

VIII

La dualité onde-corpuscule

Lorsque la particule se présente sous la forme de matière, elle obéit à l'équation de conservation de l'énergie de la relativité restreinte :

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad \text{(VIII-1)}$$

Lorsque la particule se présente sous forme ondulatoire, son énergie totale et son vecteur d'onde sont tels que :

$$E = \hbar\omega \qquad p_x = \hbar k_x \qquad p_y = \hbar k_y \qquad p_z = \hbar k_z \qquad \text{(VIII-2)}$$

En introduisant ces relations dans (VIII-1), on en déduit que les grandeurs ondulatoires doivent respecter la relation suivante pour assurer la compatibilité avec la conservation de l'énergie imposée par la relativité restreinte :

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)c^2 + m_0^2c^4 \qquad \text{(VIII-3)}$$

Soit encore :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2} \qquad \text{(VIII-4)}$$

On retrouve exactement la relation exigée pour obtenir des solutions au système de DIRAC.

On en déduit que cette relation, associée aux relations (VIII-2) exprime la conservation de l'énergie, que la particule se présente sous la forme de matière ou sous la forme ondulatoire.

La relation quantique de conservation de l'énergie :

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2c^2\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) + \left(m_0c^2\right)^2 \qquad \text{(VIII-5)}$$

va jouer un rôle fondamental dans l'analyse des solutions stationnaires qui va être proposée.

Comme pour la relation (VIII-1) issue de la relativité restreinte, nous distinguons trois types d'énergie :

$\hbar\omega$: Energie ondulatoire en référence à la pulsation ω qui apparaît dans cette expression.
$\hbar ck_x, \hbar ck_y, \hbar ck_z$: Energie impulsionnelle suivant les directions x, y, z.
m_0c^2 : Energie de masse

Parmi les différentes formes de solution, nous en choisissons une qui permet une interprétation directe du rôle de ces énergies dans les fonctions d'onde du bi-spineur de DIRAC.

Nos prenons comme point de départ l'une des solutions exprimées au chapitre précédent :

$$\psi_0 = 0$$
$$\psi_1 = -\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + j\frac{\eta}{k_t}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$\psi_2 = j\frac{k_y}{k_t}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + \frac{k_x}{k_t}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$\psi_3 = \frac{k_z}{k_t}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

(VIII-6)

Dans cette solution, les fonctions d'onde sont sans unité. Mais nous avons, d'un point de vue mathématique, toute liberté de multiplier l'ensemble de ces fonctions d'ondes par une constante, et celle qui semble indiquée dans le cas présent est égale à k_t pour obtenir :

$$\psi_0 = 0$$
$$\psi_1 = -k_t\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + j\eta\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$\psi_2 = jk_y\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + k_x\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$\psi_3 = k_z\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

(VIII-7)

En substituant l'expression de $\eta = \frac{m_0c}{\hbar}$, et en multipliant à nouveau toutes les fonctions d'onde par la quantité constante $\hbar c$, on obtient :

$$\psi_0 = 0$$
$$\psi_1 = -\hbar\omega\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + jm_0c^2\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$\psi_2 = j\hbar ck_y\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + \hbar ck_x\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$\psi_3 = \hbar ck_z\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

(VIII-8)

Chaque fonction d'onde a désormais la dimension d'une énergie, et on fait le constat que dans cette solution, chaque terme contient une énergie de nature différente, si on considère que deux énergies impulsionnelles dans des directions orthogonales sont nécessairement différenciées.

Si on se place en un point où l'énergie de masse est maximum, on doit avoir en ce point $|\sin(k_x.x)| = |\cos(k_y.y)| = |\cos(k_z.z)| = 1$, ce qui revient à poser $\cos(k_x.x) = \sin(k_y.y) = \sin(k_z.z) = 0$. La solution se présente alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = 0\\
&\psi_1 = -\hbar\omega\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + jm_0c^2\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)\\
&\psi_2 = 0\\
&\psi_3 = 0
\end{aligned}$$

(VIII-9)

La fonction d'onde ψ_1 mérite une attention particulière : à l'endroit où l'énergie de masse est maximum, elle peut se mettre sous la forme :

$$\psi_1 = \left\{-\hbar\omega\cos(k_t x_t) + jm_0c^2\sin(k_t x_t)\right\} \qquad \text{(VIII-10)}$$

où on reconnaît l'énergie ondulatoire $\hbar\omega$ et l'énergie de masse m_0c^2. Mais le résultat remarquable que nous apprend la relation (VIII-9) est que ces énergies évoluent en quadrature dans le temps, et que lorsque l'une est maximale, l'autre est nulle.

En d'autres termes, lorsque la particule se présente sous sa forme massive totale, elle ne présente aucune énergie ondulatoire, et lorsqu'elle se présente sous sa forme ondulatoire totale, elle ne présente aucune énergie massique. L'énergie présente dans la particule alterne donc entre les formes massiques et ondulatoires à la pulsation ω définie par l'équation de conservation de l'énergie quantique qui pour une énergie impulsionnelle nulle s'écrit simplement :

$$\hbar^2\omega^2 = \left(m_0c^2\right)^2 \qquad \text{(VIII-11)}$$

On peut supposer que c'est dans cet échange permanent d'énergie que réside le mystère de la dualité onde-corpuscule qui apparaît, au vu de la relation (VIII-10), tantôt sous forme de masse, tantôt sous forme ondulatoire.

Dans le cas général, c'est toujours la fonction d'onde ψ_1 qui porte ces échanges d'énergie. Les termes qui portent l'énergie impulsionnelle sont ceux du deuxième spineur, c'est à dire celui qui représente le comportement de l'antiparticule dans l'interprétation de Dirac :

$$\begin{aligned}
&\psi_2 = j\hbar ck_y\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + \hbar ck_x\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)\\
&\psi_3 = \hbar ck_z\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)
\end{aligned}$$

(VIII-12)

Il est rappelé que ces échanges d'énergie s'effectuent dans le respect de la relation de conservation de l'énergie :

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2c^2\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) + \left(m_0c^2\right)^2 \qquad \text{(VIII-13)}$$

Le fait que l'énergie impulsionnelle soit portée par le second spineur ne semble pouvoir être interprété qu'en imaginant que l'anti particule correspond à la situation dans laquelle le second spineur porte les échanges entre énergie de masse et énergie ondulatoire. Sur la base de cette hypothèse, celle des deux qui est détectée lors d'une expérience est celle dont le spineur contient l'énergie de masse dans la solution de DIRAC.

La pulsation minimum ω_0 à laquelle s'effectuent ces échanges d'énergies est donnée par la relation :

$$\omega_0 = \frac{m_0 c^2}{\hbar} \qquad \text{(VIII-14)}$$

L'application numérique pour un électron donne :

$$\omega_0 = \frac{m_0 c^2}{\hbar} = \frac{(9{,}11.10^{-31})(3.10^8)^2}{1{,}05.10^{-34}} \approx 7{,}8.10^{20}\,\text{rd/s} \qquad \text{(VIII-15)}$$

La très grande valeur de cette pulsation pourrait expliquer la grande difficulté à la mettre en évidence du point de vue expérimental.

IX

Les courants de DIRAC(1)

L'expression de ces courants a été donnée dans un des chapitres précédents. Elle est rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned}
J^0 &= \psi_0^*\psi_0 + \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 \\
J^1 &= \psi_3^*\psi_0 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_0^*\psi_3 \\
J^2 &= j\psi_3^*\psi_0 - j\psi_2^*\psi_1 + j\psi_1^*\psi_2 - j\psi_0^*\psi_3 \\
J^3 &= \psi_2^*\psi_0 - \psi_3^*\psi_1 + \psi_0^*\psi_2 - \psi_1^*\psi_3
\end{aligned} \qquad \text{(IX-1)}$$

Ces courants vérifient l'équation de conservation locale :

$$\frac{\partial J^0}{\partial(ct)} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = 0 \qquad \text{(IX-2)}$$

I – Les courants de DIRAC pour une solution stationnaire

Un calcul concret de ces courants va être effectué pour une solution stationnaire. Nous choisissons pour cela la solution examinée dans le chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0 \\
\psi_1 &= -k_t \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + j\eta \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) \\
\psi_2 &= jk_y \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + k_x \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) \\
\psi_3 &= k_z \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)
\end{aligned} \qquad \text{(IX-3)}$$

Les calculs sont un peu longs, mais sans difficultés. On obtient finalement les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
J^0 &= k_t^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\cos^2(k_t x_t) + \eta^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\
&+ k_y^2 \sin^2(k_x x)\sin^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) + k_x^2 \cos^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\
&+ k_z^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\sin^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t)
\end{aligned} \qquad \text{(IX-4)}$$

$$J^1 = \begin{pmatrix} \eta k_y \sin^2(k_x x)\sin(2k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\ -k_x k_t \sin(2k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin(k_t x_t)\cos(k_t x_t) \end{pmatrix} \qquad \text{(IX-5)}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} k_y k_t \sin^2(k_x x)\sin(2k_y y)\cos^2(k_z z)\sin(k_t x_t)\cos(k_t x_t) \\ k_x \eta \sin(2k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \end{pmatrix} \qquad \text{(IX-6)}$$

$$J^3 = k_t k_z \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\sin(2k_z z)\sin(k_t x_t)\cos(k_t x_t) \qquad \text{(IX-7)}$$

On peut alors vérifier l'équation de conservation (IX-2). On obtient :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = k_t \sin(2k_t x_t)\sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\left(-k_t^2 + \eta^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \qquad \text{(IX-8)}$$

ce qui, compte tenu de la relation de conservation de l'énergie :

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 \qquad \text{(IX-9)}$$

conduit bien au résultat attendu :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = 0 \qquad \text{(IX-10)}$$

Nous proposons de reconsidérer les résultats ci-dessus dans une approche plus physique. Cela conduit à multiplier les fonctions d'onde par la quantité $\hbar c$ et les courants de DIRAC par la quantité $(\hbar c)^2$ Dans cette description, la fonction d'onde se présente sous la forme :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0 \\
\psi_1 &= -\hbar\omega \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + j m_0 c^2 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) \\
\psi_2 &= j\hbar c k_y \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + \hbar c k_x \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) \\
\psi_3 &= \hbar c k_z \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)
\end{aligned} \qquad \text{(IX-11)}$$

D'un point de vue mathématique, on sait que cette fonction d'onde est définie à une constante multiplicative près, que nous appellerons C, si bien qu'on peut poser dans une forme plus générale :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0 \\
\psi_1 &= C\left\{-\hbar\omega \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + j m_0 c^2 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)\right\} \\
\psi_2 &= C\left\{j\hbar c k_y \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + \hbar c k_x \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)\right\} \\
\psi_3 &= C\left\{\hbar c k_z \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(IX-12)}$$

La constante C doit permettre :

1 – De donner à la quantité $\psi\psi^*$ la dimension d'une densité volumique d'énergie.

2 – De garantir que la totalité de l'énergie relative à la particule est confinée dans un parallélépipède rectangle dont la dimension suivant x est comprise entre X_1 et X_2, suivant y entre Y_1 et Y_2,et suivant z entre Z_1 et Z_2, si bien que son volume V est égal à :

$$V = (X_2 - X_1)\,(Y_2 - Y_1)\,(Z_2 - Z_1) \qquad \text{(IX-13)}$$

Le terme J^0 des courants de DIRAC représente la densité volumique d'énergie totale comprise dans la boite. Elle a pour expression :

$$\begin{aligned} J^0 &= C^2(\hbar\omega)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\cos^2(k_t x_t) \\ &+ C^2(m_0 c^2)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\ &+ C^2(\hbar c k_y)^2 \sin^2(k_x x)\sin^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\ &+ C^2(\hbar c k_x)^2 \cos^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\ &+ C^2(\hbar c k_z)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\sin^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \end{aligned} \qquad \text{(IX-14)}$$

Pour obtenir l'énergie totale E contenue dans le parallélépipède, nous devons intégrer sur le volume de ce dernier, soit donc :

$$E = \iiint_V \left\{ \begin{aligned} & C^2(\hbar\omega)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\cos^2(k_t x_t) \\ & + C^2(m_0 c^2)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\ & + C^2(\hbar c k_y)^2 \sin^2(k_x x)\sin^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\ & + C^2(\hbar c k_x)^2 \cos^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\ & + C^2(\hbar c k_z)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\sin^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \end{aligned} \right\} dx\,dy\,dz \qquad \text{(IX-15)}$$

Nous ferons l'hypothèse classique que des modes stationnaires s'installent dans des conditions telles que les dimensions de la boite sont des multiples de la demi-longueur d'onde suivant chacune des direction x, y, z.

$$\begin{aligned} (X_2 - X_1) &= n\frac{\lambda_x}{2} = n\frac{\pi}{k_x} \\ (Y_2 - Y_1) &= m\frac{\lambda_y}{2} = m\frac{\pi}{k_y} \\ (Z_2 - Z_1) &= p\frac{\lambda_z}{2} = p\frac{\pi}{k_z} \end{aligned} \qquad \text{(IX-16)}$$

où m, n, p sont des entiers relatifs. Dans ces conditions, on a la propriété suivante :

$$\int_{X_1}^{X_2} \sin^2(k_x x)dx = \int_{X_1}^{X_2} \cos^2(k_x x)dx = \frac{X_2 - X_1}{2}$$
$$\int_{Y_1}^{Y_2} \sin^2(k_y y)dy = \int_{Y_1}^{Y_2} \cos^2(k_y y)dy = \frac{Y_2 - Y_1}{2} \qquad \text{(IX-17)}$$
$$\int_{Z_1}^{Z_2} \sin^2(k_z z)dz = \int_{Z_1}^{Z_2} \cos^2(k_z z)dz = \frac{Z_2 - Z_1}{2}$$

et l'énergie totale calculée suivant la relation (IX-15) se présente sous la forme :

$$E = C^2 \frac{(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)(Z_2 - Z_1)}{8} \left\{ \begin{array}{l} (\hbar\omega)^2 \cos^2(k_t x_t) \\ + (m_0 c^2)^2 \sin^2(k_t x_t) \\ + (\hbar c k_y)^2 \sin^2(k_t x_t) \\ + (\hbar c k_x)^2 \sin^2(k_t x_t) \\ + (\hbar c k_z)^2 \sin^2(k_t x_t) \end{array} \right\} \qquad \text{(IX-18)}$$

soit encore :

$$E = C^2 \frac{V}{8} \left\{ (\hbar\omega)^2 \cos^2(k_t x_t) + \left\{ (m_0 c^2)^2 + (\hbar c k_y)^2 + (\hbar c k_x)^2 + (\hbar c k_z)^2 \right\} \sin^2(k_t x_t) \right\} \qquad \text{(IX-19)}$$

De la relation :

$$(\hbar\omega)^2 = (m_0 c^2)^2 + (\hbar c k_y)^2 + (\hbar c k_x)^2 + (\hbar c k_z)^2 \qquad \text{(IX-20)}$$

on déduit que l'énergie totale se présente dans la cavité soit sous forme ondulatoire, soit sous la forme d'une combinaison d'énergie de masse et d'énergie impulsionnelle. Ces échanges d'énergie se font en quadrature dans le temps, comme indiqué dans la relation (IX-19) : lorsque l'une est maximale, l'autre est nulle et réciproquement.

Des relations (IX-19) et (IX-20), on déduit :

$$E = C^2 \frac{V}{8} (\hbar\omega)^2 \qquad \text{(IX-21)}$$

et puisque l'énergie totale E est égale à $\hbar\omega$, cela impose à la constante C la valeur :

$$C = \sqrt{\frac{8}{(\hbar\omega)V}} \qquad \text{(IX-22)}$$

Après prise en compte de cette constante multiplicative, les courants de DIRAC deviennent homogènes à une densité volumique d'énergie, et l'énergie totale est normalisée à l'énergie de la particule.

La quadridivergence :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t}+\frac{\partial J^1}{\partial x}+\frac{\partial J^2}{\partial y}+\frac{\partial J^3}{\partial z}=0 \qquad \text{(IX-23)}$$

s'interprète de la même manière qu'en électromagnétisme (théorème de POYNTING) ou en relativité générale. Elle exprime le fait que s'il y a une variation d'énergie dans un élément de volume dV=dxdydz pendant un temps dt, c'est que cette variation a traversé la frontière définie par la surface fermée délimitant l'élément de volume.

II – Les courants de DIRAC pour une solution propagative

Nous choisissons comme exemple une solution propagative en x, y, z :

$$\begin{aligned}
&\psi_0=\eta\cos(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)-jk_t\sin(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)\\
&\psi_1=0\\
&\psi_2=-jk_z\sin(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)\\
&\psi_3=k_y\sin(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)-jk_x\sin(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)
\end{aligned} \qquad \text{(IX-24)}$$

Les calculs explicites donnent les courants de DIRAC suivant :

$$\begin{aligned}
J^0&=\eta^2\cos^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)+k_t^2\sin^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)\\
&+k_x^2\sin^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)+k_y^2\sin^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)\\
&+k_z^2\sin^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)
\end{aligned} \qquad \text{(IX-25)}$$

$$\begin{aligned}
J^1&=2k_y\eta\sin(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)\cos(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)\\
&+2k_x k_t\sin^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)
\end{aligned} \qquad \text{(IX-26)}$$

$$\begin{aligned}
J^2&=-2k_x\sin(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)\cos(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)+\\
&\left(2k_y k_t\sin^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)\right)
\end{aligned} \qquad \text{(IX-27)}$$

$$J^3=\left(2k_t k_z\sin^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)\right) \qquad \text{(IX-28)}$$

Le courant J^0 présente un intérêt particulier puisqu'il contient, à une constante multiplicative près, l'énergie totale de la particule. Il peut se mettre sous la forme :

$$J^0=\eta^2\cos^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z)+\left(k_t^2+k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\sin^2(k_t x_t-k_x x-k_y y-k_z z) \qquad \text{(IX-29)}$$

Après multiplication par la constante $(\hbar c)^2$ et normalisation par la constante C^2 définie au paragraphe précédent, il représente la densité volumique totale attachée à la particule.

En utilisant la relation de conservation de l'énergie :

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 \qquad \text{(IX-30)}$$

il devient :

$$J^0 = k_t^2 - \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\left\{\cos^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) - \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z)\right\} \qquad \text{(IX-31)}$$

soit encore :

$$J^0 = k_t^2 - \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\cos\left[2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z)\right] \qquad \text{(IX-32)}$$

La densité volumique d'énergie totale est donnée par le terme $C^2\left(\hbar c k_t\right)^2$. Elle fluctue autour de cette valeur avec une moyenne spatiale et temporelle de variation qui est nulle.

L'équation de conservation locale de l'énergie :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = 0 \qquad \text{(IX-33)}$$

donne le résultat suivant :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = \left(k_t^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 - \eta^2\right)\sin\left[2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z)\right] = 0 \qquad \text{(IX-34)}$$

III – Les courants de DIRAC uniformes

Nous désignerons par courants uniformes, des courants qui ne dépendent ni du temps, ni de l'espace. Il existe des solutions exactes à l'équation de DIRAC qui ont cette propriété, dont un exemple est proposé ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= k_z \exp\left\{j\left(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z\right)\right\} \\
\psi_1 &= k_x \exp\left\{j\left(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z\right)\right\} + j k_y \exp\left\{j\left(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z\right)\right\} \\
\psi_2 &= \left(k_t - \eta\right)\exp\left\{j\left(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z\right)\right\} \\
\psi_3 &= 0
\end{aligned} \qquad \text{(IX-35)}$$

Parce que les produits des fonctions d'onde par les fonctions d'ondes conjuguées éliminent les exponentielles, on trouve :

$$\begin{aligned}
J^0 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \left(k_t - \eta\right)^2 \\
J^1 &= 2\left(k_t - \eta\right)k_x \\
J^2 &= 2\left(k_t - \eta\right)k_y \\
J^3 &= 2\left(k_t - \eta\right)k_z
\end{aligned} \qquad \text{(IX-36)}$$

On observe que la densité volumique d'énergie totale $C^2(\hbar c)^2 J^0$ se présente sous la forme d'une combinaison de toutes les énergies présentes dans la cavité, et qu'elle est uniforme, c'est à dire indépendante du point de l'espace et de l'instant considérés.

Cette excitation de certains modes rendant la densité d'énergie uniforme au sein de la particule ne peut se présenter que dans des conditions bien particulières. On sait en effet que la densité totale d'énergie au sein de la particule est égale à $C^2(\hbar c k_t)^2$, d'où la relation :

$$J^0 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + (\eta - k_t)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 + k_t^2 - 2\eta k_t = k_t^2 \qquad \text{(IX-37)}$$

En introduisant la relation de conservation de l'énergie, on en déduit :

$$2k_t^2 - 2\eta k_t = k_t^2 \qquad \text{(IX-38)}$$

soit encore en substituant les expressions de k_t et η :

$$\eta = \frac{m_0 c}{\hbar} = \frac{\omega}{2c}$$

La condition d'obtention d'une densité uniforme s'obtient donc par la relation :

$$\hbar c k_t = 2m_0 c^2 \qquad \text{(IX-39)}$$

Cette relation exprime le fait qu'il faut une énergie totale interne à la particule égale à deux fois son énergie de masse pour que l'installation de tels modes soit possible.

On peut relier cette observation au fait que tous les modes exprimés dans la solution (IX-35) expriment des échanges d'énergie en quadrature dans le temps et l'espace entre des énergies positives et négatives repérées par le facteur j=racine(-1), l'antiparticule ne pouvant apparaître par sa masse que si l'énergie totale de la particule est au moins égale à deux fois son énergie de masse.

X

Le principe d'indétermination

Ce principe, énoncé par HEISENBERG, lors des balbutiements de la mécanique quantique, a été popularisé sous l'expression : « Il est impossible de connaître à la fois la position et la quantité de mouvement d'une particule ». D'un point de vue physique, il est tout entier contenu dans une relation qui relie l'incertitude sur la position Δx et l'incertitude sur la quantité de mouvement Δp_x d'une particule du monde quantique :

$$\Delta x.\Delta p_x > \frac{\hbar}{2} \qquad \text{(X-1)}$$

On peut en déduire une autre formulation en notant que le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire que la variation de la quantité de mouvement Δp_x se fait par le biais d'une action extérieure F_x appelée force, pendant une durée Δt :

$$\Delta p_x = F_x.\Delta t \qquad \text{(X-2)}$$

On obtient, en notant que l'énergie peut être vue comme le produit d'une force par un déplacement :

$$\Delta x.\Delta p_x = \Delta x.F_x.\Delta t = \Delta E.\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \text{(X-3)}$$

Ce principe a des fondements théoriques solides, basés sur le fait que les opérateurs position et quantité de mouvement de la mécanique quantique ne commutent pas. Puisque le résultat de la mesure de position et de quantité de mouvement, faite au même endroit et au même instant, dépend de l'ordre dans lequel on effectue cette mesure, cela indique qu'il existe nécessairement une incertitude sur le résultat de ces mesures.

Si on considère maintenant une solution stationnaire exacte de l'équation de DIRAC telle que celle qui a été choisie comme exemple dans les chapitres précédents :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0 \\
\psi_1 &= C\left\{-\hbar\omega\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + jm_0c^2\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)\right\} \\
\psi_2 &= C\left\{j\hbar ck_y\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + \hbar ck_x\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)\right\} \\
\psi_3 &= C\left\{\hbar ck_z\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(X-4)}$$

il y a une question qui vient naturellement à l'esprit. La solution (X-4) ci-dessus est parfaitement déterministe : chaque type d'énergie est connu, en théorie, avec une précision infinie pour une position (x,y,z) et un instant (t) donnés. Cet état de fait semble en contradiction avec le principe d'indétermination de HEISENBERG.

Pour lever cette contradiction, il nous faut en premier lieu admettre sous forme de postulat la conclusion suivante : un observateur ne peut obtenir des informations en provenance d'un système physique que s'il échange de l'énergie avec ce système. Un corolaire de ce postulat est que deux systèmes qui n'échangent pas d'énergie s'ignorent et n'interagissent pas : ils peuvent se dérouler simultanément et au même endroit.

Sur la base de ce postulat, nous examinons, pour la solution (X-4) ci-dessus, la densité volumique d'énergie présente dans la particule qui a été calculée au chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
J^0 &= C^2(\hbar\omega)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\cos^2(k_t x_t) \\
&+ C^2(m_0 c^2)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\
&+ C^2(\hbar c k_y)^2 \sin^2(k_x x)\sin^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\
&+ C^2(\hbar c k_x)^2 \cos^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t) \\
&+ C^2(\hbar c k_z)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\sin^2(k_z z)\sin^2(k_t x_t)
\end{aligned} \qquad \text{(X-5)}$$

On y retrouve les différents types d'énergie évoquées dans les chapitres précédents :

- l'énergie totale ou énergie ondulatoire : $\hbar\omega$
- l'énergie de masse : m_0c^2
- les énergies impulsionnelles : $\hbar c k_x, \hbar c k_y, \hbar c k_z$

Plaçons nous en un point de l'espace (x,y,z) où la densité volumique de l'énergie de masse de la particule est maximum. Supposons que la position où cette énergie de masse est maximum puisse être déterminée avec toute la précision que l'on souhaite. Pour que cette condition soit réalisée, les coordonnées x,y,z doivent vérifier :

$$\sin^2(k_x x) = \cos^2(k_y y) = \cos^2(k_z z) = 1 \qquad \text{(X-6)}$$

ce qui impose :

$$\cos^2(k_x x) = \sin^2(k_y y) = \sin^2(k_z z) = 0 \qquad \text{(X-7)}$$

Il apparaît alors le résultat remarquable suivant : toutes les densités d'énergies impulsionnelles présentes dans la particule sont nulles à cet endroit.

En d'autres termes, si on se place en un point où on peut, par un échange d'énergie avec l'énergie de masse, connaître avec précision la position où cette énergie est maximum, on ne peut obtenir aucune information sur son impulsion en ce point car son énergie impulsionnelle est nulle à cet endroit.

La réciproque s'exprime de la manière suivante : si on se place à un endroit où l'énergie impulsionnelle suivant x est maximum, alors l'énergie de masse et les énergies impulsionnelles suivant y et suivant z sont nulles. Un propriété analogue est vérifiée par permutation circulaire sur les variables x,y,z.

Ces observations permettent de comprendre comment une théorie complètement déterministe construite sur des solutions stationnaires exactes à l'équation de DIRAC reste compatible avec le principe d'indétermination de HEISENBERG. Ce dernier repose sur l'hypothèse que les mesures de position et vitesse sont effectuées ponctuellement au même endroit, alors que l'approche énergétique montre que les énergies correspondant à ces deux grandeurs sont décalées dans l'espace. Si cette approche se révèle correcte, on peut conclure qu'il est possible de connaître, la position et la vitesse d'une particule avec une précision arbitraire, à condition de se placer à l'endroit où ces caractéristiques sont présentes dans la particule.

La seconde relation d'indétermination (X-3) qui porte sur l'énergie et le temps :

$$\Delta E.\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \text{(X-8)}$$

donne lieu à une interprétation un peu différente. Elle concerne l'énergie totale ou énergie ondulatoire, dont la densité volumique est donnée en (X-5) :

$$C^2(\hbar\omega)^2 \sin^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\cos^2(k_z z)\cos^2(k_t x_t) \qquad \text{(X-9)}$$

Les points de l'espace de coordonnées (x,y,z) où cette énergie est maximum sont les mêmes que ceux où l'énergie de masse est maximum, ils obéissent donc aux relations (X-6), et la densité volumique de l'énergie ondulatoire s'écrit en ces points :

$$C^2(\hbar\omega)^2 \cos^2(k_t x_t) \qquad \text{(X-10)}$$

Il apparaît que la mesure de cette énergie dépend de l'instant à laquelle elle est effectuée, de la même manière que précédemment les énergies impulsionnelles ou l'énergie de masse dépendaient de l'endroit où elles étaient mesurées (mais pas de l'instant), d'où des relations d'incertitude analogues.

XI

La longueur d'onde de DE BROGLIE

Ce chapitre vise à montrer que les solutions stationnaires de l'équation de DIRAC sont entièrement compatibles avec les conclusions de Louis DE BROGLIE concernant la longueur d'onde associée au mouvement de chaque particule. Il permet de faire le lien entre la description ondulatoire de la mécanique quantique et la description relativiste du mouvement d'une particule.

La particule est supposée avoir une trajectoire rectiligne suivant l'axe Oz à vitesse constante v. Pour autant, elle est susceptible de posséder des modes stationnaires suivant Ox et Oy. On se retrouve dans une situation analogue bien connue en électromagnétisme, qui est celle d'une onde guidée dans un guide d'onde rectangulaire parfaitement conducteur. Les éléments présentés dans ce chapitre ont donc une grande analogie avec ceux qui concernent la propagation guidée.

La relation de conservation de l'énergie impose, à une constante multiplicative près :

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad \text{(XI-1)}$$

En supposant que la particule se déplace suivant Oz, il est naturel d'examiner la pulsation spatiale k_z déduite de (XI-1) :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(k_x^2 + k_y^2 + \eta^2\right) \qquad \text{(XI-2)}$$

On désigne par pulsation de coupure temporelle, la pulsation ω_c telle que :

$$\omega_c^2 = \left(k_x^2 + k_y^2 + \eta^2\right)c^2 \qquad \text{(XI-3)}$$

Ce qui permet d'exprimer la pulsation spatiale k_z sous la forme :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \qquad \text{(XI-4)}$$

dont la courbe représentative $k_z = f(\omega)$ à l'allure suivante :

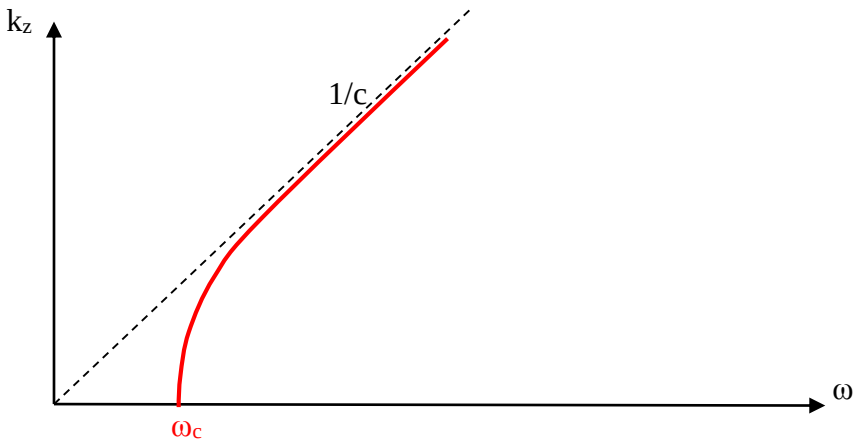


Figure (XI-1) : *représentation de la pulsation spatiale en fonction de la pulsation temporelle*

Pour une onde qui sera désignée par onde de phase, et qui se propage avec une phase :

$$\varphi = \omega t - k_z z \qquad \text{(XI-5)}$$

on définit la vitesse de phase comme étant la vitesse de glissement de la phase de l'onde soit :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_z} \qquad \text{(XI-6)}$$

On peut exprimer cette vitesse de phase en fonction de la pulsation de coupure ω_c définie ci-dessus, au moyen de la relation (XI-4) :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \qquad \text{(XI-7)}$$

Puisque $\omega > \omega_c$, cette vitesse est supérieure à la vitesse de la lumière. Elle a une réalité physique puisqu'elle représente la vitesse de glissement de la phase, mais elle ne peut représenter la vitesse de déplacement de l'énergie qui doit toujours rester inférieure à c.

Pour ce dernier déplacement, on définit la vitesse de propagation de l'énergie, ou vitesse de groupe v_g par la dérivée de la pulsation temporelle par rapport à la pulsation spatiale :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} \qquad \text{(XI-8)}$$

On note sur la figure (XI-1) que la vitesse de propagation de l'énergie est nulle pour $\omega = \omega_c$, et qu'elle tend vers c pour $\omega >> \omega_c$. L'énergie ne peut pas se propager pour $\omega < \omega_c$.

La vitesse de groupe peut s'exprimer au moyen de la pulsation de coupure, comme cela a été fait pour la vitesse de phase. Dans un premier temps, on différencie la relation de conservation de l'énergie (XI-1) pour obtenir :

$$k_z.dk_z = \frac{\omega.d\omega}{c^2} \qquad \text{(XI-9)}$$

D'où on tire une relation immédiate entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe :

$$\frac{\omega}{k_z}\frac{d\omega}{dk_z} = c^2 \qquad \text{soit donc : } v_\varphi v_g = c^2 \qquad \text{(XI-10)}$$

On en déduit :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{k_z}{\omega}c^2 = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \qquad \text{(XI-11)}$$

Pour faire le lien avec la mécanique relativiste de déplacement d'une particule, et suivant en cela Louis DE BROGLIE, nous admettons qu'une particule de masse m_0 au repos présente une énergie ondulatoire à la pulsation ω_c puisqu'il n'y a pas de déplacement d'énergie :

$$\hbar\omega_c = m_0c^2 \qquad \text{(XI-12)}$$

Lorsque cette particule est en mouvement à la vitesse v, elle présente un accroissement de son énergie totale donnée par la théorie de la relativité restreinte, dont la représentation ondulatoire va se faire à la pulsation ω :

$$\hbar\omega = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \text{(XI-13)}$$

Sur la base des hypothèses (XI-12) et (XI-13), on en déduit que les pulsations ω et ω_c doivent vérifier entre elles les relations :

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 = 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 \qquad \text{(XI-14)}$$

De la définition de la vitesse de groupe (XI-11), on déduit :

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 = 1-\left(\frac{v_g}{c}\right)^2 \qquad \text{(XI-15)}$$

Il suit de (XI-14) et (XI-15) qu'on peut identifier la vitesse de la masse v à la vitesse de groupe v_g de l'onde de phase attachée à la masse mobile. Cette identification garantit une représentation de l'énergie de masse relativiste et de l'énergie ondulatoire quantique qui soit totalement compatibles.

La dernière étape consiste à exprimer la longueur d'onde λ associée à l'onde de phase de fréquence ν et de pulsation ω qui se déplace à la vitesse v_φ. Du paragraphe précédent, on

déduit qu'elle est associée, par le biais de sa vitesse de groupe, à une masse m qui se déplace à la vitesse v. En faisant usage de la relation $v_\varphi v_g = c^2$ qui établit une relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe ou vitesse de la particule, on obtient :

$$\lambda = \frac{v_\varphi}{\nu} = v_\varphi \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c^2}{v}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{c^2}{v}\frac{2\pi}{\dfrac{m_0 c^2}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{h}{mv} \qquad \text{(XI-16)}$$

XII

Equation de DIRAC généralisée

Cette partie traite de l'équation de DIRAC pour une particule chargée placée dans un champ électromagnétique caractérisé par un potentiel scalaire ϕ et un potentiel vecteur (A_x, A_y, A_z). Ces potentiels sont considérés comme constants et uniformes, c'est-à-dire indépendants de x, y, z et t. Nous recherchons, comme précédemment des solutions sous la forme de combinaisons linéaires de modes stationnaires susceptibles de s'établir dans une cavité rectangulaire.

Suivant une démarche analogue au chapitre II, le formalisme de DIRAC conduit à rechercher les solutions de la nouvelle équation dans laquelle est introduit le quadri-vecteur potentiel électromagnétique :

$$\left\{\gamma_0\left(j\frac{\partial}{\partial x_t}-\frac{q\phi}{c\hbar}\right)+\gamma_1\left(j\frac{\partial}{\partial x}-\frac{qA_x}{\hbar}\right)+\gamma_2\left(j\frac{\partial}{\partial y}-\frac{qA_y}{\hbar}\right)+\gamma_3\left(j\frac{\partial}{\partial z}-\frac{qA_z}{\hbar}\right)\right\}(\psi)=\frac{m_0c}{\hbar}(\psi) \qquad \text{(XII-1)}$$

La fonction d'onde ψ est un bi-spineur à quatre composantes :

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} \qquad \text{(XII-2)}$$

Les matrices γ_0, γ_1, γ_2, γ_3, sont données au chapitre II, et afin d'alléger les expressions, on pose :

$$\eta=\frac{m_0c}{\hbar} \qquad \text{(XII-3)}$$

En injectant explicitement les matrices γ_i dans l'équation (XII-3) ci-dessus, on obtient le système d'équations différentielles :

$$\eta\psi_0 = j\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + j\frac{q\phi}{\hbar}\psi_0\right) + j\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + j\frac{qA_x}{\hbar}\psi_3\right) + \left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_3\right) + j\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial z} + j\frac{qA_z}{\hbar}\psi_2\right)$$

$$\eta\psi_1 = j\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + j\frac{q\phi}{\hbar}\psi_1\right) + j\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + j\frac{qA_x}{\hbar}\psi_2\right) - \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_2\right) - j\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial z} + j\frac{qA_z}{\hbar}\psi_3\right)$$

$$\eta\psi_2 = -j\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} + j\frac{q\phi}{\hbar}\psi_2\right) - j\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + j\frac{qA_x}{\hbar}\psi_1\right) - \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_1\right) - j\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial z} + j\frac{qA_z}{\hbar}\psi_0\right)$$

$$\eta\psi_3 = -j\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} + j\frac{q\phi}{\hbar}\psi_3\right) - j\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + j\frac{qA_x}{\hbar}\psi_0\right) + \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_0\right) + j\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + j\frac{qA_z}{\hbar}\psi_1\right)$$

(XII-4)

soit encore, en faisant apparaître le système différentiel de la particule libre :

$$\left(\eta + \frac{q\phi}{\hbar c}\right)\psi_0 + \frac{qA_x}{\hbar}\psi_3 - j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_3 + \frac{qA_z}{\hbar}\psi_2 = j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial z}$$

$$\left(\eta + \frac{q\phi}{\hbar c}\right)\psi_1 + \frac{qA_x}{\hbar}\psi_2 + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_2 - \frac{qA_z}{\hbar}\psi_3 = j\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_3}{\partial z}$$

$$\left(\eta - \frac{q\phi}{\hbar c}\right)\psi_2 - \frac{qA_x}{\hbar}\psi_1 + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_1 - \frac{qA_z}{\hbar}\psi_0 = -j\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial z}$$

$$\left(\eta - \frac{q\phi}{\hbar c}\right)\psi_3 - \frac{qA_x}{\hbar}\psi_0 - j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_0 + \frac{qA_z}{\hbar}\psi_1 = -j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$$

(XII-5)

A nouveau dans un souci d'allègement de notation, on pose :

$$\eta_t = \frac{q\phi}{\hbar c} \qquad \eta_x = \frac{qA_x}{\hbar} \qquad \eta_y = \frac{qA_y}{\hbar} \qquad \eta_z = \frac{qA_z}{\hbar}$$

(XII-6)

ce qui conduit au système représentant l'équation de DIRAC :

$$(\eta + \eta_t)\psi_0 + \eta_x\psi_3 - j\eta_y\psi_3 + \eta_z\psi_2 = j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial z}$$

$$(\eta + \eta_t)\psi_1 + \eta_x\psi_2 + j\eta_y\psi_2 - \eta_z\psi_3 = j\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_3}{\partial z}$$

$$(\eta - \eta_t)\psi_2 - \eta_x\psi_1 + j\eta_y\psi_1 - \eta_z\psi_0 = -j\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial z}$$

$$(\eta - \eta_t)\psi_3 - \eta_x\psi_0 - j\eta_y\psi_0 + \eta_z\psi_1 = -j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$$

(XII-7)

Il s'agit d'un système différentiel extrêmement complexe.

On peut tenter de rechercher les fonctions d'onde ψ_i (i=0,1,2,3) solutions de ce système comme cela a été fait au chapitre VI, sous la forme :

$$\psi_i = \{a_iS_xS_yS_z + b_iS_xC_yS_z + c_iC_xS_yS_z + d_iC_xC_yS_z + e_iS_xS_yC_z + f_iS_xC_yC_z + g_iC_xS_yC_z + h_iC_xC_yC_z\}C_t$$
$$+ \{i_iS_xS_yS_z + j_iS_xC_yS_z + k_iC_xS_yS_z + l_iC_xC_yS_z + m_iS_xS_yC_z + n_iS_xC_yC_z + o_iC_xS_yC_z + p_iC_xC_yC_z\}S_t \qquad \text{(XII-8)}$$

avec la notation habituelle :

$S_x = \sin(k_x\, x)$ $\quad S_y = \sin(k_y\, y)$ $\quad S_z = \sin(k_z\, z)$ $\quad S_t = \sin(k_t\, ct)$ (XII-9)

$C_x = \cos(k_x\, x)$ $\quad C_y = \cos(k_y\, y)$ $\quad C_z = \cos(k_z\, z)$ $\quad C_t = \cos(k_t\, ct)$ (XII-10)

En reprenant la méthode exposée au chapitre VI, on est conduit à formuler un système homogène de 64 équations à 64 inconnues qui est décrit ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&-jka_0 - jk_xk_3 - k_yj_3 - jk_zm_2 - (\eta+\eta_t)i_0 - (\eta_x - j\eta_y)i_3 - \eta_z i_2 = 0\\
&-jkb_0 - jk_xl_3 + k_yi_3 - jk_zn_2 - (\eta+\eta_t)j_0 - (\eta_x - j\eta_y)j_3 - \eta_z j_2 = 0\\
&-jkc_0 + jk_xi_3 - k_yl_3 - jk_zo_2 - (\eta+\eta_t)k_0 - (\eta_x - j\eta_y)k_3 - \eta_z k_2 = 0\\
&-jkd_0 + jk_xj_3 + k_yk_3 - jk_zp_2 - (\eta+\eta_t)l_0 - (\eta_x - j\eta_y)l_3 - \eta_z l_2 = 0\\
&-jke_0 - jk_xo_3 - k_yn_3 + jk_zi_2 - (\eta+\eta_t)m_0 - (\eta_x - j\eta_y)m_3 - \eta_z m_2 = 0\\
&-jkf_0 - jk_xp_3 + k_ym_3 + jk_zj_2 - (\eta+\eta_t)n_0 - (\eta_x - j\eta_y)n_3 - \eta_z n_2 = 0\\
&-jkg_0 + jk_xm_3 - k_yp_3 + jk_zk_2 - (\eta+\eta_t)o_0 - (\eta_x - j\eta_y)o_3 - \eta_z o_2 = 0\\
&-jkh_0 + jk_xn_3 + k_yo_3 + jk_zl_2 - (\eta+\eta_t)p_0 - (\eta_x - j\eta_y)p_3 - \eta_z p_2 = 0\\
&jki_0 - jk_xc_3 - k_yb_3 - jk_ze_2 - (\eta+\eta_t)a_0 - (\eta_x - j\eta_y)a_3 - \eta_z a_2 = 0\\
&jkj_0 - jk_xd_3 + k_ya_3 - jk_zf_2 - (\eta+\eta_t)b_0 - (\eta_x - j\eta_y)b_3 - \eta_z b_2 = 0\\
&jkk_0 + jk_xa_3 - k_yd_3 - jk_zg_2 - (\eta+\eta_t)c_0 - (\eta_x - j\eta_y)c_3 - \eta_z c_2 = 0\\
&jkl_0 + jk_xb_3 + k_yc_3 - jk_zh_2 - (\eta+\eta_t)d_0 - (\eta_x - j\eta_y)d_3 - \eta_z d_2 = 0\\
&jkm_0 - jk_xg_3 - k_yf_3 + jk_za_2 - (\eta+\eta_t)e_0 - (\eta_x - j\eta_y)e_3 - \eta_z e_2 = 0\\
&jkn_0 - jk_xh_3 + k_ye_3 + jk_zb_2 - (\eta+\eta_t)f_0 - (\eta_x - j\eta_y)f_3 - \eta_z f_2 = 0\\
&jko_0 + jk_xe_3 - k_yh_3 + jk_zc_2 - (\eta+\eta_t)g_0 - (\eta_x - j\eta_y)g_3 - \eta_z g_2 = 0 \qquad \text{(XII-11)}\\
&jkp_0 + jk_xf_3 + k_yg_3 + jk_zd_2 - (\eta+\eta_t)h_0 - (\eta_x - j\eta_y)h_3 - \eta_z h_2 = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-jka_1 - jk_x k_2 + k_y j_2 + jk_z m_3 - (\eta+\eta_t)i_1 - (\eta_x + j\eta_y)i_2 + \eta_z i_3 = 0\\
&-jkb_1 - jk_x l_2 - k_y i_2 + jk_z n_3 - (\eta+\eta_t)j_1 - (\eta_x + j\eta_y)j_2 + \eta_z j_3 = 0\\
&-jkc_1 + jk_x i_2 + k_y l_2 + jk_z o_3 - (\eta+\eta_t)k_1 - (\eta_x + j\eta_y)k_2 + \eta_z k_3 = 0\\
&-jkd_1 + jk_x j_2 - k_y k_2 + jk_z p_3 - (\eta+\eta_t)l_1 - (\eta_x + j\eta_y)l_2 + \eta_z l_3 = 0\\
&-jke_1 - jk_x o_2 + k_y n_2 - jk_z i_3 - (\eta+\eta_t)m_1 - (\eta_x + j\eta_y)m_2 + \eta_z m_3 = 0\\
&-jkf_1 - jk_x p_2 - k_y m_2 - jk_z j_3 - (\eta+\eta_t)n_1 - (\eta_x + j\eta_y)n_2 + \eta_z n_3 = 0\\
&-jkg_1 + jk_x m_2 + k_y p_2 - jk_z k_3 - (\eta+\eta_t)o_1 - (\eta_x + j\eta_y)o_2 + \eta_z o_3 = 0\\
&-jkh_1 + jk_x n_2 - k_y o_2 - jk_z l_3 - (\eta+\eta_t)p_1 - (\eta_x + j\eta_y)p_2 + \eta_z p_3 = 0\\
&jki_1 - jk_x c_2 + k_y b_2 + jk_z e_3 - (\eta+\eta_t)a_1 - (\eta_x + j\eta_y)a_2 + \eta_z a_3 = 0\\
&jkj_1 - jk_x d_2 - k_y a_2 + jk_z f_3 - (\eta+\eta_t)b_1 - (\eta_x + j\eta_y)b_2 + \eta_z b_3 = 0\\
&jkk_1 + jk_x a_2 + k_y d_2 + jk_z g_3 - (\eta+\eta_t)c_1 - (\eta_x + j\eta_y)c_2 + \eta_z c_3 = 0\\
&jkl_1 + jk_x b_2 - k_y c_2 + jk_z h_3 - (\eta+\eta_t)d_1 - (\eta_x + j\eta_y)d_2 + \eta_z d_3 = 0\\
&jkm_1 - jk_x g_2 + k_y f_2 - jk_z a_3 - (\eta+\eta_t)e_1 - (\eta_x + j\eta_y)e_2 + \eta_z e_3 = 0\\
&jkn_1 - jk_x h_2 - k_y e_2 - jk_z b_3 - (\eta+\eta_t)f_1 - (\eta_x + j\eta_y)f_2 + \eta_z f_3 = 0\\
&jko_1 + jk_x e_2 + k_y h_2 - jk_z c_3 - (\eta+\eta_t)g_1 - (\eta_x + j\eta_y)g_2 + \eta_z g_3 = 0 \qquad \text{(XII-12)}\\
&jkp_1 + jk_x f_2 - k_y g_2 - jk_z d_3 - (\eta+\eta_t)h_1 - (\eta_x + j\eta_y)h_2 + \eta_z h_3 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&jka_2 + jk_x k_1 + k_y j_1 + jk_z m_0 - (\eta-\eta_t)i_2 + (\eta_x - j\eta_y)i_1 + \eta_z i_0 = 0\\
&jkb_2 + jk_x l_1 - k_y i_1 + jk_z n_0 - (\eta-\eta_t)j_2 + (\eta_x - j\eta_y)j_1 + \eta_z j_0 = 0\\
&jkc_2 - jk_x i_1 + k_y l_1 + jk_z o_0 - (\eta-\eta_t)k_2 + (\eta_x - j\eta_y)k_1 + \eta_z k_0 = 0\\
&jkd_2 - jk_x j_1 - k_y k_1 + jk_z p_0 - (\eta-\eta_t)l_2 + (\eta_x - j\eta_y)l_1 + \eta_z l_0 = 0\\
&jke_2 + jk_x o_1 + k_y n_1 - jk_z i_0 - (\eta-\eta_t)m_2 + (\eta_x - j\eta_y)m_1 + \eta_z m_0 = 0\\
&jkf_2 + jk_x p_1 - k_y m_1 - jk_z j_0 - (\eta-\eta_t)n_2 + (\eta_x - j\eta_y)n_1 + \eta_z n_0 = 0\\
&jkg_2 - jk_x m_1 + k_y p_1 - jk_z k_0 - (\eta-\eta_t)o_2 + (\eta_x - j\eta_y)o_1 + \eta_z o_0 = 0\\
&jkh_2 - jk_x n_1 - k_y o_1 - jk_z l_0 - (\eta-\eta_t)p_2 + (\eta_x - j\eta_y)p_1 + \eta_z p_0 = 0\\
&-jki_2 + jk_x c_1 + k_y b_1 + jk_z e_0 - (\eta-\eta_t)a_2 + (\eta_x - j\eta_y)a_1 + \eta_z a_0 = 0\\
&-jkj_2 + jk_x d_1 - k_y a_1 + jk_z f_0 - (\eta-\eta_t)b_2 + (\eta_x - j\eta_y)b_1 + \eta_z b_0 = 0\\
&-jkk_2 - jk_x a_1 + k_y d_1 + jk_z g_0 - (\eta-\eta_t)c_2 + (\eta_x - j\eta_y)c_1 + \eta_z c_0 = 0\\
&-jkl_2 - jk_x b_1 - k_y c_1 + jk_z h_0 - (\eta-\eta_t)d_2 + (\eta_x - j\eta_y)d_1 + \eta_z d_0 = 0\\
&-jkm_2 + jk_x g_1 + k_y f_1 - jk_z a_0 - (\eta-\eta_t)e_2 + (\eta_x - j\eta_y)e_1 + \eta_z e_0 = 0\\
&-jkn_2 + jk_x h_1 - k_y e_1 - jk_z b_0 - (\eta-\eta_t)f_2 + (\eta_x - j\eta_y)f_1 + \eta_z f_0 = 0\\
&-jko_2 - jk_x e_1 + k_y h_1 - jk_z c_0 - (\eta-\eta_t)g_2 + (\eta_x - j\eta_y)g_1 + \eta_z g_0 = 0 \qquad \text{(XII-13)}\\
&-jkp_2 - jk_x f_1 - k_y g_1 - jk_z d_0 - (\eta-\eta_t)h_2 + (\eta_x - j\eta_y)h_1 + \eta_z h_0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&jka_3 + jk_x k_0 - k_y j_0 - jk_z m_1 - (\eta - \eta_t) i_3 + (\eta_x + j\eta_y) i_0 - \eta_z i_1 = 0 \\
&jkb_3 + jk_x l_0 + k_y i_0 - jk_z n_1 - (\eta - \eta_t) j_3 + (\eta_x + j\eta_y) j_0 - \eta_z j_1 = 0 \\
&jkc_3 - jk_x i_0 - k_y l_0 - jk_z o_1 - (\eta - \eta_t) k_3 + (\eta_x + j\eta_y) k_0 - \eta_z k_1 = 0 \\
&jkd_3 - jk_x j_0 + k_y k_0 - jk_z p_1 - (\eta - \eta_t) l_3 + (\eta_x + j\eta_y) l_0 - \eta_z l_1 = 0 \\
&jke_3 + jk_x o_0 - k_y n_0 + jk_z i_1 - (\eta - \eta_t) m_3 + (\eta_x + j\eta_y) m_0 - \eta_z m_1 = 0 \\
&jkf_3 + jk_x p_0 + k_y m_0 + jk_z j_1 - (\eta - \eta_t) n_3 + (\eta_x + j\eta_y) n_0 - \eta_z n_1 = 0 \\
&jkg_3 - jk_x m_0 - k_y p_0 + jk_z k_1 - (\eta - \eta_t) o_3 + (\eta_x + j\eta_y) o_0 - \eta_z o_1 = 0 \\
&jkh_3 - jk_x n_0 + k_y o_0 + jk_z l_1 - (\eta - \eta_t) p_3 + (\eta_x + j\eta_y) p_0 - \eta_z p_1 = 0 \\
&-jki_3 + jk_x c_0 - k_y b_0 - jk_z e_1 - (\eta - \eta_t) a_3 + (\eta_x + j\eta_y) a_0 - \eta_z a_1 = 0 \\
&-jkj_3 + jk_x d_0 + k_y a_0 - jk_z f_1 - (\eta - \eta_t) b_3 + (\eta_x + j\eta_y) b_0 - \eta_z b_1 = 0 \\
&-jkk_3 - jk_x a_0 - k_y d_0 - jk_z g_1 - (\eta - \eta_t) c_3 + (\eta_x + j\eta_y) c_0 - \eta_z c_1 = 0 \\
&-jkl_3 - jk_x b_0 + k_y c_0 - jk_z h_1 - (\eta - \eta_t) d_3 + (\eta_x + j\eta_y) d_0 - \eta_z d_1 = 0 \\
&-jkm_3 + jk_x g_0 - k_y f_0 + jk_z a_1 - (\eta - \eta_t) e_3 + (\eta_x + j\eta_y) e_0 - \eta_z e_1 = 0 \\
&-jkn_3 + jk_x h_0 + k_y e_0 + jk_z b_1 - (\eta - \eta_t) f_3 + (\eta_x + j\eta_y) f_0 - \eta_z f_1 = 0 \\
&-jko_3 - jk_x e_0 - k_y h_0 + jk_z c_1 - (\eta - \eta_t) g_3 + (\eta_x + j\eta_y) g_0 - \eta_z g_1 = 0 \\
&-jkp_3 - jk_x f_0 + k_y g_0 + jk_z d_1 - (\eta - \eta_t) h_3 + (\eta_x + j\eta_y) h_0 - \eta_z h_1 = 0
\end{aligned}
\qquad \text{(XII-14)}
$$

La première idée consiste à prendre appui sur les résultats du chapitre VI, c'est à dire à affecter un mode à ψ_0, et à rechercher les modes qui sont solutions du système pour les fonctions d'ondes ψ_1, ψ_2, ψ_3. Un travail mathématique long et fastidieux ne permettra pas d'exprimer une solution exacte pour ψ_1, ψ_2, ψ_3. Ce travail ne permettra pas non plus de montrer qu'une telle solution n'existe pas, et donc le problème reste ouvert.

La progression vers une solution possible viendra d'une analyse physique de ce système.

En tout premier lieu, il faut que le déterminant de ce système soit nul. Nous conjecturons que la condition de nullité est fournie par l'équation de conservation de l'énergie.

Il faut donc établir cette nouvelle équation de conservation en fonction de l'énergie apportée à la particule chargée par la présence du champ électromagnétique. Cette énergie est de deux sortes :

- l'énergie apportée par le potentiel scalaire ϕ permet d'augmenter l'énergie cinétique de la particule chargée. La relativité restreinte nous suggère que cet accroissement d'énergie est engrangé sous la forme d'énergie de masse.
- L'énergie apportée par le potentiel vecteur (A_x, A_y, A_z) ne permet que de faire changer la direction de la trajectoire de la particule sans apport d'énergie cinétique : il s'agit donc d'une énergie purement impulsionnelle.

En dehors de la présence du champ électromagnétique, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$-k_t^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 = 0 \qquad \text{(XII-15)}$$

Les apports d'énergie du champ électromagnétique dans cette relation peuvent être introduits de multiples manières sans qu'il soit trivial de faire un choix à priori parmi toutes les formulations possibles. Une réflexion approfondie a permis de conclure que la forme correcte est la suivante :

$$-(k_t+\eta_t)^2+(k_x+\eta_x)^2+(k_y+\eta_y)^2+(k_z+\eta_z)^2+\eta^2=0 \qquad \text{(XII-16)}$$

On notera en particulier que l'énergie cinétique relative à η_t apportée par le potentiel scalaire ϕ n'est pas associée à l'énergie de masse relative à η comme on aurait pu le penser de manière intuitive.

La justification rigoureuse provient du fait que la somme du quadrivecteur onde et du quadrivecteur potentiel électromagnétique donne également un quadrivecteur :

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ k_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \\ \eta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x+\eta_x \\ k_y+\eta_y \\ k_z+\eta_z \\ k_t+\eta_t \end{pmatrix} \qquad \text{(XII-17)}$$

Et puisque la pseudo norme du quadrivecteur somme est une constante, cela conduit directement à l'équation de conservation de l'énergie (XII-16).

Dès lors, nous conjecturons que le déterminant du système global de 64 équations à 64 inconnues est nul lorsque l'équation de conservation de l'énergie (XII-16) est vérifiée.

Cela ne fournit pas pour autant de piste permettant d'avancer vers une solution du système d'équation de DIRAC généralisé à l'interaction électromagnétique.

Une analyse détaillée du système de DIRAC permet toutefois d'entrevoir que si on excite sur une fonction d'onde des modes en quadrature dans le temps pour le potentiel scalaire et en quadrature dans l'espace pour le potentiel vecteur, on parvient à obtenir des solutions du système relative aux modes stationnaires (XII-11,12,13,14). Les modes en quadrature doivent de plus exprimer des échanges d'énergie entre énergie positive et énergie négative ce qui introduit donc la quantité j = racine(-1) entre les expressions de ces modes.

En résumé, la présence du potentiel électromagnétique n'excite plus les fonctions d'ondes sous la forme de modes stationnaires indépendants, mais sous la forme de combinaisons de modes associés en quadrature dans le temps et dans l'espace, et qui traduisent des échanges d'énergie entre énergie positive et énergie négative.

Ces modes vont donc se présenter sous la forme de combinaisons de fonctions de x, y, z, t, d'amplitude A qui ont l'expression suivante :

$$A\exp(\pm jk_x x)\exp(\pm jk_y y)\exp(\pm k_z z)\exp(\pm jk_t x_t) = A\exp\{j(\pm k_t x_t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z)\} \qquad \text{(XII-18)}$$

Les signes + et – présents dans cette expression vont affecter la relation de conservation de l'énergie qui doit les prendre en compte sous la forme :

$$-(\eta_t \pm k_t)^2 + (\eta_x \pm k_x)^2 + (\eta_y \pm k_y)^2 + (\eta_z \pm k_z)^2 + \eta^2 = 0 \qquad \text{(XII-19)}$$

Ces considérations sont illustrées sur l'exemple particulier suivant, qui correspond à une solution exacte de l'équation de DIRAC généralisée à l'interaction électromagnétique.

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= -(k_z + \eta_z)\exp\{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\
\psi_1 &= -(k_x + \eta_x)\exp\{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} - j(k_y + \eta_y)\exp\{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\
\psi_2 &= (\eta - k_t + \eta_t)\exp\{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\
\psi_3 &= 0
\end{aligned} \qquad \text{(XII-20)}$$

Cette solution est associée à l'équation de conservation de l'énergie :

$$-(\eta_t - k_t)^2 + (\eta_x + k_x)^2 + (\eta_y + k_y)^2 + (\eta_z + k_z)^2 + \eta^2 = 0 \qquad \text{(XII-21)}$$

Il convient pour être convaincant de détailler les vérifications de ces propriétés. Nous omettrons dans les calculs ci-dessous les exponentielles qui viennent en facteur de tous les termes.

<u>Première équation du système de DIRAC généralisé :</u>

$$(\eta + \eta_t)\psi_0 + \eta_x\psi_3 - j\eta_y\psi_3 + \eta_z\psi_2 = j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \qquad \text{(XII-22)}$$

$$-(\eta + \eta_t)(k_z + \eta_z) + 0 + 0 + \eta_z(\eta - k_t + \eta_t) = -(k_z + \eta_z)k_t + 0 + 0 - (\eta - k_t + \eta_t)k_z \qquad \text{(XII-23)}$$

<u>Deuxième équation du système de DIRAC généralisé :</u>

$$(\eta + \eta_t)\psi_1 + \eta_x\psi_2 + j\eta_y\psi_2 - \eta_z\psi_3 = j\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_3}{\partial z} \qquad \text{(XII-24)}$$

$$\begin{aligned}
&(\eta + \eta_t)\{-(k_x + \eta_x) - j(k_y + \eta_y)\} + \eta_x(\eta - k_t + \eta_t) + j\eta_y(\eta - k_t + \eta_t) - 0 = \\
&k_t\{-(k_x + \eta_x) - j(k_y + \eta_y)\} - k_x(\eta - k_t + \eta_t) - jk_y(\eta - k_t + \eta_t) - 0
\end{aligned} \qquad \text{(XII-25)}$$

<u>Troisième équation du système de DIRAC généralisé :</u>

$$(\eta - \eta_t)\psi_2 - \eta_x\psi_1 + j\eta_y\psi_1 - \eta_z\psi_0 = -j\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial z} \qquad \text{(XII-26)}$$

$$\begin{aligned}
&(\eta - \eta_t)(\eta - k_t + \eta_t) + \eta_x\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} - j\eta_y\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} + \eta_z(k_z + \eta_z) = \\
&-(\eta - k_t + \eta_t)k_t - k_x\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} + jk_y\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} - k_z(k_z + \eta_z)
\end{aligned}$$

(XII-27)

Les termes imaginaires s'annulent, et il reste :

$$-(\eta_t - k_t)^2 + (\eta_x + k_x)^2 + (\eta_y + k_y)^2 + (\eta_z + k_z)^2 + \eta^2 = 0 \qquad \text{(XII-28)}$$

soit donc l'équation de conservation de l'énergie.

<u>Quatrième équation du système de DIRAC généralisé :</u>

$$(\eta - \eta_t)\psi_3 - \eta_x\psi_0 - j\eta_y\psi_0 + \eta_z\psi_1 = -j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z} \qquad \text{(XII-29)}$$

$$\begin{aligned} &0 + \eta_x(k_z + \eta_z) + j\eta_y(k_z + \eta_z) - \eta_z\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} = \\ &0 - k_x(k_z + \eta_z) - jk_y(k_z + \eta_z) + k_z\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} \end{aligned} \qquad \text{(XII-30)}$$

La vérification que la solution (XII-20) est bien une solution exacte au système de DIRAC généralisé est achevée.

On pourrait penser que sur la base de la solution exacte (XII-20), il est possible de construire des solutions stationnaires purement réelles en sommant par exemple deux solutions en exp(jωt) et exp(-jωt), ce qui viendrait en contradiction avec l'affirmation précédente sur l'impossibilité de faire apparaître de telles solutions dans le système de DIRAC généralisé.

En fait, il est impossible de sommer ces solutions, car elles sont relatives chacune à une équation de conservation de l'énergie différente, et donc à une condition de nullité du déterminant du système différente.

On peut par contre mixer des modes stationnaires réels et des modes stationnaires complexes, comme le montre la solution exacte ci-dessous, dans laquelle la présence du potentiel électromagnétique est réduite au potentiel scalaire :

$$\begin{aligned} &\psi_0 = 0 \\ &\psi_1 = -(\eta - k_t - \eta_t)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\exp(jk_t x_t) \\ &\psi_2 = -k_y \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\exp(jk_t x_t) + jk_x \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\exp(jk_t x_t) \\ &\psi_3 = jk_z \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\exp(jk_t x_t) \end{aligned}$$

(XII-31)

Elle est associée à l'équation de conservation de l'énergie :

$$(k_t + \eta_t)^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 - \eta^2 = 0 \qquad \text{(XII-32)}$$

XIII

Les courants de DIRAC(2)

Les courants de DIRAC relatifs aux solutions de l'équation généralisée à la présence d'un champ électromagnétique possèdent une propriété remarquable qui va être illustrée sur l'exemple de solution proposée au chapitre précédent et rappelé pour mémoire :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= -(k_z+\eta_z)\exp\{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\
\psi_1 &= -(k_x+\eta_x)\exp\{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} - j(k_y+\eta_y)\exp\{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\
\psi_2 &= (\eta - k_t + \eta_t)\exp\{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\
\psi_3 &= 0
\end{aligned} \qquad \text{(XIII-1)}$$

L'expression de ces courants est rappelée ci-dessous. Multipliés par une constante adéquate, ils deviennent homogènes à une densité volumique d'énergie, et le terme J^0 représente la densité volumique d'énergie totale.

$$\begin{aligned}
J^0 &= \psi_0^*\psi_0 + \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 \\
J^1 &= \psi_3^*\psi_0 + \psi_2^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_0^*\psi_3 \\
J^2 &= j\psi_3^*\psi_0 - j\psi_2^*\psi_1 + j\psi_1^*\psi_2 - j\psi_0^*\psi_3 \\
J^3 &= \psi_2^*\psi_0 - \psi_3^*\psi_1 + \psi_0^*\psi_2 - \psi_1^*\psi_3
\end{aligned} \qquad \text{(XIII-2)}$$

De plus, ces courants doivent vérifier l'équation de conservation locale de l'énergie :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = 0 \qquad \text{(XIII-3)}$$

On obtient, de manière assez simple, à partir des fonctions d'onde (XIII-1), et des expressions des courants (XIII-2) :

$$\begin{aligned}
J^0 &= (k_x+\eta_x)^2 + (k_z+\eta_z)^2 + (k_z+\eta_z)^2 + (\eta - k_t + \eta_t)^2 \\
J^1 &= -2(\eta - k_t + \eta_t)(k_x+\eta_x) \\
J^2 &= -2(\eta - k_t + \eta_t)(k_y+\eta_y) \\
J^3 &= -2(\eta - k_t + \eta_t)(k_z+\eta_z)
\end{aligned} \qquad \text{(XIII-4)}$$

Le résultat remarquable qui apparaît dans l'expression de ces courants est qu'ils ne dépendent ni du temps, ni de l'espace. En d'autres termes, la densité volumique d'énergie totale représentée par J^0 est uniforme à l'intérieur du parallélépipède qui contient l'énergie de la particule.

Ce résultat présente une grande analogie avec l'exemple d'une particule qui possède deux fois son énergie de masse qui est présenté au chapitre VI, avec toutefois une différence sujette aux hypothèses formulées lors de l'élaboration des solutions en présence de champ électromagnétique.

Si on admet qu'il n'existe pas de solution purement réelle pour les fonctions d'ondes obtenues en présence d'un champ électromagnétique, ce régime particulier de densité d'énergie uniforme au sein de la particule est imposé par la présence du champ électromagnétique, alors que rien ne l'impose pour la particule libre.

La constante de normalisation C est obtenue en écrivant que J^0 représente la densité volumique d'énergie totale de la particule placée dans un champ électromagnétique, soit donc pour l'énergie totale comprise dans le volume V qui délimite la particule :

$$E = \left(\hbar^2 c^2\right)\left(k_t + \eta_t\right)^2 V \qquad \text{(XIII-5)}$$

En égalant cette relation avec (XIII-4) multipliée par la constante de normalisation C^2, on obtient :

$$E = C^2\left\{\left(k_x + \eta_x\right)^2 + \left(k_z + \eta_z\right)^2 + \left(k_z + \eta_z\right)^2 + \left(\eta - k_t + \eta_t\right)^2\right\} = \left(\hbar^2 c^2\right)\left(k_t + \eta_t\right)^2 V \qquad \text{(XIII-6)}$$

soit encore en introduisant l'équation de conservation de l'énergie rappelée pour mémoire :

$$\left(k_t + \eta_t\right)^2 = \left(k_x + \eta_x\right)^2 + \left(k_y + \eta_y\right)^2 + \left(k_z + \eta_z\right)^2 + \eta^2 \qquad \text{(XIII-7)}$$

$$C^2 = \frac{\left(\hbar^2 c^2\right)\left(k_t + \eta_t\right)^2 V}{\left(k_t + \eta_t\right)^2 - \eta^2 + \left(\eta - k_t + \eta_t\right)^2} \qquad \text{(XIII-8)}$$

XIV

Conclusion de la deuxième partie

On sait que les solutions à l'équation de DIRAC qui correspondent à la réalité des observations sont des solutions élaborées à l'aide de modes sphériques et dans ce contexte, on peut se demander quel est l'intérêt de s'appesantir sur des solutions obtenues en coordonnées cartésiennes.

Il apparaît que les solutions cartésiennes sont plus rapidement atteignables, et qu'on peut en tirer des informations précieuses sur le comportement de l'énergie dont la particule est constituée.

Sur la base d'une équation de conservation de l'énergie qui constitue un des fondamentaux du raisonnement physique et sur l'hypothèse d'une évolution interne de l'énergie basée sur des échanges entre des modes stationnaires, les solutions exactes à l'équation de DIRAC livrent des éléments nouveaux susceptibles de décrire la physique de l'infiniment petit.

Il n'est fait aucune hypothèse sur l'étendue spatiale des modes qui sont censés décrire le comportement de la particule, mais il est légitime de penser que cette étendue dépasse la taille que lui donne la physique classique si on veut par exemple pouvoir expliquer les phénomènes d'interférences. Cette interprétation était déjà présente dans la pensée de Louis DE BROGLIE lors de la rédaction de sa thèse : « Devons-nous supposer le phénomène périodique localisé *à l'intérieur* du morceau d'énergie ? Cela n'est nullement nécessaire et il résultera du paragraphe III qu'il est sans doute répandu dans une région étendue de l'espace. »

Par opposition à l'Ecole de Copenhague, l'interprétation énergétique des solutions stationnaires est parfaitement déterministe, mais elle ne contredit pas pour autant l'ensemble des acquis de la vision probabiliste de la mécanique quantique.

Elle justifie la dualité onde corpuscule en indiquant que l'énergie interne à la particule se présente alternativement sous la forme d'énergie de masse puis d'énergie ondulatoire.

Elle montre comment le principe d'indétermination de HEISENBERG s'interprète en indiquant comment l'énergie de masse et l'énergie impulsionnelle ne sont pas simultanément présentes au même endroit.

Enfin, elle est totalement compatible avec l'interprétation d'un phénomène ondulatoire associé à la particule suivant la longueur d'onde de DE BROGLIE.

Troisième partie

L'approche énergétique de l'équation de DIRAC et de ses solutions en coordonnées sphériques

XV

Equation de DIRAC en coordonnées sphériques

L'analyse de solutions stationnaires de l'équation de DIRAC en coordonnées cartésiennes a permis de mettre en évidence des propriétés qui, tout en étant adossées à une théorie parfaitement déterministe, sont en accord avec tous les résultats obtenus dans l'interprétation statistique de l'Ecole de Copenhague.

Si des modes stationnaires sont capables de représenter les échanges d'énergies au sein des particules, il y a peu de chance que ce soit dans des cavités ayant la forme d'un parallélépipède. Tout indique, et en particulier les solutions de l'équation de SCHRÖDINGER, que le système de coordonnées le plus adapté, celui qui fournit des solutions en accord avec les observations expérimentales, est le système de coordonnées sphériques (Figure XV-1)

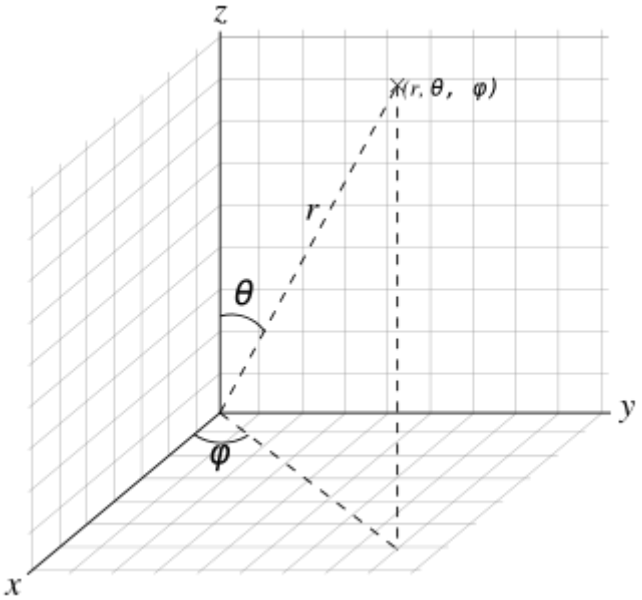


Figure XV-1 : *représentation du système de coordonnées sphériques*

On s'attend en particulier à voir apparaître dans des solutions exactes à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques, des éléments qui permettent de mieux comprendre comment le spin de l'électron est lié à la rotation de l'énergie interne.

Avant même d'aborder la recherche de solutions, il convient de transformer l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques.

Le point de départ est donné par les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \qquad \text{(XV-1)}$$

On en déduit les relations sur les différentielles :

$$\begin{aligned} dx &= dr\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi \\ dy &= dr\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi \\ dz &= dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta \end{aligned} \qquad \text{(XV-2)}$$

Soit encore en écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{(XV-3)}$$

Et donc par inversion de matrice :

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & \dfrac{-\sin\theta}{r} \\ \dfrac{-\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \qquad \text{(XV-4)}$$

L'équation de DIRAC en coordonnées cartésiennes est rappelée ci-dessous :

$$j\left[\gamma_0\left(\frac{\partial}{\partial x_t}\right) + \gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \gamma_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](\psi) = \eta(\psi) \qquad \text{(XV-5)}$$

où les matrices γ_i sont de la forme :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(XV-6)

L'objectif est de transformer cette équation, en faisant apparaître les dérivées partielles par rapport aux variables sphériques r, θ, φ :

$$j\left[\gamma_0\left(\frac{\partial}{\partial x_t}\right)+\gamma_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+\gamma_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\gamma_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right](\psi)=\eta(\psi) \qquad \text{(XV-7)}$$

L'enjeu est dans la détermination des nouvelles matrices γ_r, γ_θ, γ_φ. Il faut pour cela, dans un premier temps, formaliser le passage des dérivées partielles par rapport à x, y, z, aux dérivées partielles par rapport à r, θ, φ.

Pour établir ces relations, on peut utiliser la différentielle totale qui est une constante de la transformation :

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}dr+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}d\varphi \qquad \text{(XV-8)}$$

En reportant dans cette relation les différentielles dr, dθ, dφ données en (XV-4), on obtient :

$$\begin{aligned}d\psi&=\frac{\partial\psi}{\partial r}(\sin\theta\cos\varphi dx+\sin\theta\sin\varphi dy+\cos\theta dz)+\\&\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}(\cos\theta\cos\varphi dx+\cos\theta\sin\varphi dy-\sin\theta dz)\\&+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}(-\sin\varphi dx+\cos\varphi dy)\end{aligned} \qquad \text{(XV-9)}$$

On regroupe ensuite les termes relatifs aux différentielles dx, dy, dz :

$$\begin{aligned}d\psi&=dx\left\{\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi\right\}\\&+dy\left\{\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi\right\}\\&+dz\left\{\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\sin\theta\right\}\end{aligned} \qquad \text{(XV-10)}$$

On identifie alors cette expression avec la différentielle totale en coordonnées cartésiennes qui est une constante de la transformation :

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz \qquad \text{(XV-11)}$$

Cette identification fournit la transformation recherchée entre les dérivées partielles en coordonnées sphériques et les différentielles partielles en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi \qquad \text{(XV-12)}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\sin\theta$$

Il est alors possible de procéder au changement de coordonnées en reportant ces égalités dans l'équation de DIRAC en coordonnées cartésiennes :

$$j\left[\gamma_0\left(\frac{\partial}{\partial x_t}\right)+\gamma_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\gamma_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+\gamma_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right](\psi)=\frac{m_0c}{\hbar}(\psi) \qquad \text{(XV-13)}$$

La formulation explicite est complètement développée ci-dessous :

$$\eta\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=j\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\psi_0}{\partial x_t}\\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_t}\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_t}\\ \dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_t}\end{pmatrix}$$

$$+j\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\psi_0}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi+\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi-\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\varphi}\dfrac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi\\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\dfrac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi-\dfrac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\dfrac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi\\ \dfrac{\partial\psi_3}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi+\dfrac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi-\dfrac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}\dfrac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$+j\begin{pmatrix}0&0&0&-j\\0&0&j&0\\0&j&0&0\\-j&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\psi_0}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\varphi}\dfrac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi\\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\dfrac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\dfrac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi\\ \dfrac{\partial\psi_3}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}\dfrac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$+j\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\psi_0}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\sin\theta\\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\sin\theta\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{\partial\psi_2}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\sin\theta\\ \dfrac{\partial\psi_3}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\dfrac{1}{r}\sin\theta\end{pmatrix}$$

(XV-14)

On regroupe ensuite les termes relatifs aux dérivées partielles en r, θ, φ, afin d'obtenir une écriture matricielle sous la forme :

$$j\left[\gamma_0\left(\frac{\partial}{\partial x_t}\right)+\gamma_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+\gamma_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\gamma_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right](\psi)=\eta(\psi) \qquad \text{(XV-15)}$$

Ce regroupement conduit, par identification, aux matrices γ_r, γ_θ, γ_φ recherchées :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \sin\theta e^{j\varphi} & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\sin\theta e^{j\varphi} & \cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \cos\theta e^{j\varphi} & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\cos\theta e^{j\varphi} & -\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -je^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & je^{j\varphi} & 0 \\ 0 & je^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -je^{j\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(XV-16)

On notera en particulier que les matrices obtenues vérifient les propriétés générales des matrices de DIRAC :

$$(\gamma_0)^2 = 1, \quad (\gamma_r)^2 = (\gamma_\theta)^2 = (\gamma_\varphi)^2 = -1 \qquad \text{(XV-17)}$$

L'écriture matricielle développée du système de DIRAC se présente sous la forme :

$$\eta\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} = j\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_t}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_t}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial x_t}\end{pmatrix}$$

$$+ j\begin{pmatrix}0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta e^{-j\varphi}\\ 0 & 0 & \sin\theta e^{j\varphi} & -\cos\theta\\ -\cos\theta & -\sin\theta e^{-j\varphi} & 0 & 0\\ -\sin\theta e^{j\varphi} & \cos\theta & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial r}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial r}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial r}\end{pmatrix}$$

$$+ j\frac{1}{r}\begin{pmatrix}0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta e^{-j\varphi}\\ 0 & 0 & \cos\theta e^{j\varphi} & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta e^{-j\varphi} & 0 & 0\\ -\cos\theta e^{j\varphi} & -\sin\theta & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\end{pmatrix}$$

$$+ j\frac{1}{r\sin\theta}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -je^{-j\varphi}\\ 0 & 0 & je^{j\varphi} & 0\\ 0 & je^{-j\varphi} & 0 & 0\\ -je^{j\varphi} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}\end{pmatrix} + \qquad \text{(XV-18)}$$

On en déduit les 4 équations aux dérivées partielles qui expriment le système de DIRAC en coordonnées sphériques :

$$\eta\psi_0 = j\left\{\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + \cos\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\eta\psi_1 = j\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \cos\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\eta\psi_2 = j\left\{-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - \cos\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial r} - \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\eta\psi_3 = j\left\{-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi}\right\}$$

(XV-19)

Il s'agit d'un système non linéaire, et la méthode utilisée avec les coordonnées cartésiennes n'est plus applicable.

La complexité de ce système est telle qu'il est difficile (impossible ?) d'envisager une méthode purement mathématique qui permette d'avancer vers une solution exacte. Nous allons montrer dans les chapitres suivants qu'une approche physique, basée sur des échanges d'énergie entre des modes sphériques permet d'aboutir à de telles solutions.

XVI

Equation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques

Dans la démarche de recherche de solutions exactes à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques, nous conjecturons que l'équation de conservation de l'énergie entre l'énergie de masse, l'énergie ondulatoire, et l'énergie impulsionnelle va nous être donnée par l'équation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques :

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}\right](\psi)=\eta^2(\psi) \qquad \text{(XVI-1)}$$

Les solutions modales de cette équation se présentent sous la forme d'un produit de trois fonctions séparables en (r), (x_t), et (θ,φ).

I – La solution séparable en (θ,φ)

Cette solution est définie à partir des harmoniques sphériques $Y_{\ell m}$ qui sont fonctions de deux paramètres :

- ℓ est appelé degré de l'harmonique $Y_{\ell m}$, et c'est un entier naturel.
- m est appelé ordre de l'harmonique sphérique : c'est un entier relatif tel que $|m| <= \ell$ soit donc : $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell$

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}P_\ell^{|m|}(\cos\theta)\exp(jm\varphi) \qquad \text{(XVI-2)}$$

$0\le\theta\le\pi$ et $0\le\varphi\le 2\pi$

P_ℓ^m est un polynôme de LEGENDRE élevé à la puissance m.

Les harmoniques sphériques sont solutions de l'équation aux valeurs propres :

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=-\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \qquad \text{(XVI-3)}$$

Les premières harmoniques sphériques normalisées sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
&Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-j\varphi} \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{j\varphi} \\
&Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \quad Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{-j\varphi} \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{j\varphi} \\
&\qquad\qquad Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{-j2\varphi} \quad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{j2\varphi} \\
&Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}\left(5\cos^2\theta - 1\right)\cos\theta \qquad Y_{3\mp1} = \pm\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\left(5\cos^2\theta - 1\right)\sin\theta e^{\mp j\varphi} \\
&Y_{3\mp2} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}}\sin^2\theta\cos\theta e^{\mp j2\varphi} \qquad Y_{3\mp3} = \pm\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3\theta e^{\mp j3\varphi}
\end{aligned}
\tag{XVI-4}
$$

II – La solution séparable en r

Cette solution est donnée par toute combinaison linéaire des fonctions de BESSEL sphériques $j_n(r)$ et $y_n(r)$ où l'indice n est un entier naturel. Ces fonctions peuvent être définies à partir des fonctions de BESSEL :

$$
\begin{aligned}
j_n(r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}}J_{n+\frac{1}{2}}(r) \\
y_n(r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}}N_{n+\frac{1}{2}}(r)
\end{aligned}
\tag{XVI-5}
$$

ou à partir de formules génératrices, plus commodes pour déterminer les formulations explicites :

$$
\begin{aligned}
j_n(r) &= +(-1)^n r^n \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^n \left(\frac{\sin r}{r}\right) \\
y_n(r) &= -(-1)^n r^n \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^n \left(\frac{\cos r}{r}\right)
\end{aligned}
\tag{XVI-6}
$$

Les premières fonctions de BESSEL sphériques sont les suivantes :

$$j_0(r)=\frac{\sin r}{r} \qquad y_0(r)=-\frac{\cos r}{r}$$

$$j_1(r)=\frac{\sin r}{r^2}-\frac{\cos r}{r} \qquad y_1(r)=-\frac{\cos r}{r^2}-\frac{\sin r}{r}$$

$$j_2(r)=\left(\frac{3}{r^3}-\frac{1}{r}\right)\sin r-3\frac{\cos r}{r^2} \qquad y_2(r)=-\left(\frac{3}{r^3}-\frac{1}{r}\right)\cos r-3\frac{\sin r}{r^2}$$

$$j_3(r)=\left(\frac{15}{r^4}-\frac{6}{r^2}\right)\sin r-\left(\frac{15}{r^3}-\frac{1}{r}\right)\cos r \qquad y_3(r)=-\left(\frac{15}{r^4}-\frac{6}{r^2}\right)\cos r-\left(\frac{15}{r^3}-\frac{1}{r}\right)\sin r$$

(XVI-7)

Si nous désignons par $f_n(r)$ la fonction générique représentant $j_n(r)$ ou $y_n(r)$, $f_n(r)$ est solution de l'équation différentielle de BESSEL sphérique :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)f_n(r)+\left[1-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]f_n(r)=0 \qquad \text{(XVI-8)}$$

ou dans une écriture équivalente :

$$\frac{\partial^2 f_n(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f_n(r)}{\partial r}+\left[1-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]f_n(r)=0 \qquad \text{(XVI-9)}$$

Les modes de cavité à symétrie sphérique ne dépendant que de r et sont appelés les modes pulsés. Ils sont fonctions d'une constante de propagation radiale ou pulsation spatiale radiale que nous désignerons par k_r et qui joue un rôle analogue aux constantes de propagation k_x, k_y, ou k_z pour les cavités rectangulaires.

En introduisant la variable $R = k_r r$ dans l'équation de BESSEL sphérique (XVI-19), nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f_n(R)}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial f_n(R)}{\partial R}+\left[1-\frac{n(n+1)}{R^2}\right]f_n(R)=0\\
&\frac{1}{k_r^2}\frac{\partial^2 f_n(k_r r)}{\partial r^2}+\frac{1}{k_r^2}\frac{2}{r}\frac{\partial f_n(k_r r)}{\partial r}+\left[1-\frac{n(n+1)}{(k_r r)^2}\right]f_n(k_r r)=0\\
&\frac{\partial^2 f_n(k_r r)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f_n(k_r r)}{\partial r}+\left[k_r^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]f_n(k_r r)=0\\
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)f_n(k_r r)+\left[k_r^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]f_n(k_r r)=0
\end{aligned} \qquad \text{(XVI-10)}$$

III – La solution séparable en x_t

Si on désigne par u cette fonction, elle est solution de l'équation aux valeurs propres :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} u(k_t x_t) + k_t^2 u(k_t x_t) = 0 \qquad \text{(XVI-11)}$$

Elle est donc constituée par toute combinaison linéaire des fonctions trigonométriques $\cos(k_t x_t)$ et $\sin(k_t x_t)$.

IV – La solution complète en modes stationnaires séparés en (r, θ, φ et x_t)

L'équation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques est rappelée pour mémoire :

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_t^2}\right](\psi) = \eta^2(\psi) \qquad \text{(XVI-12)}$$

Les solutions en modes stationnaires se présentent sous la forme d'un produit de fonctions indépendantes en r, (θ, φ), et x_t :

$$\psi(r,\theta,\varphi,t) = f_\ell(k_r r) Y_{m\ell}(\theta,\varphi) u(k_t x_t) \qquad \text{(XVI-13)}$$

L'introduction de cette forme de solution dans l'équation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques amène aux substitutions suivantes :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi(r,\theta,\varphi,t) = -\left[k_r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] f_\ell(k_r r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi) u(k_t x_t)$$

$$\left[\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi(r,\theta,\varphi,t) = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f_\ell(k_r r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi) u(k_t x_t)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}\psi(r,\theta,\varphi,t) = k_t^2 f_\ell(k_r r) Y_{\ell m}(\theta,\varphi) u(k_t x_t)$$

(XVI-14)

Par substitution de ces 3 relations dans (XVI-12), on obtient la relation de conservation de l'énergie :

$$k_t^2 = \eta^2 + k_r^2 \qquad \text{(XVI-15)}$$

Après multiplication par la constante $(\hbar c)^2$, cette relation devient :

$$(\hbar c k_t)^2 = (\hbar c \eta)^2 + (\hbar c k_r)^2 \qquad \text{(XVI-16)}$$

soit encore :

$$(\hbar\omega)^2 = (m_0 c^2)^2 + (\hbar c k_r)^2 \qquad \text{(XVI-17)}$$

Comme en coordonnées cartésiennes, on identifie dans cette relation trois catégories d'énergie : l'énergie ondulatoire $(\hbar\omega)$, l'énergie de masse (m_0c^2) et l'énergie impulsionnelle $(\hbar c k_r)$.

On notera que cette relation de conservation est indépendante des modes excités suivant θ et φ. Cela signifie que la répartition entre énergie de masse, énergie ondulatoire, et énergie impulsionnelle ne dépend pas des modes excités en rotation suivant θ et φ.

Comme dans le cas des coordonnées cartésiennes, cette relation de conservation de l'énergie va jouer un rôle fondamental dans l'obtention de solutions stationnaires à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques.

XVII

Solutions exactes de l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques

Des chapitres précédents, nous avons montré que les solutions exactes de l'équation de Dirac en coordonnées sphériques doivent vérifier le système :

$$\eta\psi_0 = j\left\{\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + \cos\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\eta\psi_1 = j\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \cos\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\eta\psi_2 = j\left\{-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - \cos\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial r} - \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\eta\psi_3 = j\left\{-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi}\right\}$$

(XVII-1)

Nous avons également formulé l'hypothèse que si des solutions exactes existent sous la forme de modes stationnaires décrivant les échanges d'énergie au sein de la particule, ces solutions doivent être compatibles avec l'équation de conservation de l'énergie établie à l'aide de l'équation de KLEIN-GORDON :

$$k_t^2 = \eta^2 + k_r^2 \qquad \text{(XVII-2)}$$

Pour autant, ces éléments sont insuffisants pour progresser dans la recherche de solutions exactes au système (XVII-1) ci-dessus.

Il faut donc trouver de nouveaux indices susceptibles, dans une démarche heuristique, de restreindre le champ de recherche des solutions possibles.

Nous allons pour cela nous appuyer sur deux observations issues des solutions exactes obtenues en coordonnées cartésiennes. Considérons par exemple la solution suivante :

$$\psi_0 = 0$$
$$\psi_1 = -(\hbar\omega)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + j(m_0 c^2)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$\psi_2 = j\hbar c k_y \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + \hbar c k_x \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t)$$
$$\psi_3 = \hbar c k_z \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)$$

(XVII-3)

La première observation consiste à remarquer que le bi-spineur qui représente certaines de ces solutions peut se décomposer de la manière suivante :

- le premier spineur exprime sur l'une de ses composantes les échanges entre énergie de masse et énergie ondulatoire.
- le second spineur exprime sur ses deux composantes les échanges concernant l'énergie impulsionnelle.

La seconde observation est relative à la dualité onde-corpuscule. Elle se présente dans les solutions exactes sous la forme d'un même mode spatial, l'un à énergie positive, l'autre à énergie négative (d'où la présence du nombre complexe $j = \sqrt{-1}$), excité en quadrature dans le temps, ce qui indique que quand l'énergie de masse est maximum, l'énergie ondulatoire est nulle, et réciproquement. Les modes présents dans cet échange d'énergie doivent être solution de l'équation de KLEIN-GORDON qui apparaît systématiquement dans l'une des équations du système de DIRAC.

Sur la base de ces deux observations, des essais empiriques permettent alors de montrer qu'il existe bien des solutions exactes au système de DIRAC sphérique (XVII-1), sous la forme de modes stationnaires respectant l'équation de conservation de l'énergie (XVII-2).

Certains modes sphériques ne permettent pas d'obtenir des solutions exactes à l'équation de DIRAC. La méthode empirique utilisée ne permet pas de préciser s'il s'agit d'une absence mathématique de ces solutions, ou si des solutions relatives à ces modes sont atteignables par d'autres méthodes.

Le premier mode sphérique $Y_{00}(\theta,\varphi)$ solution de l'équation de KLEIN-GORDON est égal à une constante, il est donc indépendant de θ et φ. Il ne conduit pas à une solution exacte de l'équation de Dirac.

Nous allons développer en détail dans les chapitres suivants, quelques-unes des solutions exactes pour certains modes sphériques solutions de l'équation de KLEIN-GORDON.

XVIII

Solutions exactes de l'équation de DIRAC pour les modes Y_{n-n} et Y_{nn}

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux modes solutions de l'équation de KLEIN-GORDON pour lesquels les paramètres ℓ et |m| sont égaux, et nous poserons $\ell = |m| = n \neq 0$.

La description angulaire de ces modes est donnée par les harmoniques sphériques suivants, dans lesquels la constante de normalisation qui ne joue aucun rôle pour établir la validité des solutions a été omise :

$$Y_{n-n} = \sin^n \theta e^{-jn\varphi} \quad Y_{nn} = \sin^n \theta e^{jn\varphi} \qquad \text{(XVIII-1)}$$

Nous travaillerons sur le premier mode Y_{n-n}, avant d'en déduire, par des considérations simples, l'expression des solutions relatives au mode Y_{nn}.

L'harmonique sphérique Y_{n-n} est associé à la fonction radiale donnée par les deux fonctions de BESSEL sphériques d'ordre n :

$$f_n(k_r r) = j_n(k_r r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_r r) \qquad \text{(XVIII-2)}$$

ou

$$f_n(k_r r) = y_n(k_r r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} N_{n+\frac{1}{2}}(k_r r) \qquad \text{(XVIII-3)}$$

Les solutions modales de l'équation de KLEIN-GORDON s'expriment sous la forme :

$$\psi(r,\theta,\varphi,t) = f_n(k_r r) Y_{n-n}(\theta,\varphi) u(k_t x_t) \qquad \text{(XVIII-4)}$$

où la dépendance temporelle est donnée par toute combinaison linéaire des fonctions :
$u(k_t x_t) = \cos(k_t x_t)$ ou $u(k_t x_t) = \sin(k_t x_t)$

La méthode évoquée au chapitre précédent incite à proposer la solution suivante qui va se révéler être une solution exacte :

$$\psi_0 = \eta f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\sin(k_t x_t) + jk_t f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\cos(k_t x_t)$$
$$\psi_1 = 0$$
$$\psi_2 = j\cos\theta\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{-k_r f_n'(k_r r) + n\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\} \qquad \text{(XVIII-5)}$$
$$\psi_3 = j\sin(k_t x_t)\sin^{n-1}\theta e^{-(n-1)j\varphi}\left\{-\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2\theta + 1)\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}$$

dans laquelle nous avons adopté la notation allégée : $f_n'(k_r r) = df_n(k_r r)/d(k_r r)$.

Le premier spineur porte la dualité onde-corpuscule à travers la fonction d'onde ψ_0. L'énergie de masse s'échange avec l'énergie ondulatoire sur le mode spatial défini par l'harmonique sphérique $Y_{n\text{-}n}$. Il répond à la démarche évoquée au chapitre précédent.

Le second spineur porte les échanges d'énergie impulsionnelle sur lesquels nous reviendrons ultérieurement. Il est déduit du système de DIRAC sphérique après substitution du premier spineur.

L'équation de conservation de l'énergie associée à cette solution est rappelée pour mémoire :

$$k_t^2 = \eta^2 + k_r^2 \qquad \text{(XVIII-6)}$$

Cette relation est indépendante de la nature des modes sphériques excités.

Des chapitres précédents, nous avons montré que les solutions exactes de l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques doivent vérifier le système :

$$\eta\psi_0 = j\left\{\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + \cos\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}\right\}$$
$$\eta\psi_1 = j\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \cos\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\right\}$$
$$\eta\psi_2 = j\left\{-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - \cos\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial r} - \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\right\}$$
$$\eta\psi_3 = j\left\{-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi}\right\}$$
(XVIII-7)

La vérification de ce système ne nécessite que des calculs élémentaires, mais elle est laborieuse. Il s'agit toutefois d'un argument décisif pour convaincre de la validité de la solution (XVIII-5), et une assistance est proposée en donnant ci-dessous la formulation explicite de chacun des termes de ces équations.

La première équation, plus complexe car elle contient l'équation de KLEIN-GORDON, sera traitée en dernier, et nous proposons d'expliciter d'abord les termes relatifs aux équations 2, 3, et 4. La vérification des sommes est laissée aux soins du lecteur.

<u>Eléments de vérification de l'équation 2 du système de DIRAC sphérique :</u>

$$\eta\psi_1 = j\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \cos\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\right\}$$

(XVIII-8)

$$\eta\psi_1 = 0$$

$$j\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} = 0$$

$$j\sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} = -\cos\theta\sin^{n+1}\theta\sin(k_t x_t)e^{-(n-1)j\varphi}\left\{-k_r^2 f_n''(k_r r) + n\left(\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - \frac{f_n(k_r r)}{r^2}\right)\right\}$$

$$-j\cos\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial r} = \cos\theta\sin^{n-1}\theta\sin(k_t x_t)e^{-(n-1)j\varphi}\left\{-\sin^2\theta k_r^2 f_n''(k_r r) - n\left(\cos^2\theta + 1\right)\left(\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - \frac{f_n(k_r r)}{r^2}\right)\right\}$$

$$j\frac{\cos\theta e^{j\varphi}}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} = -\cos\theta\sin^{n-1}\left(n\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\sin(k_t x_t)e^{-(n-1)j\varphi}\left\{-\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} + n\frac{f_n(k_r r)}{r^2}\right\}$$

$$j\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta} = \sin(k_t x_t)\sin^{n-1}\theta e^{-(n-1)j\varphi}\left\{\begin{array}{l}(n+1)\sin^2\theta\cos\theta\dfrac{k_r f_n'(k_r r)}{r} \\ +n\left((n-1)\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta + (n-1)\cos\theta\right)\dfrac{f_n(k_r r)}{r^2}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{e^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} = -n\cos\theta\sin^{n-1}\theta\sin(k_t x_t)e^{-(n-1)j\varphi}\left\{-\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} + n\frac{f_n(k_r r)}{r^2}\right\}$$

(XVIII-9)

<u>Eléments de vérification de l'équation 3 du système de DIRAC sphérique :</u>

$$\eta\psi_2 = j\left\{-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - \cos\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial r} - \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\right\}$$

(XVIII-10)

$$\eta\psi_2 = j\eta\cos\theta\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{-k_r f_n'(k_r r) + n\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}$$

$$-j\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} = k_t\cos\theta\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\cos(k_t x_t)\left\{-k_r f_n'(k_r r) + n\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}$$

$$-j\cos\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial r} = -j\eta k_r f_n'(k_r r)\cos\theta\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\sin(k_t x_t) + k_t k_r f_n'(k_r r)\cos\theta\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\cos(k_t x_t)$$

$$-j\sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = 0$$

$$j\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} = j\eta\frac{f_n(k_r r)}{r}n\sin^n\theta\cos\theta e^{-nj\varphi}\sin(k_t x_t) - k_t\frac{f_n(k_r r)}{r}n\sin^n\theta\cos\theta e^{-nj\varphi}\cos(k_t x_t)$$

$$-j\frac{\cos\theta}{r}e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} = 0$$

$$-\frac{e^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} = 0$$

(XVIII-11)

Eléments de vérification de l'équation 4 du système de DIRAC sphérique :

$$\eta\psi_3 = j\left\{-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi}\right\}$$

(XVIII-12)

$$\eta\psi_3 = j\eta\sin(k_t x_t)\sin^{n-1}\theta e^{-(n-1)j\varphi}\left\{-\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2\theta + 1)\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}$$

$$-j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} = k_t\cos(k_t x_t)\sin^{n-1}\theta e^{-(n-1)j\varphi}\left\{-\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2\theta + 1)\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}$$

$$-j\sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} = -j\eta k_r f_n'(k_r r)\sin^{n+1}\theta e^{-(n-1)j\varphi}\sin(k_t x_t) + k_r k_t f_n'(k_r r)\sin^{n+1}\theta e^{-(n-1)j\varphi}\cos(k_t x_t)$$

$$j\cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = 0$$

$$-j\frac{\cos\theta e^{j\varphi}}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} = \left\{\begin{array}{l} -j\eta\dfrac{f_n(k_r r)}{r}n\sin^{n-1}\theta\cos^2\theta e^{-(n-1)j\varphi}\sin(k_t x_t) \\ +k_t\dfrac{f_n(k_r r)}{r}n\sin^{n-1}\theta\cos^2\theta e^{-(n-1)j\varphi}\cos(k_t x_t)\end{array}\right\}$$

$$-j\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{e^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi} = -jn\eta\frac{f_n(k_r r)}{r}\sin^{n-1}\theta e^{-(n-1)j\varphi}\sin(k_t x_t) + nk_t\frac{f_n(k_r r)}{r}\sin^{n-1}\theta e^{-(n-1)j\varphi}\cos(k_t x_t)$$

(XVIII-13)

Eléments de vérification de l'équation 1 du système de DIRAC :

Comme il a été indiqué précédemment, cette vérification mérite une attention particulière car on y retrouve l'équation de conservation de l'énergie déduite de l'équation de KLEIN-GORDON.

$$\eta\psi_0 = j\left\{\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + \cos\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}\right\}$$

(XVIII-14)

Le calcul explicite de chacun des termes est donné ci-dessous :

$$\eta\psi_0 = \eta^2 f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\sin(k_t x_t) + j\eta k_t f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\cos(k_t x_t)$$

$$j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} = j\eta k_t f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\cos(k_t x_t) + k_t^2 f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\sin(k_t x_t)$$

$$j\cos\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial r} = -\cos^2\theta\sin^n\theta\sin(k_t x_t)e^{-nj\varphi}\left\{-k_r^2 f_n''(k_r r) + n\left(\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - \frac{f_n(k_r r)}{r^2}\right)\right\}$$

$$j\sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial r} = -\sin^n\theta\sin(k_t x_t)e^{-nj\varphi}\left\{-\sin^2\theta k_r^2 f_n''(k_r r) - n\left(\cos^2\theta+1\right)\left(\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - \frac{f_n(k_r r)}{r^2}\right)\right\}$$

$$-j\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} = \sin^n\left(n\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\sin(k_t x_t)e^{-nj\varphi}\left\{-\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} + n\frac{f_n(k_r r)}{r^2}\right\}$$

$$j\frac{\cos\theta}{r}e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta} = \sin(k_t x_t)\cos\theta e^{-nj\varphi}\left\{\begin{array}{l}(n+1)\sin^n\theta\cos\theta\dfrac{k_r f_n'(k_r r)}{r} \\ +n\left((n-1)\sin^{n-2}\theta\cos^3\theta - 2\sin^n\theta\cos\theta + (n-1)\sin^{n-2}\theta\cos\theta\right)\dfrac{f_n(k_r r)}{r^2}\end{array}\right\}$$

$$\frac{e^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi} = (n-1)\sin(k_t x_t)\sin^{n-2}\theta e^{-nj\varphi}\left\{-\sin^2\theta k_r\frac{f_n'(k_r r)}{r} - n\frac{\cos^2\theta+1}{r^2}f_n(k_r r)\right\}$$

(XVIII-15)

Après simplification par $\sin(k_t x_t).e^{-nj\varphi}$, la première équation du système de DIRAC s'écrit :

$$\begin{array}{l}\eta^2 f_n(k_r r)\sin^n\theta = \sin^n\theta k_t^2 f_n(k_r r) + \sin^n\theta k_r^2 f_n''(k_r r) \\ +\dfrac{k_r f_n'(k_r r)}{r}\left\{\begin{array}{l}-n\cos^2\theta\sin^n\theta + n\sin^n\theta\left(\cos^2\theta+1\right) - \sin^n\left(n\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ +(n+1)\sin^n\theta\cos^2\theta - (n-1)\sin^n\theta\end{array}\right\} \\ +\dfrac{f_n(k_r r)}{r^2}\left\{\begin{array}{l}n\cos^2\theta\sin^n\theta - n\sin^n\theta\left(\cos^2\theta+1\right) + n\sin^n\left(n\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ +n\left((n-1)\sin^{n-2}\theta\cos^4\theta - 2\sin^n\theta\cos^2\theta + (n-1)\sin^{n-2}\theta\cos^2\theta\right) \\ -n(n-1)\sin^{n-2}\theta\left(\cos^2\theta+1\right)\end{array}\right\}\end{array} \qquad \text{(XVIII-16)}$$

Les termes entre accolades se réduisent d'une manière remarquable pour obtenir :

$$\eta^2 f_n(k_r r) = k_t^2 f_n(k_r r) + k_r^2 f_n''(k_r r) + 2\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - n(n+1)\frac{f_n(k_r r)}{r^2} \qquad \text{(XVIII-17)}$$

On peut réécrire cette relation en introduisant les dérivées partielles par rapport à r :

$$\eta^2 f_n(k_r r) = k_t^2 f_n(k_r r) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}f_n(k_r r) + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}f_n(k_r r) - n(n+1)\frac{f_n(k_r r)}{r^2} \qquad \text{(XVIII-18)}$$

Soit encore :

$$\eta^2 f_n(k_r r) = k_t^2 f_n(k_r r) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)f_n(k_r r) - n(n+1)\frac{f_n(k_r r)}{r^2} \qquad \text{(XVIII-19)}$$

En utilisant la propriété de la fonction de BESSEL sphérique établie en (XVI-10) et rappelée pour mémoire :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)f_\ell(k_r r)+\left[k_r^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]f_\ell(k_r r)=0 \qquad \text{(XVIII-20)}$$

on obtient pour $\ell = n$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)f_n(k_r r)+\left[k_r^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]f_n(k_r r)=0\\&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)f_n(k_r r)-\frac{n(n+1)}{r^2}f_n(k_r r)=-k_r^2 f_n(k_r r)\end{aligned} \qquad \text{(XVIII-21)}$$

En reportant ce dernier résultat dans la relation (XVIII-19) rappelée ci-dessous :

$$\eta^2 f_n(k_r r)=k_t^2 f_n(k_r r)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)f_n(k_r r)-n(n+1)\frac{f_n(k_r r)}{r^2} \qquad \text{(XVIII-22)}$$

on obtient la relation de conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned}&\eta^2 f_n(k_r r)=k_t^2 f_n(k_r r)-k_r^2 f_n(k_r r)\\&k_t^2=\eta^2+k_r^2\end{aligned} \qquad \text{(XVIII-23)}$$

La vérification de la solution exacte à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques est achevée. Comme en coordonnées cartésiennes, pour être valide, cette solution doit être associée à l'équation de conservation de l'énergie en coordonnées sphériques.

En conclusion de ce chapitre, nous nous intéressons au mode analogue en Y_{nn} :

$$Y_{nn}=\sin^n\theta e^{jn\varphi} \qquad \text{(XVIII-24)}$$

Si on fait abstraction de la constante de normalisation qui n'intervient pas dans les calculs, la seule différence par rapport à l'harmonique sphérique Y_{n-n} du paragraphe précédent est dans le signe de φ.

Cela induit une conséquence immédiate : on ne peut plus trouver de solution exacte en faisant porter la dualité onde-corpuscule par la fonction d'onde ψ_0. La solution exacte au système de DIRAC sphérique ne peut être construite qu'en faisant porter cette dualité par la fonction d'onde ψ_1. On obtient alors une solution analogue à la précédente, dans laquelle les fonctions d'ondes du spineur qui porte l'énergie impulsionnelle sont échangées :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = 0\\
&\psi_1 = \eta f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{nj\varphi}\sin(k_t x_t) + jk_t f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{nj\varphi}\cos(k_t x_t)\\
&\psi_2 = j\sin(k_t x_t)\sin^{n-1}\theta e^{(n-1)j\varphi}\left\{-\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2\theta + 1)\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}\\
&\psi_3 = j\cos\theta\sin^n\theta e^{nj\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{k_r f_n'(k_r r) - n\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(XVIII-25)}$$

Nous verrons dans un prochain chapitre que le signe de φ détermine le sens de rotation de l'énergie. En appliquant les règles classiques d'orientation du spin (règle du tire-bouchon par exemple), on peut associer une direction de spin à chacune des solutions exactes proposées.

Le spineur

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = \eta f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\sin(k_t x_t) + jk_t f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\cos(k_t x_t)\\
&\psi_1 = 0
\end{aligned} \qquad \text{(XVIII-26)}$$

peut être associé au spin orienté vers les z positifs et il est généralement qualifié de spin « up ».

Le spineur :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = 0\\
&\psi_1 = \eta f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{nj\varphi}\sin(k_t x_t) + jk_t f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{nj\varphi}\cos(k_t x_t)
\end{aligned} \qquad \text{(XVIII-27)}$$

peut être associé au spin orienté vers les z négatifs, et il est généralement qualifié de spin « down ».

XIX

Autres solutions exactes

I - Les modes en rotation

Les solutions exactes élémentaires présentées au chapitre précédent ne permettent pas de mettre en évidence la rotation de l'énergie.

En procédant de manière analogue à la recherche de solutions propagatives lors de l'étude en coordonnées cartésiennes, il est possible de trouver des solutions exactes qui expriment cette rotation.

Le système de DIRAC sphérique n'étant linéaire que par rapport aux fonctions sinusoïdales de x_t, nous ne pouvons construire de nouvelles solutions exactes qu'en sommant des solutions dont les variations de modes portent sur x_t.

Nous choisissons de travailler sur un mode représentant un spin « down » et désignons par (solution 1) la solution obtenue en (XVIII-25) :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0 \\
\psi_1 &= \eta f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{nj\varphi}\sin(k_t x_t) + jk_t f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{nj\varphi}\cos(k_t x_t) \\
\psi_2 &= j\sin(k_t x_t)\sin^{n-1}\theta e^{(n-1)j\varphi}\left\{-\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2\theta+1)\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\} \\
\psi_3 &= j\cos\theta\sin^n\theta e^{nj\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{k_r f_n'(k_r r) - n\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(XIX-1)}$$

Nous désignons par (solution 2) la solution exacte obtenue en échangeant les sinus et cosinus dans la fonction d'onde ψ_1 :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0 \\
\psi_1 &= \eta f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{nj\varphi}\cos(k_t x_t) - jk_t f_n(k_r r)\sin^n\theta e^{nj\varphi}\sin(k_t x_t) \\
\psi_2 &= j\cos(k_t x_t)\sin^{n-1}\theta e^{(n-1)j\varphi}\left\{-\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2\theta+1)\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\} \\
\psi_3 &= j\cos\theta\sin^n\theta e^{nj\varphi}\cos(k_t x_t)\left\{k_r f_n'(k_r r) - n\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(XIX-2)}$$

Nous construisons la solution exacte obtenue par la combinaison linéaire : (solution 2) + j (solution 1) :

$$\psi_0 = 0$$
$$\psi_1 = \eta f_n(k_r r)\sin^n\theta \exp j(k_t x_t + n\varphi) - k_t f_n(k_r r)\sin^n\theta \exp j(k_t x_t + n\varphi)$$
$$\psi_2 = j\exp j(k_t x_t + (n-1)\varphi)\sin^{n-1}\theta\left\{-\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2\theta + 1)\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\} \qquad \text{(XIX-3)}$$
$$\psi_3 = j\cos\theta\sin^n\theta \exp j(k_t x_t + n\varphi)\left\{k_r f_n'(k_r r) - n\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}$$

Les termes en exp $j(k_t x_t + n\varphi)$ et exp $j(k_t x_t + (n-1)\varphi)$ représentent à la fois une rotation temporelle de l'énergie suivant l'angle φ et des échanges entre énergie positive et énergie négative indiqués par la présence du terme imaginaire j.

Le sens de rotation peut être évalué de la même manière que le sens de propagation d'une onde progressive.

Une onde en $(\omega t - kx)$ progresse vers les x positifs : une onde en $(k_t x_t - n\varphi)$ progresse vers les φ positifs.

Une onde en $(\omega t + kx)$ progresse vers les x négatifs : une onde en $(k_t x_t + n\varphi)$ progresse vers les φ négatifs, ce qui justifie l'appellation de spin « down » pour la solution (XIX-3).

Il apparaît impossible de construire des solutions exactes en rotation de la forme $(k_t x_t + \theta)$ car on ne dispose pas des solutions analogues en $\sin\theta$ et $\cos\theta$ qui sont nécessaires pour obtenir par combinaison avec les fonctions temporelles $\sin(k_t x_t)$ et $\cos(k_t x_t)$ les fonctions de rotation en θ.

II – Autres solutions

Parmi les solutions modales de l'équation de KLEIN-GORDON, pour un ordre ℓ donné, |m| peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et ℓ. L'étude des chapitres précédents a permis de montrer que les modes tels que $\ell = |m| = n \neq 0$ conduisent à des solutions exactes de l'équation de DIRAC.

Il s'avère que tous les modes ne permettent pas d'aboutir à des solutions exactes.

Un essai spécifique sur les modes Y_{2-1} et Y_{21} montre que ces modes autorisent des solutions exactes qui sont reportées ci-dessous.

II-1 - Le mode Y_{2-1}

Il est associé à l'harmonique sphérique Y_{2-1} :

$$Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{-j\varphi} \qquad \text{(XIX-4)}$$

La fonction radiale est donnée par les deux fonctions de BESSEL sphériques d'ordre 2 :

$$f_2(k_r r) = j_2(k_r r) = \left(\frac{3}{(k_r r)^3} - \frac{1}{(k_r r)}\right)\sin(k_r r) - 3\frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} \qquad \text{(XIX-5)}$$

ou

$$f_2(k_r r) = y_2(k_r r) = -\left(\frac{3}{(k_r r)^3} - \frac{1}{(k_r r)}\right)\cos(k_r r) - 3\frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^2} \qquad \text{(XIX-6)}$$

Les solutions modales de l'équation de KLEIN-GORDON s'expriment sous la forme :

$$\psi(r,\theta,\varphi,t) = f_2(k_r r)Y_{2-1}(\theta,\varphi)u(k_t x_t) \qquad \text{(XIX-7)}$$

où la dépendance temporelle est donnée par toute combinaison linéaire des fonctions :
$u(k_t x_t) = \cos(k_t x_t)$ ou $u(k_t x_t) = \sin(k_t x_t)$

La méthode proposée dans les chapitres précédents permet d'obtenir la solution exacte suivante :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \eta f_2(k_r r)\sin\theta\cos\theta e^{-j\varphi}\sin(k_t x_t) + jk_t f_2(k_r r)\sin\theta\cos\theta e^{-j\varphi}\cos(k_t x_t)\\
\psi_1 &= 0\\
\psi_2 &= j\sin\theta e^{-j\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{-\cos^2\theta k_r f_2'(k_r r) + (1-2\sin^2\theta)\frac{f_2(k_r r)}{r}\right\}\\
\psi_3 &= j\sin(k_t x_t)\cos\theta\left\{-\sin^2\theta k_r f_2'(k_r r) - 2\cos^2\theta\frac{f_2(k_r r)}{r}\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(XIX-8)}$$

dans laquelle nous avons adopté la notation : $f_2'(k_r r) = df_2(k_r r)/d(k_r r)$.

II-2 - Le mode Y_{21}

Il est associé à l'harmonique sphérique Y_{21} rappelé ci-dessous :

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{j\varphi} \qquad \text{(XIX-9)}$$

La constante de normalisation n'intervenant pas dans les calculs, la seule différence par rapport à l'harmonique sphérique Y_{2-1} du paragraphe précédent est dans le signe de φ. Cela indique que le sens de rotation de l'énergie est inversé par rapport au mode Y_{2-1}.

On obtient la solution exacte suivante :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0\\
\psi_1 &= \eta f_2(k_r r)\sin\theta\cos\theta e^{j\varphi}\sin(k_t x_t) + jk_t f_2(k_r r)\sin\theta\cos\theta e^{j\varphi}\cos(k_t x_t)\\
\psi_2 &= -j\sin(k_t x_t)\cos\theta\left\{\sin^2\theta k_r f_2'(k_r r) + 2\cos^2\theta\frac{f_2(k_r r)}{r}\right\}\\
\psi_3 &= j\sin(k_t x_t)\sin\theta e^{j\varphi}\left\{\cos^2\theta k_r f_2'(k_r r) - (1-2\sin^2\theta)\frac{f_2(k_r r)}{r}\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(XIX-10)}$$

II-3 – Autres modes

Il n'a pas été établi de règle simple permettant de savoir si un mode est solution exacte ou non lorsque $\ell > |m|$, ce qui oblige à une recherche et une vérification spécifique qui devient particulièrement laborieuse lorsque l'ordre des modes augmente. Il s'agit d'un problème ouvert : si certains modes ne conduisent pas à des solutions exactes de l'équation de DIRAC, il existe nécessairement une raison physique qui empêche l'installation de ces modes et qu'il convient d'élucider.

XX

Quelques éléments de réflexion sur les solutions exactes en coordonnées sphériques

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques permet de retrouver, dans une approche complètement déterministe, les propriétés qui ont étés mises en évidence dans l'analyse des solutions exactes en coordonnées cartésiennes.

L'intérêt majeur d'une formulation de solutions exactes à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques réside dans le fait qu'on va pouvoir exprimer analytiquement la rotation de l'énergie.

Quelques premiers éléments de réflexion sont donnés ci-dessous. Ces éléments semblent confirmer que les solutions élaborées sont en accord avec les principaux phénomènes physiques observés. Il faudra toutefois avancer plus avant dans cette réflexion avant de conclure ou non à la validité définitive des solutions proposées.

I – Particule de spin 1

Considérons une solution exacte obtenue sur le mode $Y_{1\text{-}1}$:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \eta f_1(k_r r)\sin\theta e^{-j\varphi}\sin(k_t x_t) + jk_t f_1(k_r r)\sin\theta e^{-j\varphi}\cos(k_t x_t)\\
\psi_1 &= 0\\
\psi_2 &= j\cos\theta\sin\theta e^{-j\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{-k_r f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{r}\right\}\\
\psi_3 &= j\sin(k_t x_t)\left\{-\sin^2\theta k_r f_1'(k_r r) - (\cos^2\theta + 1)\frac{f_1(k_r r)}{r}\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(XX-1)}$$

où f_1 représente une fonction de BESSEL sphérique d'ordre 1 :

$$j_1(k_r r) = \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^2} - \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)} \qquad y_1(k_r r) = -\frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} - \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)} \qquad \text{(XX-2)}$$

et où nous avons adopté la notation $f_1'(k_r r) = df_1(k_r r)/d(k_r r)$.

Après multiplication par la constante $\hbar c$, chacune des fonctions d'onde a la dimension d'une énergie :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \left(m_0c^2\right)f_1\left(k_r r\right)\sin\theta e^{-j\varphi}\sin\left(k_t x_t\right) + j\left(\hbar\omega\right)f_1\left(k_r r\right)\sin\theta e^{-j\varphi}\cos\left(k_t x_t\right) \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= j\left(\hbar c k_r\right)\cos\theta\sin\theta e^{-j\varphi}\sin\left(k_t x_t\right)\left\{-f_1'\left(k_r r\right) + \frac{f_1\left(k_r r\right)}{k_r r}\right\} \\
\psi_3 &= j\left(\hbar c k_r\right)\sin\left(k_t x_t\right)\left\{-\sin^2\theta f_1'\left(k_r r\right) - \left(\cos^2\theta + 1\right)\frac{f_1\left(k_r r\right)}{k_r r}\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(XX-3)}$$

Les fonctions ci-dessus ne prennent une valeur finie au voisinage de r = 0 que lorsque f_1 représente une fonction de Bessel sphérique de première espèce J_1. Nous conserverons malgré tout par la suite l'appellation générale f_1 afin de traiter les solutions dans leur plus grande généralité.

Nous faisons abstraction dans la discussion qui suit de la constante multiplicative de normalisation. Il est rappelé que cette constante a un double rôle : faire en sorte que chaque fonction d'onde ait la dimension d'une racine carré de densité volumique d'énergie, et que l'intégrale de cette densité sur le volume contenant l'énergie donne l'énergie totale contenue dans la particule.

Le premier spineur formé par ψ_0 et ψ_1 porte les échanges d'énergie entre énergie de masse et énergie ondulatoire.

Le deuxième spineur formé par ψ_2 et ψ_3 porte les évolutions spatiales et temporelles de l'énergie impulsionnelle, ce qui est confirmé par la présence du terme $\left(\hbar c k_r\right)$. Cette énergie impulsionnelle peut être à priori affectée à chacune des variables d'espace r, θ, φ.

Le mouvement de rotation qui est mis en évidence dans les solutions exactes s'effectue autour de l'axe Oz : il induit une énergie impulsionnelle suivant φ.

La variable spatial r joue un rôle analogue aux variables spatiales x, y et z en coordonnées cartésiennes : elle induit une énergie impulsionnelle suivant r.

La variable θ ne semble jouer aucun rôle en terme impulsionnel, et nous ferons l'hypothèse que l'énergie impulsionnelle associée à cette variable est nulle.

La fonction d'onde ψ_3 ne peut pas être associée à un mouvement de rotation suivant φ : nous admettrons qu'elle porte l'énergie impulsionnelle relative à r. Nous associerons par conséquent la fonction d'onde ψ_2 à l'énergie impulsionnelle de rotation. Cette hypothèse est confortée par le fait que la fonction d'onde ψ_2 change de signe lorsqu'on passe d'un spin « up » à un spin « down ». Elle est également confirmée par la distribution spatiale de l'énergie suivant θ, comme nous allons le voir par la suite.

Lorsqu'on effectue une rotation d'un angle φ = 2π, le bispineur (XX-1) retrouve sa position initiale, ce qui laisse à penser qu'on peut associer ce mode à une particule de spin 1. On sait que dans ce cas le moment cinétique angulaire a la probabilité maximum de faire un angle θ = 45° et θ = 135° avec l'axe Oz.

On peut relier cette propriété à l'énergie impulsionnelle de rotation portée par la fonction d'onde ψ_2 :

$$\psi_2 = j(\hbar c k_r)\cos\theta\sin\theta e^{-j\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{-f_1'(k_r r)+\frac{f_1(k_r r)}{k_r r}\right\} \qquad \text{(XX-4)}$$

Du point de vue de la densité volumique d'énergie, la dépendance en θ est donnée par la fonction :

$$A(\theta) = (\cos\theta\sin\theta)^2 \qquad \text{(XX-5)}$$

Cette fonction est représentée sur la figure (XX-1) ci-dessous :

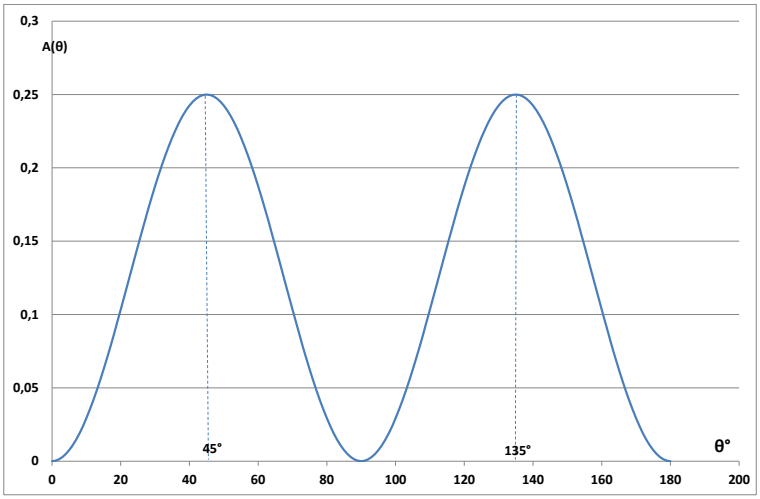


Figure (XX-1) : *Représentation de la répartition en amplitude de la densité volumique d'énergie impulsionnelle suivant θ sur le mode Y_{11} ou Y_{1-1} susceptible de représenter une particule de spin 1*

La densité d'énergie impulsionnelle de rotation présente, en valeur absolue, un maximum dans les directions θ = 45° et θ = 135°. Il est rappelé que dans une approche énergétique et déterministe, la répartition autour de ces valeurs ne représente plus une densité de probabilité, mais une densité volumique d'énergie.

L'énergie impulsionnelle suivant r est portée par la fonction d'onde ψ_3 :

$$\psi_3 = j(\hbar c k_r)\sin(k_t x_t)\left\{-\sin^2\theta f_1'(k_r r)-(\cos^2\theta+1)\frac{f_1(k_r r)}{k_r r}\right\} \qquad \text{(XX-6)}$$

Aucun des termes de la relation (XX-6) séparément n'a pu faire à ce jour l'objet d'une interprétation physique simple.

Le photon constitue un cas particulier important de particule de spin 1. Il s'agit d'une particule sans masse au repos, et il en résulte que dans cette approche énergétique, les fonctions d'ondes qui le décrivent obéissent aux relations suivantes à une constante multiplicative près :

$$\psi_0 = (\hbar\omega) f_1(k_r r)\sin\theta e^{-j\varphi}\cos(k_t x_t)$$
$$\psi_1 = 0$$
$$\psi_2 = (\hbar c k_r)\cos\theta\sin\theta e^{-j\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{-f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{k_r r}\right\} \qquad \text{(XX-7)}$$
$$\psi_3 = (\hbar c k_r)\sin(k_t x_t)\left\{-\sin^2\theta f_1'(k_r r) - (\cos^2\theta + 1)\frac{f_1(k_r r)}{k_r r}\right\}$$

Les échanges d'énergie s'effectuent entre l'énergie ondulatoire portée par le premier spineur, et l'énergie impulsionnelle portée par le second spineur : lorsque la première est maximum $|(\cos(k_t x_t)| = 1)$, la seconde est nulle $(\sin(k_t x_t) = 0)$ et réciproquement.

Dans l'approche énergétique, l'énergie de masse du photon étant nulle, il est impossible de connaître sa position. Lors de sa rencontre avec d'autres particules, il ne peut échanger que de l'énergie impulsionnelle.

II – Particule de spin 1/2

On sait que l'équation de DIRAC est l'équation dont les solutions sont les plus proches du comportement physique de l'électron. On doit donc retrouver dans les solutions exactes à cette équation en coordonnées sphériques, les principales propriétés mises en évidence tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental.

La solution qui semble présenter le plus d'analogie est celle qui repose sur le mode Y_{22} ou $Y_{2\text{-}2}$:

$$\psi_0 = \eta f_2(k_r r)\sin^2\theta e^{-2j\varphi}\sin(k_t x_t) + jk_t f_2(k_r r)\sin^2\theta e^{-2j\varphi}\cos(k_t x_t)$$
$$\psi_1 = 0$$
$$\psi_2 = jk_r\cos\theta\sin^2\theta e^{-2j\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{-f_2'(k_r r) + 2\frac{f_2(k_r r)}{k_r r}\right\} \qquad \text{(XX-8)}$$
$$\psi_3 = jk_r\sin(k_t x_t)\sin\theta e^{-j\varphi}\left\{-\sin^2\theta f_2'(k_r r) - 2(\cos^2\theta + 1)\frac{f_2(k_r r)}{k_r r}\right\}$$

où f_2 représente une fonction de BESSEL sphérique d'ordre 2 :

$$j_2(k_r r) = \left(\frac{3}{(k_r r)^3} - \frac{1}{(k_r r)}\right)\sin(k_r r) - 3\frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} \qquad \text{(XX-9)}$$
$$y_2(k_r r) = -\left(\frac{3}{(k_r r)^3} - \frac{1}{(k_r r)}\right)\cos(k_r r) - 3\frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^2} \qquad \text{(XX-10)}$$

et où nous avons adopté la notation $f_2'(k_r r) = df_2(k_r r)/d(k_r r)$.

Après multiplication par la constante $\hbar c$, chacune des fonctions d'onde a la dimension d'une énergie, et nous ferons comme précédemment, abstraction de la constante de normalisation dans l'analyse de cette solution :

$$\psi_0 = \left(m_0c^2\right)f_2\left(k_r r\right)\sin^2\theta e^{-2j\varphi}\sin\left(k_t x_t\right) + j\left(\hbar\omega\right)f_2\left(k_r r\right)\sin^2\theta e^{-2j\varphi}\cos\left(k_t x_t\right)$$
$$\psi_1 = 0$$
$$\psi_2 = j\left(\hbar c k_r\right)\cos\theta\sin^2\theta e^{-2j\varphi}\sin\left(k_t x_t\right)\left\{-f_2'\left(k_r r\right) + 2\frac{f_2\left(k_r r\right)}{k_r r}\right\} \qquad \text{(XX-11)}$$
$$\psi_3 = j\left(\hbar c k_r\right)\sin\left(k_t x_t\right)\sin\theta e^{-j\varphi}\left\{-\sin^2\theta f_2'\left(k_r r\right) - 2\left(\cos^2\theta + 1\right)\frac{f_2\left(k_r r\right)}{k_r r}\right\}$$

Le premier élément important concerne l'angle de rotation φ : si on impose une rotation de 2π à la fonction d'onde ψ_3, alors les fonctions d'onde ψ_0 et ψ_2 subissent une rotation de 4π.

Le spin ½ de l'électron est souvent présenté en expliquant que le bi-spineur doit effectuer une rotation de 4π avant de retrouver sa position initiale. Il apparaît dans la solution (XX-8) des éléments nouveaux qui indiquent que toutes les composantes de rotation d'un spineur ne varient pas obligatoirement avec la même plage de variation angulaire.

Vu sous cet aspect, il faut effectivement que les composantes ψ_0 et ψ_2 tournent de 4π pour que la composante ψ_3 retrouve son état initial.

Le deuxième élément qui laisse à penser que la solution (XX-8) peut caractériser le fonctionnement interne de l'électron est contenu dans la fonction d'onde ψ_2 :

$$\psi_2 = j\left(\hbar c k_r\right)\cos\theta\sin^2\theta e^{-2j\varphi}\sin\left(k_t x_t\right)\left\{-f_2'\left(k_r r\right) + 2\frac{f_2\left(k_r r\right)}{k_r r}\right\} \qquad \text{(XX-12)}$$

Cette fonction d'onde est porteuse de l'énergie impulsionnelle suivant φ. Puisque la direction en θ est séparable, on peut chercher à savoir dans quelle direction cette énergie implusionnelle suivant φ est maximum, soit donc à résoudre :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\sin^2\theta\right) = -\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta = 0 \qquad \text{(XX-13)}$$

ce qui donne un angle θ_{max} tel que

$$tg\left(\theta_{max}\right) = \sqrt{2} \qquad \text{(XX-14)}$$

soit donc :

$$\theta_{max} = 54{,}73° \qquad \text{(XX-15)}$$

Du point de vue de la densité volumique d'énergie, la dépendance en θ est donnée par la fonction :

$$A(\theta) = \left(\cos\theta\sin^2\theta\right)^2 \qquad \text{(XX-16)}$$

Cette fonction est représentée sur la figure (XX-2) ci-dessous :

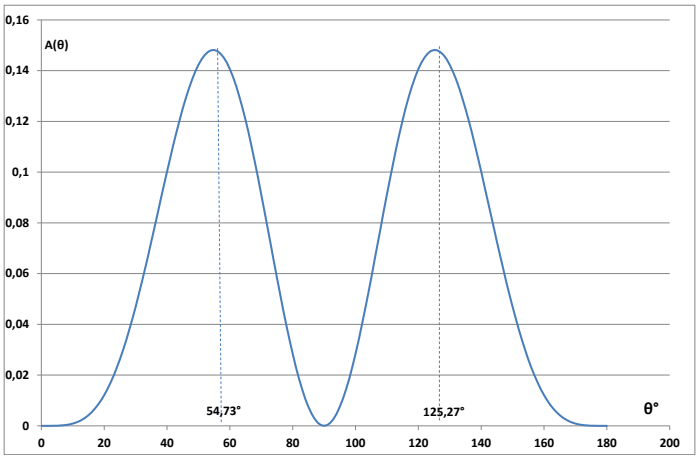


Figure (XX-2) : *Représentation de la répartition en amplitude de la densité volumique d'énergie impulsionnelle suivant θ sur le mode Y_{22} ou Y_{2-2} susceptible de représenter une particule de spin 1/2*

Il apparaît que ces directions correspondent bien aux directions du moment cinétique de l'électron prévues par la quantification du moment cinétique de spin.

III – Particule de spin « 1/n »

On peut rechercher dans les solutions exactes à l'équation de DIRAC sur les modes Y_{nn} ou Y_{n-n}, l'expression générale de la direction dans laquelle le moment cinétique de spin est maximum.

L'énergie impulsionnelle de spin est portée par la fonction d'onde ψ_2 qui est rappelée pour mémoire :

$$\psi_2 = j\cos\theta\sin^n\theta e^{-nj\varphi}\sin(k_t x_t)\left\{-k_r f_n'(k_r r) + n\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\} \qquad \text{(XX-17)}$$

Puisque cette expression est séparable en θ, on peut déterminer la valeur θ_{max} pour laquelle cette énergie impulsionnelle est maximale. Cela revient à résoudre l'équation :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\sin^n\theta\right) = -\sin^{n+1}\theta + n\sin^{n-1}\theta\cos^2\theta = 0 \qquad \text{(XX-18)}$$

ce qui donne un angle θ_{max} tel que

$$tg^2(\theta_{max}) = n \qquad \text{(XX-19)}$$

Il s'avère que cette direction est identique à celle qui est prévue par la quantification du moment cinétique de spin de la mécanique classique pour un spin en « 1/n ». Les guillemets signifient qu'on entre ici dans un domaine pour lequel il n'y a, à la connaissance de l'auteur, aucune particule connue à ce jour possédant cette propriété pour n différent de 1 ou n différent de 2.

Pour le montrer, nous adoptons une quantification du moment cinétique de spin suivant l'axe Oz sous la forme :

$$S_z = \frac{1}{n}\hbar \qquad \text{(XX-20)}$$

La norme S du moment cinétique prévue par la mécanique quantique s'écrit :

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)}\hbar \qquad \text{(XX-21)}$$

Et l'angle θ_{max} est donné par la relation :

$$\cos(\theta_{max}) = \frac{S_z}{S} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{(XX-22)}$$

L'égalité entre l'angle (XX-19) fourni par l'approche énergétique et l'angle (XX-22) fourni par la quantification classique du moment cinétique de spin est donnée par la relation trigonométrique :

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = tg^2\theta + 1 \qquad \text{(XX-23)}$$

XXI

Les courants de DIRAC sphériques

Les solutions exactes à l'équation de DIRAC ne peuvent représenter des solutions physiques que si elles respectent la conservation locale de l'énergie, dont la traduction mathématique s'effectue en exprimant que la quadri-divergence de la densité volumique d'énergie doit être nulle.

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} J^{\mu} = \partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \qquad \text{(XXI-1)}$$

Nous avons vu en coordonnées cartésiennes qu'on pouvait extraire des équations de DIRAC la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\overline{\psi} \gamma^{\mu} \psi \right) = 0 \qquad \text{(XXI-2))}$$

dans laquelle :

$$\overline{\psi} = \left(\psi^{*} \right)^{T} \gamma^{0} = \left(\psi_0^{*}, \psi_1^{*}, \psi_2^{*}, \psi_3^{*} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\psi_0^{*}, \psi_1^{*}, -\psi_2^{*}, -\psi_3^{*} \right) \qquad \text{(XXI-3)}$$

Par identification de (XXI-2) avec (XXI-1), on en déduit le quadri vecteur courant de DIRAC.

$$J^{\mu} = \overline{\psi} \gamma^{\mu} \psi \qquad \text{(XXI-4)}$$

où les γ^{μ} représentent les matrices de DIRAC.

Pour établir les expressions de ces courants en coordonnées sphériques, nous devons utiliser les matrices de DIRAC obtenues dans ce système de coordonnées. Ces matrices sont indicées par les lettres t, r, θ, φ qui représentent les différentielles auxquelles elles s'appliquent.

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXI-5)}$$

$$\gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \sin\theta e^{j\varphi} & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\sin\theta e^{j\varphi} & \cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXI-6)}$$

$$\gamma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \cos\theta e^{j\varphi} & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\cos\theta e^{j\varphi} & -\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXI-7)}$$

$$\gamma_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -je^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & je^{j\varphi} & 0 \\ 0 & je^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -je^{j\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXI-8)}$$

Le détail des expressions analytiques de ces courants est présenté ci-dessous :

<u>composante d'indice t :</u>

$$J^t = \overline{\psi}\gamma_0\psi = \left(\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \left(\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*\right)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

$$J^t = \psi_0^*\psi_0 + \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 \qquad \text{(XXI-9)}$$

<u>composante d'indice r :</u>

$$J^r = \overline{\psi}\gamma_r\psi = \left(\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \sin\theta e^{j\varphi} & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\sin\theta e^{j\varphi} & \cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\psi_2^*\cos\theta + \psi_3^*\sin\theta e^{j\varphi}, \psi_2^*\sin\theta e^{-j\varphi} - \psi_3^*\cos\theta, \psi_0^*\cos\theta + \psi_1^*\sin\theta e^{j\varphi}, \psi_0^*\sin\theta e^{-j\varphi} - \psi_1^*\cos\theta\right)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

$$J^r = \psi_0\left(\psi_2^*\cos\theta + \psi_3^*\sin\theta e^{j\varphi}\right) + \psi_1\left(\psi_2^*\sin\theta e^{-j\varphi} - \psi_3^*\cos\theta\right)$$
$$+ \psi_2\left(\psi_0^*\cos\theta + \psi_1^*\sin\theta e^{j\varphi}\right) + \psi_3\left(\psi_0^*\sin\theta e^{-j\varphi} - \psi_1^*\cos\theta\right)$$

(XXI-10)

<u>composante d'indice θ :</u>

$$J^\theta = \overline{\psi}\frac{\gamma_\theta}{r}\psi = \left(\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*\right)\frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \cos\theta e^{j\varphi} & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\cos\theta e^{j\varphi} & -\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\left(-\psi_2^*\sin\theta + \psi_3^*\cos\theta e^{j\varphi}, \psi_2^*\cos\theta e^{-j\varphi} + \psi_3^*\sin\theta, -\psi_0^*\sin\theta + \psi_1^*\cos\theta e^{j\varphi}, \psi_0^*\cos\theta e^{-j\varphi} + \psi_1^*\sin\theta\right)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

$$rJ^\theta = \psi_0\left(-\psi_2^*\sin\theta + \psi_3^*\cos\theta e^{j\varphi}\right) + \psi_1\left(\psi_2^*\cos\theta e^{-j\varphi} + \psi_3^*\sin\theta\right)$$
$$+ \psi_2\left(-\psi_0^*\sin\theta + \psi_1^*\cos\theta e^{j\varphi}\right) + \psi_3\left(\psi_0^*\cos\theta e^{-j\varphi} + \psi_1^*\sin\theta\right)$$

(XXI-11)

<u>composante d'indice φ :</u>

$$J^\varphi = \overline{\psi}\frac{\gamma_\varphi}{r\sin\theta}\psi = \left(\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*\right)\frac{1}{r\sin\theta}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -je^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & je^{j\varphi} & 0 \\ 0 & je^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -je^{j\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

$$J^\varphi = \frac{j}{r\sin\theta}\left(\psi_3^* e^{j\varphi}, -\psi_2^* e^{-j\varphi}, \psi_1^* e^{j\varphi}, -\psi_0^* e^{-j\varphi}\right)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXI-12)}$$

$$r\sin\theta J^\varphi = j\left(\psi_0\psi_3^* e^{j\varphi} - \psi_1\psi_2^* e^{-j\varphi} + \psi_2\psi_1^* e^{j\varphi} - \psi_3\psi_0^* e^{-j\varphi}\right)$$

Ces expressions analytiques permettent de vérifier comment les solutions exactes obtenues respectent la conservation locale de l'énergie. Les calculs peuvent être

particulièrement laborieux. Quelques éléments de calculs sont présentés ci-dessous, sur l'exemple de la solution en rotation obtenue dans un chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = 0\\
&\psi_1 = (\eta - k_t) f_n(k_r r) \sin^n\theta \exp j(k_t x_t + n\varphi)\\
&\psi_2 = j\exp j(k_t x_t + (n-1)\varphi) \sin^{n-1}\theta \left\{ -\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2\theta + 1)\frac{f_n(k_r r)}{r} \right\}\\
&\psi_3 = j\cos\theta \sin^n\theta \exp j(k_t x_t + n\varphi) \left\{ k_r f_n'(k_r r) - n\frac{f_n(k_r r)}{r} \right\}
\end{aligned} \qquad \text{(XXI-13)}$$

<u>Calcul de J^t :</u>

$$\begin{aligned}
&J^t = \psi_0^*\psi_0 + \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi\\
&J^t = (\eta - k_t)^2 \{f_n(k_r r)\sin^n\theta\}^2 + k_r^2 \left\{ -\sin^{n+1}\theta f_n'(k_r r) - n\sin^{n-1}\theta(\cos^2\theta + 1)\frac{f_n(k_r r)}{k_r r} \right\}^2\\
&+ (\cos\theta \sin^n\theta)^2 k_r^2 \left\{ f_n'(k_r r) - n\frac{f_n(k_r r)}{k_r r} \right\}^2
\end{aligned}$$

(XXI-14)

Sur ce mode particulier, la densité volumique d'énergie totale ne dépend ni du temps, ni de la variable spatiale φ.

<u>Calcul de J^r :</u>

$$\begin{aligned}
J^r &= \psi_0(\psi_2^*\cos\theta + \psi_3^*\sin\theta e^{j\varphi}) + \psi_1(\psi_2^*\sin\theta e^{-j\varphi} - \psi_3^*\cos\theta)\\
&+ \psi_2(\psi_0^*\cos\theta + \psi_1^*\sin\theta e^{j\varphi}) + \psi_3(\psi_0^*\sin\theta e^{-j\varphi} - \psi_1^*\cos\theta)
\end{aligned} \qquad \text{(XXI-15)}$$

Pour la solution examinée, on a $\psi_0 = 0$:

$$J^r = \psi_1(\psi_2^*\sin\theta e^{-j\varphi} - \psi_3^*\cos\theta) + \psi_2(\psi_1^*\sin\theta e^{j\varphi}) + \psi_3(-\psi_1^*\cos\theta) \qquad \text{(XXI-16)}$$

Les exponentielles s'annulent par conjugaison dans les produits des fonctions d'ondes. Après cette annulation, il ne reste dans ψ_2 et ψ_3 que des termes purement imaginaires. On en déduit :

$$J^r = 0 \qquad \text{(XXI-17)}$$

<u>Calcul de J^θ :</u>

$$\begin{aligned}
rJ^\theta &= \psi_0(-\psi_2^*\sin\theta + \psi_3^*\cos\theta e^{j\varphi}) + \psi_1(\psi_2^*\cos\theta e^{-j\varphi} + \psi_3^*\sin\theta)\\
&+ \psi_2(-\psi_0^*\sin\theta + \psi_1^*\cos\theta e^{j\varphi}) + \psi_3(\psi_0^*\cos\theta e^{-j\varphi} + \psi_1^*\sin\theta)
\end{aligned} \qquad \text{(XXI-18)}$$

Pour la solution examinée, on a $\psi_0 = 0$:

$$rJ^{\theta} = \psi_1\left(\psi_2^* \cos\theta e^{-j\varphi} + \psi_3^* \sin\theta\right) + \psi_2\left(\psi_1^* \cos\theta e^{j\varphi}\right) + \psi_3\left(\psi_1^* \sin\theta\right) \qquad \text{(XXI-19)}$$

Les exponentielles s'annulent par conjugaison dans les produits des fonctions d'ondes. Après cette annulation, il ne reste dans ψ_2 et ψ_3 que des termes purement imaginaires. On en déduit :

$$J^{\theta} = 0 \qquad \text{(XXI-20)}$$

<u>Calcul de J^{φ} :</u>

$$r\sin\theta J^{\varphi} = j\left(\psi_0\psi_3^* e^{j\varphi} - \psi_1\psi_2^* e^{-j\varphi} + \psi_2\psi_1^* e^{j\varphi} - \psi_3\psi_0^* e^{-j\varphi}\right) \qquad \text{(XXI-21)}$$

Pour la solution examinée, on a $\psi_0 = 0$:

$$r\sin\theta J^{\varphi} = j\left(-\psi_1\psi_2^* e^{-j\varphi} + \psi_2\psi_1^* e^{j\varphi}\right) \qquad \text{(XXI-22)}$$

On obtient :

$$J^{\varphi} = 2\left(k_t - \eta\right)\frac{f_n(k_r r)}{r}\sin^{2n-2}\theta\left\{\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) + n\left(\cos^2\theta + 1\right)\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\} \qquad \text{(XXI-23)}$$

Puisque nous sommes en possession des courants de DIRAC, nous pouvons maintenant vérifier si ces courants qu'on peut associer à l'évolution de la densité d'énergie dans le temps et dans l'espace vérifient bien la relation de conservation locale de l'énergie.

Cette relation s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial J^t}{\partial x_t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 J^r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta J^{\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial J^{\varphi}}{\partial\varphi} = 0 \qquad \text{(XXI-24)}$$

Elle est vérifiée, car chacun des termes de cette divergence, pris séparément, est nul. Une analyse un peu plus détaillée montre que sur ces modes en rotation :

- La densité volumique d'énergie totale J^t ne dépend pas du temps, ni de la variable spatiale φ. Par contre, elle varie en fonction de r et de θ, et en fonction des modes qui sont excités.
- Les courants de DIRAC suivant r et θ étant nuls, il n'y a pas de flux d'énergie suivant ces directions.
- Le courant de Dirac suivant φ est non nul, ce qui traduit l'existence d'un flux d'énergie en relation avec la rotation angulaire de l'énergie dans cette direction. Ce flux d'énergie est uniforme car il ne dépend pas de φ. Il peut être rattaché à la rotation à vitesse constante de l'énergie suivant cette direction.

XXII

Equation de Dirac généralisée en coordonnées sphériques

L'obtention de solutions à l'équation de Dirac sous la forme de modes sphériques amène naturellement à s'interroger sur l'existence de telles solutions lorsque la particule est plongée dans un quadri-potentiel uniforme et constant.

Ce problème a déjà été traité en coordonnées cartésiennes au chapitre XII. Nous proposons de le reprendre en coordonnées sphériques dans une approche un peu différente.

Il nous faut dans un premier temps déterminer l'équation de conservation de l'énergie entre deux référentiels liés par la relativité restreinte.

Nous adoptons comme point de départ un système de coordonnées cartésiennes et la forme de l'équation de KLEIN-GORDON invariante sous la transformation de LORENTZ :

$$\left\{\left(j\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{q}{\hbar}A_{\mu}\right)\left(j\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{q}{\hbar}A_{\mu}\right)\right\}(\psi)=\left(\frac{m_0c}{\hbar}\right)^2(\psi) \qquad \text{(XXII-1)}$$

Dans cette relation, les A_{μ} représentent les composantes du quadri-potentiel (ϕ/c, A_x, A_y, A_z). Afin d'alléger l'écriture nous posons, comme au chapitre XII :

$$\eta_t=\frac{q\phi}{\hbar c} \qquad \eta_x=\frac{qA_x}{\hbar} \qquad \eta_y=\frac{qA_y}{\hbar} \qquad \eta_z=\frac{qA_z}{\hbar} \qquad \eta=\frac{m_0c}{\hbar} \qquad \text{(XXII-2)}$$

Le développement de l'équation (XXII-1) dans une métrique (+,-,-,-) nous donne :

$$\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}-2j\eta_t\frac{\partial}{\partial x_t}+\eta_t^2\right)-\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2j\eta_x\frac{\partial}{\partial x}+\eta_x^2\right)\\ -\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2j\eta_y\frac{\partial}{\partial y}+\eta_y^2\right)-\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2j\eta_z\frac{\partial}{\partial z}+\eta_z^2\right)\end{array}\right\}(\psi)=\eta^2(\psi) \qquad \text{(XXII-3)}$$

Soit encore :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}-2j\eta_t\frac{\partial}{\partial x_t}+\eta_t^2\right)(\psi)=\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2j\eta_x\frac{\partial}{\partial x}+\eta_x^2\right)+\\ \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2j\eta_y\frac{\partial}{\partial y}+\eta_y^2\right)+\\ \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2j\eta_z\frac{\partial}{\partial z}+\eta_z^2\right)\end{array}\right\}(\psi)+\eta^2(\psi) \qquad \text{(XXII-4)}$$

Le potentiel scalaire affecte le terme à gauche du signe égal, tandis que le potentiel vecteur affecte le terme de droite. Nous allons considérer séparément ces deux cas.

I – Le potentiel scalaire

Nous nous intéressons dans cette partie à l'effet du potentiel scalaire, et nous travaillons avec un potentiel vecteur nul, ce qui conduit à poser $\eta_x = \eta_y = \eta_z = 0$ dans l'équation (XXII-4) :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}-2j\eta_t\frac{\partial}{\partial x_t}+\eta_t^2\right)(\psi)=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\psi)+\eta^2(\psi) \qquad \text{(XXII-5)}$$

L'introduction des coordonnées sphériques fournit le laplacien sous la forme :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}-2j\eta_t\frac{\partial}{\partial x_t}+\eta_t^2\right)(\psi)=-\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}(\psi)+\eta^2(\psi)$$

(XXII-6)

Il ressort de l'analyse des modes sphériques du chapitre XVI que les modes stationnaires doivent vérifier la relation :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}-2j\eta_t\frac{\partial}{\partial x_t}+\eta_t^2\right)(\psi)=\left(k_r^2+\eta^2\right)(\psi) \qquad \text{(XXII-7)}$$

Il apparaît alors une remarque déjà formulée d'une autre manière au chapitre XII sur la base d'observations relatives au système linéaire XII-11,12,13,14 : il est impossible de trouver une solution stationnaire en $\sin(k_t x_t)$ ou $\cos(k_t x_t)$ qui permette d'obtenir une équation de conservation de l'énergie déduite de (XXII-7).

Les solutions possibles apparaissent sous la forme :

$$\cos(k_t x_t)\pm j\sin(k_t x_t)=\exp(\pm jk_t x_t) \qquad \text{(XXII-8)}$$

Elles traduisent l'excitation de modes en quadrature dans des échanges entre énergie positive et énergie négative.

En reportant cette relation (XXII-8) dans (XXII-7), on obtient la relation de conservation de l'énergie qui doit être vérifiée par les solutions du système de Dirac en coordonnées sphérique dans un potentiel scalaire :

$$\left(k_t^2 \pm 2k_t\eta_t + \eta_t^2\right) = \left(k_r^2 + \eta^2\right) \qquad \text{(XXII-9)}$$

Soit encore :

$$\left(k_t \pm \eta_t\right)^2 = \left(k_r^2 + \eta^2\right) \qquad \text{(XXII-10)}$$

Il s'agit de la relation obtenue au chapitre XII, transposée en coordonnées sphériques.

Le système de Dirac généralisé au potentiel scalaire en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\begin{aligned}
(\eta+\eta_t)\psi_0 &= j\left\{\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + \cos\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi}\right\}\\
(\eta+\eta_t)\psi_1 &= j\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \cos\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\right\}\\
(\eta-\eta_t)\psi_2 &= j\left\{-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - \cos\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial r} - \sin\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \cos\theta e^{-j\varphi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) + \frac{je^{-j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\right\}\\
(\eta-\eta_t)\psi_3 &= j\left\{-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - \sin\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\cos\theta e^{j\varphi}\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) - \frac{je^{j\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi}\right\}
\end{aligned}$$

(XXII-11)

En utilisant la solution exacte XXI-13 par exemple, on obtient la solution exacte dans un potentiel scalaire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 0\\
\psi_1 &= (\eta - k_t - \eta_t) f_n(k_r r)\sin^n\theta \exp j(k_t x_t + n\varphi)\\
\psi_2 &= -j\exp j(k_t x_t + (n-1)\varphi)\sin^{n-1}\theta\left\{\sin^2\theta k_r f_n'(k_r r) + n\left(\cos^2\theta + 1\right)\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}\\
\psi_3 &= j\cos\theta\sin^n\theta\exp j(k_t x_t + n\varphi)\left\{k_r f_n'(k_r r) - n\frac{f_n(k_r r)}{r}\right\}
\end{aligned} \qquad \text{(XXII-12)}$$

Elle est associée à l'équation de conservation de l'énergie :

$$\left(k_t + \eta_t\right)^2 = \left(k_r^2 + \eta^2\right) \qquad \text{(XXII-13)}$$

II – Le potentiel vecteur

De (XXII-4), nous déduisons l'équation de KLEIN-GORDON écrites en coordonnées cartésiennes pour un potentiel scalaire nul et un potentiel vecteur constant :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}(\psi) = \left\{\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2j\eta_x\frac{\partial}{\partial x} + \eta_x^2\right) + \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2j\eta_y\frac{\partial}{\partial y} + \eta_y^2\right) + \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2j\eta_z\frac{\partial}{\partial z} + \eta_z^2\right) + \eta^2\right\}(\psi)$$

(XXII-14)

Soit encore en réarrangeant les termes :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}(\psi)=\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2j\frac{\partial}{\partial x}\eta_x-2j\frac{\partial}{\partial y}\eta_y-2j\frac{\partial}{\partial z}\eta_z+\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2+\eta^2\right)(\psi)$$

(XXII-15)

Le passage aux coordonnées sphériques s'effectue en substituant le laplacien, ainsi que les dérivées partielles déjà rencontrées au chapitre XV :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial x}&=\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi\\
\frac{\partial\psi}{\partial y}&=\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi\\
\frac{\partial\psi}{\partial z}&=\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\sin\theta
\end{aligned}$$

(XXII-16)

Les composantes relatives au potentiel vecteur sont transformées suivant les relations :

$$\begin{aligned}
\eta_x&=\frac{qA_x}{\hbar}=\frac{qA_r}{\hbar}\sin\theta\cos\varphi=\eta_r\sin\theta\cos\varphi\\
\eta_y&=\frac{qA_y}{\hbar}=\frac{qA_r}{\hbar}\sin\theta\sin\varphi=\eta_r\sin\theta\cos\varphi\\
\eta_z&=\frac{qA_z}{\hbar}=\frac{qA_r}{\hbar}\cos\theta=\eta_r\cos\theta
\end{aligned}$$

(XXII-17)

On en déduit l'équation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques dans un potentiel vecteur :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}(\psi)=\left(\begin{aligned}
&-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\
&-2j\left(\frac{\partial}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi-\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi\right)\eta_r\sin\theta\cos\varphi\\
&-2j\left(\frac{\partial}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi\right)\eta_r\sin\theta\sin\varphi\\
&-2j\left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r}\sin\theta\right)\eta_r\cos\theta\\
&+(\eta_r\sin\theta\cos\varphi)^2+(\eta_r\sin\theta\sin\varphi)^2+(\eta_r\cos\theta)^2+\eta^2
\end{aligned}\right)(\psi)$$

(XXII-18)

Après réduction des termes qui s'annulent, il reste :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}(\psi)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \\ -2j\frac{\partial}{\partial r}\eta_r+\eta_r^2+\eta^2 \end{pmatrix}(\psi) \qquad \text{(XXII-19)}$$

Si nous exigeons que la fonction d'onde ψ se présente sous la forme de modes stationnaires sphériques, cela conduit à l'expression suivante de conservation de l'énergie :

$$k_t^2(\psi)=\left(k_r^2-2j\frac{\partial}{\partial r}\eta_r+\eta_r^2+\eta^2\right)(\psi) \qquad \text{(XXII-20)}$$

Cette relation est complètement analogue à la relation (XXII-7) obtenue pour le potentiel scalaire.

Il apparaît alors une difficulté qui n'a pu être surmontée par l'auteur : la dépendance en r des fonctions de BESSEL sphériques présentes dans la solution stationnaire ne permet pas de rendre la relation de conservation de l'énergie (XXII-20) indépendante de r. Il s'ensuit qu'aucune formulation d'une solution exacte à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques et sous un potentiel vecteur constant n'a pu être formulée.

XXIII

Conclusion de la troisième partie

I – Sur la conservation de l'énergie

L'importance de cette conservation a été maintes fois rappelée dans ce manuscrit. Elle est de deux sortes : l'une porte sur la conservation de l'énergie lors d'un changement de référentiel galiléen, l'autre sur la conservation locale de l'énergie. Les deux contribuent à la cohérence des solutions présentées.

I-1 la conservation de l'énergie par changement de référentiel

Elle est liée au fait que la pseudo-norme du quadrivecteur impulsion énergie :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} m\dfrac{dx}{dt} \\ m\dfrac{dy}{dt} \\ m\dfrac{dz}{dt} \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \dfrac{E}{c} \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIII-1)}$$

qui s'exprime explicitement sous la forme :

$$E^2 - p^2c^2 = cte \qquad \text{(XXIII-2)}$$

est une constante qui ne dépend pas du référentiel galiléen dans lequel elle est évaluée. Cette constante étant égale à l'énergie de la masse au repos élevée au carré, on en déduit que dans tout référentiel galiléen dans lequel la particule est susceptible d'évoluer, la relation suivante est vérifiée :

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \qquad \text{(XXIII-3)}$$

Dans le référentiel dans lequel elle est au repos, son énergie impulsionnelle est nulle, et son énergie totale est égale à son énergie de masse. Dans un référentiel dans lequel elle n'est plus au repos, son énergie impulsionnelle prend une valeur finie qui accroît son énergie totale dans le rapport donné par le respect de la relation (XXIII-2) ou (XXIII-3) ci-dessus.

Lorsqu'on transpose ces notions à la mécanique quantique, on obtient la relation qui traduit les mêmes phénomènes de conservation énergétique par changement de référentiel :

$$\hbar^2 c^2 k_t^2 = \hbar^2 c^2 \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) + \left(m_0 c^2\right)^2 \qquad \text{(XXIII-4)}$$

Soit encore après division des deux membres de l'égalité par $\hbar^2 c^2$;

$$k_t^2 = \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) + \eta^2 \qquad \text{(XXIII-5)}$$

Lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre référentiel galiléen, cette relation exprime le fait que dans les variations des 3 sortes d'énergies différentes, l'énergie de masse reste constante, tandis que l'énergie impulsionnelle et l'énergie ondulatoire varient dans les proportions données par la relation (XXIII-4)

Parce que l'équation de DIRAC relativiste :

$$\left(j\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\psi\left(x^\mu\right) = 0 \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \qquad \text{(XXIII-6)}$$

est invariante par changement de référentiel galiléen, cela impose de fait que les solutions qui s'expriment en fonction de k_t, k_x, k_y, k_z, m_0, vérifient l'équation de conservation de l'énergie (XXIII-4).

II – Sur la forme imaginaire des solutions de l'équation de DIRAC

Les solutions de l'équation de DIRAC sont représentées par un bispineur. Il est admis que chacun de ces spineurs représente pour l'un la particule, pour l'autre son antiparticule.

Dès lors que la particule est en mouvement, il apparaît que les deux spineurs ne sont plus indépendants, mais étroitement corrélés, dans une relation dont le sens physique échappe à la mécanique quantique classique. En particulier, la présence de termes imaginaires ne trouve aucune explication satisfaisante, si on admet que les fonctions d'onde élevées au carré représentent des densités de probabilité.

Dans une approche énergétique, les fonctions d'onde élevées au carré sont homogènes à une densité volumique d'énergie. Or toute la physique est construite autour d'une représentation énergétique signée, qui peut être positive ou négative. On admet par exemple que l'énergie totale d'un satellite en orbite autour de la terre est négative, et on justifie par là le fait qu'il ne puisse échapper à l'attraction terrestre. L'analyse présentée en première partie montre également que les deux spineurs qui sont solutions de l'équation de DIRAC ont une énergie de masse opposée lorsque la particule est au repos. Dès lors, si l'on considère une quantité qui représente la racine carré de cette énergie, ou plus exactement la racine carré de la densité volumique d'énergie, il n'y a aucune inquiétude à voir apparaître le nombre complexe j=racine(-1) qui indique simplement qu'il s'agit d'une quantité relative à une énergie négative. Ainsi, dans les échanges d'énergie que traduisent les solutions sous formes de modes stationnaires, la présence du nombre complexe j= racine(-1) fait simplement référence à une énergie qui doit être comptée négativement.

Dans une approche énergétique, les courants de DIRAC prennent un sens physique clair : ils sont homogènes à une densité volumique d'énergie, et vérifient ainsi naturellement l'équation de conservation locale de l'énergie.

III – Sur la notion d'énergie négative

Si on peut être convaincu par le paragraphe précédent qu'il est possible d'utiliser une représentation signée de l'énergie, il apparaît que le concept d'énergie négative qui est utilisé dans cette approche énergétique doit être explicité davantage car sa signification physique n'est pas claire.

Dans ce document, on le trouve pour la première fois dans le formalisme classique de résolution de l'équation de Dirac donné par les relations (III-12) et (III-13) qui relient les deux spineurs lorsque la particule est au repos. Ces deux relations sont obtenues dans le cas particulier où la dépendance temporelle des spineurs est en exp(-jωt). Elles sont rappelées pour mémoire ci-dessous :

$$E\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}mc^2 & 0\\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \qquad \text{(XXIII-7)}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}E(\varphi)&=mc^2(\varphi)\\ E(\chi)&=-mc^2(\chi)\end{aligned} \qquad \text{(XXIII-8)}$$

Le signe – qui apparaît sur l'énergie associée au second spineur conduit à penser que ce spineur décrit le comportement de l'antiparticule. Cependant, le comportement de l'antiparticule de l'électron montre que son énergie de masse est identique à celle de l'électron : seule sa charge a changé de signe.

Le signe – qui est présent devant l'énergie de masse ne semble donc pas pouvoir être associé à la description de l'énergie de masse d'une particule d'antimatière.

Dès lors, se pose de manière claire, le sens physique qu'on doit lui attribuer dans cette approche énergétique.

Nous proposons de développer une interprétation calquée sur un exemple simple et concret de la physique classique. Cette interprétation devra être considérée avec prudence tant qu'elle n'aura pas reçue d'éléments complémentaires en sa faveur de la part de la communauté scientifique.

L'exemple qui va être développé concerne l'énergie électrique.

Considérons un circuit RLC classique. Si on charge la capacité avant la fermeture de ce circuit, l'énergie emmagasinée par la capacité effectue des allers-retours entre la capacité et la self. A chaque aller-retour, une fraction de l'énergie est dissipée dans la résistance R jusqu'à la disparition totale de l'énergie et donc des oscillations.

Un des moyens permettant l'entretien des oscillations consiste à inclure dans ce circuit une résistance négative (-R). Cette résistance peut être construite à l'aide d'un amplificateur opérationnel qui délivre une tension proportionnelle à l'intensité dans un rapport (-R) : il s'agit donc d'un dispositif extrêmement concret.

La puissance P_R dissipée dans la résistance R à chaque instant t s'écrit simplement :

$$P_R(t) = R\, I^2(t) \qquad \text{(XXIII-9)}$$

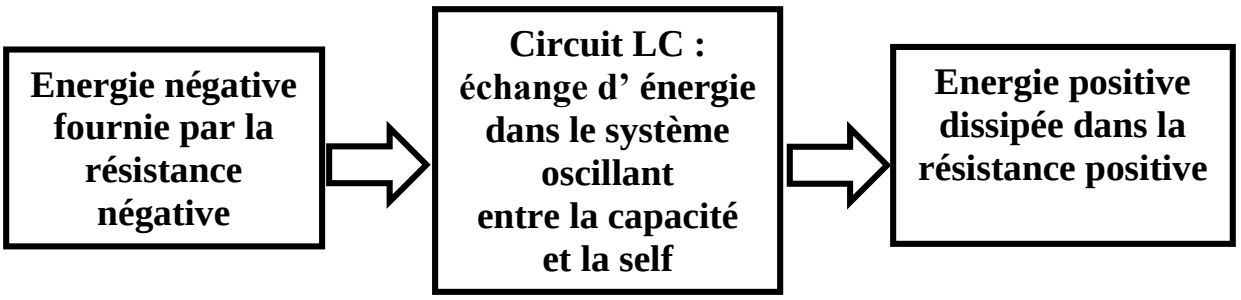
et il est apparent que cette puissance est comptée positivement.

La puissance $P_{(-R)}$ fournie par la résistance négative à chaque instant t s'écrit par conséquent :

$$P_{(-R)}(t) = -R\, I^2(t) \qquad \text{(XXIII-10)}$$

et il est apparent que cette puissance est comptée négativement.

Un tel dispositif peut être schématisé de la manière suivante :



L'interprétation physique qui peut en être faite est la suivante : une puissance positive exprime une puissance qui disparaît du système qui échange de l'énergie, tandis qu'une puissance négative est une puissance qui est introduite dans ce système. Dans ce cas simple, la conservation de l'énergie présente dans le système à tout instant implique :

$$P_R(t) + P_{(-R)}(t) = R\, I^2(t) - R\, I^2(t) = 0 \qquad \text{(XXIII-11)}$$

Si maintenant on s'intéresse, par analogie avec les fonctions d'onde, à des grandeurs qui représentent la racine carrée d'une puissance, ces grandeurs sont définies par les relations :

$$\begin{aligned} \psi_+ &= \sqrt{P_R(t)} = \sqrt{RI^2(t)} \\ \psi_- &= \sqrt{P_{(-R)}(t)} = \sqrt{-RI^2(t)} = j\sqrt{RI^2(t)} \end{aligned} \qquad \text{(XXIII-12)}$$

On ne peut plus exprimer simplement à l'aide des grandeurs ψ_+ et ψ_- la relation de conservation de l'énergie (XXIII-11) ci-dessus. Si on veut malgré tout exprimer la somme ou la différence de ces grandeurs qui sont échangées dans le système, on est amené à considérer des expressions du type :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_+ + \psi_- = \sqrt{P_R(t)} + \sqrt{P_{(-R)}(t)} = \sqrt{RI^2(t)} + j\sqrt{RI^2(t)} \\ \psi^* &= \psi_+ - \psi_- = \sqrt{P_R(t)} - \sqrt{P_{(-R)}(t)} = \sqrt{RI^2(t)} - j\sqrt{RI^2(t)} \end{aligned} \qquad \text{(XXIII-13)}$$

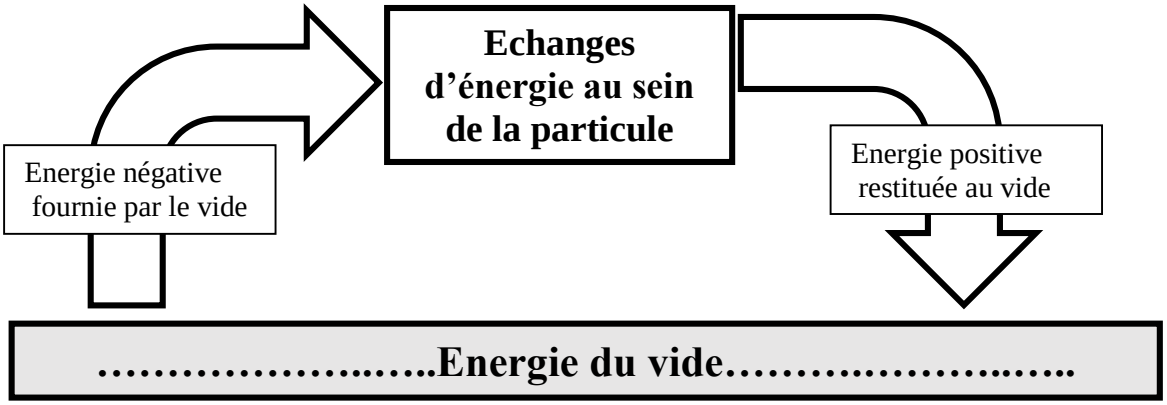
La puissance P(t) mise en jeux dans les échanges s'exprime en multipliant la grandeur imaginaire précédente par son conjugué :

$$P(t) = \frac{1}{2}\psi\psi^* = RI^2(t) \qquad \text{(XXIII-14)}$$

De par son expression, on fait le constat que le calcul de cette puissance échangée donne un résultat toujours positif : nous obtenons une grandeur dont le comportement est analogue aux courants de Dirac.

Lorsqu'on tente de transposer l'interprétation énergétique ci-dessus aux échanges d'énergie quantique sur des modes stationnaires, il vient immédiatement une question incontournable : d'où provient l'énergie introduite dans la particule (énergie négative), et où va l'énergie qui s'en échappe (énergie positive) ?

Il semble que la seule réponse possible soit un échange avec l'énergie du vide, dont l'existence ne semble plus guère faire de doute. Sous cette hypothèse, les échanges d'énergie pourraient être représentés schématiquement de la manière suivante :



Un schéma de cette nature semble compatible avec la connaissance actuelle des fluctuations quantiques du vide, et donne un sens physique clair et sans ambiguïté à la notion d'énergie positive et d'énergie négative. Il exprime le fait que dans le monde quantique, les particules existeraient et se propageraient au moyen d'échanges permanents d'énergie avec l'énergie du vide. On pourrait voir dans ces échanges le support de propagation permettant aux photons de se propager dans le vide sur des distances de plusieurs années lumières.

IV – Conclusion

La mécanique quantique ne pourra se satisfaire très longtemps encore de l'impasse dans laquelle elle est maintenue par la méconnaissance des phénomènes physiques sous-jacents à la dualité onde-corpuscule.

Parce que l'équation de DIRAC est l'équation qui décrit le mieux, à ce jour, le comportement des particules qui composent l'infiniment petit, on peut penser en tirer des informations significatives si on est capable d'en extraire des solutions exactes.

Le traitement général de cette équation tel qu'il est adopté aujourd'hui, et tel qu'il est développé en première partie, ne livre pas toutes les informations exploitables de cette équation.

Certaines solutions ne sont atteignables qu'au prix de conditions supplémentaires portant sur la conservation de l'énergie. En associant ces conditions à l'hypothèse de solutions sous la forme de modes stationnaires, il est possible de montrer qu'on peut construire une vision énergétique et déterministe de la physique de l'infiniment petit.

L'analyse des solutions en coordonnées cartésiennes permet de vérifier la cohérence complète de ces solutions avec la vision probabiliste de l'Ecole de Copenhague.

L'obtention de solutions en coordonnées sphériques confirme cette cohérence avec plusieurs éléments théoriques et expérimentaux.

La dualité onde-corpuscule est confirmée comme un échange d'énergie entre énergie de masse, et énergie ondulatoire. La présence de termes imaginaires dans ces échanges montre qu'il y a en permanence des transferts d'énergie entre énergie positive et énergie négative. C'est cet échange, pris comme hypothèse plausible, qui a permis l'accès par un raisonnement heuristique à des solutions exactes de l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques.

La notion de spin ½, et son étrange rotation de 4π pour retrouver l'état initial trouve une explication physique extrêmement simple dans une des solutions exactes : lorsque la composante qui porte l'énergie impulsionnelle suivant r tourne de 2π pour revenir à son point de départ, la composante qui porte l'énergie impulsionnelle suivant φ et la composante qui porte la dualité onde-corpuscule tournent de 4π.

Le principe d'incertitude n'est pas aussi exclusif qu'en coordonnées cartésiennes, mais on peut noter qu'à un instant donné, l'énergie de masse et l'énergie impulsionnelle ne sont jamais maximale au même endroit, ce qui suffit à montrer qu'en un point de l'espace on ne peut avoir la totalité de l'information concernant ces deux types d'énergie. Puisque nous ne pouvons avoir une mesure de l'impulsion ou de la position que par un échange d'énergie avec ces deux quantités, ces mesures sont nécessairement entachées d'une incertitude lorsqu'elles sont effectuées en un même point de l'espace.

Quatrième partie

Compléments

XXIV

L'équation de Dirac dans un potentiel variable : approche classique

Les solutions modales à l'équation de DIRAC généralisée qui ont été proposée dans les chapitres précédents ont été élaborées dans un cadre très réducteur qui est celui d'un potentiel uniforme et constant, c'est-à-dire indépendant de l'espace et du temps. On sait que dans ces conditions le champ électromagnétique associé est nul. Pour autant, la présence du potentiel provoque des modifications d'énergie de la particule qui sont mises en évidence dans les solutions exactes qui ont été élaborées.

Nous souhaitons désormais progresser vers des solutions exactes lorsque la particule est plongée dans un potentiel variable dans l'espace et dans le temps. De telles solutions devraient nous permettre d'appréhender les changements modaux qui apparaissent dans la particule en présence d'un champ électrique et magnétique uniforme ou variable dans l'espace et dans le temps.

Pour avancer vers de telles solutions, il est nécessaire de s'appuyer sur le formalisme classique existant, dans lequel on introduira les contraintes imposées par les solutions modales. Ce formalisme est le plus souvent présenté sous une forme extrêmement condensée ce qui permet une préhension globale des phénomènes, mais masque souvent des éléments d'une grande complexité. Ces éléments sont repris de manière détaillée ci-dessous, afin de pouvoir leurs apporter les modifications induites par les solutions stationnaires dans les chapitres suivants.

Nous adoptons comme point de départ le système de DIRAC pour une particule placée dans un potentiel quelconque, ce qui signifie que chaque composante du potentiel peut dépendre des variables d'espace et de temps :

$$\eta\psi_0 = j\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + j\frac{q\phi}{\hbar}\psi_0\right) + j\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + j\frac{qA_x}{\hbar}\psi_3\right) + \left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_3\right) + j\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial z} + j\frac{qA_z}{\hbar}\psi_2\right)$$

$$\eta\psi_1 = j\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + j\frac{q\phi}{\hbar}\psi_1\right) + j\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + j\frac{qA_x}{\hbar}\psi_2\right) - \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_2\right) - j\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial z} + j\frac{qA_z}{\hbar}\psi_3\right)$$

$$\eta\psi_2 = -j\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} + j\frac{q\phi}{\hbar}\psi_2\right) - j\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + j\frac{qA_x}{\hbar}\psi_1\right) - \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_1\right) - j\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial z} + j\frac{qA_z}{\hbar}\psi_0\right)$$

$$\eta\psi_3 = -j\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} + j\frac{q\phi}{\hbar}\psi_3\right) - j\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + j\frac{qA_x}{\hbar}\psi_0\right) + \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{qA_y}{\hbar}\psi_0\right) + j\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + j\frac{qA_z}{\hbar}\psi_1\right)$$

(XXIV-1)

On conserve, comme dans le reste du document, la notation abrégée :

$$\eta_t = \frac{q\phi}{\hbar c} \qquad \eta_x = \frac{qA_x}{\hbar} \qquad \eta_y = \frac{qA_y}{\hbar} \qquad \eta_z = \frac{qA_z}{\hbar} \tag{XXIV-2}$$

Dans cette notation, les composantes du potentiel sont reliées au champ électromagnétique par les relations suivantes :

- Pour le champ magnétique :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\left(\vec{A}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{XXIV-3}$$

Pour le champ électrique :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\overrightarrow{\mathrm{Grad}}(\phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial \phi}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{XXIV-4}$$

Afin de mettre en évidence le comportement du bi-spineur, on réarrange le système (XXIV-1) ci-dessus sous la forme :

$$\begin{aligned}
j\frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} - \eta_t \psi_0 &= \eta \psi_0 - j\frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \eta_x \psi_3 - \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - j\eta_y \psi_3 - j\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \eta_z \psi_2 \\
j\frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} - \eta_t \psi_1 &= \eta \psi_1 - j\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \eta_x \psi_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + j\eta_y \psi_2 + j\frac{\partial \psi_3}{\partial z} - \eta_z \psi_3 \\
j\frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} - \eta_t \psi_2 &= -\eta \psi_2 - j\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \eta_x \psi_1 - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - j\eta_y \psi_1 - j\frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \eta_z \psi_0 \\
j\frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} - \eta_t \psi_3 &= -\eta \psi_3 - j\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \eta_x \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + j\eta_y \psi_0 + j\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \eta_z \psi_1
\end{aligned} \tag{XXIV-5}$$

Dès lors, si on pose :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \varphi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \chi = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIV-6)}$$

le système de Dirac se décompose en deux systèmes couplés :

$$j\left(\frac{\partial}{\partial x_t} + j\eta_t\right)\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \eta\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} - j\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial z} + j\eta_z\right) & \left(\frac{\partial}{\partial x} + j\eta_x\right) - j\left(\frac{\partial}{\partial y} + j\eta_y\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + j\eta_x\right) + j\left(\frac{\partial}{\partial y} + j\eta_y\right) & -\left(\frac{\partial}{\partial z} + j\eta_z\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

$$j\left(\frac{\partial}{\partial x_t} + j\eta_t\right)\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = -\eta\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} - j\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial z} + j\eta_z\right) & \left(\frac{\partial}{\partial x} + j\eta_x\right) - j\left(\frac{\partial}{\partial y} + j\eta_y\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + j\eta_x\right) + j\left(\frac{\partial}{\partial y} + j\eta_y\right) & -\left(\frac{\partial}{\partial z} + j\eta_z\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

(XXIV-7)

On pose pour alléger l'écriture :

$$M = -j\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial z} + j\eta_z\right) & \left(\frac{\partial}{\partial x} + j\eta_x\right) - j\left(\frac{\partial}{\partial y} + j\eta_y\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + j\eta_x\right) + j\left(\frac{\partial}{\partial y} + j\eta_y\right) & -\left(\frac{\partial}{\partial z} + j\eta_z\right) \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIV-8)}$$

Le système couplé prend une forme simplifiée :

$$\begin{aligned} j\left(\frac{\partial}{\partial x_t} + j\eta_t\right)(\varphi) &= \eta(\varphi) + M(\chi) \\ j\left(\frac{\partial}{\partial x_t} + j\eta_t\right)(\chi) &= -\eta(\varphi) + M(\varphi) \end{aligned} \qquad \text{(XXIV-9)}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \left(j\frac{\partial}{\partial x_t} - (\eta_t + \eta)\right)(\varphi) &= M(\chi) \\ \left(j\frac{\partial}{\partial x_t} - (\eta_t - \eta)\right)(\chi) &= M(\varphi) \end{aligned} \qquad \text{(XXIV-10)}$$

D'où on déduit formellement :

$$\left(j\frac{\partial}{\partial x_t}-(\eta_t+\eta)\right)\left(j\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}-(\eta_t-\eta)\varphi\right)=M^2\varphi$$
$$\left(j\frac{\partial}{\partial x_t}-(\eta_t-\eta)\right)\left(j\frac{\partial\chi}{\partial x_t}-(\eta_t+\eta)\chi\right)=M^2\chi \qquad \text{(XXIV-11)}$$

On obtient en développant le membre à gauche de l'égalité :

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_t^2}-2j\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}\eta_t+\eta_t^2\varphi-j\frac{\partial\eta_t}{\partial x_t}\varphi-\eta^2\varphi=M^2\varphi$$
$$-\frac{\partial^2\chi}{\partial x_t^2}-2j\frac{\partial\chi}{\partial x_t}\eta_t+\eta_t^2\chi-j\frac{\partial\eta_t}{\partial x_t}\chi-\eta^2\chi=M^2\chi \qquad \text{(XXIV-12)}$$

Pour progresser vers une solution possible, il nous faut maintenant établir l'expression de la matrice M².

Si on adopte la notation suivante pour les matrices de PAULI et les opérateurs qui interviennent dans les calculs matriciels :

$$\vec{\sigma}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&-j\\j&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\qquad \vec{p}=\begin{pmatrix}-j\hbar\frac{\partial}{\partial x}\\-j\hbar\frac{\partial}{\partial y}\\-j\hbar\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\qquad \vec{\pi}=\left(\vec{p}+q\vec{A}\right)=\begin{pmatrix}-j\hbar\frac{\partial}{\partial x}+qA_x\\-j\hbar\frac{\partial}{\partial y}+qA_y\\-j\hbar\frac{\partial}{\partial z}+qA_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-j\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}+j\eta_x\right)\\-j\hbar\left(\frac{\partial}{\partial y}+j\eta_y\right)\\-j\hbar\left(\frac{\partial}{\partial z}+j\eta_z\right)\end{pmatrix}$$

(XXIV-13)

la matrice M établie en (XXIV-8) s'exprime de la manière suivante :

$$\hbar M(\varphi)=\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+q\vec{A}\right)\right](\varphi)=-j\hbar\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial x}+j\eta_x\right)+\begin{pmatrix}0&-j\\j&0\end{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial y}+j\eta_y\right)+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial z}+j\eta_z\right)\right](\varphi)$$

$$M=-j\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial z}+j\eta_z\right) & \left(\frac{\partial}{\partial x}+j\eta_x\right)-j\left(\frac{\partial}{\partial y}+j\eta_y\right)\\ \left(\frac{\partial}{\partial x}+j\eta_x\right)+j\left(\frac{\partial}{\partial y}+j\eta_y\right) & -\left(\frac{\partial}{\partial z}+j\eta_z\right)\end{pmatrix}$$

(XXIV-14)

Le développement de la matrice M² est un peu laborieux. On prendra garde que chacun des termes de la matrice représente un opérateur et doit donc être traité comme tel dans les opérations de dérivations.

Si on désigne chacun des termes de cette matrice par :

$$M^2=\begin{pmatrix}M_{11}&M_{12}\\M_{21}&M_{22}\end{pmatrix} \qquad \text{(XXIV-15)}$$

On obtient par exemple pour M_{11} et M_{12} :

$$M_{11} = -\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2j\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \eta_x^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2j\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \eta_y^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_y}{\partial y}\right) \\ + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2j\eta_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \eta_z^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_z}{\partial z}\right) + j\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + j\eta_x\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + j\eta_y\varphi\right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} + j\eta_y\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\eta_x\varphi\right)\right\}\end{array}\right\}$$

$$M_{11} = -\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2j\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \eta_x^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2j\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \eta_y^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_y}{\partial y}\right) \\ + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2j\eta_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \eta_z^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_z}{\partial z}\right) + \left\{\frac{\partial\eta_y}{\partial x}\varphi - \frac{\partial\eta_x}{\partial y}\varphi\right\}\end{array}\right\}$$

(XXIV-16)

$$M_{12} = -\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z} + j\eta_z\right)\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\eta_x\varphi\right) - j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + j\eta_y\varphi\right)\right\} - \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + j\eta_x\right) - j\left(\frac{\partial}{\partial y} + j\eta_y\right)\right\}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + j\eta_z\varphi\right)\right\}$$

$$M_{12} = -\left\{j\frac{\partial\eta_x}{\partial z}\varphi + \frac{\partial\eta_y}{\partial z}\varphi - \left(j\frac{\partial\eta_z}{\partial x}\varphi + \frac{\partial\eta_z}{\partial y}\varphi\right)\right\} = \left\{\left(\frac{\partial\eta_z}{\partial y} - \frac{\partial\eta_y}{\partial z}\right)\varphi - j\left(\frac{\partial\eta_x}{\partial z} - \frac{\partial\eta_z}{\partial x}\right)\varphi\right\}$$

(XXIV-17)

La matrice complète est explicitement détaillée ci-dessous :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2j\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \eta_x^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_x}{\partial x}\right) \\ + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2j\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \eta_y^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_y}{\partial y}\right) \\ + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2j\eta_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \eta_z^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_z}{\partial z}\right) \\ + \left\{\frac{\partial\eta_y}{\partial x}\varphi - \frac{\partial\eta_x}{\partial y}\varphi\right\}\end{array}\right\} & \left(\frac{\partial\eta_z}{\partial y} - \frac{\partial\eta_y}{\partial z}\right)\varphi - j\left(\frac{\partial\eta_x}{\partial z} - \frac{\partial\eta_z}{\partial x}\right)\varphi \\ \left(\frac{\partial\eta_z}{\partial y} - \frac{\partial\eta_y}{\partial z}\right)\varphi + j\left(\frac{\partial\eta_x}{\partial z} - \frac{\partial\eta_z}{\partial x}\right)\varphi & -\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2j\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \eta_x^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_x}{\partial x}\right) \\ + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2j\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \eta_y^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_y}{\partial y}\right) \\ + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2j\eta_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \eta_z^2\varphi + j\varphi\frac{\partial\eta_z}{\partial z}\right) \\ - \left\{\frac{\partial\eta_y}{\partial x}\varphi - \frac{\partial\eta_x}{\partial y}\varphi\right\}\end{array}\right\} \end{pmatrix}$$

(XXIV-18)

Si on reprend maintenant la relation (XXIV-12) sous forme matricielle, on obtient l'égalité suivante qui doit être vérifiée pour tout spineur :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_t^2} - 2j\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}\eta_t + \eta_t^2\varphi - j\frac{\partial\eta_t}{\partial x_t}\varphi - \eta^2\varphi & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_t^2} - 2j\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}\eta_t + \eta_t^2\varphi - j\frac{\partial\eta_t}{\partial x_t}\varphi - \eta^2\varphi \end{pmatrix}$$

(XXIV-19)

Il apparaît que l'égalité ci-dessus ne pourra être vérifiée que si :

$$\left(\frac{\partial\eta_z}{\partial y} - \frac{\partial\eta_y}{\partial z}\right)\varphi + j\left(\frac{\partial\eta_x}{\partial z} - \frac{\partial\eta_z}{\partial x}\right)\varphi = 0 \qquad \text{(XXIV-20)}$$

Pour que cette relation soit vraie quel que soit le spineur φ, cela impose :

$$\left(\frac{\partial\eta_z}{\partial y} - \frac{\partial\eta_y}{\partial z}\right) = 0$$
$$\left(\frac{\partial\eta_x}{\partial z} - \frac{\partial\eta_z}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{(XXIV-21)}$$

Lorsque la particule est plongée dans un champ magnétique, on déduit de (XXIV-21) et (XXIV-3) que le système de DIRAC ne possède des solutions que lorsque le champ magnétique est dirigé suivant l'axe Oz.

Puisque le moment cinétique est également orienté suivant l'axe Oz, cela conduit de fait à une quantification du spin lorsque la particule est plongée dans un champ magnétique, avec seulement deux états possibles.

Concrètement, lorsqu'une particule libre est introduite dans un dispositif de STERN et GERLACH par exemple, cela induit obligatoirement une évolution spatiale des modes internes à la particule. Cette évolution spatiale va mettre en alignement le moment magnétique de l'électron avec le champ magnétique généré par le dispositif.

On peut supposer que cet alignement va se faire sur une durée extrêmement faible. Si on estime empiriquement qu'il se fait sur une durée τ d'une centaine de périodes, on obtient un ordre de grandeur de la durée τ suivant :

$$\tau = 100.\frac{2\pi}{\omega_0} = 200\pi\frac{\hbar}{m_0c^2} = 200\pi\frac{1{,}05.10^{-34}}{\left(9{,}11.10^{-31}\right)\left(3.10^8\right)^2} \approx 8{,}09.10^{-19}\text{s} \qquad \text{(XXIV-22)}$$

En comparant cette valeur à la durée t du parcours de l'électron sur une distance de 1 mètre, à la vitesse limite de la lumière :

$$t = \frac{1}{3.10^8} = 0{,}33.10^{-8}\text{s} \qquad \text{(XXIV-23)}$$

On peut conclure que l'alignement du moment magnétique de l'électron avec le champ magnétique généré par le dispositif de STERN et GERLACH se fait de manière quasi instantanée à son entrée dans le dispositif. On obtient ainsi une description de la notion de

quantification spatiale, notion dont il est extrêmement difficile de se faire une représentation physique lorsqu'on aborde la mécanique quantique.

Nous proposons pour terminer ce chapitre de rappeler la relation établie par DIRAC, qui met en évidence le rôle du champ magnétique sur les spineurs :

$$\hbar^2 M^2(\varphi) = \left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+q\vec{A}\right)\right]^2(\varphi) = \left(\vec{p}+q\vec{A}\right)^2(\varphi) + \vec{\sigma}.\overrightarrow{Rot}\left(q\vec{A}\right)(\varphi) = \left(\vec{p}+q\vec{A}\right)^2(\varphi) + \vec{\sigma}.q\vec{B}(\varphi) \qquad \text{(XXIV-24)}$$

La matrice M² à gauche de l'égalité a déjà été exprimée en (XXIV-18). Le calcul des termes situés à droite de l'égalité est détaillé ci-dessous :

$$\left(\vec{p}+q\vec{A}\right)^2(\varphi) = \begin{pmatrix} -j\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}+qA_x \\ -j\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}+qA_y \\ -j\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}+qA_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -j\hbar\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+qA_x\varphi \\ -j\hbar\dfrac{\partial\phi}{\partial y}+qA_y\varphi \\ -j\hbar\dfrac{\partial\phi}{\partial z}+qA_z\varphi \end{pmatrix} = -\hbar^2\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}-j\eta_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y}-j\eta_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z}-j\eta_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x}-j\eta_x\varphi \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y}-j\eta_y\varphi \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}-j\eta_z\varphi \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{p}+q\vec{A}\right)^2(\varphi) = -\hbar^2\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2j\eta_x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\eta_x^2\varphi+j\varphi\dfrac{\partial\eta_x}{\partial x}\right)+\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2j\eta_y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\eta_y^2\varphi+j\varphi\dfrac{\partial\eta_y}{\partial y}\right) \\ +\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2j\eta_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}-\eta_z^2\varphi+j\varphi\dfrac{\partial\eta_z}{\partial z}\right) \end{array}\right\} \qquad \text{(XXIV-25)}$$

$$\vec{\sigma}.\overrightarrow{Rot}\left(q\vec{A}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial qA_z}{\partial y}-\frac{\partial qA_y}{\partial z}\right)+\begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial qA_x}{\partial z}-\frac{\partial qA_z}{\partial x}\right)+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial qA_y}{\partial x}-\frac{\partial qA_x}{\partial y}\right)$$

$$\vec{\sigma}.\overrightarrow{Rot}\left(q\vec{A}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial qA_y}{\partial x}-\dfrac{\partial qA_x}{\partial y} & \left(\dfrac{\partial qA_z}{\partial y}-\dfrac{\partial qA_y}{\partial z}\right)-j\left(\dfrac{\partial qA_x}{\partial z}-\dfrac{\partial qA_z}{\partial x}\right) \\ \left(\dfrac{\partial qA_z}{\partial y}-\dfrac{\partial qA_y}{\partial z}\right)+j\left(\dfrac{\partial qA_x}{\partial z}-\dfrac{\partial qA_z}{\partial x}\right) & -\left(\dfrac{\partial qA_y}{\partial x}-\dfrac{\partial qA_x}{\partial y}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}.\overrightarrow{Rot}\left(q\vec{A}\right) = \hbar^2\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\eta_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\eta_x}{\partial y} & \left(\dfrac{\partial\eta_z}{\partial y}-\dfrac{\partial\eta_y}{\partial z}\right)-j\left(\dfrac{\partial\eta_x}{\partial z}-\dfrac{\partial\eta_z}{\partial x}\right) \\ \left(\dfrac{\partial\eta_z}{\partial y}-\dfrac{\partial\eta_y}{\partial z}\right)+j\left(\dfrac{\partial\eta_x}{\partial z}-\dfrac{\partial\eta_z}{\partial x}\right) & -\left(\dfrac{\partial\eta_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\eta_x}{\partial y}\right) \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIV-26)}$$

La relation :

$$\hbar^2 M^2(\varphi) = \left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+q\vec{A}\right)\right]^2(\varphi) = \left(\vec{p}+q\vec{A}\right)^2(\varphi) + \vec{\sigma}.\overrightarrow{Rot}\left(q\vec{A}\right)(\varphi) \qquad \text{(XXIV-27)}$$

se vérifie en introduisant la matrice identité en facteur avec le terme $\left(\vec{p}+q\vec{A}\right)^2$.

XXV

Solutions exactes de l'équation de Dirac dans un potentiel variable en coordonnées cartésiennes

Nous abordons dans ce chapitre la recherche de solutions exactes à l'équation de DIRAC dans un potentiel variable. Nous savons du chapitre précédent que ce potentiel peut comporter un champ magnétique, mais uniquement dirigé suivant l'axe Oz.

La présence du champ électromagnétique va induire des modifications sur les modes stationnaires, et donc sur les composantes du vecteur d'onde k_t, k_x, k_y, k_z, qui vont dépendre des composantes du potentiel, et il existe plusieurs manières de prendre en compte ces modifications.

Nous adoptons la stratégie de recherche suivante : en un point de l'espace et du temps, le potentiel va dépendre des variables spatiales et temporelles x, y, z, t. Nous recherchons les solutions modales sous la forme d'exponentielles imaginaires $\exp[j(k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)]$.

Les modifications par rapport aux modes d'espace libre (sans potentiel) vont porter d'une part sur l'amplitude de chacune des fonctions d'ondes, et d'autre part sur les composantes du vecteur d'onde k_t, k_x, k_y, k_z, à travers l'équation de conservation de l'énergie.

Nous avons établi, au chapitre précédent, l'égalité suivante qui doit être valide pour tout spineur :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_t^2} - 2j\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}\eta_t + \eta_t^2\varphi - j\frac{\partial\eta_t}{\partial x_t}\varphi - \eta^2\varphi & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_t^2} - 2j\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}\eta_t + \eta_t^2\varphi - j\frac{\partial\eta_t}{\partial x_t}\varphi - \eta^2\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{(XXV-1)}$$

La forme particulière de la relation (XXV-1) montre que les deux spineurs sont découplés. En développant l'écriture, on obtient l'équation de conservation de l'énergie dans sa forme la plus générale, en rassemblant l'influence du potentiel vecteur sous les signes + et - :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_t^2}+2j\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}\eta_t-\eta_t^2\varphi+j\frac{\partial\eta_t}{\partial x_t}\varphi+\eta^2\varphi=$$
$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2j\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\eta_x^2\varphi+j\varphi\frac{\partial\eta_x}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2j\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\eta_y^2\varphi+j\varphi\frac{\partial\eta_y}{\partial y}\right)\\+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2j\eta_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\eta_z^2\varphi+j\varphi\frac{\partial\eta_z}{\partial z}\right)\pm\left\{\frac{\partial\eta_y}{\partial x}\varphi-\frac{\partial\eta_x}{\partial y}\varphi\right\}\end{array}\right\}$$

(XXV-2)

Il n'existe de solutions que si nous sommes dans un champ magnétique orienté suivant Oz, ce qui impose :

$$\left(\frac{\partial\eta_z}{\partial y}-\frac{\partial\eta_y}{\partial z}\right)=0$$
$$\left(\frac{\partial\eta_x}{\partial z}-\frac{\partial\eta_z}{\partial x}\right)=0$$

(XXV-3)

Nous allons restreindre le champ de recherche de solutions en nous plaçant dans les hypothèses simplificatrices suivantes :

$$\frac{\partial\eta_t}{\partial x_t}=\frac{\partial\eta_x}{\partial x}=\frac{\partial\eta_y}{\partial y}=\eta_z=0 \qquad \text{(XXV-4)}$$

On obtient après simplification :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_t^2}+2j\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}\eta_t-\eta_t^2\varphi+\eta^2\varphi=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2j\eta_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\eta_x^2\varphi\right)+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2j\eta_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\eta_y^2\varphi\right)\\+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\pm\left\{\frac{\partial\eta_y}{\partial x}\varphi-\frac{\partial\eta_x}{\partial y}\varphi\right\}\end{array}\right\} \text{(XXV-5)}$$

On introduit la forme particulière de la solution :

$$\varphi=\exp j\left(k_t x_t+k_x x+k_y y+k_z z\right) \qquad \text{(XXV-6)}$$

Ce qui donne l'équation de conservation de l'énergie relative à (XXV-6) dans un potentiel variable :

$$\left(k_t+\eta_t\right)^2=\left(k_x+\eta_x\right)^2+\left(k_y+\eta_y\right)^2+k_z^2+\eta^2\pm\left(\frac{\partial\eta_y}{\partial x}-\frac{\partial\eta_x}{\partial y}\right)$$

(XXV-7)

Il est maintenant possible d'aborder la recherche des solutions proprement dite. Pour un potentiel nul, le système de DIRAC s'écrit :

$$\begin{aligned}
\eta\psi_0 &= j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \\
\eta\psi_1 &= j\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_3}{\partial z} \\
\eta\psi_2 &= -j\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial z} \\
\eta\psi_3 &= -j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}
\end{aligned} \qquad \text{(XXV-8)}$$

Une solution possible de ce système sous une forme exponentielle a déjà été élaborée dans les chapitres précédents :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= (\eta - k_t)\exp j(k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z) \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= k_z \exp j(k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z) \\
\psi_3 &= (k_x + jk_y)\exp j(k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)
\end{aligned} \qquad \text{(XXV-9)}$$

Dans un potentiel variable, le système de DIRAC est modifié de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
(\eta+\eta_t)\psi_0 + \eta_x\psi_3 - j\eta_y\psi_3 + \eta_z\psi_2 &= j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \\
(\eta+\eta_t)\psi_1 + \eta_x\psi_2 + j\eta_y\psi_2 - \eta_z\psi_3 &= j\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + j\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_3}{\partial z} \\
(\eta-\eta_t)\psi_2 - \eta_x\psi_1 + j\eta_y\psi_1 - \eta_z\psi_0 &= -j\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial z} \\
(\eta-\eta_t)\psi_3 - \eta_x\psi_0 - j\eta_y\psi_0 + \eta_z\psi_1 &= -j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}
\end{aligned} \qquad \text{(XXV-10)}$$

Une solution possible du système de DIRAC dans un potentiel variable apparaît sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= (\eta - k_t - \eta_t)\exp j(k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z) \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= k_z \exp j(k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z) \\
\psi_3 &= \{k_x + \eta_x + j(k_y + \eta_y)\}\exp j(k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)
\end{aligned} \qquad \text{(XXV-11)}$$

On fait le constat que la forme de la solution reste identique à celle qui a été obtenue pour un potentiel uniforme. L'introduction d'un potentiel variable vient seulement modifier l'équation de conservation de l'énergie.

Nous donnons ci-dessous quelques éléments de vérifications. Pour cette solution, la première équation du système de DIRAC fournit l'équation de conservation de l'énergie.

<u>Première équation du système de DIRAC :</u>

$$(\eta+\eta_t)\psi_0+\eta_x\psi_3-j\eta_y\psi_3+\eta_z\psi_2=j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t}+j\frac{\partial\psi_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}+j\frac{\partial\psi_2}{\partial z}$$
$$(\eta+\eta_t)\psi_0+\eta_x\psi_3-j\eta_y\psi_3=(\eta+\eta_t)(\eta-k_t-\eta_t)+\eta_x\{k_x+\eta_x+j(k_y+\eta_y)\}-j\eta_y\{k_x+\eta_x+j(k_y+\eta_y)\}$$
$$j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t}=-k_t(\eta-k_t-\eta_t)$$
$$j\frac{\partial\psi_3}{\partial x}=-k_x\{k_x+\eta_x+j(k_y+\eta_y)\}-\frac{\partial\eta_y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial\psi_3}{\partial y}=jk_y\{k_x+\eta_x+j(k_y+\eta_y)\}+\frac{\partial\eta_x}{\partial y}$$
$$j\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=-k_z^2$$

(XXV-12)

Les sommes sont laissées au soin du lecteur. On obtient pour cette première équation :

$$(k_t+\eta_t)^2=(k_x+\eta_x)^2+(k_y+\eta_y)^2+k_z^2+\eta^2+\left(\frac{\partial\eta_y}{\partial x}-\frac{\partial\eta_x}{\partial y}\right) \qquad \text{(XXV-13)}$$

<u>Deuxième équation du système de DIRAC :</u>

$$(\eta+\eta_t)\psi_1+\eta_x\psi_2+j\eta_y\psi_2-\eta_z\psi_3=j\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t}+j\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}-j\frac{\partial\psi_3}{\partial z}$$
$$\eta_x\psi_2+j\eta_y\psi_2=\eta_x k_z+j\eta_y k_z$$
$$j\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=-k_x k_z \qquad \text{(XXV-14)}$$
$$-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}=-jk_y k_z$$
$$-j\frac{\partial\psi_3}{\partial z}=k_z\{k_x+\eta_x+j(k_y+\eta_y)\}$$

<u>Troisième équation du système de DIRAC :</u>

$$(\eta-\eta_t)\psi_2-\eta_x\psi_1+j\eta_y\psi_1-\eta_z\psi_0=-j\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t}-j\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-j\frac{\partial\psi_0}{\partial z}$$
$$(\eta-\eta_t)\psi_2=(\eta-\eta_t)k_z$$
$$-j\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t}=k_t k_z \qquad \text{(XXV-15)}$$
$$-j\frac{\partial\psi_0}{\partial z}=k_z(\eta-k_t-\eta_t)$$

<u>Quatrième équation du système de DIRAC :</u>

$$(\eta-\eta_t)\psi_3-\eta_x\psi_0-j\eta_y\psi_0+\eta_z\psi_1=-j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t}-j\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\frac{\partial\psi_0}{\partial y}+j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$$

$$(\eta-\eta_t)\psi_3-\eta_x\psi_0-j\eta_y\psi_0=(\eta-\eta_t)\{k_x+\eta_x+j(k_y+\eta_y)\}-\eta_x(\eta-k_t-\eta_t)-j\eta_y(\eta-k_t-\eta_t)$$

$$-j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t}=k_t\{k_x+\eta_x+j(k_y+\eta_y)\}$$

$$-j\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=k_x(\eta-k_t-\eta_t)$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y}=jk_y(\eta-k_t-\eta_t)$$

(XXV-16)

XXVI

Eléments de réflexions sur l'intrication

L'intrication quantique suscite beaucoup d'intérêt, tant sur le plan théorique, que par le développement d'applications qui semblent prometteuses.

D'une manière générale, on peut esquisser la définition suivante : deux particules qui, à un moment donné, ont des propriétés physiques dépendantes l'une de l'autre en termes d'énergie, d'impulsion, ou de moment cinétique deviennent intriquées. Cette intrication peut avoir lieu lors de la création de ces particules et des exemples concrets sont couramment mis en œuvre avec des paires de photons.

On doit à l'équipe d'Alain ASPECT de s'être intéressée très tôt aux propriétés expérimentales des particules intriquées. Les expériences mises en œuvre, dont on ne peut que souligner la difficulté, la rigueur et la précision, ont permis de fournir des résultats expérimentaux d'une grande fiabilité, sur lesquels on peut s'appuyer de manière très sure pour conduire une réflexion sur la robustesse de toute théorie quantique.

L'interprétation qui prévaut est conforme à la vision de l'Ecole de Copenhague. L'application du théorème de BELL aux résultats expérimentaux permet de conclure de manière certaine qu'il n'existe pas de variables cachées susceptibles de compléter le comportement quantique des particules.

D'autre part, la théorie quantique probabiliste prévoit une corrélation certaine entre les propriétés de deux particules intriquées, corrélation qui est confirmée expérimentalement.

Le principe d'incertitude, dans son interprétation de Copenhague, stipule qu'avant la mesure, l'état de chaque particule est indéterminé.

Il apparaît alors une seule conclusion possible : la mesure d'une particule induit instantanément et à distance, la corrélation totale de la deuxième particule. On est ainsi amené à conclure à la non localité de la physique quantique.

Il est clair qu'une telle conclusion remet en cause la notion de temps et d'espace qui fonde la physique classique. Plus aucun phénomène ne peut être décrit par une équation différentielle, qui représente par définition des évolutions locales des propriétés physiques.

On est alors amené à se poser la question suivante : Comment une théorie qui contient dans ses postulats fondamentaux une équation différentielle qui régit l'évolution de l'énergie, peut-elle avoir pour conclusion une physique quantique non locale ? Il ne s'agit pas d'une question anodine, mais bien d'une contradiction fondamentale entre une hypothèse de départ et la conclusion d'un raisonnement incluant cette hypothèse. Tant que cette contradiction n'aura pas été clarifiée par des explications convaincantes, il subsistera un doute sur le cheminement

qui conduit de l'hypothèse à la conclusion. Nous tenterons d'apporter quelques éléments de réflexion complémentaires sur ce problème dans la suite de ce chapitre.

I - L'approche énergétique et déterministe

Nous proposons de montrer dans ce paragraphe qu'une approche énergétique et déterministe fournit des prédictions conformes aux propriétés mesurées des particules intriquées.

Il convient dans un premier temps de chercher à définir les propriétés qui doivent permettre de caractériser le comportement des particules intriquées. Il semble qu'elles soient essentiellement au nombre de 2 :

Propriété 1 : L'expérimentation montre, grâce au théorème de BELL, qu'il n'existe pas de variables cachées susceptibles de compléter le comportement de la particule

Propriété 2 : L'expérimentation montre qu'il existe une corrélation certaine entre les deux particules qui se sont propagées.

Concernant la propriété 1, l'approche énergétique est fondée sur des solutions exactes à l'équation de Dirac. Les fonctions d'ondes mises en œuvre ne diffèrent de celles de l'Ecole de Copenhague que par un coefficient multiplicatif constant, et il n'y a, par conséquent, aucune variable cachée dans la description du fonctionnement de la particule.

Concernant la propriété 2, les modes installés lors de la création des particules se propagent théoriquement sans déformation, ce qui implique que si ces particules ont des propriétés modales dépendantes l'une de l'autre, elles conserveront ces propriétés lors de leur déplacement ou propagation, induisant par la même une corrélation certaine entre ces particules.

Ainsi, sans aucun postulat supplémentaire par rapport à la physique classique, l'approche énergétique et déterministe se montre en accord avec les résultats mesurés des particules intriquées.

S'il s'avérait que d'autres propriétés sont nécessaires à la caractérisation des particules intriquées, alors il faudrait s'assurer que ces propriétés sont bien compatibles avec une approche énergétique et déterministe.

II – L'interprétation de Copenhague

Au vu des paragraphes précédents, on peut se demander à quel endroit du raisonnement, l'interprétation de Copenhague impose la non localité de la physique quantique.

Il est admis que lors de leur création, les deux particules respectent les lois de la physique classique : conservation de l'énergie, de l'impulsion, et du moment cinétique. On doit donc admettre que lors de leur création les deux particules sont dans une corrélation certaine.

Après propagation, les deux particules sont également détectées dans une corrélation certaine.

C'est donc en imposant un état indéterminé de la particule entre sa création et sa détection que l'Ecole de Copenhague induit la non localité de la physique quantique.

Cet état indéterminé est justifié par le principe d'indétermination de HEISENBERG. L'impossibilité de connaître simultanément certaines propriétés des particules est interprétée

comme une indétermination intrinsèque de la physique quantique, ce qui conduit à affirmer que, lors de sa propagation, la particule est dans un état intrinsèquement indéterminé.

C'est sur ce dernier point que l'approche énergétique et déterministe diffère fondamentalement de l'Ecole de Copenhague. Une analyse plus détaillée nécessite de faire un retour sur le principe d'indétermination.

III – Retour sur le principe d'indétermination

Le principe d'indétermination est obtenu en assimilant la particule à un point de l'espace, le point étant défini au sens mathématique du terme, c'est-à-dire ne possédant aucune étendue spatiale.

L'interprétation de Copenhague du principe d'indétermination indique que, pour ce point mathématique affecté d'une masse m, on peut définir à la fois une position x et une impulsion p, mais que ces deux grandeurs sont affectées d'une incertitude obéissant à la formulation d'HEISENBERG :

$$\Delta x.\Delta p_x > \frac{\hbar}{2} \qquad \text{(XXVI-1)}$$

De cette relation d'incertitude relative à un point sans extension spatiale, il est déduit une propriété générale et intrinsèque d'indétermination du monde quantique.

L'approche énergétique et déterministe propose au contraire de donner à la particule une certaine extension spatiale. Cette vision semble plus conforme aux observations expérimentales. Si par exemple, lors d'une expérience de diffraction, le photon prend une direction aléatoire, mais qui reconstruit progressivement la figure de diffraction, on peut supposer que l'énergie ondulatoire qu'il porte est sensible à la présence de l'ouverture, ce qui suppose une certaine extension spatiale de la particule.

Si on se place en un point mathématique (sans extension spatiale) à l'intérieur de la particule, les solutions exactes à l'équation de DIRAC montrent qu'il est impossible de disposer en ce point de la totalité de l'énergie de masse relative à l'opérateur de position, et de l'énergie impulsionnelle. On se retrouve bien dans le respect du principe d'indétermination de HEISENBERG (XXVI-1).

Cela n'induit pas pour autant une incertitude sur la position de la particule qui peut être supposée localisée dans un parallélépipède rectangle (en coordonnées cartésiennes), de dimension, position, et vitesse parfaitement définis. C'est en ce sens que l'approche énergétique et déterministe diffère fondamentalement de l'approche de Copenhague.

On peut tenter d'illustrer cette différence sur un exemple concret. Nous choisissons dans un souci de clarté et de simplification, une solution exacte à une dimension (suivant l'axe des z) de l'équation de DIRAC.

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= C(\hbar\omega)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + jC(m_0 c^2)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= -C(\hbar c k_z)\sin(k_z z)\cos(k_t x_t) \\
\psi_3 &= 0
\end{aligned} \qquad \text{(XXVI-2)}$$

Dans cette solution, la constante de normalisation C a été introduite pour rappeler que la fonction d'onde a la dimension de la racine carrée d'une densité linéique d'énergie.

Si on se place à un instant où les densités linéiques d'énergie de masse et impulsionnelle sont maximales, cette solution devient :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= jC(m_0 c^2)\cos(k_z z) \\
\psi_1 &= 0 \\
\psi_2 &= -C(\hbar c k_z)\sin(k_z z) \\
\psi_3 &= 0
\end{aligned} \qquad \text{(XXVI-3)}$$

Les densités linéiques d'énergie de masse ΔE_{masse} et impulsionnelle $\Delta E_{impulsionnelle}$ s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}
\Delta E_{masse} &= C^2(m_0 c^2)^2 \cos^2(k_z z) \\
\Delta E_{impulsionnelle} &= C^2(\hbar c k_z)^2 \sin^2(k_z z)
\end{aligned} \qquad \text{(XXVI-4)}$$

Si on donne à la particule une dimension $2L_z$, et une localisation spatiale entre $-L_z$ et $+L_z$, et si on la suppose excitée sur un mode fondamental, alors les densités d'énergie deviennent :

$$\begin{aligned}
\Delta E_{masse} &= C^2(m_0 c^2)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2L_z} z\right) \\
\Delta E_{impulsionnelle} &= C^2(\hbar c k_z)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2L_z} z\right)
\end{aligned} \qquad \text{(XXVI-5)}$$

On peut en donner la représentation graphique suivante :

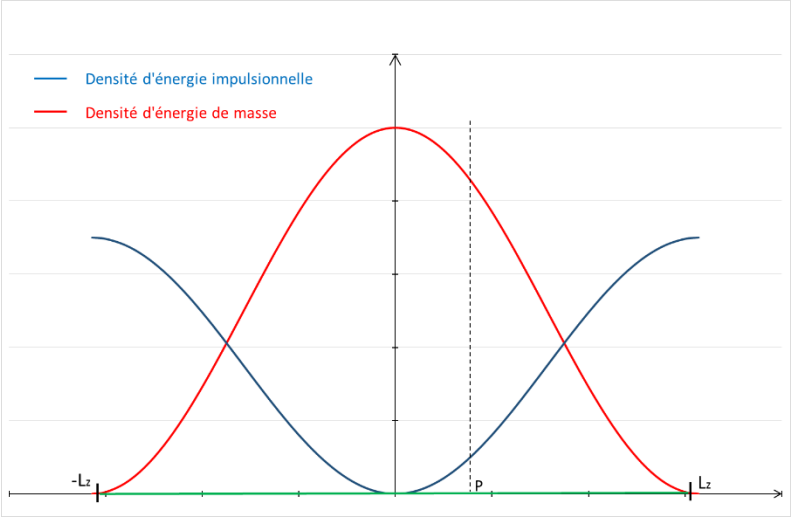


Figure (XXVI-1) : *Représentation de l'extension spatiale d'une particule (en vert), avec sa densité d'énergie de masse et d'énergie impulsionnelle*

L'extension spatiale de la particule est représentée en vert. Lorsque la particule est en mouvement, la physique classique admet que c'est globalement toute l'extension spatiale qui se déplace.

Alors que la position et la vitesse de cette particule obéissent à la physique classique, si on se place en un point d'observation P interne à la particule, il est impossible d'obtenir simultanément les informations complètes relatives à l'énergie de masse et l'énergie impulsionnelle.

Si on tente de formaliser la même représentation dans l'Ecole de Copenhague, on se heurte à une difficulté. Dans ce formalisme, l'équation d'évolution de la fonction d'onde est donnée par l'équation de SCHRÖDINGER. Or cette équation ne permet pas de distinguer la part d'énergie de masse et la part d'énergie impulsionnelle à l'intérieur de la particule. Elle fournit une représentation globale qui est condensée en un point de l'espace où la particule sans extension spatiale est supposée localisée.

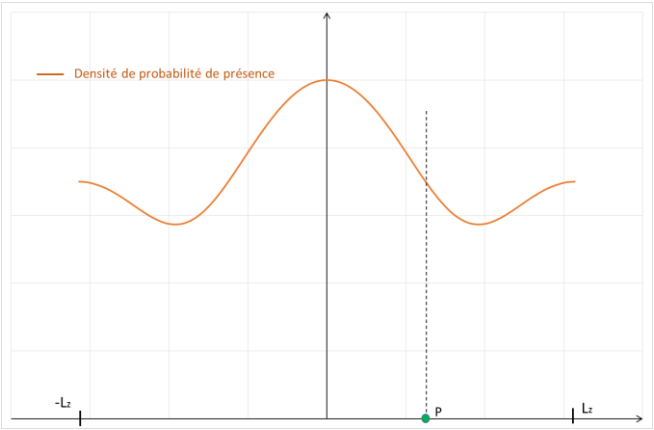


Figure (XXVI-2) : *Représentation d'une particule (en vert) ponctuelle, avec sa densité de probabilité de présence, qui correspond à la densité d'énergie totale dans l'approche énergétique.*

Puisqu'on ne peut déterminer la part d'énergie de masse et d'énergie impulsionnelle en ce point, cela conduit à attribuer à cette particule ponctuelle et sans extension spatiale, une incertitude sur sa position et sur son impulsion.

Dans cette comparaison, la représentation de l'Ecole de Copenhague, qui admet l'équation de SCHRÖDINGER comme l'un de ses postulats fondateurs, apparaît en difficulté.

D'un point de vue physique, il semble peu réaliste de représenter une particule par un point sans dimension spatiale. La mécanique classique ne permet cette assimilation que dans le cas d'une symétrie sphérique, ce qui ne semble pas être le cas des particules quantiques. Il apparaît également très délicat de définir un moment cinétique pour une particule rigoureusement ponctuelle.

Enfin, une représentation ponctuelle hypothèque toute démarche d'investigation visant à chercher à comprendre le fonctionnement interne d'une particule quantique.

L'équation de DIRAC et ses solutions stationnaires ne souffrent pas de ces limitations, puisqu'elles supposent implicitement que la particule a une certaine dimension spatiale. Elle vérifie également une invariance relativiste que ne possède pas l'équation de SCHRÖDINGER. L'équation de DIRAC possède donc des atouts qui la prédisposent bien davantage que l'équation de SCHRÖDINGER à fonder une approche théorique de la mécanique quantique.

XXVII

Approche déterministe de la diffraction et de l'interférence de particules

Lorsqu'une expérience de physique fait apparaître des observations caractéristiques d'une diffraction ou d'une interférence, on peut considérer de manière certaine qu'il y a un phénomène ondulatoire associé à cette expérience. C'est ainsi que DAVISSON et GERMER ont pu confirmer l'hypothèse de Louis DE BROGLIE qui associe à chaque particule de masse m et de vitesse v, une onde de matière de longueur d'onde $\lambda = h/mv$.

L'électron et le photon pouvant être considérés comme particule, il est possible d'envoyer ces particules une par une sur une fente de largeur Δx. On constate alors que la trajectoire de la particule est imprévisible à la sortie de la fente : la particule peut partir dans toutes les directions après la traversée de l'ouverture.

Pour une dimension de la fente importante, les particules traversent avec une très faible variation de direction. Lorsque la dimension de la fente diminue, la tache de diffraction augmente, et les particules peuvent partir dans des directions très différentes.

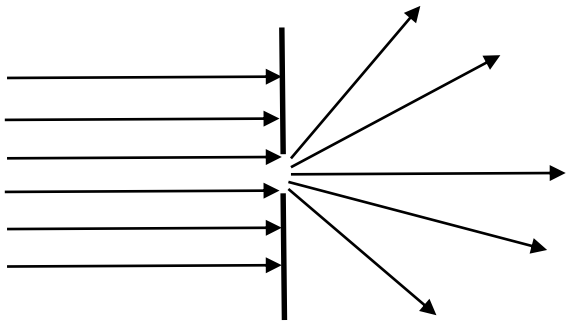


Figure XXVII-1 : *Diffraction d'un faisceau de particules par une fente de largeur Δx.*

L'Ecole de Copenhague y associe une confirmation du principe d'indétermination de HEISENBERG de la manière suivante :

- Plus on tente de cerner la position de la particule en diminuant la dimension Δx de la fente, plus on impose une incertitude sur la composante Δv_x de vitesse suivant x.
- Plus on a d'incertitude sur la position Δx de la particule en augmentant la dimension de la fente, et plus l'incertitude sur la composante de vitesse Δv_x est faible : la trajectoire des particules ne peut être que faiblement déviée par rapport à la trajectoire initiale.

Il s'agit d'un argument convaincant qui accrédite fortement l'idée d'une incertitude intrinsèque du mode quantique, et qui est couramment utilisée pour illustrer le principe d'indétermination. On peut toutefois noter que l'explication probabiliste qui est décrite ci-dessus n'est valide que pour la tâche principale de diffraction. Elle n'explique pas pourquoi des zéros et des lobes secondaires latéraux apparaissent dans la figure de diffraction complète.

Lorsqu'on s'interroge sur l'éventualité d'une physique quantique déterministe, on est amené à réfléchir sur d'autres interprétations possibles de ces phénomènes, et à rechercher des explications déterministes que l'on aimerait au moins aussi convaincantes que celles de l'Ecole de Copenhague.

Jusqu'à une date récente (2005), aucun phénomène déterministe connu n'était comparable à celui qui est observé lors de la diffraction ou l'interférence de particules quantiques individuelles. Il faudra attendre les travaux de l'équipe d'Yves COUDER sur les gouttelettes marcheuses pour apporter la preuve qu'une particule en symbiose avec une onde peut avoir un comportement qui présente de grandes analogies avec la diffraction et l'interférence des particules quantiques. Les expériences réalisées sur ces gouttelettes étant par nature macroscopiques, elles apportent la certitude qu'il n'est pas indispensable d'introduire un principe d'indétermination pour fournir une explication aux phénomènes d'interférences et de diffractions de particules quantiques.

Rappelons en quelques mots comment sont obtenues ces gouttelettes marcheuses. Un récipient contenant de l'huile de silicone est mis en vibration verticale à une fréquence f par un dispositif approprié. Lorsque les bonnes conditions de fréquence et d'amplitude de vibration du dispositif sont réunies, on peut créer à la surface de ce liquide des gouttelettes qui rebondissent indéfiniment, et qui peuvent se mettre en marche spontanément en déplacement à la surface du liquide. Davantage de détails peuvent être consultés dans les références relatives à ce chapitre à la fin de ce document.

Les gouttelettes ainsi créées existent en symbiose avec l'onde qu'elles génèrent : la disparition de l'une entraîne la disparition de l'autre. D'un point de vue physique, on peut décrire cette symbiose par un échange permanent entre l'énergie mécanique contenue dans la gouttelette et l'énergie ondulatoire qui est visible à la surface du bain d'huile. L'énergie nécessaire à ces échanges est apportée par le dispositif vibrant.

La description du fonctionnement de ce dispositif fait déjà apparaître quelques analogies avec l'approche énergétique de ce document. Mais ces analogies peuvent être poussées bien davantage, notamment dans le domaine de la diffraction et de l'interférence qui nous intéresse dans ce chapitre. L'article de Y. COUDER et E. FORT « Single-Particle Diffraction and Interference at a Macroscopic Scale » est entièrement consacré à l'étude de ces phénomènes associés aux gouttelettes marcheuses. Tous les résultats discutés dans la suite de ce chapitre sont extraits de cette publication.

Les résultats concernant la diffraction sont présentés de la manière suivante : une gouttelette marcheuse est créée en incidence normale par rapport à une fente vers laquelle elle se dirige (Figure 1a). Cette gouttelette traverse la fente, mais on observe un phénomène absolument remarquable : après la traversée de la fente, la gouttelette prend une direction qui semble aléatoire (figure 2a et 2b de la publication reproduites ci-dessous).

Cette direction aléatoire ne peut pas être imputée à une indétermination intrinsèque des phénomènes étudiés sans renier complètement la physique classique. Elle a donc une cause déterministe que nous allons tenter de cerner plus avant dans la suite de ce chapitre.

L'idée des auteurs de la publication consiste alors à effectuer un comptage statistique des particules N(α) qui partent dans chaque direction α de l'espace après avoir traversé la fente, à la manière dont on peut effectuer un comptage de photons dans un phénomène de diffraction.

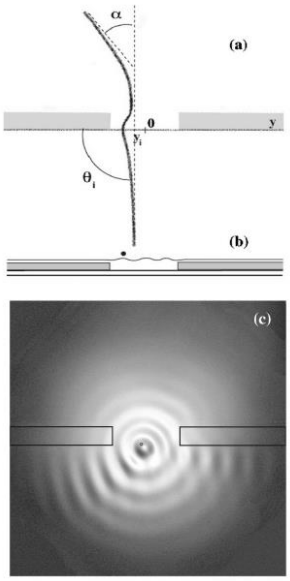


FIG 1

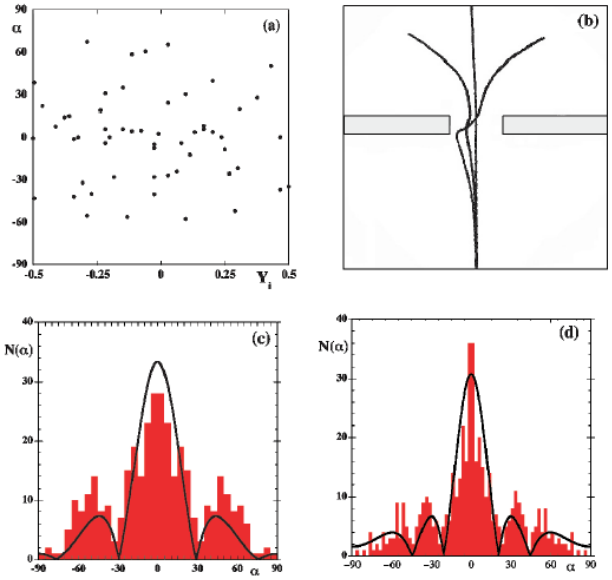


FIG 2

Source : PRL **97,** 154101-2 (13 OCTOBER 2006)

Le résultat reporté sur les figures 2c et 2d incitent de manière convaincante, à une interprétation associée à la diffraction d'un phénomène ondulatoire.

S'il subsistait un doute sur le fait que ces figures sont obtenues sans aucune incertitude intrinsèque à la physique des phénomène, les auteurs éliminent cette possibilité de manière définitive en effectuant une simulation numérique simplifiée du phénomène qui vient confirmer que les goutellettes viennent construire une par une la figure de diffraction d'un phénomène ondulatoire.

Mais alors, comment peut-on expliquer que les goutelettes sont « diffractées » une par une, dans une direction quelconque, mais avec une certaine probabilité ? et si cette probabilité n'est pas liée à une incertitude intrinsèque du phénomène, d'où provient-elle ?

Le mouvement de la gouttelette est influencé par toute modification de l'onde qui lui est associée. En particulier, à l'approche de la fente, il existe une onde diffractée qui vient modifier l'onde incidente et donc modier la trajectoire. Mais cette modification de trajectoire induit à son tour, lorsque la gouttelette retombe, une modification de l'onde générée, et donc de la nouvelle onde diffractée. Ces phénomènes sont cumulatifs sur plusieurs sauts de la goutelette. Cette relation entre la goutelette et son onde associée, à la fois récursive et cumulative, montre qu'on dispose de tous les ingrédients conduisant à un phénomène cahotique. Les réflexions de ce paragraphe ne constituent pas une preuve de cette évolution vers le chaos, mais une piste qui semble cohérente avec tout ce qui est observé autour de la diffraction et de l'interférence des gouttelettes marcheuses.

On peut en particulier noter sur le figure 2a, qu'aux précisions expérimentales près, des goutelettes qui arrivent sur la fente avec un décalage identique y_i sont susceptibles de traverser la fente avec un angle de sortie totalement différent. Ce phénomène peut être interprété comme

une sensibilité infinie aux conditions initiales, qui est connu comme une caractéristique typique des phénomènes cahotiques.

Un des apports incontestable des expériences et études de l'équipe de Y. COUDER réside dans le fait qu'on peut observer et enregistrer ces trajectoires cahotiques. On trouvera dans une vidéo donnée en référence, plusieurs exemples de goutelettes qui « cherchent » leur chemin lors d'une diffraction par deux fentes. On observe de manière remarquable comment elles choisissent une des deux ouvertures, guidées par l'onde associée, qui elle, a interféré en passant par les deux ouvertures à la fois.

La sortie de ces trajectoires cahotiques se fait de manière aléatoire, mais avec une probabilité différentes dans chaque direction de l'espace. Le fait essentiel est que cette probabilité n'est plus liée à une incertitude intrinsèque des phénomènes sur laquelle on ne peut fournir aucune explication. Elle peut être interprétée comme la sortie d'un phénomène chaotique qui est par nature infiniment sensible aux conditions initiales, et qui est en général d'une complexité telle que seuls les attracteurs vont donner un sens à la trajectoire de sortie.

L'approche énergétique et déterministe proposée dans ce document présente deux analogies importantes avec les expériences réalisées sur les gouttelettes marcheuses.

Elle nécessite un support énergétique qui est dans un cas l'énergie du vide, et dans l'autre l'énergie vibrante du plateau qui porte le récipient rempli d'huile.

Elle repose sur des échanges d'énergie entre énergie de masse, énergie impulsionnelle, et énergie ondulatoire. Les gouttelettes marcheuses échangent de l'énergie potentielle de gravitation, énergie cinétique et énergie ondulatoire.

Elle présente également quelques différences : en particulier dans un cas on a affaire à une onde stationnaire, alors que dans l'autre on considère essentiellement des ondes progressives.

Pour autant toutes les explications déterministes qui ont été proposées pour justifier la diffraction des gouttelettes marcheuses, peuvent être reproduite à l'identique pour justifier la diffraction des particules quantiques.

L'article de Robert BRADY and Ross ANDERSON donné en référence va encore plus loin dans cette voie, puisqu'il suggère dans une approche énergétique simplifiée, que le phénomène des gouttelettes marcheuses peut être décrit par une équation de SCHRÖDINGER ou de KLEIN-GORDON analogue à celle de la mécanique quantique.

Une analyse de cette nature ouvre la porte sur une possible explication déterministe de la diffraction et des interférences des particules quantiques, porte qui était jusqu'à présent verrouillée à double tour par l'Ecole de Copenhague dans une approche probabiliste.

XXVIII

L'équation de DIRAC peut-elle être admise comme équation fondatrice de la mécanique quantique ?

La mécanique quantique qui s'est façonnée depuis près d'un siècle se différencie notablement de la physique classique. Sous l'impulsion de Max BORN, la description des phénomènes quantiques a pris une tournure essentiellement probabiliste qui la rend incompatible avec la vision déterministe de la physique classique.

Cette nouvelle vision a entraîné une réflexion approfondie sur la manière dont on pouvait lui donner un socle cohérent. Cette cohérence est nécessaire d'une part d'un point de vue interne au monde quantique, et d'autre part dans la transition vers le monde macroscopique, puisque les deux univers sont régis par des lois différentes.

Ce socle de cohérence a été défini à l'aide de six postulats qui sont rappelés, de manière très générale et sans entrer dans les détails, dans les lignes qui suivent :

Postulat 1 : Définition de l'état quantique

La connaissance de l'état d'un système quantique est complètement contenue, à l'instant t, dans un vecteur normalisable de l'espace des états H. Il est habituellement noté sous la forme d'un ket $|\psi(t)>$

Postulat 2 : Principe de correspondance

A toute propriété observable, par exemple la position, l'énergie ou le spin, correspond un opérateur hermitien linéaire agissant sur les vecteurs d'un espace de Hilbert H. Cet opérateur est nommé observable.

Postulat 3 : Mesure : valeurs possibles d'une observable

La mesure d'une grandeur physique représentée par l'observable A ne peut fournir que l'une des valeurs propres de A.

Postulat 4 : Postulat de BORN : interprétation probabiliste de la fonction d'onde

La mesure d'une grandeur physique représentée par l'observable A, effectuée sur l'état quantique normalisé $|\psi(t)>$*, donne le résultat* a_n*, avec la probabilité* P_n *égale à* $|c^n|^2$.

Postulat 5 : Mesure : réduction du paquet d'onde; obtention d'une valeur unique; projection de l'état quantique

Si la mesure de la grandeur physique A, à l'instant t, sur un système représenté par le vecteur $|\psi(t)>$ donne comme résultat la valeur propre a_n, alors l'état du système immédiatement après la mesure est projeté sur le sous-espace propre associé à a_n.

Postulat 6 : Évolution temporelle de l'état quantique

L'état $|\psi(t)>$ de tout système quantique non-relativiste est une solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

La donnée de ces six postulats a permis de fournir un cadre dans lequel la physique quantique a pu se développer, et expliquer la majeure partie des phénomènes observés et mesurés. Les succès obtenus par les prévisions de cette théorie ont conduit les physiciens à l'adopter comme la meilleure représentation possible du monde quantique, sans toutefois les amener à une satisfaction pleine et entière.

Pour quelles raisons ?

Essentiellement parce que la représentation de Copenhague laisse dans l'ombre une partie des phénomènes physiques du monde quantique pour lesquelles elle ne sait pas fournir une explication satisfaisante. Cette situation met les physiciens dans une position inconfortable qui consiste à dire qu'on dispose d'une théorie capable d'avoir une précision inégalée dans certaines prédictions, mais incapable de fournir une explication cohérente à des phénomènes aussi fondamentaux que la dualité onde-corpuscule.

Ce malaise est palpable dans certaines situations, dont par exemple, celle concernant les particules intriquées.

Nous avons vu que lorsqu'on adopte la vision de Copenhague de manière inconditionnelle et sans aucun doute sur sa portée universelle, on est conduit à interpréter le phénomène d'intrication comme un phénomène non local, et donc qui relève d'une autre physique que celle qui fonde notre connaissance actuelle. Un raisonnement plus rigoureux poserait plutôt le problème en ces termes :

- Soit on admet la portée universelle des postulats de l'Ecole de Copenhague, et alors l'intrication conduit à une physique qui n'a plus rien à voir avec la physique classique.
- Soit on admet que le phénomène d'intrication s'inscrit dans la physique classique, et il convient alors de s'interroger sur la portée et les limites des postulats de l'Ecole de Copenhague.

De manière surprenante, la deuxième hypothèse n'est jamais discutée. Le postulat N° 6 de l'Ecole de Copenhague présente pourtant des faiblesses qui doivent nous interroger car ce postulat gouverne l'évolution énergétique du monde quantique. On rappelle que l'invalidité d'un seul des postulats entraîne à minima une invalidité partielle de la théorie.

I – Les atouts du postulat N° 6

Si l'équation de SCHRÖDINGER a pu acquérir le statut de postulat, c'est qu'elle présente des atouts qui ont inspiré confiance aux physiciens.

En premier lieu, dans un potentiel électrostatique à symétrie sphérique, elle permet de retrouver avec une grande précision les différentes séries (BALMER, LYMAN, PASCHEN) des raies d'émission de l'atome d'hydrogène, ainsi que la constante de RYDBERG.

L'équation de SCHRÖDINGER dépendante du temps se présente sous la forme :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + E_p\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + E_p\right)\psi = \hat{H}\psi$$

où E_p désigne l'énergie potentielle et $\hat{H}$ l'opérateur hamiltonien, qui est associé à l'énergie totale de la particule ou du système.

Dans cette représentation, le terme de gauche peut être associé à la variation de fonction d'onde $d\psi$ pendant une durée élémentaire dt.

Le terme de droite nous indique que cette évolution est également fournie par un l'opérateur hamiltonien appliqué à la fonction d'onde.

On en conclut que la variation temporelle de la fonction d'onde est décrite uniquement en fonction de l'énergie totale de la particule ou du système.

Du point de vue de la physique, cette description est pleinement satisfaisante, et peut conduire à admettre l'équation de SCHRÖDINGER comme l'équation qui traduit l'évolution énergétique des systèmes quantiques.

II – Les faiblesses du postulat N° 6

Un postulat constitue par définition une propriété admise et non démontrée. En cela, un postulat constitue toujours un maillon faible dans une théorie, car il est toujours susceptible d'être remis en question.

Pour que cette propriété soit admise comme fondatrice, elle doit avoir un caractère physique évident qui la rend incontestable dans tout le domaine sur lequel elle s'étend.

Le postulat N°6 fonde l'interprétation de l'Ecole de Copenhague sur l'équation de SCHRÖDINGER. Or, il est connu que cette équation est en difficulté sur de nombreux éléments dans la description du monde quantique :

- cette équation ne fournit pas, dans une situation pourtant extrêmement simple, les bonnes raies d'émission de la structure fine de l'atome d'hydrogène.

- Il est admis qu'une condition nécessaire à la validité d'une loi physique est son invariance par changement de référentiel. L'équation de SCHRÖDINGER ne possède pas cette propriété

- Le spin ne peut pas être décrit correctement à l'aide du postulat N° 6. Il s'agit pourtant d'une propriété fondamentale des particules quantiques.

Sur la simple base des trois observations précédentes, on peut se demander comment ce postulat peut prétendre à une validité universelle dans le monde quantique, et comment on peut s'appuyer de manière indiscutable sur l'équation de SCHRÖDINGER pour prédire toutes les propriétés des particules quantiques. On remarque a minima qu'il y a des propriétés qu'il est incapable de prédire.

III – L'équation de DIRAC

Au vu des faiblesses du postulat N°6 qui repose sur l'équation de SCHRÖDINGER, on serait tenté de lui substituer l'équation de DIRAC. En effet, cette dernière fournit les solutions correctes pour la structure fine de l'atome d'hydrogène, elle est invariante sous la transformation de LORENTZ et elle décrit correctement le spin de l'électron.

L'Ecole de Copenhague ne peut pas mettre en œuvre cette substitution car elle donne à la fonction d'onde au carré la signification d'une densité volumique de probabilité de présence. Puisque les solutions de l'équation de DIRAC comportent 4 termes regroupés sous la forme de 2 spineurs, il devient impossible d'associer une signification physique de probabilité de présence à chacun des termes.

L'Ecole de Copenhague est ainsi installée dans ce fonctionnement curieux : elle admet et utilise l'équation de DIRAC, qui a un niveau de généralité de description du monde quantique supérieur à l'équation de SCHRÖDINGER, mais sans la promouvoir au rang d'équation fondatrice de la mécanique quantique parce qu'elle ne sait pas donner de signification physique probabiliste à chacun de ses termes.

Lorsqu'on adopte un point de vue énergétique, on cerne mieux les apports respectifs de ces deux équations.

L'équation de SCHRÖDINGER se révèle correcte pour décrire tous les phénomènes qui sont le résultat de la seule mise en œuvre de l'énergie totale de la particule. Cette énergie totale est directement attachée à la probabilité de présence de la particule par l'Ecole de Copenhague.

L'équation de DIRAC est plus subtile, car elle distingue la part d'énergie de masse et la part d'énergie impulsionnelle dans l'énergie totale. Elle permet donc une analyse plus fine des phénomènes, mais rend impossible l'assimilation de la fonction d'onde au carré à une densité volumique de probabilité de présence de la particule.

On peut résumer la situation de la manière suivante : l'équation de DIRAC ne peut pas être admise par l'Ecole de Copenhague comme équation fondamentale de la physique quantique, car la mise en conformité des postulats 1 à 5 avec cette équation pose des problèmes insurmontables dans une approche probabiliste.

Il existe alors deux attitudes possibles :

Soit on conserve les postulats 1 à 5 et on rejette l'équation de DIRAC des postulats fondateurs sans justification sur son rejet : c'est le choix de l'Ecole de Copenhague,

Soit on admet qu'une équation invariante sous la transformation de Lorentz présente des garanties physiques bien supérieures à une équation qui ne possède pas cette invariance (équation de SCHRÖDINGER), et on examine les conséquences de ce choix sur les postulats 1 à 5.

C'est cette seconde voie que nous choisissons d'explorer dans le paragraphe suivant.

IV – Peut-on définir un socle fondateur de la mécanique quantique sur la base de l'équation de DIRAC ?

Est-il envisageable de promouvoir l'équation de DIRAC au rang d'équation fondamentale de la mécanique quantique, en remplacement de l'équation de SCHRÖDINGER et à quelles conditions ?

Sur la base des solutions exactes à l'équation de DIRAC sous la forme d'ondes stationnaires, l'état quantique d'une particule peut être défini par la connaissance de son état énergétique à chaque instant.

La notion de propriété observable, comme par exemple la position ou l'impulsion, ne nécessite pas de précaution particulière, puisque ces propriétés sont bien présentes au sein de la particule, mais en des endroits différents. Le principe d'incertitude d'HEISENBERG n'est pas remis en cause, mais fait l'objet d'une interprétation énergétique et déterministe.

La notion de mesure doit être redéfinie en termes d'échanges d'énergie. Effectuer une mesure sur un objet quantique N°1, c'est faire interagir cet objet quantique N°1 avec un autre objet quantique N°2 dont on connaît certaines propriétés, et déduire des résultats mesurés de l'interaction, les informations concernant l'objet quantique N°1 au moment de l'interaction.

Un exemple concret est suggéré par l'effet COMPTON.

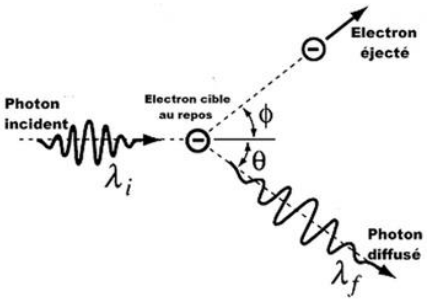


FIG XXVIII-1 : *représentation de l'effet COMPTON*

Si on suppose connue la direction du photon incident et sa longueur d'onde λ_i, la direction du photon diffusé et sa longueur d'onde λ_f, alors les règles de conservation d'énergie de la mécanique classique permettent de connaître la position de l'électron lors de l'interaction, ainsi que la vitesse et la direction dans laquelle il est éjecté.

Il convient également de préciser la délicate notion de réduction du paquet d'onde et de décohérence.

Pour l'école de Copenhague, la réduction du paquet d'onde stipule qu'après une mesure, un système physique voit son état entièrement réduit à celui qui a été mesuré. Cette particularité est rendue nécessaire à cause de l'indétermination du monde quantique qui suppose la superposition d'une infinité d'état quantique avant l'acte de mesure. Cette notion est sans objet dans une approche énergétique et déterministe où l'état quantique est supposé parfaitement déterminé à tout instant.

La décohérence quantique est une théorie chargée d'expliquer la transition entre les règles physiques quantiques et les règles physiques classiques telles que nous les connaissons, à un niveau macroscopique. Puisque l'approche énergétique et déterministe s'appuie uniquement sur les postulats de la physique classique, le problème de la décohérence est également sans objet dans cette approche.

Il apparaît qu'aucun postulat supplémentaire n'est nécessaire pour passer de la physique classique à la physique quantique déterministe déduite de l'équation de DIRAC : la transition s'effectue à l'aide du seul postulat de conservation de l'énergie.

XXIX

Sur l'invariance des lois de la physique par changement de référentiel

Parmi les arguments qui plaident en faveur de l'introduction de l'équation de DIRAC comme équation fondamentale de la physique quantique, il y a celui de son invariance par changement de référentiel.

Il s'agit d'un argument extrêmement fort qui traduit la cohérence absolue entre tout ce que l'on sait de la relativité restreinte, et tout ce qui peut être déduit de l'équation de DIRAC.

Soit deux référentiels que nous désignerons par (R) et (R'). Le référentiel (R') est supposé en mouvement de translation à vitesse constante v par rapport au référentiel (R).

Les coordonnées d'espace-temps du référentiel (R') sont reliées aux coordonnées d'espace-temps du référentiel (R) par une transformation de LORENTZ.

Le bi-spineur ψ qui représente l'état de la particule dans le référentiel (R) est représenté dans le référentiel (R') par un autre bi-spineur ψ'.

L'invariance de l'équation de DIRAC par changement de référentiel se traduit par le fait qu'il existe la même relation entre les composantes du bi-spineur ψ dans le référentiel (R), qu'entre les composantes du bi-spineur ψ' dans le référentiel (R'). Ces deux relations sont fournies par l'équation de DIRAC exprimée dans le référentiel (R), et l'équation de DIRAC exprimée dans le référentiel (R') :

$$\left(j\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{m_0c}{\hbar}\right)\psi\left(x^{\mu}\right)=0$$
$$\left(j\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}-\frac{m_0c}{\hbar}\right)\psi'\left(x'^{\mu}\right)=0 \qquad \text{(XXIX-1)}$$

Nous proposons de montrer comment cette invariance est vérifiée, en la détaillant jusqu'au cœur du système de DIRAC. Il s'agit d'un exercice essentiellement pédagogique, car la démonstration tensorielle purement mathématique s'obtient plus rapidement. Sa justification réside dans le fait que l'écriture extrêmement concise de l'analyse tensorielle masque des éléments dont le physicien a besoin pour sa compréhension détaillée des phénomènes.

I – La transformation de LORENTZ

Nous travaillerons avec la transformation classique où les deux référentiels (R) et (R') sont en translation à vitesse constante v suivant l'axe des x. Dans ces conditions, la transformation de LORENTZ s'écrit :

$$dx_t' = \frac{dx_t - \frac{v}{c}dx_t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(dx_t - \beta dx)$$

$$dx' = \frac{dx - \frac{v}{c}dx_t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(dx - \beta dx_t) \qquad \text{(XXIX-2)}$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

On a posé, dans une notation habituelle :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c} \qquad \text{(XXIX-3)}$$

Ce qui conduit à une écriture matricielle plus condensée :

$$\begin{pmatrix} dx_t' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_t \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = (\Lambda) \begin{pmatrix} dx_t \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-4)}$$

On en déduit les relations entre les dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial x_t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x_t'} - \beta\gamma \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\beta\gamma \frac{\partial}{\partial x_t'} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

soit encore :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = (\Lambda) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-5)}$$

Ainsi que les relations réciproques :

$$\frac{\partial}{\partial x_t'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x_t} + \beta\gamma \frac{\partial}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x'} = \beta\gamma \frac{\partial}{\partial x_t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

soit encore :
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} = \left(\Lambda^{-1}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-6)}$$

On rappelle que le déterminant de la matrice de passage Λ est égal à 1 :

$$\mathrm{Det}(\Lambda) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1 \qquad \text{(XXIX-7)}$$

II – La transformation du bi-spineur

On peut considérer que c'est la principale difficulté dans la recherche d'une formulation invariante de l'équation de DIRAC.

Pour que cette recherche ait un sens, on admet que les composantes du bi-spineur transformé ψ' de (R') s'écrivent nécessairement comme une combinaison linéaire des composantes du bi-spineur ψ de (R), ce qui revient à la détermination d'une matrice S à coefficients constants :

$$(\psi') = \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{00} & S_{01} & S_{02} & S_{03} \\ S_{10} & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{20} & S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{30} & S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{00}\psi_0 + S_{01}\psi_1 + S_{02}\psi_2 + S_{03}\psi_3 \\ S_{10}\psi_0 + S_{11}\psi_1 + S_{12}\psi_2 + S_{13}\psi_3 \\ S_{20}\psi_0 + S_{21}\psi_1 + S_{22}\psi_2 + S_{23}\psi_3 \\ S_{30}\psi_0 + S_{31}\psi_1 + S_{32}\psi_2 + S_{33}\psi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-8)}$$

Nous admettrons provisoirement (la démonstration est donnée plus loin dans ce chapitre), que pour la transformation de LORENTZ (XXIX-2,3,4), la forme de la matrice S est la suivante :

$$S = \begin{pmatrix} S_{00} & S_{01} & S_{02} & S_{03} \\ S_{10} & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{20} & S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{30} & S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & \gamma+1 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & \gamma+1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma+1 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-9)}$$

On en déduit les relations entre les composantes du bi-spineur ψ et les composantes du bi-spineur ψ' :

$$(\psi') = \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & \gamma+1 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & \gamma+1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma+1)\psi_0 - \beta\gamma\psi_3 \\ (\gamma+1)\psi_1 - \beta\gamma\psi_2 \\ -\beta\gamma\psi_1 + (\gamma+1)\psi_2 \\ -\beta\gamma\psi_0 + (\gamma+1)\psi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-10)}$$

On vérifie que cette formulation fait bien apparaître les deux spineurs de ψ' comme combinaison linéaire des deux spineurs de ψ.

$$\begin{pmatrix}\psi_0' \\ \psi_1'\end{pmatrix} = (\gamma+1)\begin{pmatrix}\psi_0 \\ \psi_1\end{pmatrix} - \beta\gamma\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\psi_2' \\ \psi_3'\end{pmatrix} = -\beta\gamma\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_0\end{pmatrix} + (\gamma+1)\begin{pmatrix}\psi_2 \\ \psi_3\end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-11)}$$

On note une inversion de l'ordre des composantes de certains spineurs, sans conséquence sur le fait qu'il s'agit d'une transformation interne à l'espace des spineurs.

Muni de cette transformation, et de la transformation des différentielles partielles relatives à la transformation de LORENTZ, nous disposons de tous les éléments pour vérifier l'invariance du système de DIRAC par changement de référentiel.

III – Invariance du système de DIRAC par changement de référentiel

Nous adoptons comme point de départ, l'équation de DIRAC développée dans le référentiel (R') :

$$\eta\psi_0' = j\frac{\partial\psi_0'}{\partial x_t'} + j\frac{\partial\psi_3'}{\partial x'} + \frac{\partial\psi_3'}{\partial y'} + j\frac{\partial\psi_2'}{\partial z'}$$
$$\eta\psi_1' = j\frac{\partial\psi_1'}{\partial x_t'} + j\frac{\partial\psi_2'}{\partial x'} - \frac{\partial\psi_2'}{\partial y'} - j\frac{\partial\psi_3'}{\partial z'}$$
$$\eta\psi_2' = -j\frac{\partial\psi_2'}{\partial x_t'} - j\frac{\partial\psi_1'}{\partial x'} - \frac{\partial\psi_1'}{\partial y'} - j\frac{\partial\psi_0'}{\partial z'} \qquad \text{(XXIX-12)}$$
$$\eta\psi_3' = -j\frac{\partial\psi_3'}{\partial x_t'} - j\frac{\partial\psi_0'}{\partial x'} + \frac{\partial\psi_0'}{\partial y'} + j\frac{\partial\psi_1'}{\partial z'}$$

Dans une première étape, nous effectuons la transformation des fonctions d'ondes du référentiel (R') en fonction des fonctions d'ondes du référentiel(R) en utilisant la relation (XXIX-10) :

$$\eta\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}=\left\{\begin{array}{l} j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}}{\partial x_t'}+j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}}{\partial x'} \\ +\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}}{\partial y'}+j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}}{\partial z'} \end{array}\right\}$$

$$\eta\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}=\left\{\begin{array}{l} j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}}{\partial x_t'}+j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}}{\partial x'} \\ -\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}}{\partial y'}-j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}}{\partial z'} \end{array}\right\}$$

$$\eta\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}=\left\{\begin{array}{l} -j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}}{\partial x_t'}-j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}}{\partial x'} \\ -\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}}{\partial y'}-j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}}{\partial z'} \end{array}\right\}$$

$$\eta\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}=\left\{\begin{array}{l} -j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}}{\partial x_t'}-j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}}{\partial x'} \\ +\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}}{\partial y'}+j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}}{\partial z'} \end{array}\right\} \qquad \text{(XXIX-13)}$$

Dans une seconde étape, nous remplaçons les dérivées partielles du référentiel (R’) par leur expression en fonction des dérivées partielles du référentiel (R) en utilisant la relation (XXIX-6) :

$$\eta\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}=\left\{\begin{array}{l} j\left(\gamma\dfrac{\partial}{\partial x_t}+\beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\} \\ +j\left(\beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial x_t}+\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\} \\ +\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}}{\partial y}+j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}}{\partial z} \end{array}\right\}$$

$$\eta\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}=\left\{\begin{array}{l} j\left(\gamma\dfrac{\partial}{\partial x_t}+\beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\} \\ +j\left(\beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial x_t}+\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\} \\ -\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}}{\partial y}-j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}}{\partial z} \end{array}\right\}$$

$$\eta\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}=\left\{\begin{array}{l} -j\left(\gamma\dfrac{\partial}{\partial x_t}+\beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\} \\ -j\left(\beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial x_t}+\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\} \\ -\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}}{\partial y}-j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}}{\partial z} \end{array}\right\}$$

$$\eta\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}=\left\{\begin{array}{l} -j\left(\gamma\dfrac{\partial}{\partial x_t}+\beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\} \\ -j\left(\beta\gamma\dfrac{\partial}{\partial x_t}+\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\} \\ +\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}}{\partial y}+j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}}{\partial z} \end{array}\right\} \qquad \text{(XXIX-14)}$$

En troisième étape, nous développons les expressions différentielles :

$$\eta\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}=\left\{\begin{array}{l}
j\left(\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_0}{\partial x_t}+\beta\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_0}{\partial x}\right)+j\left(-\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_3}{\partial x_t}-\beta\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_3}{\partial x}\right)\\
+j\left(-\beta\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_0}{\partial x_t}-\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_0}{\partial x}\right)+j\left(\beta\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_3}{\partial x_t}+\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_3}{\partial x}\right)\\
+\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}}{\partial y}+j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}}{\partial z}
\end{array}\right\}$$

$$\eta\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}=\left\{\begin{array}{l}
j\left(\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_1}{\partial x_t}+\beta\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_1}{\partial x}\right)+j\left(-\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_2}{\partial x_t}-\beta\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_2}{\partial x}\right)\\
+j\left(-\beta\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_1}{\partial x_t}-\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_1}{\partial x}\right)+j\left(\beta\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_2}{\partial x_t}+\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_2}{\partial x}\right)\\
-\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}}{\partial y}-j\dfrac{\partial\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}}{\partial z}
\end{array}\right\}$$

$$\eta\{-\beta\gamma\psi_1+(\gamma+1)\psi_2\}=\left\{\begin{array}{l}
-j\left(-\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_1}{\partial x_t}-\beta\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_1}{\partial x}\right)-j\left(\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_2}{\partial x_t}+\beta\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_2}{\partial x}\right)\\
-j\left(\beta\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_1}{\partial x_t}+\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_1}{\partial x}\right)-j\left(-\beta\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_2}{\partial x_t}-\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_2}{\partial x}\right)\\
-\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}}{\partial y}-j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}}{\partial z}
\end{array}\right\}$$

$$\eta\{-\beta\gamma\psi_0+(\gamma+1)\psi_3\}=\left\{\begin{array}{l}
-j\left(-\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_0}{\partial x_t}-\beta\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_0}{\partial x}\right)-j\left(\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_3}{\partial x_t}+\beta\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_3}{\partial x}\right)\\
-j\left(\beta\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_0}{\partial x_t}+\gamma\dfrac{\partial(\gamma+1)\psi_0}{\partial x}\right)-j\left(-\beta\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_3}{\partial x_t}-\gamma\dfrac{\partial\beta\gamma\psi_3}{\partial x}\right)\\
+\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_0-\beta\gamma\psi_3\}}{\partial y}+j\dfrac{\partial\{(\gamma+1)\psi_1-\beta\gamma\psi_2\}}{\partial z}
\end{array}\right\}$$

(XXIX-15)

Faisant usage de la relation donnée par le déterminant de la matrice de passage :

$$\gamma^2\left(1-\beta^2\right)=1 \qquad \text{(XXIX-16)}$$

On obtient en regroupant les termes semblables :

$$\eta\begin{Bmatrix}(\gamma+1)\psi_0\\ -\beta\gamma\psi_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_0}{\partial x_t}+j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_3}{\partial x}+\frac{\partial(\gamma+1)\psi_3}{\partial y}+j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_2}{\partial z}\\ j\frac{\partial\beta\gamma\psi_3}{\partial x_t}+j\frac{\partial\beta\gamma\psi_0}{\partial x}-\frac{\partial\beta\gamma\psi_0}{\partial y}-j\frac{\partial\beta\gamma\psi_1}{\partial z}\end{Bmatrix}$$

$$\eta\begin{Bmatrix}(\gamma+1)\psi_1\\ -\beta\gamma\psi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_1}{\partial x_t}+j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial(\gamma+1)\psi_2}{\partial y}-j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_3}{\partial z}\\ j\frac{\partial\beta\gamma\psi_2}{\partial x_t}+j\frac{\partial\beta\gamma\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\beta\gamma\psi_1}{\partial y}+j\frac{\partial\beta\gamma\psi_0}{\partial z}\end{Bmatrix}$$

$$\eta\begin{Bmatrix}(\gamma+1)\psi_2\\ -\beta\gamma\psi_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_2}{\partial x_t}-j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_1}{\partial x}-\frac{\partial(\gamma+1)\psi_1}{\partial y}-j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_0}{\partial z}\\ -j\frac{\partial\beta\gamma\psi_1}{\partial x_t}-j\frac{\partial\beta\gamma\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\beta\gamma\psi_2}{\partial y}+j\frac{\partial\beta\gamma\psi_3}{\partial z}\end{Bmatrix}$$

$$\eta\begin{Bmatrix}(\gamma+1)\psi_3\\ -\beta\gamma\psi_0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_3}{\partial x_t}-j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_0}{\partial x}+\frac{\partial(\gamma+1)\psi_0}{\partial y}+j\frac{\partial(\gamma+1)\psi_1}{\partial z}\\ -j\frac{\partial\beta\gamma\psi_0}{\partial x_t}-j\frac{\partial\beta\gamma\psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\beta\gamma\psi_3}{\partial y}-j\frac{\partial\beta\gamma\psi_2}{\partial z}\end{Bmatrix} \qquad \text{(XXIX-17)}$$

Pour être valide quel que soit γ et β, cette dernière relation impose :

$$\begin{aligned}\eta\psi_0&=j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t}+j\frac{\partial\psi_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}+j\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\\ \eta\psi_1&=j\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t}+j\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}-j\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\\ \eta\psi_2&=-j\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t}-j\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-j\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\\ \eta\psi_3&=-j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t}-j\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\frac{\partial\psi_0}{\partial y}+j\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\end{aligned} \qquad \text{(XXIX-18)}$$

Ce qui achève la démonstration de l'invariance du système de DIRAC sous la transformation de LORENTZ.

On pourrait penser qu'il s'agit d'une propriété banale, que l'on pourrait reproduire pour n'importe quelle transformation du bi-spineur de DIRAC. En réalité, il n'en est rien. La recherche d'une matrice S définie par (XXIX-8) telle que :

$$(\psi') = S\,(\psi) \qquad \text{(XXIX-19)}$$

conduit à la résolution d'un système à 64 équations et 16 inconnues, et qui fait donc peser sur cette matrice des contraintes de compatibilité très fortes entre la transformation de coordonnées et la transformation du bi-spineur.

IV – Recherche de la matrice S de transformation du bi-spineur

La matrice de transformation S du bi-spineur (XXIX-9) dépend de la transformation des coordonnées (XXIX-4) entre les deux référentiels (R) et (R').

Nous indiquons dans les lignes qui suivent, comment la matrice S a été obtenue dans le cas particulier d'une transformation de LORENTZ entre deux référentiels en translation à vitesse constante suivant l'axe Ox. La méthode est directement applicable à d'autres transformations, pourvues que ces transformations autorisent l'invariance du système de DIRAC.

Dans le référentiel (R'), l'équation de DIRAC s'écrit :

$$\left(j\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi'\left(x'^{\mu}\right) = 0 \qquad \text{(XXIX-20)}$$

Soit encore, en écriture développée, où les matrices de DIRAC sont représentées par γ^0, γ^1, γ^2, γ^3 :

$$j\gamma^0 \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0'}{\partial x_t'} \\ \frac{\partial \psi_1'}{\partial x_t'} \\ \frac{\partial \psi_2'}{\partial x_t'} \\ \frac{\partial \psi_3'}{\partial x_t'} \end{pmatrix} + j\gamma^1 \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \psi_1'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \psi_2'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \psi_3'}{\partial x'} \end{pmatrix} + j\gamma^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0'}{\partial y'} \\ \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \\ \frac{\partial \psi_2'}{\partial y'} \\ \frac{\partial \psi_3'}{\partial y'} \end{pmatrix} + j\gamma^3 \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0'}{\partial z'} \\ \frac{\partial \psi_1'}{\partial z'} \\ \frac{\partial \psi_2'}{\partial z'} \\ \frac{\partial \psi_3'}{\partial z'} \end{pmatrix} - \frac{m_0 c}{\hbar} \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_3' \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(XXIX-21)}$$

On effectue la transformation des bi-spineurs entre le référentiel (R) et le référentiel (R') à l'aide de la matrice S, et donc en utilisant la relation :

$$(\psi') = S\,(\psi) \qquad \text{(XXIX-22)}$$

Les dérivées partielles traversent la matrice pour s'appliquer aux composantes du bi-spineur exprimées dans le référentiel (R) :

$$j\gamma^0 S \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t'} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t'} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t'} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_t'} \end{pmatrix} + j\gamma^1 S \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial x'} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x'} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x'} \end{pmatrix} + j\gamma^2 S \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial y'} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y'} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y'} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial y'} \end{pmatrix} + j\gamma^3 S \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial z'} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z'} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z'} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial z'} \end{pmatrix} - \frac{m_0 c}{\hbar} S \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(XXIX-23)}$$

On effectue le changement de variable sur les différentielles. Dans le cas particulier de la transformation de coordonnées relative à une transformation de LORENTZ suivant l'axe Ox (XXIX-6), on obtient :

$$j\gamma^0 S\begin{pmatrix}\gamma\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\\ \gamma\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\\ \gamma\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\\ \gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\end{pmatrix}+j\gamma^1 S\begin{pmatrix}\beta\gamma\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\\ \beta\gamma\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\\ \beta\gamma\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\\ \beta\gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\end{pmatrix}+j\gamma^2 S\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\end{pmatrix}+j\gamma^3 S\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\end{pmatrix}-\frac{mc}{\hbar}S\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=0$$

(XXIX-24)

Il apparaît alors judicieux de multiplier à gauche l'ensemble de l'équation de DIRAC par la matrice S^{-1}, inverse de la matrice S :

$$jS^{-1}\gamma^0 S\begin{pmatrix}\gamma\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\\ \gamma\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\\ \gamma\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\\ \gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\end{pmatrix}+jS^{-1}\gamma^1 S\begin{pmatrix}\beta\gamma\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\\ \beta\gamma\frac{\partial\psi_1}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\\ \beta\gamma\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\\ \beta\gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\end{pmatrix}+jS^{-1}\gamma^2 S\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\end{pmatrix}+jS^{-1}\gamma^3 S\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\end{pmatrix}-\frac{mc}{\hbar}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}=0$$

(XXIX-25)

On regroupe ensuite les colonnes relatives à chaque différentielle :

$$j\gamma\left\{S^{-1}\gamma^0 S+S^{-1}\gamma^1 S\beta\right\}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_t}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_t}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_t}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial x_t}\end{pmatrix}+j\gamma\left\{S^{-1}\gamma^0 S\beta+S^{-1}\gamma^1 S\right\}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial x}\end{pmatrix}$$

(XXIX-26)

$$+jS^{-1}\gamma^2 S\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\end{pmatrix}+jS^{-1}\gamma^3 S\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\end{pmatrix}=\frac{mc}{\hbar}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$$

On prendra garde de faire la différence dans ces expressions, entre γ qui désigne un coefficient de la transformation de LORENTZ défini en (XXIX-3), et γ^0, γ^1, γ^2, γ^3, qui désignent les matrices de DIRAC.

L'invariance du système de DIRAC sera obtenue lorsque :

$$\begin{aligned}
&\gamma\left\{S^{-1}\gamma^0 S + S^{-1}\gamma^1 S\beta\right\} = \gamma^0 \\
&\gamma\left\{S^{-1}\gamma^0 S\beta + S^{-1}\gamma^1 S\right\} = \gamma^1 \\
&S^{-1}\gamma^2 S = \gamma^2 \\
&S^{-1}\gamma^3 S = \gamma^3
\end{aligned} \qquad \text{(XXIX-27)}$$

Il apparaît à nouveau judicieux de multiplier à gauche par la matrice de transformation des bi-spineurs S, afin d'obtenir un système d'équations qui ne comporte plus que les termes de cette matrice :

$$\begin{aligned}
&\gamma\left\{\gamma^0 S + \gamma^1 S\beta\right\} = S\gamma^0 \\
&\gamma\left\{\gamma^0 S\beta + \gamma^1 S\right\} = S\gamma^1 \\
&\gamma^2 S = S\gamma^2 \\
&\gamma^3 S = S\gamma^3
\end{aligned} \qquad \text{(XXIX-28)}$$

Il s'agit d'un système de 64 équations, avec 16 inconnues qui sont les termes de la matrice S. Son écriture, avec les matrices de DIRAC développées, est donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&\gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S + \beta\gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S = S\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\beta\gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} S = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \qquad \text{(XXIX-29)}$$

Ce système, surdimensionné par rapport au nombre d'inconnue, montre que toutes les transformations de coordonnées ne sont pas admissibles pour qu'il existe des solutions. La même remarque vaut pour les transformations des bi-spineurs.

Les deux dernières relations du système (XXIX-28) ou (XXIX-30) expriment, dans le cas particulier qui est traité, que les matrices de DIRAC γ^2 et γ^3 doivent commuter avec la matrice S. On déduit de ces 32 équations que la matrice S doit être de la forme :

$$S=\begin{pmatrix} S_{00} & S_{01} & S_{02} & S_{03} \\ S_{10} & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{20} & S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{30} & S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & a & b & c \\ a & d & c & b \\ -b & c & d & -a \\ c & -b & -a & d \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-30)}$$

En injectant cette forme de matrice dans les 32 équations restantes du système (XXIX-28) ou (XXIX-29), on est conduit à constater la nullité des coefficients a et b, et on en déduit la matrice recherchée :

$$S=\begin{pmatrix} S_{00} & S_{01} & S_{02} & S_{03} \\ S_{10} & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{20} & S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{30} & S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & \gamma+1 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & \gamma+1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma+1 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-31)}$$

Cette matrice est définie à une constante multiplicative près que nous désignerons par $K(\beta,\gamma)$. Cette constante qui ne joue aucun rôle pour établir l'invariance du système de DIRAC a été omise jusqu'à présent. De manière plus générale, on doit poser :

$$S(\beta,\gamma)=K(\beta,\gamma)\begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & \gamma+1 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & \gamma+1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma+1 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-32)}$$

Lorsqu'on échange le rôle des référentiels (R) et (R'), cela revient à échanger le signe de la vitesse relative, et donc de β.

La composition de deux translations des référentiels avec des vitesses opposées doit permettre de retrouver des spineurs identiques, ce que l'on peut écrire :

$$K(\beta,\gamma)\begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & \gamma+1 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & \gamma+1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma+1 \end{pmatrix}K(-\beta,\gamma)\begin{pmatrix} \gamma+1 & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & \gamma+1 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & \beta\gamma & \gamma+1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-33)}$$

Soit encore :

$$K(\beta,\gamma)K(-\beta,\gamma)\begin{pmatrix} 2\gamma+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-34)}$$

On en déduit la constante K :

$$K(\beta,\gamma)=K(-\beta,\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\gamma+2}} \qquad \text{(XXIX-35)}$$

Et la forme finale de la matrice S :

$$S(\beta,\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\gamma+2}}\begin{pmatrix}\gamma+1 & 0 & 0 & -\beta\gamma\\ 0 & \gamma+1 & -\beta\gamma & 0\\ 0 & -\beta\gamma & \gamma+1 & 0\\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma+1\end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-36)}$$

On en déduit la matrice inverse S^{-1} :

$$S^{-1}(\beta,\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\gamma+2}}\begin{pmatrix}\gamma+1 & 0 & 0 & \beta\gamma\\ 0 & \gamma+1 & \beta\gamma & 0\\ 0 & \beta\gamma & \gamma+1 & 0\\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma+1\end{pmatrix} \qquad \text{(XXIX-37)}$$

V - La non invariance de l'équation de SCHRÖDINGER

Dans un potentiel nul, l'équation de SCHRÖDINGER pour une particule libre s'écrit dans le référentiel (R') :

$$j\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial x_t'}=-\frac{\hbar^2}{2mc}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial z'^2}\right) \qquad \text{(XXIX-37)}$$

En substituant les dérivées partielles déduites de la transformation de LORENTZ (XXIX-6), on obtient successivement :

$$\begin{aligned} j\hbar\left(\gamma\frac{\partial\psi'}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)&=-\frac{\hbar^2}{2mc}\left(\left(\beta\gamma\frac{\partial}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\beta\gamma\frac{\partial\psi'}{\partial x_t}+\gamma\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}\right)\\ j\hbar\left(\gamma\frac{\partial\psi'}{\partial x_t}+\beta\gamma\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)&=-\frac{\hbar^2}{2mc}\left(\left(\beta^2\gamma^2\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_t^2}+2\beta\gamma^2\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_t\partial x}+\gamma^2\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}\right)\end{aligned} \qquad \text{(XXIX-38)}$$

L'invariance de cette équation sera vérifiée s'il est possible de trouver une relation linéaire entre ψ et ψ' telles que l'équation ci-dessus puisse se mettre sous la forme :

$$j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x_t}=-\frac{\hbar^2}{2mc}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(XXIX-39)}$$

Une telle égalité n'est possible qu'en imposant $\beta = 0$ et $\gamma = 1$, ce qui indique que les deux référentiels (R) et (R') sont identiques.

Il n'est pas surprenant que l'équation de SCHRÖDINGER ne soit pas invariante sous la transformation de LORENTZ, car son énergie totale est définie à partir de l'énergie cinétique et potentielle de la mécanique non relativiste.

VI – Conclusion

L'invariance des lois physiques par changement de référentiel trouve son fondement dans le raisonnement suivant : le référentiel que l'on choisit pour décrire une expérience de physique ne peut avoir aucune influence sur son déroulement.

Si on observe la chute d'un caillou depuis un balcon ou depuis un train qui passe, le référentiel d'observation ne doit pas avoir d'influence sur le phénomène physique qui se déroule.

Les grandeurs physiques vont être « habillées » différemment suivant le référentiel, mais la réalité physique qui sera derrière cet « habillage » sera identique.

Si cette propriété n'est pas vérifiée, c'est qu'il existe un problème soit dans « l'habillage » des grandeurs physiques vues dans chaque référentiel, soit dans la loi physique elle-même.

Ce point de vue est complètement analogue à celui qui est associé à la représentation vectorielle. Un vecteur représente une grandeur unique, dont « l'habillage » dépend du repère dans lequel il est décrit : cartésien, cylindrique, ou sphérique.

Pour autant, si on fait la somme de deux vecteurs écrits en coordonnées cartésiennes, le résultat sera un vecteur identique à celui obtenu en faisant la somme de ces deux vecteurs écrits en coordonnées cylindriques. La loi d'addition écrite dans un repère se retrouve à l'identique dans l'autre repère, et il n'est donc plus besoin de préciser le repère dans lequel elle est écrite.

Lorsqu'une équation ou une relation entre des grandeurs physiques est invariante par changement de référentiel, cela garantit que le phénomène observé est vu de manière identique dans chacun des référentiels.

Ce concept extrêmement puissant peut être mis en avant pour donner une préférence à l'équation de DIRAC plutôt qu'à l'équation de SCHRÖDINGER dans la description du monde quantique.

XXX

Conclusion générale

L'approche énergétique de la mécanique quantique proposée dans ce document est en opposition avec l'approche probabiliste de l'Ecole de Copenhague qui domine aujourd'hui, pratiquement sous la forme d'une pensée unique, la vision de la physique quantique.

Cette vision probabiliste s'est installée lors de la découverte des propriétés physiques particulières du monde de l'infiniment petit. Elle s'est imposée sous la contrainte du principe d'indétermination de HEISENBERG, confortée par l'équivalence établie ensuite entre l'équation de SCHRÖDINGER et ce principe. Cette vision était la seule qui permette de rendre compte de tous les résultats expérimentaux, en cohérence avec l'incertitude quantique du principe d'indétermination. Elle est devenue incontournable dès lors qu'elle est restée en accord avec des résultats expérimentaux de plus en plus précis et affinés. Peu à peu les physiciens l'ont acceptée comme une théorie sure et capable de prédire l'ensemble des propriétés du monde quantique.

Lorsqu'on adopte un point de vue critique, le problème essentiel qui se pose dans l'évolution de cette théorie est qu'elle repose sur un postulat de base constitué par le théorème d'indétermination. Dès lors, tout ce qui est élaboré à l'aide de cette théorie est vu à travers le filtre de cette indétermination et ne peut être développé que dans une approche probabiliste. Il devient impossible de sortir de ce cadre lorsqu'on veut expliquer les phénomènes spécifiques de la mécanique quantique.

On ne peut que constater l'impuissance de l'Ecole de Copenhague à fournir une explication à certains phénomènes comme la dualité onde-corpuscule. Après un siècle de recherche, et un investissement des meilleurs physiciens dans la compréhension ce phénomène, on peut estimer sans trop de risque qu'il y a une impossibilité intrinsèque à expliquer cette dualité à l'aide d'une théorie probabiliste.

D'autres phénomènes complexes comme l'intrication ne trouvent d'explication probabiliste qu'à l'aide de contorsions qui sortent des lois classiques de la physique, et donc suscitent nécessairement quelques interrogations.

Le théorème d'incertitude lui-même est admis comme une propriété du monde quantique, sans aucune tentative d'explication sur la nature physique de son interprétation.

Enfin, la nature imaginaire de l'équation de SCHRÖDINGER et de ses solutions reste une énigme complète, et ne trouve aucune explication satisfaisante dans ce formalisme.

Pour autant, proposer une alternative ou une évolution de l'Ecole de Copenhague est un challenge délicat car toute évolution doit rester en accord avec l'ensemble des acquis de cette Ecole, qui constitue un socle inamovible de la mécanique quantique.

L'approche énergétique présentée dans ce document répond à ce challenge.

Si on considère l'équation de DIRAC comme un raffinement des équations de SCHRÖDINGER et KLEIN-GORDON, et si on se souvient de l'équivalence entre la mécanique des matrices de HEISENBERG et l'équation de SCHRÖDINGER, alors, des solutions exactes à l'équation de DIRAC doivent être en accord avec l'ensemble des résultats construits sur le principe de HEISENBERG et l'équation de SCHRÖDINGER.

L'analyse des solutions exactes sous la forme d'ondes stationnaires amène à reconsidérer la signification physique de la fonction d'onde. L'Ecole de Copenhague donne à leur produit conjugué la dimension d'une densité volumique de probabilité de présence de la particule, dénomination qui masque l'ignorance des phénomènes physiques sous-jacents à la notion de présence d'une particule et qui empêche toute progression vers une compréhension plus subtile du fonctionnement interne de la particule.

En adoptant la signification d'une densité volumique d'énergie, on propose une voie dans laquelle, sans autre hypothèse que la conservation de l'énergie et l'évolution de l'énergie sous la forme d'ondes stationnaires, toutes les questions non résolues de l'Ecole de Copenhague trouvent une explication simple.

L'énergie interne de la particule se décompose en trois énergies de nature différente : énergie de masse, énergie impulsionnelle, et énergie ondulatoire. Ces énergies s'échangent entre elles et de manière ultime, avec l'énergie du vide. Cet échange d'énergie est signé et prend un signe opposé suivant que la particule reçoit ou restitue de l'énergie au vide. Les courants de DIRAC regroupent les densités volumiques de toutes ces énergies suivant chaque direction de l'espace, ce qui permet de leur appliquer le principe local de conservation de l'énergie en calculant leur divergence. La nature imaginaire de la fonction d'onde ne pose plus aucun problème d'interprétation.

Il n'est plus besoin de faire des hypothèses ad hoc, ou d'échafauder des théories alambiquées pour expliquer la dualité onde-matière, puisque celle-ci apparaît naturellement dans les solutions stationnaires comme un échange très rapide entre énergie de masse et énergie ondulatoire.

Le mystère du principe d'indétermination disparaît. Les échanges d'énergie au sein de la particule montrent qu'il est impossible d'avoir simultanément et au même endroit, la totalité de l'information sur l'énergie impulsionnelle, et sur l'énergie de masse qui est relative à l'opérateur de position.

Il ne reste plus qu'une approche complètement déterministe et en accord avec tous les aquis de l'Ecole de Copenhague.

Ce travail de recherche est proposé à la communauté scientifique intéressée par ce sujet pour être partagé, critiqué, amendé et/ou peut être conforté.

BIBLIOGRAPHIE

Première Partie

La mécanique quantique repose sur les trois équations fondamentales de SCHRÖDINGER, KLEIN-GORDON et DIRAC et sur une interprétation probabiliste induite par le principe d'incertitude de HEISENBERG.

La première partie de ce document s'intéresse essentiellement à l'équation de DIRAC et à son traitement général tel qu'il est présenté aujourd'hui par de nombreux scientifiques. La bibliographie est abondante à ce niveau. Les documents internet suivants ont été consultés sur la période 2010-2015.

Sur la mécanique quantique en général :

www.phys.ens.fr/cours/cours-mip/MagL6Complet.pdf
www.phys.ens.fr/cours/cours-mip/
www.eleves.ens.fr/home/bolgar/Mécanique%20quantique.pdf
www.phys.ens.fr/~dalibard/Notes_de_cours/X_MQ_2003.pdf
www.phys.ens.fr/~sinatra/cours.pdf
www.lcar.ups-tlse.fr/IMG/pdf/Poly-2.pdf
http://daniel.farquet.com/wp-content/uploads/Physique_quantique_relativiste.pdf
http://dirac.cnrs-orleans.fr/~kneller/MecaniqueQuantique/cours.pdf
http://aflb.ensmp.fr/LDB-oeuvres/De_Broglie_Kracklauer.htm
https://cp3.irmp.ucl.ac.be/~maltoni/PHY1222/QM_all.pdf
http://arxiv.org/abs/quant-ph/0404009
http://www.lct.jussieu.fr/enseignement/PDF/SilviPolytech.pdf
http://iate.oac.uncor.edu/~manuel/libros/Modern%20Physics/Quantum%20Mechanics/Relativistic%20Quantum%20Mechanics.%20Wave%20Equations,%203rd%20ed.%20-%20W.%20Greiner.pdf
W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics – vawe equations*. 3rd edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg Nex-York, 2000, ch. 6.
V G. Bagrov, D. Gitman, *The Dirac equation and its solutions*, De Gruyter- Berlin/Boston, 2014.
C. Cohen Tannoudji, B.Diu, F.Laloë, *Mécanique quantique*, tomes 1 et 2, Hermann, Paris (1973)
C. Aslangul, *Mécanique quantique*, Tomes 1 et 2, de Boeck, Bruxelles (2007)
J.-L. Basdevant, J. Dalibard, *Mécanique quantique*, Les éditions de l'Ecole polytechnique, Palaiseau (2004)
F. Laloe, *Comprenons nous vraiment la mécanique quantique*, CNRS éditions – EDP sciences, 2011
R.P. Feynmann, *Le cours de physique de Feynman : Mécanique quantique*, InterEditions, Paris (1979), réédition par Dunod(2014)

Sur l'équation de DIRAC :

https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00233025/document
www.phy.ohiou.edu/~elster/lectures/advqm_4.**pdf**
www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/Cours/**dirac**09.pdf
http://aflb.ensmp.fr/AFLB-351/aflb351m687.pdf
http://aflb.ensmp.fr/AFLB-241/aflb241p175.pdf
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/publi/diracintro/diracintro.html
http://physics.gu.se/~tfkhj/TOPO/DiracEquation.pdf

http://patrick.vaudon.pagesperso-orange.fr

http://arxiv.org/vc/quant-ph/papers/0607/0607001v1.pdf
http://www.physics.udel.edu/~msafrono/PDF/L23.pdf
http://aflb.ensmp.fr/AFLB-26j/aflb26jp149.pdf
http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:019290010011039200
http://www.physics-quest.org/Book_Chapter_Dirac.pdf
http://www.ktf.franko.lviv.ua/users/vasya/vk_files/science/articles/ROMP_2002.pdf

Sur les spineurs :

http://arxiv.org/pdf/1312.3824
http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/longuemare/SpineursDeDirac.pdf
http://aflb.ensmp.fr/AFLB-26j/aflb26jp095.pdf
Luc Rozoy, *De E = mc2 à l'équation de* Dirac *: une introduction heuristique aux spineurs*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996)
http://aflb.ensmp.fr/AFLB-26j/aflb26jp095.pdf
http://www.quimica.ufpr.br/edulsa/cq115/artigos/ed072p412.pdf
https://www.researchgate.net/publication/28233857_On_the_relativistic_concept_of_the_Dirac's_electron_spin
http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/backends/download.php?url=LzA1X0NoYXBpdHJlX1hWL1NwaW5fZXRfbG9jYWxpc2F0aW9uX3NwYXRpby10ZW1wb3JlbGxlLnBkZg%3D%3D&cidReset=true&cidReq=53PH3PP8

Deuxième Partie

La deuxième partie traite de la recherche de solutions exactes à l'équation de DIRAC sous la forme de modes stationnaires. Il n'a été trouvé aucun document en lien direct avec cette problématique. Les publications consultées concernent la recherche de solutions exactes à l'équation de DIRAC associées à des potentiels variés ou associées à des problèmes gravitationnels

http://arxiv.org/pdf/1410.5810v4
http://arxiv.org/abs/1305.4370
https://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103858214
Physics Letters A 365 (2006) 215-219
Journal of Modern Physics, 2012, 3, 170-179
Physics Letters A 339 (2005) 283-287
Math. Meth. Appl. Sci., 23, 769-776(2000)
Pramana, Vol.12,No. 5, May 1979, pp. 475-480
Cent. Eur. J. Phys. 12(4) 2014 266-273
http://www.hindawi.com/journals/isrn/2013/310392/
http://www.nipne.ro/rjp/2005_50_1-2/0019_0036.pdf
http://www.strings.ph.qmul.ac.uk/~andreas/RWQF/QFTnotes.pdf
http://arxiv.org/pdf/1103.0716
Z.G. Zhang, *Exact solutions of time-dependent Dirac equations and the quantum–classical correspondence*, The Royal Swedish Academy of Sciences, Physica Scripta, Volume 74, Number 2.
N.L. Chuprikov,.*The stationary Dirac equation as a generalized Pauli equation for two quasiparticles*, arXiv:1410.5810v4.
A.D. Alhaidari, *Solution of the Dirac equation for potential interaction*, arXiv:math-ph/0211049v2.
B. Ita and A. Ikeuba, *Solutions of the Dirac Equation with Gravitational plus Exponential Potential*, Applied Mathematics, Vol. 4 No. 10C, 2013, pp. 1-6.

E.J. Kanellopoulos; Th.V. Kanellopoulos; K.Wildermuth, *Exact solution of the Dirac equation with a central potential*. Comm. Math. Phys. 27 (1972), no. 2, 155—161
S.H. Donga, Q.M. Zhong, *Exact solutions to the Dirac equation with a Coulomb potential in 2+1 dimensions*, Physics Letters A, Volume 312, Issues 1–2, 2 June 2003, Pages 78–83

Troisième Partie

La troisième partie traite de la recherche de solutions exactes à l'équation de DIRAC sous la forme de modes stationnaires, mais en coordonnées sphériques. Comme pour le chapitre précédent, il n'a été trouvé aucun document en lien direct avec cette problématique.

Les publications consultées concernent la forme de l'équation de DIRAC dans un repère sphérique ou en coordonnées curvilignes, ainsi que la recherche de solutions classiques lorsque cette équation est associée à des potentiels à symétrie sphérique.

http://arxiv.org/abs/hep-th/0501004
http://www.nipne.ro/rjp/2005_50_1-2/0019_0036.pdf
http://rmf.smf.mx/pdf/rmf/42/1/42_1_1.pdf
https://journals.iupui.edu/index.php/ias/article/view/5437
http://www.hindawi.com/journals/ahep/2015/612757/ref/
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00907340/document
http://arxiv.org/abs/hep-th/9405033
https://www.researchgate.net/publication/274264737_A_self-adjoint_decomposition_of_the_radial_momentum_operator
http://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v54n2/v54n2a8.pdf

Quatrième Partie

La littérature scientifique concernant l'intrication est abondante. Ne sont repris ci-dessous que les trois articles qui fondent l'essentiel des discussions sur ce sujet :

A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen. *"Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?"* Phys. Rev. 47 777, 1935
J.S. Bell. *"On the Einstein Podolsky Rosen Paradox".* Physics 1 (3): 195–200, 1964.
A. Aspect, P. Grangier et G. Roger. *"Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities",* Phys. Rev. Lett. 49, 91, 1982

J'adresse mes remerciements à Frédéric Louradour qui m'a initié aux gouttelettes marcheuses, et m'a permis de les observer en direct au sein de Scientibus.

Y. Couder, E. Fort, C.H. Gautier & A. Boudaoud, *From bouncing to floating drops: non-coalescence of drops on a fluid bath,* Phys. Rev. Lett. 94, 177801, (2005)
Y. Couder, S. Protière, E. Fort & A. Boudaoud, *Dynamical phenomena: Walking and orbiting droplets,* Nature 437, 208. (2005)
S. Protière, A. Boudaoud & Y. Couder, *A particle-wave association on a fluid interface,* J. Fluid Mech. 554, 85-108, (2006)
Y. Couder & E. Fort, *Single-particle diffraction and interference at a macroscopic scale,* Phys. Rev. Lett. 97, 15101, (2006)
A.Eddi, E. Fort, F. Moisy, & Y. Couder, *Unpredictable tunneling of a classical wave-particle association,* Phys. Rev. Lett. 102, 240401, (2009)

E. Fort, A. Eddi, A. Boudaoud, J. Moukhtar, and Y. Couder, *Path memory induced quantization of classical orbits*, PNAS 107, 17515 (2010)
A. Eddi, et al., *Information stored in Faraday waves: the origin of a path memory*, J. of Fluid Mech. (2011)
Y. Couder, https://www.youtube.com/watch?v=W9yWv5dqSKk#t=14, January 2014.
R. Brady and R. Anderson, arXiv:1401.4356v1 [quant-ph]

L'invariance de l'équation de DIRAC par changement de référentiel est présentée dans la plupart des très nombreux cours qui traitent de la mécanique quantique. La matrice S explicitée dans ce document semble inédite par sa détermination directe à partir de la transformation de LORENTZ.