



HAL
open science

Une approche énergétique et déterministe de la mécanique quantique (document soumis à discussion)

Patrick Vaudon

► **To cite this version:**

Patrick Vaudon. Une approche énergétique et déterministe de la mécanique quantique (document soumis à discussion). 2015. hal-01223516v1

HAL Id: hal-01223516

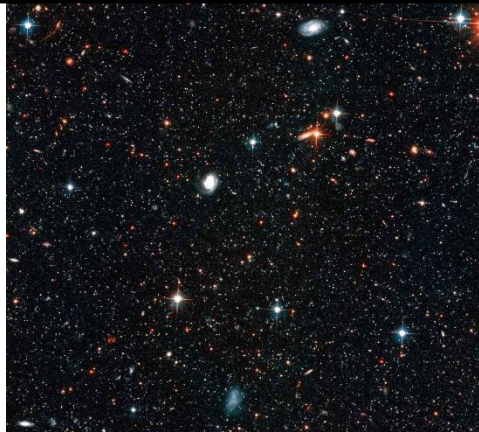
<https://hal.science/hal-01223516v1>

Preprint submitted on 2 Nov 2015 (v1), last revised 11 Mar 2018 (v12)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une approche énergétique et déterministe de la mécanique quantique



Patrick VAUDON

Xlim - Université de Limoges - France

[Juin 2015]

Table des matières

Première partie : L'approche classique de l'équation de DIRAC et de ses solutions

I - Introduction	4
II - L'équation de DIRAC	9
III - Les bi-spineurs de DIRAC.....	16
IV - Le spin $\frac{1}{2}$ de l'électron	23
V - La covariance de l'équation de DIRAC	34

Deuxième partie : L'approche énergétique de l'équation de DIRAC et de ses solutions en coordonnées cartésiennes

VI - Les modes stationnaires	38
VII - Les solutions exactes au système de DIRAC	47
VIII - La dualité onde-corpuscule	56
IX - Les courants de DIRAC(1)	60
X - Le principe d'indétermination.....	67
XI - La longueur d'onde de DE BROGLIE	70
XII - Equation de DIRAC généralisée	74
XIII - Les courants de DIRAC(2).....	82
XIV - Conclusion de la deuxième partie	84

Troisième partie : L'approche énergétique de l'équation de DIRAC et de ses solutions en coordonnées sphériques

XV - Equation de DIRAC en coordonnées sphériques	86
XVI - Equation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques	94
XVII - Solutions exactes de l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques	99
XVIII - Solutions exactes de l'équation de DIRAC pour les modes Y_{n-n} et Y_{nn}	101
XIX - Autres solutions exactes.....	108
XX - Quelques éléments de réflexion sur les solutions exactes en coordonnées sphériques	112
XXI - Les courants de DIRAC sphériques	119
XXII - Equation de DIRAC généralisée en coordonnées sphériques.....	124
XXIII - Conclusion générale	129
BIBLIOGRAPHIE	132

Première partie

L'approche classique de l'équation de DIRAC et de ses solutions

I

Introduction

Ce mémoire retrace un ensemble de réflexions sur le formalisme qui décrit la mécanique quantique dans son état d'avancement en ce début de XXIème siècle. Les premiers chapitres sont consacrés à la reprise des concepts physiques qui accompagnent la théorie. Il est fait abstraction de certains concepts mathématiques forts utiles dans la synthèse de la théorie, mais pas nécessaires pour la compréhension physique des phénomènes. Les chapitres suivants sont entièrement consacrés à la mise en œuvre d'un travail approfondi sur les solutions sous forme de modes stationnaires de l'équation de DIRAC.

Un siècle de recherches, à la fois théoriques et expérimentales ont permis d'affiner considérablement la connaissance de la physique des particules. Si les moyens expérimentaux conduisent régulièrement à des avancées significatives dans l'observation et la mesure des phénomènes, le cadre théorique semble figé depuis plusieurs dizaines d'années, et sans perspectives convaincantes sur une évolution prochaine.

Ce cadre théorique se heurte à une difficulté qui semble insurmontable : les particules se comportent à la fois sous la forme d'une onde, et sous la forme d'un corpuscule de matière. Devant l'impossibilité de rendre compte de ce phénomène, la théorie en est réduite à traiter les observations expérimentales d'un point de vue statistique et probabiliste. Elle y réussit de manière remarquable, mais au prix d'une complexité mathématique qui est rendue nécessaire pour pallier au fait que la physique sous jacente aux phénomènes observés ne nous est pas connue avec suffisamment de précision pour la mettre en avant et alléger le formalisme mathématique.

Pour avancer dans une réflexion qui permette de rendre compte physiquement de la dualité onde-corpuscule, il faut développer des éléments qui, tout en étant en parfaite cohérence avec l'ensemble des formalismes existants, sont en rupture avec la vision probabiliste de cette partie de la physique. Ceci ne peut être réalisé que par une approche déterministe permettant de préciser comment la matière évolue entre ses aspects ondulatoires et ses aspects corpusculaires.

Le travail présenté dans ce document s'appuie sur un ensemble de solutions exactes, mais inédites à ce jour, de l'équation de DIRAC. Cette approche garantit donc, de manière intrinsèque, la cohérence avec l'ensemble des propriétés théoriques construites autour de cette équation. Elle conduit, in fine, à une description déterministe, et non plus probabiliste, de la dualité onde-corpuscule.

I – Une approche énergétique

Dans les équations d'ondes classiques, la dimension de la grandeur qui se propage sous la forme d'une onde est en général fixée par le second membre. On peut illustrer cette remarque par un exemple pris en électromagnétisme, concernant les potentiels vecteurs et scalaire :

$$\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{A} - \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \cdot \vec{J} \quad (\text{I-1})$$

$$\vec{\nabla}^2 \cdot \varphi - \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{I-2})$$

Dans l'équation d'onde de Schrödinger ou de Klein-Gordon, la fonction solution ψ est une grandeur sans information sur sa dimension, car elle est présente dans le second membre de l'équation :

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2(\psi) + E_p \psi \quad (\text{I-3})$$

$$\nabla^2(\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi \quad (\text{I-4})$$

ce qui signifie que la solution ψ traduit la fonction de propagation de l'onde. La grandeur propagée peut donc être choisie en fonction de considérations physiques.

Le fait que la fonction ψ soit complexe, associée à une vision probabiliste de la mécanique quantique, ont conduit à donner à la quantité $\psi\psi^*$ la signification d'une densité volumique de probabilité, impliquant une normalisation sur tout volume où la particule se trouve avec certitude :

$$\iiint_V \psi\psi^* dv = 1 \quad (\text{I-5})$$

Si on se place dans une vision déterministe des phénomènes, il n'y a plus de densité de probabilité. La grandeur physique qui se propage peut être considérée comme une énergie, et la cohérence avec la vision probabiliste suggère de donner à la quantité $\psi\psi^*$ la signification d'une densité volumique d'énergie. La condition de normalisation se traduit alors en exprimant que l'intégration sur le volume V où s'étend la particule doit donner l'énergie totale E de la particule :

$$\iiint_V \psi\psi^* dv = E \quad (\text{I-6})$$

Les fonctions d'ondes issues de la théorie probabiliste et de la théorie déterministe sont donc proportionnelles dans un rapport égal à racine carrée de E .

La fonction d'onde ψ devient homogène à la racine carrée d'une énergie. Et puisqu'il existe des énergies négatives, en particulier dans les antiparticules, le nombre complexe $j = \sqrt{-1}$ apparaît de manière naturelle et avec une signification physique claire dans les solutions de l'équation de Dirac qui décrivent à la fois des particules d'énergies positives et des particules d'énergies négatives.

I-1 Les différents types d'énergie

En relativité restreinte, les quadri-vecteurs sont identifiés comme des grandeurs physiques invariantes par changement de référentiel. Il s'ensuit que leur pseudo-norme est constante, et ne dépend pas du référentiel dans laquelle elle est évaluée.

Pour une masse m évoluant à la vitesse v , le quadri-vecteur impulsion-énergie s'exprime de la manière suivante :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} m \frac{dx}{dt} \\ m \frac{dy}{dt} \\ m \frac{dz}{dt} \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{I-7})$$

Dans cette expression, E désigne l'énergie totale de la particule de masse m , animée d'une vitesse v , et donc liée à la masse au repos par la relation :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{I-8})$$

La pseudo-norme au carré du quadri-vecteur impulsion énergie s'écrit :

$$\left(m \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(m \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(m \frac{dz}{dt}\right)^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = \text{cte} \quad (\text{I-9})$$

soit encore :

$$E^2 - p^2c^2 = \text{cte} \quad (\text{I-10})$$

où p désigne le module de l'impulsion :

$$p = \sqrt{\left(m \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(m \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(m \frac{dz}{dt}\right)^2} = m \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = mv \quad (\text{I-11})$$

On détermine la constante en écrivant que, suivant la relation d'Einstein, l'énergie totale d'une particule de masse m est aussi égale à :

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{I-12})$$

où m_0 désigne la masse au repos.

On en déduit la valeur de la constante :

$$E^2 - p^2 c^2 = \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 - \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 c^2 = (m_0 c^2)^2 \quad (\text{I-13})$$

et enfin l'expression de la conservation de l'énergie en relativité restreinte :

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (\text{I-14})$$

Nous admettrons comme un postulat découlant de l'expression ci-dessus, qu'au sein d'une particule de masse m et évoluant à la vitesse v , il ne peut exister que trois formes particulières d'énergie :

- Une forme d'énergie représentant l'énergie totale E , dont nous justifierons par la suite l'appellation d'énergie ondulatoire
- Une forme d'énergie représentant l'énergie impulsionnelle : pc
- Une forme d'énergie représentant son énergie de masse au repos : $m_0 c^2$

Nous admettrons également que, dans le monde de l'infiniment petit, ces 3 formes d'énergie sont distinctes, à l'image de l'énergie électrique et magnétique en électromagnétisme, ou de l'énergie potentielle et cinétique en mécanique.

I-2 L'énergie stationnaire

Considérons une particule au repos, et qui donc ne possède pas d'énergie impulsionnelle. On est amené à formuler l'hypothèse que son énergie de masse est localisée dans une étendue spatiale finie. Cette énergie est constante dans le temps, et nous la qualifierons donc de stationnaire. Puisque dans ce cas particulier il n'y a pas d'énergie impulsionnelle, l'énergie totale, c'est à dire l'énergie ondulatoire, est égale à l'énergie de masse.

Il convient alors de s'interroger sur ce que nous connaissons de la stationnarité de l'énergie dans la physique des ondes en général. Cette stationnarité est une propriété des systèmes qui conservent l'onde prisonnière dans une portion limitée de l'espace. Si nous supposons le système sans perte, et si nous introduisons de l'énergie ondulatoire dans ce système, celle-ci est conservée dans le temps.

Le fait d'importance est que cette énergie ne reste jamais au repos dans la portion de l'espace où elle est confinée, mais s'installe en modes stationnaires qui comportent au minimum deux types d'énergies qui s'échangent en général en quadrature dans le temps.

En mécanique, les ondes ne peuvent se propager que dans un milieu possédant une certaine élasticité, et l'échange se produit entre l'énergie potentielle élastique et l'énergie cinétique des éléments en mouvement.

En électromagnétisme, l'échange se fait entre l'énergie électrique et l'énergie magnétique.

Si nous revenons maintenant à la situation d'une particule au repos qui contient à la fois de l'énergie ondulatoire et de l'énergie de masse, nous postulons que ces deux formes d'énergie s'échangent dans la portion de l'espace où elles sont confinées. Ce postulat découle directement du comportement onde-corpuscule de la particule.

Si la particule est en mouvement, il apparaît une troisième forme d'énergie qui est l'énergie impulsionnelle. Nous postulons que cette énergie va participer aux échanges avec les deux précédentes dans une forme qui reste à déterminer, mais qui vérifie l'équation de conservation de l'énergie (I-14).

Dans la suite de ce document; nous ne nous interrogerons pas sur la manière dont les différents types d'énergie sont confinées dans une région de l'espace : la réponse à cette question ne nous est pas connue. Mais nous allons montrer que si nous faisons l'hypothèse que les différents types d'énergie s'échangent dans des modes stationnaires, cela conduit à une physique quantique déterministe et cohérente avec la théorie probabiliste actuelle.

II

L'équation de DIRAC

L'équation de DIRAC fait partie des quelques équations fondamentales de la physique contemporaine. Elle a été obtenue dans le prolongement de deux autres équations très importantes de la mécanique quantique : l'équation de SCHROEDINGER, et l'équation de KLEIN-GORDON. Elle a supplanté ces deux dernières parce qu'elle décrit avec davantage de précision la réalité des phénomènes observés.

L'objectif de ce bref chapitre de présentation n'est pas de discuter de l'apport de cette équation sur la physique quantique que le lecteur trouvera dans les ouvrages et sites relatifs à ce sujet et sur lesquels nous reviendrons ultérieurement. Il s'agit juste dans un premier temps de retracer la démarche qui conduit à l'équation DIRAC, et de souligner quelques difficultés sur l'interprétation physique de sa solution.

I - L'équation de SCHROEDINGER

Tout phénomène physique linéaire $\psi(x,y,z,t)$ qui se propage à la vitesse v dans un espace à trois dimensions au fur et à mesure que le temps s'écoule peut être décrit par une équation d'onde :

$$\nabla^2\psi(x, y, z, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II-1})$$

Lorsqu'on traite un signal dont la variation temporelle est sinusoïdale, on peut poser :

$$\psi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) \exp(\pm j\omega t) \quad (\text{II-2})$$

et l'équation d'onde portant sur la quantité φ indépendante du temps devient :

$$\nabla^2\varphi(x, y, z) + \frac{\omega^2}{v^2} \varphi(x, y, z) = 0 \quad (\text{II-3})$$

Si on suit Louis De BROGLIE en postulant qu'on peut associer à toute particule de masse m animée d'une vitesse v une onde de longueur d'onde $\lambda = h/mv$ où h est la constante de PLANCK, alors l'équation d'onde indépendante du temps attachée à la particule devient :

$$\nabla^2\varphi(x, y, z) + \frac{\omega^2}{v^2} \varphi(x, y, z) = \nabla^2\varphi(x, y, z) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varphi(x, y, z) = 0 \quad (\text{II-4})$$

D'autre part, dans le cadre de la mécanique classique, l'énergie totale E de cette particule correspond à la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p , ce qui permet d'écrire :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = E - E_p \quad (\text{II-5})$$

d'où on déduit successivement :

$$mv = \sqrt{2m(E - E_p)} \quad (\text{II-6})$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - E_p)}} \quad (\text{II-7})$$

Cette dernière relation reportée dans l'équation d'onde (I-4) fournit l'équation de SCHROEDINGER indépendante du temps :

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_p) \varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{avec } \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (\text{II-8})$$

L'approche heuristique qui a été proposée pour obtenir cette relation peut être complétée pour faire apparaître la dépendance temporelle.

Pour une onde localement plane et monochromatique s'éloignant vers l'infini, nous pouvons écrire la fonction d'onde d'une manière générale sous la forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \exp\left[j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\right] \quad \text{avec } j^2 = -1 \quad (\text{II-9})$$

Dans le monde quantique où $\lambda = h/mv$ et où l'énergie totale E est liée à la fréquence de l'onde par la relation :

$$E = hv = \frac{h}{2\pi} \omega = \hbar \omega \quad (\text{II-10})$$

on obtient par substitution :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \exp\left[\frac{j}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)\right] \quad \text{avec } \vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{II-11})$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, il en découle :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi(\vec{r}, t)) = -\frac{j}{\hbar} E \psi_0 \exp\left[\frac{j}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)\right] = -\frac{j}{\hbar} E \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{II-12})$$

et en prenant le gradient de cette même expression (II-11) :

$$\vec{\nabla}(\psi(\vec{r}, t)) = \frac{j}{\hbar} \vec{p}\psi(\vec{r}, t) \quad (\text{II-13})$$

Des relations (II-12) et (II-13), on déduit les règles de quantification des équations de la mécanique classique ou relativiste qui permettent d'obtenir les équations analogues dans le domaine quantique :

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi) = E\psi \quad (\text{II-14})$$

$$-j\hbar \vec{\nabla}(\psi) = \vec{p}\psi \quad (\text{II-15})$$

Pour une particule dont l'énergie totale est donnée en mécanique classique par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{p^2}{2m} + E_p \quad (\text{II-16})$$

on déduit après multiplication par la fonction d'onde ψ :

$$E\psi = \frac{p^2}{2m} \psi + E_p\psi \quad (\text{II-17})$$

et enfin en utilisant les règles de quantification (II-12) et (II-13) :

$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi) = \frac{(-j\hbar \vec{\nabla})^2}{2m}(\psi) + E_p\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2(\psi) + E_p\psi \quad (\text{II-18})$$

qui constitue l'équation de SCHRODINGER dépendante du temps.

Cette équation permet de retrouver les principales séries décrivant les raies d'émission de l'atome d'hydrogène ainsi que d'autres paramètres comme les rayons de l'orbite de BOHR, mais elle est en défaut lorsqu'on s'intéresse à des phénomènes plus subtils comme les niveaux de quantification fins de l'énergie pour un atome d'hydrogène ou la prise en compte du spin de l'électron.

II - L'équation de KLEIN-GORDON

Les insuffisances de l'équation de SCHROEDINGER sont attribuées au fait que les règles de quantification ont été appliquées à un bilan énergétique effectué à l'aide de la mécanique classique.

La relativité restreinte introduit une relation dont la portée est beaucoup plus générale puisqu'elle est invariante sous la transformation de LORENTZ :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (\text{II-19})$$

et on obtient immédiatement en appliquant les règles de quantification (II-12) et (II-13) :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi) = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 (\psi) + m^2 c^4 \psi \quad (\text{II-20})$$

qui constitue l'équation de KLEIN-GORDON. On peut la présenter sous une forme qui fait apparaître l'équation d'onde avec un second membre :

$$\nabla^2 (\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi \quad (\text{II-21})$$

Un examen détaillé de ses solutions permet de montrer des insuffisances, en particulier dans son impuissance à décrire le spin de l'électron qui est d'ordre 1/2 ainsi que certains niveaux fins d'énergie de l'atome d'hydrogène.

III - L'équation de DIRAC

Partant de l'équation de conservation relativiste de l'énergie :

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (\text{II-22})$$

et appliquant les règles de quantification de la mécanique quantique :

$$E \rightarrow j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad p_x \rightarrow -j\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad p_y \rightarrow -j\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad p_z \rightarrow -j\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{II-23})$$

on transforme l'équation de KLEIN-GORDON sous la forme :

$$\left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 (\psi) = \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 (\psi) + \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 (\psi) + \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 (\psi) + m_0^2 c^4 \quad (\text{II-24})$$

Suivant le formalisme proposé par DIRAC, on recherche ensuite des coefficients α_i tels que l'équation ci-dessus soit vérifiée sous la forme d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre élevée au carré :

$$\left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 (\psi) = \left[\alpha_1 \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial x} \right) + \alpha_2 \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial y} \right) + \alpha_3 \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial z} \right) + \alpha_0 (m_0 c^2) \right]^2 (\psi) \quad (\text{II-25})$$

Si la relation ci-dessus est vérifiée grâce à la présence des coefficients α_i , la solution peut être obtenue en résolvant l'équation obtenue en enlevant les carrés :

$$\left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) (\psi) = \left[\alpha_1 \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial x} \right) + \alpha_2 \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial y} \right) + \alpha_3 \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial z} \right) + \alpha_0 (m_0 c^2) \right] (\psi) \quad (\text{II-26})$$

Il est impossible de trouver des α_i réels ou complexes répondant aux conditions (II-25) et (II-26), mais on peut trouver des matrices α_i qui satisfont aux conditions suivantes, nécessaires et suffisantes pour passer de l'équation (II-24) à l'équation (II-25) :

$$\alpha_i^2 = 1 \quad (\text{II-27})$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (\text{II-28})$$

Ces matrices ne sont pas uniques, mais un choix simple est celui proposé par Dirac :

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II-29})$$

Les trois suivantes sont définies à partir des matrices de PAULI désignée par σ_i :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II-30})$$

soit encore explicitement :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-31})$$

La structure matricielle des coefficients α_i impose la recherche de la solution ψ sous la forme d'un vecteur colonne :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{II-32})$$

Afin de mettre le système d'équations différentielles dans une forme telle que l'énergie de masse apparaisse en facteur avec la matrice identité, on multiplie l'équation (II-26) par la matrice α_0 dont on sait que son carré est égal à la matrice identité :

$$\alpha_0 \left(j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) (\psi) = \left[\alpha_0 \alpha_1 \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial x} \right) + \alpha_0 \alpha_2 \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial y} \right) + \alpha_0 \alpha_3 \left(-j\hbar c \frac{\partial}{\partial z} \right) + (m_0 c^2) \right] (\psi) \quad (\text{II-33})$$

On pose ensuite :

$$\gamma_0 = \alpha_0 \quad \gamma_1 = \alpha_0 \alpha_1 \quad \gamma_2 = \alpha_0 \alpha_2 \quad \gamma_3 = \alpha_0 \alpha_3 \quad (\text{II-34})$$

et on regroupe tous les termes aux dérivées partielles :

$$\left[\gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \gamma_1 \left(c \frac{\partial}{\partial x} \right) + \gamma_2 \left(c \frac{\partial}{\partial y} \right) + \gamma_3 \left(c \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (\psi) = \frac{m_0 c^2}{j\hbar} (\psi) \quad (\text{II-35})$$

La matrice identité, implicite dans le terme de droite, sera omise dans la suite du document.

Les matrices γ_i sont obtenues explicitement de la manière suivante :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II-36})$$

$$\gamma_1 = \alpha_0 \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-37})$$

$$\gamma_2 = \alpha_0 \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-38})$$

$$\gamma_3 = \alpha_0 \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-39})$$

La forme de ces matrices peut être synthétisée en fonction des matrices de PAULI :

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-40})$$

et on peut vérifier la propriété suivante :

$$(\gamma_0)^2 = 1, (\gamma_1)^2 = (\gamma_2)^2 = (\gamma_3)^2 = -1 \quad (\text{II-41})$$

En considérant désormais que la quantité ψ de l'équation d'onde initiale se présente sous la forme d'un vecteur colonne à 4 éléments, l'écriture complète du système matriciel est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \frac{mc}{\hbar} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} &= \frac{j}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \end{pmatrix} \\
 &+ j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \end{pmatrix} +
 \end{aligned} \tag{II-42}$$

soit encore, de manière plus condensée, sous la forme d'un système aux dérivées partielles de 4 équations, après avoir posé $\eta = \frac{mc}{\hbar}$:

$$\begin{aligned}
 \eta \psi_0 &= j \frac{\partial \psi_0}{\partial(ct)} + j \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\
 \eta \psi_1 &= j \frac{\partial \psi_1}{\partial(ct)} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \\
 \eta \psi_2 &= -j \frac{\partial \psi_2}{\partial(ct)} - j \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \\
 \eta \psi_3 &= -j \frac{\partial \psi_3}{\partial(ct)} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_1}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{II-43}$$

Ces équations montrent que les 4 quantités associées à l'onde de matière ψ interagissent, sans qu'il soit possible de préciser de manière claire et détaillée la nature physique de leur interaction. La représentation en termes de spineurs fournit un cadre rigoureux sur lequel sont fondés de multiples développements, mais la notion de spineur reste abstraite, malgré les efforts importants de la communauté scientifique pour en donner des illustrations concrètes.

III

Les bi-spineurs de Dirac

Du chapitre précédent, nous avons conclu que les solutions de l'équation de Dirac se présentent sous la forme d'une grandeur à 4 composantes :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1})$$

Un examen attentif du système de Dirac :

$$\begin{aligned} \eta\psi_0 &= j \frac{\partial\psi_0}{\partial(ct)} + j \frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} + j \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \\ \eta\psi_1 &= j \frac{\partial\psi_1}{\partial(ct)} + j \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - j \frac{\partial\psi_3}{\partial z} \\ \eta\psi_2 &= -j \frac{\partial\psi_2}{\partial(ct)} - j \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial\psi_0}{\partial z} \\ \eta\psi_3 &= -j \frac{\partial\psi_3}{\partial(ct)} - j \frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

montre que ces solutions peuvent être regroupées par 2 dans un comportement présentant des analogies. Pour faire apparaître ces analogies, il est opportun de présenter le système sous une forme légèrement différente :

$$\begin{aligned} j \frac{\partial\psi_0}{\partial(ct)} &= \eta\psi_0 - j \frac{\partial\psi_3}{\partial x} - \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - j \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \\ j \frac{\partial\psi_1}{\partial(ct)} &= \eta\psi_1 - j \frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + j \frac{\partial\psi_3}{\partial z} \\ j \frac{\partial\psi_2}{\partial(ct)} &= -\eta\psi_2 - j \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial\psi_0}{\partial z} \\ j \frac{\partial\psi_3}{\partial(ct)} &= -\eta\psi_3 - j \frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

Dès lors, si on pose :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \text{avec } \varphi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \chi = \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III-4})$$

le système de Dirac se décompose en deux systèmes couplés :

$$j \frac{\partial}{\partial(ct)} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III-5})$$

$$j \frac{\partial}{\partial(ct)} \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = -\eta \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-6})$$

dans lesquels on peut montrer que les grandeurs à deux composantes φ et χ se comportent comme des objets mathématiques appelés spineurs.

Un allègement d'écriture est proposé en désignant par M la matrice :

$$M = -j \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{III-7})$$

Le système couplé (III-5,6) en termes de spineurs se présente alors sous la forme :

$$\begin{aligned} j \frac{\partial}{\partial(ct)} (\varphi) &= \eta(\varphi) + M(\chi) \\ j \frac{\partial}{\partial(ct)} (\chi) &= -\eta(\chi) + M(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

soit encore :

$$j \frac{\partial}{\partial(ct)} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & M \\ M & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{III-9})$$

En l'absence d'hypothèses supplémentaires, il est impossible d'aller plus avant dans l'écriture des relations croisées entre les deux spineurs.

On peut par contre, rechercher des solutions particulières dont la dépendance temporelle est en $\exp(-j\omega t)$ avec une énergie totale $E = \hbar\omega$, soit donc une dépendance temporelle en $\exp\left(-j\frac{E}{\hbar}t\right)$.

Il est important de noter que le j qui apparaît dans l'exponentielle n'a rien à voir avec la représentation complexe d'une onde physique en $\cos(\omega t)$. Sa signification physique, déjà abordée dans le chapitre I, sera approfondie dans les chapitres suivants.

Après prise en compte de la dérivation par rapport au temps dans la relation (III-9), le système couplé entre les spineurs se présente sous la forme :

$$\frac{E}{\hbar c} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & M \\ M & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{III-10})$$

soit encore en tenant compte de $\eta = \frac{mc}{\hbar}$:

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & \hbar c M \\ \hbar c M & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{III-11})$$

Une écriture rigoureuse devrait faire apparaître la matrice identité de dimension 2 multipliée par les termes en η pour la relation (III-10) et les termes en mc^2 pour la relation (III-11). L'usage veut que lorsque cette matrice est implicite, car nécessaire pour la cohérence des dimensions, elle ne soit pas nécessairement indiquée pour des allègements d'écriture.

I - Les spineurs pour une particule immobile

Il est possible de faire apparaître les solutions à énergie positive qui décrivent les particules de masse m , et les solutions à énergie négative qui décrivent les anti-particules de même masse. Pour cela, on traite le cas particulier de particules immobiles : si x, y, z sont fixes et constants, alors les dérivées par rapport à x, y, z sont nulles, et la matrice M est nulle. On déduit de (III-11) :

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{III-12})$$

soit encore :

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= mc^2(\varphi) \\ E(\chi) &= -mc^2(\chi) \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

On identifie ainsi que l'énergie associée au spineur φ est égale à son énergie de masse, tandis que celle associée au spineur χ est égale à son opposée, et représente donc l'énergie associée à l'anti-particule. On en déduit que le spineur φ est associé à la particule, tandis que le spineur χ est associé à l'antiparticule. La solution à l'équation de Dirac, qui comporte les deux

spineurs simultanément, permet donc de décrire à la fois le comportement de la particule, et celui de son antiparticule.

De manière très générale, un spineurs φ quelconque peut être décomposée sur la base canonique de la manière suivante :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-14})$$

où les deux spineurs indépendants de la base canonique sont associés aux deux états de spin possible pour un électron. L'usage veut que le spineur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit associé à l'état de spin dit « up » (\uparrow), et que le spineur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit associé à l'état de spin dit « down » (\downarrow).

De même pour la particule à énergie négative, nous pouvons adopter la décomposition suivante :

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-15})$$

et identifier les deux états de spin décrits précédemment.

En rassemblant ces résultats partiels, on peut représenter quatre états distincts du bi-spinneurs de Dirac dans le référentiel où la particule est au repos :

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Particule à énergie positive en spin « up »} \\ \psi &= \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Particule à énergie positive en spin « down »} \\ \psi &= \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{Particule à énergie négative en spin « up »} \\ \psi &= \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{Particule à énergie négative en spin « down »} \end{aligned}$$

II - Les spineurs pour une particule en mouvement

Lorsque la particule est en mouvement, la matrice M n'est pas nulle, et nous devons utiliser la relation (III-11) rappelée pour mémoire :

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & \hbar c M \\ \hbar c M & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{III-16})$$

Cette relation montre que les deux spineurs interagissent et qu'ils ne sont pas indépendants l'un de l'autre. Cela a pour nécessaire conséquence que particule et antiparticule forment un tout, et que l'une ne peut se déplacer sans que l'autre soit associée à ce déplacement.

On obtient, en développant la relation matricielle (III-16) :

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= mc^2(\varphi) + \hbar c M(\chi) \\ E(\chi) &= \hbar c M(\varphi) - mc^2(\chi) \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

soit encore

$$\begin{aligned} (E - mc^2)(\varphi) &= \hbar c M(\chi) \\ (E + mc^2)(\chi) &= \hbar c M(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

soit encore :

$$\begin{aligned} (\varphi) &= \frac{\hbar c}{E - mc^2} M(\chi) \\ (\chi) &= \frac{\hbar c}{E + mc^2} M(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{III-19})$$

Ces relations indiquent que dans l'hypothèse particulière où nous situons, c'est à dire dans l'hypothèse où les 4 éléments du bi-spineurs de Dirac ont une dépendance temporelle en $\exp\left(-j \frac{E}{\hbar} t\right)$, la connaissance d'un des spineurs permet d'en déduire l'autre.

Il est possible de développer un formalisme plus avancé des relations (III-19) ci-dessus. Il faut pour cela reprendre la matrice M et la décrire sur la base des matrices de PAULI rappelée pour mémoire :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-20})$$

On obtient :

$$M = -j \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = -j \left(\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{III-21})$$

On introduit par substitution aux dérivées partielles de (III-21) l'opérateur impulsion de la mécanique quantique, dont les trois composantes sont explicitement :

$$\hat{p}_x = -j\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \hat{p}_y = -j\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad \hat{p}_z = -j\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{III-22})$$

ce qui permet de présenter la matrice M sous la forme :

$$M = \frac{1}{\hbar} \left\{ \hat{p}_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \hat{p}_y \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} + \hat{p}_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{III-23})$$

Il s'ensuit un abus d'écriture qui donnerait des sueurs froides à plus d'un enseignant de mathématiques :

On désigne par :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{III-24})$$

un « vecteur » contenant les trois matrices de PAULI, et par :

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -j\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ -j\hbar \frac{\partial}{\partial y} \\ -j\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{III-25})$$

un « vecteur » qui représente l'opérateur impulsion de la mécanique quantique.

Dès lors la relation exprimant la matrice M en (III-23) peut se mettre sous la forme condensée suivante, en utilisant le formalisme habituel du produit scalaire entre deux vecteurs :

$$M = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\hbar} \quad (\text{III-26})$$

On en déduit l'écriture condensée qui exprime la relation entre les deux spineurs qui constituent la solution de DIRAC, dans l'hypothèse d'une dépendance temporelle en $\exp\left(-j\frac{E}{\hbar}t\right)$:

$$\begin{aligned}(\varphi) &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}c}{E - mc^2}(\chi) \\(\chi) &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}c}{E + mc^2}(\varphi)\end{aligned}\tag{III-27}$$

Par substitution d'une relation dans l'autre, par exemple la deuxième dans la première, on obtient :

$$(\varphi) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}c}{E - mc^2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}c}{E + mc^2}(\varphi) = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}c)^2}{E^2 - (mc^2)^2}(\varphi)\tag{III-28}$$

En utilisant la propriété des matrices de PAULI dont le carré donne la matrice identité, on obtient finalement :

$$(\varphi) = \frac{(\vec{p}c)^2}{E^2 - (mc^2)^2}(\varphi)\tag{III-29}$$

Cette relation ne sera vérifiée que si :

$$(\vec{p}c)^2 = E^2 - (mc^2)^2\tag{III-30}$$

soit encore :

$$(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2 = E^2\tag{III-31}$$

Cette relation confirme la cohérence des solutions exprimées avec la conservation relativiste de l'énergie, mais également avec la possibilité de solutions à énergies négatives de la forme :

$$E = \pm\sqrt{(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2}\tag{III-32}$$

IV

Le spin 1/2 de l'électron

La solution en termes de spineurs évoquée au chapitre précédent suggère qu'il y a au sein de l'électron quelque chose qui tourne, sans que l'on sache précisément quoi. On va donc s'intéresser dans ce chapitre à la cinématique de rotation, et tenter de la mettre en relation avec la solution au système de DIRAC.

I – La notion de moment cinétique

Pour un point matériel de masse m , situé en M , et évoluant autour d'une origine O , le moment cinétique, que l'on désignera par L , s'exprime comme le moment par rapport à l'origine O de la quantité de mouvement de la masse m :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \quad (\text{IV-1})$$

Il s'agit d'une quantité vectorielle qui est portée par l'axe de rotation.

Si on désigne par x, y, z , les composantes du vecteur position, et par p_x, p_y, p_z , les composantes du vecteur quantité de mouvement :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (\text{IV-2})$$

on obtient les composantes du moment cinétique sous la forme :

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= zp_x - xp_z \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \quad (\text{IV-3})$$

Le passage à la mécanique quantique impose que l'on substitue aux quantités « position » et « quantité de mouvement », des opérateurs « position » et « quantité de mouvement », ce qui permet de définir les composantes de l'opérateur moment cinétique sous la forme :

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\end{aligned}\tag{IV-4}$$

où la définition des opérateurs de position et de quantité de mouvement, appliqués à une fonction d'onde ψ est rappelée ci-dessous :

$$\begin{aligned}\hat{p}_x(\psi) &= -j\hbar \frac{\partial\psi}{\partial x} & \hat{p}_y(\psi) &= -j\hbar \frac{\partial\psi}{\partial y} & \hat{p}_z(\psi) &= -j\hbar \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \hat{x}(\psi) &= x\psi & \hat{y}(\psi) &= y\psi & \hat{z}(\psi) &= z\psi\end{aligned}\tag{IV-5}$$

La description de l'opérateur moment cinétique ci-dessus permet de traiter sans problème le moment cinétique orbital d'une particule de masse m qui tourne autour d'une origine O , mais elle est en difficulté pour décrire le moment cinétique de spin. Il s'agit d'un mouvement interne à la particule qui est mal connu et qu'on ne sait pas exprimer en fonction des opérateurs de position et de quantité de mouvement.

Pour pallier à cette difficulté, il a fallu rechercher une propriété du moment cinétique qui ne fasse pas intervenir les opérateurs position et quantité de mouvement, et qui contienne des informations suffisantes pour qualifier la rotation.

Cette propriété est construite à partir d'une fonction appelée commutateur dont on peut donner la définition suivante en mécanique quantique :

Si A et B sont deux opérateurs, le commutateur de A et B est défini par :

$$[A, B] = AB - BA\tag{IV-6}$$

A titre d'exemple, on peut montrer que les opérateurs position et vitesse appliqués à une fonction d'onde ne commutent pas, ce qui revient à dire que le commutateur de ces deux opérateurs est différent de zéro :

$$\left[x, \frac{\partial}{\partial x}\right](\psi) = x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \psi - x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\psi\tag{IV-7}$$

Si on construit les commutateurs des opérateurs de moment cinétique (IV-4), on constate qu'ils possèdent la propriété suivante :

$$\begin{aligned}[\hat{L}_x, \hat{L}_y](\psi) &= (\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x)(\psi) = j\hbar\hat{L}_z(\psi) \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x](\psi) &= (\hat{L}_z\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_z)(\psi) = j\hbar\hat{L}_y(\psi) \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z](\psi) &= (\hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y)(\psi) = j\hbar\hat{L}_x(\psi)\end{aligned}\tag{IV-8}$$

La démonstration se fait directement à partir de la définition des opérateurs moment cinétique (IV-4). Sur l'exemple de la première ligne de (IV-8), on obtient successivement :

$$\hat{L}_x(\psi) = -j\hbar \left(y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad \hat{L}_y(\psi) = -j\hbar \left(z \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (IV-9)$$

$$\hat{L}_y(\hat{L}_x(\psi)) = -\hbar^2 \left\{ z \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - x \frac{\partial}{\partial z} \left(y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} \quad (IV-10)$$

$$\hat{L}_y(\hat{L}_x(\psi)) = -\hbar^2 \left\{ zy \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - xy \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + x \frac{\partial \psi}{\partial y} + xz \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \right\} \quad (IV-11)$$

et en inversant l'ordre des opérateurs :

$$\hat{L}_x(\hat{L}_y(\psi)) = -\hbar^2 \left\{ y \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(z \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} \quad (IV-12)$$

$$\hat{L}_x(\hat{L}_y(\psi)) = -\hbar^2 \left\{ y \frac{\partial \psi}{\partial x} + yz \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - yx \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + xz \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \right\} \quad (IV-13)$$

Par soustraction de (IV-13) avec (IV-11), on obtient le résultat présenté en (IV-8) :

$$\hat{L}_x(\hat{L}_y(\psi)) - \hat{L}_y(\hat{L}_x(\psi)) = -\hbar^2 \left\{ y \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} = j\hbar \hat{L}_z \quad (IV-14)$$

La propriété (IV-8) ne dépend plus des opérateurs position et quantité de mouvement. Même si l'image doit être prise avec précautions, on a en quelque sorte construit un système à trois équations et trois inconnues qui présente pour ces inconnues des propriétés analogues à celles qui sont générées par les relations (IV-4) qui définissent le moment cinétique de la mécanique quantique.

II – L'opérateur de moment cinétique de spin

Le raisonnement du paragraphe précédent nous a permis de préciser les relations qui définissent un opérateur de moment cinétique applicable à une fonction d'onde ψ . Cet opérateur est défini à partir des relations de commutations rappelées pour mémoire :

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y](\psi) &= (\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x)(\psi) = j\hbar \hat{L}_z(\psi) \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x](\psi) &= (\hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z)(\psi) = j\hbar \hat{L}_y(\psi) \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z](\psi) &= (\hat{L}_y \hat{L}_z - \hat{L}_z \hat{L}_y)(\psi) = j\hbar \hat{L}_x(\psi) \end{aligned} \quad (IV-15)$$

Les solutions issues de la formulation de DIRAC apparaissent sous la forme de spineurs, c'est à dire sous la forme d'un être mathématique contenant deux fonctions d'ondes. Du chapitre précédent, nous avons montré par exemple que la solution à énergie positive était représentée par le spineur :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-16})$$

La question qui se pose est la suivante : comment peut-on généraliser les relations (IV-15) qui définissent l'opérateur de moment cinétique applicable à une fonction d'onde, afin de définir un opérateur de moment cinétique applicable à un spineur qui contient non pas une mais deux fonctions d'ondes ?

En d'autres termes, si S désigne un tel opérateur, nous voulons pouvoir écrire :

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y](\varphi) &= (\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x)(\varphi) = j\hbar \hat{S}_z(\varphi) \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x](\varphi) &= (\hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z)(\varphi) = j\hbar \hat{S}_y(\varphi) \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z](\varphi) &= (\hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y)(\varphi) = j\hbar \hat{S}_x(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{IV-17})$$

soit encore :

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y] \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} &= (\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = j\hbar \hat{S}_z \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x] \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} &= (\hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = j\hbar \hat{S}_y \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z] \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} &= (\hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = j\hbar \hat{S}_x \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV-18})$$

Il apparaît que les opérateurs $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ ne peuvent plus être définis comme des opérateurs simples utilisés pour une seule fonction d'onde : ils doivent être constitués par une matrice 2X2 d'opérateurs et ces matrices doivent vérifier les relations caractéristiques des opérateurs de moment cinétique :

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= (\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x) = j\hbar \hat{S}_z \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x] &= (\hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z) = j\hbar \hat{S}_y \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z] &= (\hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y) = j\hbar \hat{S}_x \end{aligned} \quad (\text{IV-19})$$

Les matrices de PAULI, rappelées ci-dessous pour mémoire, sont de bonnes candidates pour jouer ce rôle :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-20})$$

En les multipliant par la quantité \hbar , le premier commutateur de (IV-19) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 [\hbar\sigma_1, \hbar\sigma_2] &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} j\hbar \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} - \hbar \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} j\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 [\hbar\sigma_1, \hbar\sigma_2] &= \hbar^2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 [\hbar\sigma_1, \hbar\sigma_2] &= \hbar^2 \left\{ \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \right\} = 2j\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{IV-21}$$

soit encore :

$$[\hbar\sigma_1, \hbar\sigma_2] = 2j\hbar(\hbar\sigma_3) \tag{IV-22}$$

On ne retrouve pas exactement la relation de commutation exprimée en (IV-19), puisqu'il y a un facteur 2 qui intervient. Si on souhaite retrouver exactement la relation qui définit les composantes d'un moment cinétique, il faut nécessairement introduire un facteur $\frac{1}{2}$ dans les matrices de PAULI. C'est ce facteur qui va induire le spin $\frac{1}{2}$ de l'électron.

En résumé, les composantes $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ recherchée, et qui donc vérifie (IV-19), sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_x &= \frac{\hbar}{2}\sigma_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \hat{S}_y &= \frac{\hbar}{2}\sigma_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \\
 \hat{S}_z &= \frac{\hbar}{2}\sigma_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{IV-23}$$

Si nous avons bien avancé dans le formalisme qui permet de décrire le moment cinétique de spin, nous nous sommes éloignés considérablement de sa signification physique. Le passage, qui semble pourtant évident, des relations (IV-3) à (IV-4), est un passage où les relations (IV-3) ont un vrai sens physique, tandis que les relations (IV-4) n'en ont déjà plus, car elles portent sur des opérateurs. Leur généralisation aux spineurs accroît encore le niveau d'abstraction, et l'éloignement avec la représentation physique du moment cinétique que l'on se fait en mécanique classique.

III – L'interprétation de l'opérateur moment cinétique en terme de rotation

La description d'une rotation ne prend sens que si elle permet de préciser l'angle de rotation. On va donc s'attacher dans cette partie à montrer comment on peut exprimer cet angle en fonction des éléments qui nous ont servi à caractériser cette rotation dans les paragraphes précédents, et en particulier les composantes du moment cinétique.

Le problème n'est pas simple, car il est nécessaire de caractériser non pas une rotation classique dans un espace à trois dimensions, mais un opérateur de rotation qui agit sur une fonction d'onde ψ dans un premier temps, puis sur un spineur ϕ à deux composantes dans un second temps.

Il convient tout d'abord d'établir la matrice d'une rotation d'angle θ dans un espace euclidien, dont l'axe est choisi arbitrairement dans la direction Oz. Cette rotation s'effectue dans le plan xOy, et nous représentons ci-dessous la rotation entre deux points M et M' de coordonnées M(x,y) et M'(x',y').

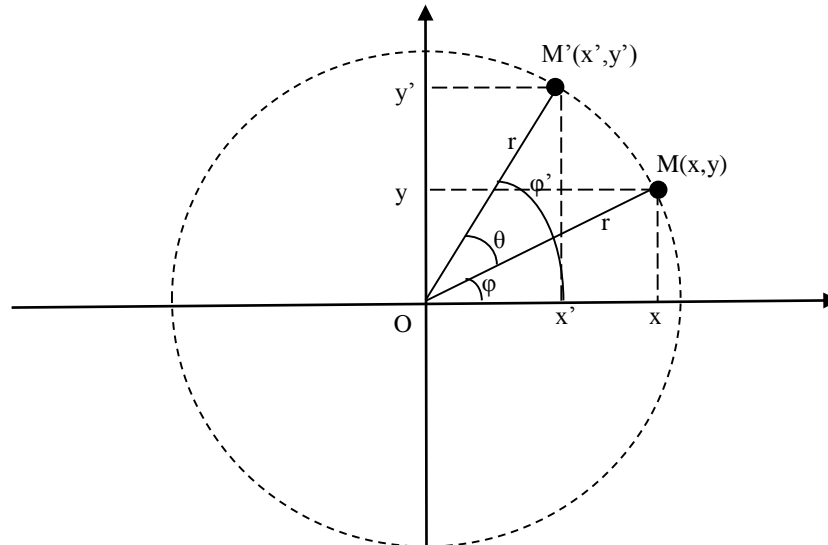


Figure (IV-1) : Rotation dans le plan xOy

La relation entre les coordonnées (x,y) et (x',y') peut s'établir géométriquement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{IV-24}$$

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos(\varphi') = r \cdot \cos(\theta + \varphi) = r \cdot (\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)) = x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta) \\ y' &= r \cdot \sin(\varphi') = r \cdot \sin(\theta + \varphi) = r \cdot (\sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)) = x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \tag{IV-25}$$

soit encore en écriture matricielle en trois dimensions :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{IV-26}$$

Pour une rotation d'angle opposé $-\theta$, la matrice s'obtient en changeant le signe du sinus :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{IV-27}$$

Dans la description de l'opérateur rotation appliqué à une fonction donnée, si on assimile la fonction à un objet pour s'en faire une représentation concrète, une rotation des axes vers la droite peut être considérée comme une rotation équivalente de l'objet vers la gauche.

Pour un opérateur de rotation d'angle θ , tout se passe comme si les coordonnées utilisées par la fonction subissaient une rotation d'angle $-\theta$.

En tenant compte de ces éléments, on peut préciser ce qu'est l'opérateur rotation appliqué à une fonction ψ , et nous adopterons la définition suivante, pour une rotation d'axe Oz, d'angle θ et appliquée à une fonction d'onde ψ :

$$\hat{R}_{z,\theta}\psi(x, y, z) = \psi(x', y', z') \quad (\text{IV-28})$$

Dans cette relation, conformément aux remarques précédentes, nous utilisons la transformation de coordonnées (IV-21).

L'étape suivante consiste à établir le lien entre cet opérateur rotation, et l'opérateur moment cinétique $\hat{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ qui nous a servi à caractériser le mouvement de rotation en (IV-4) en s'inspirant des relations (IV-3) issues de la mécanique classique. Ce lien va être formalisé, dans un premier temps, pour une rotation infinitésimale.

Partant de la définition de l'opérateur rotation (IV-28) donnée ci-dessus :

$$\hat{R}_{z,\theta}\psi(x, y, z) = \psi(x.\cos\theta + y.\sin\theta, -x.\sin\theta + y.\cos\theta, z) \quad (\text{IV-29})$$

l'introduction des développements limités au premier ordre de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ conduit à l'opérateur de rotation infinitésimal d'angle $\delta\theta$:

$$\hat{R}_{z,\delta\theta}\psi(x, y, z) = \psi(x. + y.\delta\theta, -x.\delta\theta + y, z) \quad (\text{IV-30})$$

Faisant usage du développement limité au premier ordre d'une fonction de deux variables x et y qui varient d'une quantité infinitésimale respectivement égale à ε et η :

$$f(x + \varepsilon, y + \eta) = f(x, y) + \varepsilon \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \eta \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad (\text{IV-31})$$

l'opérateur de rotation infinitésimal (IV-30) se met sous la forme :

$$\hat{R}_{z,\delta\theta}\psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + y(\delta\theta) \frac{\partial \psi}{\partial x} - x(\delta\theta) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{IV-32})$$

Il s'interprète en fonction des opérateurs positions et impulsions rappelés pour mémoire ci-dessous :

$$\begin{aligned} \hat{p}_x(\psi) &= -j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} & \hat{p}_y(\psi) &= -j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y} & \hat{p}_z(\psi) &= -j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \hat{x}(\psi) &= x\psi & \hat{y}(\psi) &= y\psi & \hat{z}(\psi) &= z\psi \end{aligned} \quad (\text{IV-33})$$

pour donner l'expression suivante :

$$\hat{R}_{z,\delta\theta}\psi(x,y,z) = \psi(x,y,z) - j\frac{\delta\theta}{\hbar}(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x)\psi(x,y,z) \quad (IV-34)$$

On y reconnaît l'opérateur de moment cinétique (IV-4) :

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \quad (IV-35)$$

D'où l'expression de l'opérateur de rotation infinitésimal d'axe Oz et d'angle θ , appliqué à une fonction d'onde ψ , en fonction de l'opérateur de moment cinétique :

$$\hat{R}_{z,\delta\theta}\psi(x,y,z) = \psi(x,y,z) - j\frac{\delta\theta}{\hbar}\hat{L}_z\psi(x,y,z) = \left\{ \hat{I} - j\frac{\delta\theta}{\hbar}\hat{L}_z \right\}\psi(x,y,z) \quad (IV-36)$$

où \hat{I} désigne l'opérateur identité.

On en déduit l'expression intrinsèque de l'opérateur rotation infinitésimal :

$$\hat{R}_{z,\delta\theta} = \hat{I} - j\frac{\delta\theta}{\hbar}\hat{L}_z \quad (IV-37)$$

Cette relation peut être généralisée à une rotation d'angle quelconque θ de plusieurs manières. Une des plus simples consiste à diviser cet angle par un nombre entier N qui tend vers l'infini : on peut ainsi assimiler l'angle infiniment petit $\delta\theta$ de la relation (IV-37) avec l'angle θ/N .

$$\hat{R}_{z,\frac{\theta}{N}} = \hat{I} - \frac{1}{N}\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_z\right) \quad (IV-38)$$

On écrit ensuite que pour obtenir une rotation d'angle θ , il faut appliquer N fois la rotation infinitésimal d'angle θ/N :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \left(\hat{R}_{z,\frac{\theta}{N}}\right)^N = \left(\hat{I} - \frac{1}{N}\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_z\right)\right)^N \quad (IV-39)$$

Et on effectue pour terminer un passage à la limite :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\hat{R}_{z,\frac{\theta}{N}}\right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\hat{I} - \frac{1}{N}\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{L}_z\right)\right)^N \quad (IV-40)$$

Utilisant le résultat connu :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \exp(x) \quad (IV-41)$$

on obtient finalement l'expression de l'opérateur rotation d'axe Oz et d'angle θ , en fonction de l'opérateur moment cinétique \hat{L}_z :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \exp\left(j \frac{\theta}{\hbar} \hat{L}_z\right) \quad (\text{IV-42})$$

Il reste pour conclure ce chapitre, à généraliser cet opérateur à la rotation des spineurs qui sont des fonctions d'ondes à deux dimensions.

Il a été montré supra que l'opérateur $\hat{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ doit être remplacé par un opérateur matriciel $\hat{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ capable d'agir sur des êtres mathématiques à deux dimensions, et que cet opérateur se déduit des matrices de PAULI suivant la relation (IV-23) rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned} \hat{S}_x &= \frac{\hbar}{2} \sigma_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_y &= \frac{\hbar}{2} \sigma_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_z &= \frac{\hbar}{2} \sigma_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV-43})$$

L'opérateur de rotation d'axe Oz et d'angle θ , capable d'agir sur un spineur, a donc la forme suivante :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \exp\left(j \frac{\theta}{\hbar} \hat{S}_z\right) \quad (\text{IV-44})$$

soit encore :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \exp\left(j \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad (\text{IV-45})$$

D'un point de vue pratique, on peut rarement mettre une exponentielle de matrice quelconque sous la forme d'une matrice 2 X 2 dont on connaît avec exactitude chacun des termes. On peut malgré tout en obtenir une solution approchée en utilisant le développement en série de la fonction exponentielle. Pour une matrice quelconque M, cela donne :

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots \quad (\text{IV-46})$$

Il est toutefois possible d'expliciter la matrice de l'opérateur de rotation autour des axes principaux Ox, Oy, et Oz.

Opérateur de rotation autour de l'axe Oz :

La matrice de l'opérateur est diagonale, ce qui permet de donner la forme explicite de l'exponentielle matricielle :

$$\hat{R}_{z,\theta} = \exp\left(j\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp\left(j\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-j\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{IV-47})$$

Opérateur de rotation autour de l'axe Oy :

$$\hat{R}_{y,\theta} = \exp\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{S}_y\right) = \exp\left(j\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad (\text{IV-48})$$

La forme particulière de la matrice 2 X 2 permet de montrer que le développement en série de l'exponentielle fait apparaître le développement en série des fonctions cos et sin dans les termes de la matrice résultat suivant la relation :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \quad \exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \quad (\text{IV-49})$$

D'où l'expression de l'opérateur de rotation autour de l'axe Oy :

$$\hat{R}_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{IV-50})$$

Opérateur de rotation autour de l'axe Ox :

$$\hat{R}_{x,\theta} = \exp\left(j\frac{\theta}{\hbar}\hat{S}_x\right) = \exp\left(j\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad (\text{IV-51})$$

Comme dans l'exemple précédent, la forme particulière de la matrice 2 X 2 permet de montrer que le développement en série de l'exponentielle fait apparaître le développement en série des fonctions hyperboliques cosh et sinh dans les termes de la matrice résultat suivant la relation :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad \exp(A) = \begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix} \quad (\text{IV-52})$$

D'où l'expression de l'opérateur de rotation autour de l'axe Ox :

$$\hat{\mathbf{R}}_{x,0} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{j\theta}{2}\right) & \operatorname{sh}\left(\frac{j\theta}{2}\right) \\ \operatorname{sh}\left(\frac{j\theta}{2}\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{j\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ j\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{IV-53})$$

V

La covariance de l'équation de DIRAC

L'équation de DIRAC sur laquelle nous nous sommes appuyés pour établir le système d'équations différentielles se présente sous la forme :

$$j \left[\gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} \right) + \gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \gamma_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \gamma_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (\psi) = \frac{m_0 c}{\hbar} (\psi) \quad (V-1)$$

En adoptant la notation :

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (V-2)$$

on peut condenser l'écriture de (V-1) à l'aide de la règle de sommation sur les indices :

$$\left(j \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi(x^\mu) = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (V-3)$$

Il s'avère que cette équation est covariante, c'est à dire qu'elle garde la même forme lors d'un changement de référentiel tel qu'il est donné par la relativité restreinte. La démonstration, un peu laborieuse, est reportée en annexe.

L'invariance des lois de la physique par changement de référentiel est probablement le critère le plus sûr de la validité générale d'une loi physique. On peut le résumer de la manière suivante :

Soit un référentiel dans lequel l'équation de DIRAC s'écrit sous la forme (V-3) ci-dessus. Si nous changeons de référentiel, cela va induire un changement des coordonnées spatiales et temporelles x^μ de chacun des points de l'espace-temps qui vont devenir x'^μ ; et cela va induire un changement dans la fonction d'onde ψ qui va devenir ψ' .

L'invariance des lois de la physique par changement de référentiel impose que l'équation de DIRAC s'écrive, dans le référentiel (R'), sous la forme :

$$\left(j \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi'(x'^\mu) = 0 \quad (V-4)$$

Une autre loi très générale de la physique est la loi de conservation locale. Elle exprime le fait que lorsque qu'une grandeur physique évolue dans le temps et dans l'espace, la conservation de cette grandeur s'exprime au moyen d'une quadri divergence égale à 0. Un des

exemples les plus connus concerne la conservation de la charge que l'on obtient à partir du quadri vecteur densité de courant $(\rho c, j_x, j_y, j_z)$ sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{V-5})$$

Il est possible de montrer qu'il existe une grandeur conservée par les solutions de l'équation de DIRAC, et cette grandeur est appelée courant de DIRAC en référence à la relation (V-5) ci-dessus.

Si on désigne par J cette grandeur, l'écriture condensée d'une quadri divergence nulle est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu = \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (\text{V-6})$$

Quelques manipulations non triviales permettent de passer de l'équation de DIRAC à la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (\text{V-7})$$

dans laquelle :

$$\bar{\psi} = (\psi^*)^T \gamma^0 = (\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*) \quad (\text{V-8})$$

On en déduit le quadri vecteur courant de DIRAC :

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{V-9})$$

où les γ^μ représentent les matrices de DIRAC introduite dans le chapitre II.

On en déduit les expressions explicites de chacune des composantes du quadri-vecteur J^μ qui représente les courants de DIRAC :

composante d'indice 0 :

$$j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = (\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = (\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*) \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{V-10})$$

$$j^0 = \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 \quad (\text{V-11})$$

composante d'indice 1 :

$$j^1 = \bar{\Psi} \gamma^1 \Psi = (\Psi_0^*, \Psi_1^*, -\Psi_2^*, -\Psi_3^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = (\Psi_3^*, \Psi_2^*, \Psi_1^*, \Psi_0^*) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (V-12)$$

$$j^1 = \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \quad (V-13)$$

composante d'indice 2 :

$$j^2 = \bar{\Psi} \gamma^2 \Psi = (\Psi_0^*, \Psi_1^*, -\Psi_2^*, -\Psi_3^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = (i\Psi_3^*, -i\Psi_2^*, i\Psi_1^*, -i\Psi_0^*) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (V-14)$$

$$j^2 = i\Psi_3^* \Psi_0 - i\Psi_2^* \Psi_1 + i\Psi_1^* \Psi_2 - i\Psi_0^* \Psi_3 \quad (V-15)$$

composante d'indice 3 :

$$j^3 = \bar{\Psi} \gamma^3 \Psi = (\Psi_0^*, \Psi_1^*, -\Psi_2^*, -\Psi_3^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = (\Psi_2^*, -\Psi_3^*, \Psi_0^*, -\Psi_1^*) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (V-16)$$

$$j^3 = \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \quad (V-17)$$

soit donc en résumé :

$$\begin{aligned} j^0 &= \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \\ j^1 &= \Psi_3^* \Psi_0 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_0^* \Psi_3 \\ j^2 &= j\Psi_3^* \Psi_0 - j\Psi_2^* \Psi_1 + j\Psi_1^* \Psi_2 - j\Psi_0^* \Psi_3 \\ j^3 &= \Psi_2^* \Psi_0 - \Psi_3^* \Psi_1 + \Psi_0^* \Psi_2 - \Psi_1^* \Psi_3 \end{aligned} \quad (V-18)$$

Les J^μ représentent les courants de densité de probabilité de présence de la particule.

Deuxième partie

L'approche énergétique de l'équation de DIRAC et de ses solutions en coordonnées cartésiennes

VI

Les modes stationnaires

On présente en général des solutions possibles à l'équation de DIRAC sous la forme d'ondes planes du type :

$$\psi(x, y, z, t) = A \exp \left[j(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \right] \quad (\text{VI-1})$$

Cette relation est caractéristique d'une onde qui se propage à la pulsation ω et suivant le vecteur d'onde \vec{k} . Elle ne permet pas de décrire des échanges d'énergie tels que ceux que l'on peut mettre en évidence dans une cavité électromagnétique par exemple. Elle est également sujette à question concernant le nombre $j = \sqrt{-1}$ qui est présent et qui n'a rien à voir avec le formalisme complexe habituel pour la description des ondes.

On peut penser mettre en évidences des modes stationnaires en sommant deux ou plusieurs solutions propagatives, mais les solutions (VI-1) au système de DIRAC ne sont jamais complètement explicitées, ce qui rend cette possibilité inopérante.

Il convient donc de formaliser une méthode de recherche de ces solutions au système de DIRAC rappelé pour mémoire :

$$\begin{aligned} \eta \psi_0 &= j \frac{\partial \psi_0}{\partial (ct)} + j \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ \eta \psi_1 &= j \frac{\partial \psi_1}{\partial (ct)} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \\ \eta \psi_2 &= -j \frac{\partial \psi_2}{\partial (ct)} - j \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \\ \eta \psi_3 &= -j \frac{\partial \psi_3}{\partial (ct)} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{VI-2})$$

et nous formulons l'hypothèse que toute fonction d'onde s'écrit comme une combinaison linéaire de modes stationnaires susceptibles d'être présents dans une cavité à trois dimensions :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= \{a_0 S_x S_y S_z + b_0 S_x C_y S_z + c_0 C_x S_y S_z + d_0 C_x C_y S_z + e_0 S_x S_y C_z + f_0 S_x C_y C_z + g_0 C_x S_y C_z + h_0 C_x C_y C_z\} C_t \\
 &+ \{i_0 S_x S_y S_z + j_0 S_x C_y S_z + k_0 C_x S_y S_z + l_0 C_x C_y S_z + m_0 S_x S_y C_z + n_0 S_x C_y C_z + o_0 C_x S_y C_z + p_0 C_x C_y C_z\} S_t \\
 \psi_1 &= \{a_1 S_x S_y S_z + b_1 S_x C_y S_z + c_1 C_x S_y S_z + d_1 C_x C_y S_z + e_1 S_x S_y C_z + f_1 S_x C_y C_z + g_1 C_x S_y C_z + h_1 C_x C_y C_z\} C_t \\
 &+ \{i_1 S_x S_y S_z + j_1 S_x C_y S_z + k_1 C_x S_y S_z + l_1 C_x C_y S_z + m_1 S_x S_y C_z + n_1 S_x C_y C_z + o_1 C_x S_y C_z + p_1 C_x C_y C_z\} S_t \\
 \psi_2 &= \{a_2 S_x S_y S_z + b_2 S_x C_y S_z + c_2 C_x S_y S_z + d_2 C_x C_y S_z + e_2 S_x S_y C_z + f_2 S_x C_y C_z + g_2 C_x S_y C_z + h_2 C_x C_y C_z\} C_t \\
 &+ \{i_2 S_x S_y S_z + j_2 S_x C_y S_z + k_2 C_x S_y S_z + l_2 C_x C_y S_z + m_2 S_x S_y C_z + n_2 S_x C_y C_z + o_2 C_x S_y C_z + p_2 C_x C_y C_z\} S_t \\
 \psi_3 &= \{a_3 S_x S_y S_z + b_3 S_x C_y S_z + c_3 C_x S_y S_z + d_3 C_x C_y S_z + e_3 S_x S_y C_z + f_3 S_x C_y C_z + g_3 C_x S_y C_z + h_3 C_x C_y C_z\} C_t \\
 &+ \{i_3 S_x S_y S_z + j_3 S_x C_y S_z + k_3 C_x S_y S_z + l_3 C_x C_y S_z + m_3 S_x S_y C_z + n_3 S_x C_y C_z + o_3 C_x S_y C_z + p_3 C_x C_y C_z\} S_t
 \end{aligned} \tag{VI-3}$$

Dans cette définition, la notation abrégée suivante a été utilisée :

$$S_x = \sin(k_x x) \quad S_y = \sin(k_y y) \quad S_z = \sin(k_z z) \quad S_t = \sin(k_t ct) \tag{VI-4}$$

$$C_x = \cos(k_x x) \quad C_y = \cos(k_y y) \quad C_z = \cos(k_z z) \quad C_t = \cos(k_t ct) \tag{VI-5}$$

Le vecteur d'onde est représenté par ses composantes k_x, k_y, k_z , tandis que pour une notation homogène et en adéquation avec la relativité, le produit ωt a été remplacé par l'expression $k_t ct$, ce qui permet de mettre en évidence les deux quadri-vecteurs :

$$\begin{array}{l}
 \text{4-vecteur position :} \\
 \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ ct \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{4-vecteur onde :} \\
 \left(\begin{array}{c} k_x \\ k_y \\ k_z \\ k_t = \frac{\omega}{c} \end{array} \right)
 \end{array}
 \tag{VI-6}$$

Les coefficients $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, i_i, j_i, k_i, l_i, m_i, n_i, o_i, p_i$, pour $i=0,1,2,3$, sont des constantes réelles qui pondèrent chacun des modes et vont servir d'inconnues dans la recherche des fonctions d'ondes $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ solutions du système de DIRAC.

Cela conduit, pour chaque équation du système de DIRAC, à exprimer les dérivées partielles des fonctions d'onde $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ et à formuler un système homogène de 16 équations relatif aux coefficients $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, i_i, j_i, k_i, l_i, m_i, n_i, o_i, p_i$. Le système global obtenu sera donc un système homogène de 64 équations à 64 inconnues.

Les calculs sont un peu laborieux mais sans difficultés. Ils sont présentés dans leur intégralité dans les lignes suivantes ou on rappelle avoir posé $k_t = \omega/c$.

Première équation du système de DIRAC : $j \frac{\partial \psi_0}{\partial (ct)} + j \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \eta \psi_0 = 0$

$$\begin{aligned}
 j \frac{\partial \psi_0}{\partial (ct)} &= -jk_t \{a_0 S_x S_y S_z + b_0 S_x C_y S_z + c_0 C_x S_y S_z + d_0 C_x C_y S_z + e_0 S_x S_y C_z + f_0 S_x C_y C_z + g_0 C_x S_y C_z + h_0 C_x C_y C_z\} S_t \\
 &+ jk_t \{i_0 S_x S_y S_z + j_0 S_x C_y S_z + k_0 C_x S_y S_z + l_0 C_x C_y S_z + m_0 S_x S_y C_z + n_0 S_x C_y C_z + o_0 C_x S_y C_z + p_0 C_x C_y C_z\} C_t \\
 j \frac{\partial \psi_3}{\partial x} &= jk_x \{a_3 C_x S_y S_z + b_3 C_x C_y S_z - c_3 S_x S_y S_z - d_3 S_x C_y S_z + e_3 C_x S_y C_z + f_3 C_x C_y C_z - g_3 S_x S_y C_z - h_3 S_x C_y C_z\} C_t \\
 &+ jk_x \{i_3 C_x S_y S_z + j_3 C_x C_y S_z - k_3 S_x S_y S_z - l_3 S_x C_y S_z + m_3 C_x S_y C_z + n_3 C_x C_y C_z - o_3 S_x S_y C_z - p_3 S_x C_y C_z\} S_t \\
 \frac{\partial \psi_3}{\partial y} &= k_y \{a_3 S_x C_y S_z - b_3 S_x S_y S_z + c_3 C_x C_y S_z - d_3 C_x S_y S_z + e_3 S_x C_y C_z - f_3 S_x S_y C_z + g_3 C_x C_y C_z - h_3 C_x S_y C_z\} C_t \\
 &k_y \{i_3 S_x C_y S_z - j_3 S_x S_y S_z + k_3 C_x C_y S_z - l_3 C_x S_y S_z + m_3 S_x C_y C_z - n_3 S_x S_y C_z + o_3 C_x C_y C_z - p_3 C_x S_y C_z\} S_t \\
 j \frac{\partial \psi_2}{\partial z} &= jk_z \{a_2 S_x S_y C_z + b_2 S_x C_y C_z + c_2 C_x S_y C_z + d_2 C_x C_y C_z - e_2 S_x S_y S_z - f_2 S_x C_y S_z - g_2 C_x S_y S_z - h_2 C_x C_y S_z\} C_t \\
 &+ jk_z \{i_2 S_x S_y C_z + j_2 S_x C_y C_z + k_2 C_x S_y C_z + l_2 C_x C_y C_z - m_2 S_x S_y S_z - n_2 S_x C_y S_z - o_2 C_x S_y S_z - p_2 C_x C_y S_z\} S_t \\
 \eta \psi_0 &= \eta \{a_0 S_x S_y S_z + b_0 S_x C_y S_z + c_0 C_x S_y S_z + d_0 C_x C_y S_z + e_0 S_x S_y C_z + f_0 S_x C_y C_z + g_0 C_x S_y C_z + h_0 C_x C_y C_z\} C_t \\
 &+ \eta \{i_0 S_x S_y S_z + j_0 S_x C_y S_z + k_0 C_x S_y S_z + l_0 C_x C_y S_z + m_0 S_x S_y C_z + n_0 S_x C_y C_z + o_0 C_x S_y C_z + p_0 C_x C_y C_z\} S_t
 \end{aligned}$$

(VI-7)

On en déduit le système homogène associé à la première équation du système de DIRAC :

$$\begin{aligned}
 -jk_t a_0 - jk_x k_3 - k_y j_3 - jk_z m_2 - \eta i_0 &= 0 \\
 -jk_t b_0 - jk_x l_3 + k_y i_3 - jk_z n_2 - \eta j_0 &= 0 \\
 -jk_t c_0 + jk_x i_3 - k_y l_3 - jk_z o_2 - \eta k_0 &= 0 \\
 -jk_t d_0 + jk_x j_3 + k_y k_3 - jk_z p_2 - \eta l_0 &= 0 \\
 -jk_t e_0 - jk_x o_3 - k_y n_3 + jk_z i_2 - \eta m_0 &= 0 \\
 -jk_t f_0 - jk_x p_3 + k_y m_3 + jk_z j_2 - \eta n_0 &= 0 \\
 -jk_t g_0 + jk_x m_3 - k_y p_3 + jk_z k_2 - \eta o_0 &= 0 \\
 -jk_t h_0 + jk_x n_3 + k_y o_3 + jk_z l_2 - \eta p_0 &= 0 \\
 jk_t i_0 - jk_x c_3 - k_y b_3 - jk_z e_2 - \eta a_0 &= 0 \\
 jk_t j_0 - jk_x d_3 + k_y a_3 - jk_z f_2 - \eta b_0 &= 0 \\
 jk_t k_0 + jk_x a_3 - k_y d_3 - jk_z g_2 - \eta c_0 &= 0 \\
 jk_t l_0 + jk_x b_3 + k_y c_3 - jk_z h_2 - \eta d_0 &= 0 \\
 jk_t m_0 - jk_x g_3 - k_y f_3 + jk_z a_2 - \eta e_0 &= 0 \\
 jk_t n_0 - jk_x h_3 + k_y e_3 + jk_z b_2 - \eta f_0 &= 0 \\
 jk_t o_0 + jk_x e_3 - k_y h_3 + jk_z c_2 - \eta g_0 &= 0 \\
 jk_t p_0 + jk_x f_3 + k_y g_3 + jk_z d_2 - \eta h_0 &= 0
 \end{aligned}$$

(VI-8)

Deuxième équation du système de DIRAC : $j \frac{\partial \psi_1}{\partial (ct)} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_3}{\partial z} - \eta \psi_1 = 0$

$$\begin{aligned}
 j \frac{\partial \psi_1}{\partial (ct)} &= -jk_t \{a_1 S_x S_y S_z + b_1 S_x C_y S_z + c_1 C_x S_y S_z + d_1 C_x C_y S_z + e_1 S_x S_y C_z + f_1 S_x C_y C_z + g_1 C_x S_y C_z + h_1 C_x C_y C_z\} S_t \\
 &+ jk_t \{i_1 S_x S_y S_z + j_1 S_x C_y S_z + k_1 C_x S_y S_z + l_1 C_x C_y S_z + m_1 S_x S_y C_z + n_1 S_x C_y C_z + o_1 C_x S_y C_z + p_1 C_x C_y C_z\} C_t \\
 j \frac{\partial \psi_2}{\partial x} &= jk_x \{a_2 C_x S_y S_z + b_2 C_x C_y S_z - c_2 S_x S_y S_z - d_2 S_x C_y S_z + e_2 C_x S_y C_z + f_2 C_x C_y C_z - g_2 S_x S_y C_z - h_2 S_x C_y C_z\} C_t \\
 &+ jk_x \{i_2 C_x S_y S_z + j_2 C_x C_y S_z - k_2 S_x S_y S_z - l_2 S_x C_y S_z + m_2 C_x S_y C_z + n_2 C_x C_y C_z - o_2 S_x S_y C_z - p_2 S_x C_y C_z\} S_t \\
 - \frac{\psi_2}{\partial y} &= -k_y \{a_2 S_x C_y S_z - b_2 S_x S_y S_z + c_2 C_x C_y S_z - d_2 C_x S_y S_z + e_2 S_x C_y C_z - f_2 S_x S_y C_z + g_2 C_x C_y C_z - h_2 C_x S_y C_z\} C_t \\
 &- k_y \{i_2 S_x C_y S_z - j_2 S_x S_y S_z + k_2 C_x C_y S_z - l_2 C_x S_y S_z + m_2 S_x C_y C_z - n_2 S_x S_y C_z + o_2 C_x C_y C_z - p_2 C_x S_y C_z\} S_t \\
 - j \frac{\partial \psi_3}{\partial z} &= -jk_z \{a_3 S_x S_y C_z + b_3 S_x C_y C_z + c_3 C_x S_y C_z + d_3 C_x C_y C_z - e_3 S_x S_y S_z - f_3 S_x C_y S_z - g_3 C_x S_y S_z - h_3 C_x C_y S_z\} C_t \\
 &- jk_z \{i_3 S_x S_y C_z + j_3 S_x C_y C_z + k_3 C_x S_y C_z + l_3 C_x C_y C_z - m_3 S_x S_y S_z - n_3 S_x C_y S_z - o_3 C_x S_y S_z - p_3 C_x C_y S_z\} S_t \\
 \eta \psi_1 &= \eta \{a_1 S_x S_y S_z + b_1 S_x C_y S_z + c_1 C_x S_y S_z + d_1 C_x C_y S_z + e_1 S_x S_y C_z + f_1 S_x C_y C_z + g_1 C_x S_y C_z + h_1 C_x C_y C_z\} C_t \\
 &+ \eta \{i_1 S_x S_y S_z + j_1 S_x C_y S_z + k_1 C_x S_y S_z + l_1 C_x C_y S_z + m_1 S_x S_y C_z + n_1 S_x C_y C_z + o_1 C_x S_y C_z + p_1 C_x C_y C_z\} S_t
 \end{aligned}$$

(VI-9)

On en déduit le système homogène associé à la deuxième équation du système de DIRAC :

$$\begin{aligned}
 -jk_t a_1 - jk_x k_2 + k_y j_2 + jk_z m_3 - \eta i_1 &= 0 \\
 -jk_t b_1 - jk_x l_2 - k_y i_2 + jk_z n_3 - \eta j_1 &= 0 \\
 -jk_t c_1 + jk_x i_2 + k_y l_2 + jk_z o_3 - \eta k_1 &= 0 \\
 -jk_t d_1 + jk_x j_2 - k_y k_2 + jk_z p_3 - \eta l_1 &= 0 \\
 -jk_t e_1 - jk_x o_2 + k_y n_2 - jk_z i_3 - \eta m_1 &= 0 \\
 -jk_t f_1 - jk_x p_2 - k_y m_2 - jk_z j_3 - \eta n_1 &= 0 \\
 -jk_t g_1 + jk_x m_2 + k_y p_2 - jk_z k_3 - \eta o_1 &= 0 \\
 -jk_t h_1 + jk_x n_2 - k_y o_2 - jk_z l_3 - \eta p_1 &= 0 \\
 jk_t i_1 - jk_x c_2 + k_y b_2 + jk_z e_3 - \eta a_1 &= 0 \\
 jk_t j_1 - jk_x d_2 - k_y a_2 + jk_z f_3 - \eta b_1 &= 0 \\
 jk_t k_1 + jk_x a_2 + k_y d_2 + jk_z g_3 - \eta c_1 &= 0 \\
 jk_t l_1 + jk_x b_2 - k_y c_2 + jk_z h_3 - \eta d_1 &= 0 \\
 jk_t m_1 - jk_x g_2 + k_y f_2 - jk_z a_3 - \eta e_1 &= 0 \\
 jk_t n_1 - jk_x h_2 - k_y e_2 - jk_z b_3 - \eta f_1 &= 0 \\
 jk_t o_1 + jk_x e_2 + k_y h_2 - jk_z c_3 - \eta g_1 &= 0 \\
 jk_t p_1 + jk_x f_2 - k_y g_2 - jk_z d_3 - \eta h_1 &= 0
 \end{aligned}$$

(VI-10)

Troisième équation du système de DIRAC : $-j \frac{\partial \Psi_2}{\partial(ct)} - j \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} - \eta \Psi_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 & -j \frac{\partial \Psi_2}{\partial(ct)} = jk_t \{a_2 S_x S_y S_z + b_2 S_x C_y S_z + c_2 C_x S_y S_z + d_2 C_x C_y S_z + e_2 S_x S_y C_z + f_2 S_x C_y C_z + g_2 C_x S_y C_z + h_2 C_x C_y C_z\} S_t \\
 & -jk_t \{a_2 S_x S_y S_z + b_2 S_x C_y S_z + c_2 C_x S_y S_z + d_2 C_x C_y S_z + e_2 S_x S_y C_z + f_2 S_x C_y C_z + g_2 C_x S_y C_z + h_2 C_x C_y C_z\} C_t \\
 & -j \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = -jk_x \{a_1 C_x S_y S_z + b_1 C_x C_y S_z - c_1 S_x S_y S_z - d_1 S_x C_y S_z + e_1 C_x S_y C_z + f_1 C_x C_y C_z - g_1 S_x S_y C_z - h_1 S_x C_y C_z\} C_t \\
 & -jk_x \{i_1 C_x S_y S_z + j_1 C_x C_y S_z - k_1 S_x S_y S_z - l_1 S_x C_y S_z + m_1 C_x S_y C_z + n_1 C_x C_y C_z - o_1 S_x S_y C_z - p_1 S_x C_y C_z\} S_t \\
 & -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = -k_y \{a_1 S_x C_y S_z - b_1 S_x S_y S_z + c_1 C_x C_y S_z - d_1 C_x S_y S_z + e_1 S_x C_y C_z - f_1 S_x S_y C_z + g_1 C_x C_y C_z - h_1 C_x S_y C_z\} C_t \\
 & -k_y \{i_1 S_x C_y S_z - j_1 S_x S_y S_z + k_1 C_x C_y S_z - l_1 C_x S_y S_z + m_1 S_x C_y C_z - n_1 S_x S_y C_z + o_1 C_x C_y C_z - p_1 C_x S_y C_z\} S_t \\
 & -j \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = -jk_z \{a_0 S_x S_y C_z + b_0 S_x C_y C_z + c_0 C_x S_y C_z + d_0 C_x C_y C_z - e_0 S_x S_y S_z - f_0 S_x C_y S_z - g_0 C_x S_y S_z - h_0 C_x C_y S_z\} C_t \\
 & -jk_z \{i_0 S_x S_y C_z + j_0 S_x C_y C_z + k_0 C_x S_y C_z + l_0 C_x C_y C_z - m_0 S_x S_y S_z - n_0 S_x C_y S_z - o_0 C_x S_y S_z - p_0 C_x C_y S_z\} S_t \\
 & \eta \Psi_2 = \eta \{a_2 S_x S_y S_z + b_2 S_x C_y S_z + c_2 C_x S_y S_z + d_2 C_x C_y S_z + e_2 S_x S_y C_z + f_2 S_x C_y C_z + g_2 C_x S_y C_z + h_2 C_x C_y C_z\} C_t \\
 & + \eta \{i_2 S_x S_y S_z + j_2 S_x C_y S_z + k_2 C_x S_y S_z + l_2 C_x C_y S_z + m_2 S_x S_y C_z + n_2 S_x C_y C_z + o_2 C_x S_y C_z + p_2 C_x C_y C_z\} S_t
 \end{aligned}$$

(VI-11)

On en déduit le système homogène associé à la troisième équation du système de DIRAC :

$$\begin{aligned}
 & jk_t a_2 + jk_x k_1 + k_y j_1 + jk_z m_0 - \eta i_2 = 0 \\
 & jk_t b_2 + jk_x l_1 - k_y i_1 + jk_z n_0 - \eta j_2 = 0 \\
 & jk_t c_2 - jk_x i_1 + k_y l_1 + jk_z o_0 - \eta k_2 = 0 \\
 & jk_t d_2 - jk_x j_1 - k_y k_1 + jk_z p_0 - \eta l_2 = 0 \\
 & jk_t e_2 + jk_x o_1 + k_y n_1 - jk_z i_0 - \eta m_2 = 0 \\
 & jk_t f_2 + jk_x p_1 - k_y m_1 - jk_z j_0 - \eta n_2 = 0 \\
 & jk_t g_2 - jk_x m_1 + k_y p_1 - jk_z k_0 - \eta o_2 = 0 \\
 & jk_t h_2 - jk_x n_1 - k_y o_1 - jk_z l_0 - \eta p_2 = 0 \\
 & -jk_t i_2 + jk_x c_1 + k_y b_1 + jk_z e_0 - \eta a_2 = 0 \\
 & -jk_t j_2 + jk_x d_1 - k_y a_1 + jk_z f_0 - \eta b_2 = 0 \\
 & -jk_t k_2 - jk_x a_1 + k_y d_1 + jk_z g_0 - \eta c_2 = 0 \\
 & -jk_t l_2 - jk_x b_1 - k_y c_1 + jk_z h_0 - \eta d_2 = 0 \\
 & -jk_t m_2 + jk_x g_1 + k_y f_1 - jk_z a_0 - \eta e_2 = 0 \\
 & -jk_t n_2 + jk_x h_1 - k_y e_1 - jk_z b_0 - \eta f_2 = 0 \\
 & -jk_t o_2 - jk_x e_1 + k_y h_1 - jk_z c_0 - \eta g_2 = 0 \\
 & -jk_t p_2 - jk_x f_1 - k_y g_1 - jk_z d_0 - \eta h_2 = 0
 \end{aligned}$$

(VI-12)

Quatrième équation du système de DIRAC : $-j \frac{\partial \Psi_3}{\partial(ct)} - j \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} + j \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \eta \Psi_3 = 0$

$$\begin{aligned}
 & -j \frac{\partial \Psi_3}{\partial(ct)} = jk_t \{a_3 S_x S_y S_z + b_3 S_x C_y S_z + c_3 C_x S_y S_z + d_3 C_x C_y S_z + e_3 S_x S_y C_z + f_3 S_x C_y C_z + g_3 C_x S_y C_z + h_3 C_x C_y C_z\} S_t \\
 & -jk_t \{i_3 S_x S_y S_z + j_3 S_x C_y S_z + k_3 C_x S_y S_z + l_3 C_x C_y S_z + m_3 S_x S_y C_z + n_3 S_x C_y C_z + o_3 C_x S_y C_z + p_3 C_x C_y C_z\} C_t \\
 & -j \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} = -jk_x \{a_0 C_x S_y S_z + b_0 C_x C_y S_z - c_0 S_x S_y S_z - d_0 S_x C_y S_z + e_0 C_x S_y C_z + f_0 C_x C_y C_z - g_0 S_x S_y C_z - h_0 S_x C_y C_z\} C_t \\
 & -jk_x \{i_0 C_x S_y S_z + j_0 C_x C_y S_z - k_0 S_x S_y S_z - l_0 S_x C_y S_z + m_0 C_x S_y C_z + n_0 C_x C_y C_z - o_0 S_x S_y C_z - p_0 S_x C_y C_z\} S_t \\
 & \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} = k_y \{a_0 S_x C_y S_z - b_0 S_x S_y S_z + c_0 C_x C_y S_z - d_0 C_x S_y S_z + e_0 S_x C_y C_z - f_0 S_x S_y C_z + g_0 C_x C_y C_z - h_0 C_x S_y C_z\} C_t \\
 & + k_y \{i_0 S_x C_y S_z - j_0 S_x S_y S_z + k_0 C_x C_y S_z - l_0 C_x S_y S_z + m_0 S_x C_y C_z - n_0 S_x S_y C_z + o_0 C_x C_y C_z - p_0 C_x S_y C_z\} S_t \\
 & j \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = jk_z \{a_1 S_x S_y C_z + b_1 S_x C_y C_z + c_1 C_x S_y C_z + d_1 C_x C_y C_z - e_1 S_x S_y S_z - f_1 S_x C_y S_z - g_1 C_x S_y S_z - h_1 C_x C_y S_z\} C_t \\
 & + jk_z \{i_1 S_x S_y C_z + j_1 S_x C_y C_z + k_1 C_x S_y C_z + l_1 C_x C_y C_z - m_1 S_x S_y S_z - n_1 S_x C_y S_z - o_1 C_x S_y S_z - p_1 C_x C_y S_z\} S_t \\
 & \eta \Psi_3 = \eta \{a_3 S_x S_y S_z + b_3 S_x C_y S_z + c_3 C_x S_y S_z + d_3 C_x C_y S_z + e_3 S_x S_y C_z + f_3 S_x C_y C_z + g_3 C_x S_y C_z + h_3 C_x C_y C_z\} C_t \\
 & + \eta \{i_3 S_x S_y S_z + j_3 S_x C_y S_z + k_3 C_x S_y S_z + l_3 C_x C_y S_z + m_3 S_x S_y C_z + n_3 S_x C_y C_z + o_3 C_x S_y C_z + p_3 C_x C_y C_z\} S_t
 \end{aligned}$$

(VI-13)

On en déduit le système homogène associé à la quatrième équation du système de DIRAC :

$$\begin{aligned}
 & jk_t a_3 + jk_x k_0 - k_y j_0 - jk_z m_1 - \eta i_3 = 0 \\
 & jk_t b_3 + jk_x l_0 + k_y i_0 - jk_z n_1 - \eta j_3 = 0 \\
 & jk_t c_3 - jk_x i_0 - k_y l_0 - jk_z o_1 - \eta k_3 = 0 \\
 & jk_t d_3 - jk_x j_0 + k_y k_0 - jk_z p_1 - \eta l_3 = 0 \\
 & jk_t e_3 + jk_x o_0 - k_y n_0 + jk_z i_1 - \eta m_3 = 0 \\
 & jk_t f_3 + jk_x p_0 + k_y m_0 + jk_z j_1 - \eta n_3 = 0 \\
 & jk_t g_3 - jk_x m_0 - k_y p_0 + jk_z k_1 - \eta o_3 = 0 \\
 & jk_t h_3 - jk_x n_0 + k_y o_0 + jk_z l_1 - \eta p_3 = 0 \\
 & -jk_t i_3 + jk_x c_0 - k_y b_0 - jk_z e_1 - \eta a_3 = 0 \\
 & -jk_t j_3 + jk_x d_0 + k_y a_0 - jk_z f_1 - \eta b_3 = 0 \\
 & -jk_t k_3 - jk_x a_0 - k_y d_0 - jk_z g_1 - \eta c_3 = 0 \\
 & -jk_t l_3 - jk_x b_0 + k_y c_0 - jk_z h_1 - \eta d_3 = 0 \\
 & -jk_t m_3 + jk_x g_0 - k_y f_0 + jk_z a_1 - \eta e_3 = 0 \\
 & -jk_t n_3 + jk_x h_0 + k_y e_0 + jk_z b_1 - \eta f_3 = 0 \\
 & -jk_t o_3 - jk_x e_0 - k_y h_0 + jk_z c_1 - \eta g_3 = 0 \\
 & -jk_t p_3 - jk_x f_0 + k_y g_0 + jk_z d_1 - \eta h_3 = 0
 \end{aligned}$$

(VI-14)

Le système complet de 64 équations relatif aux coefficients $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, i_i, j_i, k_i, l_i, m_i, n_i, o_i, p_i$. pour $i = 0,1,2,3$ peut maintenant être récapitulé sur 2 colonnes :

$$\begin{array}{ll}
 -jk_t a_0 - jk_x k_3 - k_y j_3 - jk_z m_2 - \eta i_0 = 0 & -jk_t a_1 - jk_x k_2 + k_y j_2 + jk_z m_3 - \eta i_1 = 0 \\
 -jk_t b_0 - jk_x l_3 + k_y i_3 - jk_z n_2 - \eta j_0 = 0 & -jk_t b_1 - jk_x l_2 - k_y i_2 + jk_z n_3 - \eta j_1 = 0 \\
 -jk_t c_0 + jk_x i_3 - k_y l_3 - jk_z o_2 - \eta k_0 = 0 & -jk_t c_1 + jk_x i_2 + k_y l_2 + jk_z o_3 - \eta k_1 = 0 \\
 -jk_t d_0 + jk_x j_3 + k_y k_3 - jk_z p_2 - \eta l_0 = 0 & -jk_t d_1 + jk_x j_2 - k_y k_2 + jk_z p_3 - \eta l_1 = 0 \\
 -jk_t e_0 - jk_x o_3 - k_y n_3 + jk_z i_2 - \eta m_0 = 0 & -jk_t e_1 - jk_x o_2 + k_y n_2 - jk_z i_3 - \eta m_1 = 0 \\
 -jk_t f_0 - jk_x p_3 + k_y m_3 + jk_z j_2 - \eta n_0 = 0 & -jk_t f_1 - jk_x p_2 - k_y m_2 - jk_z j_3 - \eta n_1 = 0 \\
 -jk_t g_0 + jk_x m_3 - k_y p_3 + jk_z k_2 - \eta o_0 = 0 & -jk_t g_1 + jk_x m_2 + k_y p_2 - jk_z k_3 - \eta o_1 = 0 \\
 -jk_t h_0 + jk_x n_3 + k_y o_3 + jk_z l_2 - \eta p_0 = 0 & -jk_t h_1 + jk_x n_2 - k_y o_2 - jk_z l_3 - \eta p_1 = 0 \\
 jk_t i_0 - jk_x c_3 - k_y b_3 - jk_z e_2 - \eta a_0 = 0 & jk_t i_1 - jk_x c_2 + k_y b_2 + jk_z e_3 - \eta a_1 = 0 \\
 jk_t j_0 - jk_x d_3 + k_y a_3 - jk_z f_2 - \eta b_0 = 0 & jk_t j_1 - jk_x d_2 - k_y a_2 + jk_z f_3 - \eta b_1 = 0 \\
 jk_t k_0 + jk_x a_3 - k_y d_3 - jk_z g_2 - \eta c_0 = 0 & jk_t k_1 + jk_x a_2 + k_y d_2 + jk_z g_3 - \eta c_1 = 0 \\
 jk_t l_0 + jk_x b_3 + k_y c_3 - jk_z h_2 - \eta d_0 = 0 & jk_t l_1 + jk_x b_2 - k_y c_2 + jk_z h_3 - \eta d_1 = 0 \\
 jk_t m_0 - jk_x g_3 - k_y f_3 + jk_z a_2 - \eta e_0 = 0 & jk_t m_1 - jk_x g_2 + k_y f_2 - jk_z a_3 - \eta e_1 = 0 \\
 jk_t n_0 - jk_x h_3 + k_y e_3 + jk_z b_2 - \eta f_0 = 0 & jk_t n_1 - jk_x h_2 - k_y e_2 - jk_z b_3 - \eta f_1 = 0 \\
 jk_t o_0 + jk_x e_3 - k_y h_3 + jk_z c_2 - \eta g_0 = 0 & jk_t o_1 + jk_x e_2 + k_y h_2 - jk_z c_3 - \eta g_1 = 0 \\
 jk_t p_0 + jk_x f_3 + k_y g_3 + jk_z d_2 - \eta h_0 = 0 & jk_t p_1 + jk_x f_2 - k_y g_2 - jk_z d_3 - \eta h_1 = 0 \\
 \\
 jk_t a_2 + jk_x k_1 + k_y j_1 + jk_z m_0 - \eta i_2 = 0 & jk_t a_3 + jk_x k_0 - k_y j_0 - jk_z m_1 - \eta i_3 = 0 \\
 jk_t b_2 + jk_x l_1 - k_y i_1 + jk_z n_0 - \eta j_2 = 0 & jk_t b_3 + jk_x l_0 + k_y i_0 - jk_z n_1 - \eta j_3 = 0 \\
 jk_t c_2 - jk_x i_1 + k_y l_1 + jk_z o_0 - \eta k_2 = 0 & jk_t c_3 - jk_x i_0 - k_y l_0 - jk_z o_1 - \eta k_3 = 0 \\
 jk_t d_2 - jk_x j_1 - k_y k_1 + jk_z p_0 - \eta l_2 = 0 & jk_t d_3 - jk_x j_0 + k_y k_0 - jk_z p_1 - \eta l_3 = 0 \\
 jk_t e_2 + jk_x o_1 + k_y n_1 - jk_z i_0 - \eta m_2 = 0 & jk_t e_3 + jk_x o_0 - k_y n_0 + jk_z i_1 - \eta m_3 = 0 \\
 jk_t f_2 + jk_x p_1 - k_y m_1 - jk_z j_0 - \eta n_2 = 0 & jk_t f_3 + jk_x p_0 + k_y m_0 + jk_z j_1 - \eta n_3 = 0 \\
 jk_t g_2 - jk_x m_1 + k_y p_1 - jk_z k_0 - \eta o_2 = 0 & jk_t g_3 - jk_x m_0 - k_y p_0 + jk_z k_1 - \eta o_3 = 0 \\
 jk_t h_2 - jk_x n_1 - k_y o_1 - jk_z l_0 - \eta p_2 = 0 & jk_t h_3 - jk_x n_0 + k_y o_0 + jk_z l_1 - \eta p_3 = 0 \\
 -jk_t i_2 + jk_x c_1 + k_y b_1 + jk_z e_0 - \eta a_2 = 0 & -jk_t i_3 + jk_x c_0 - k_y b_0 - jk_z e_1 - \eta a_3 = 0 \\
 -jk_t j_2 + jk_x d_1 - k_y a_1 + jk_z f_0 - \eta b_2 = 0 & -jk_t j_3 + jk_x d_0 + k_y a_0 - jk_z f_1 - \eta b_3 = 0 \\
 -jk_t k_2 - jk_x a_1 + k_y d_1 + jk_z g_0 - \eta c_2 = 0 & -jk_t k_3 - jk_x a_0 - k_y d_0 - jk_z g_1 - \eta c_3 = 0 \\
 -jk_t l_2 - jk_x b_1 - k_y c_1 + jk_z h_0 - \eta d_2 = 0 & -jk_t l_3 - jk_x b_0 + k_y c_0 - jk_z h_1 - \eta d_3 = 0 \\
 -jk_t m_2 + jk_x g_1 + k_y f_1 - jk_z a_0 - \eta e_2 = 0 & -jk_t m_3 + jk_x g_0 - k_y f_0 + jk_z a_1 - \eta e_3 = 0 \\
 -jk_t n_2 + jk_x h_1 - k_y e_1 - jk_z b_0 - \eta f_2 = 0 & -jk_t n_3 + jk_x h_0 + k_y e_0 + jk_z b_1 - \eta f_3 = 0 \\
 -jk_t o_2 - jk_x e_1 + k_y h_1 - jk_z c_0 - \eta g_2 = 0 & -jk_t o_3 - jk_x e_0 - k_y h_0 + jk_z c_1 - \eta g_3 = 0 \\
 -jk_t p_2 - jk_x f_1 - k_y g_1 - jk_z d_0 - \eta h_2 = 0 & -jk_t p_3 - jk_x f_0 + k_y g_0 + jk_z d_1 - \eta h_3 = 0
 \end{array}$$

(VI-15)

Il s'agit d'un système homogène qui n'admet de solution non nulle que si son déterminant est nul. Mais l'expression littérale du déterminant d'un système de 64 équations à 64 inconnues n'est pas triviale à obtenir.

On peut cependant tenter de la cerner par quelques considérations physiques. S'il existe une relation entre k_x , k_y , k_z , k_t et η qui permet d'obtenir des solutions à ce système, cette relation doit exprimer la conservation de l'énergie.

Il a été rappelé en introduction que la pseudo-norme du quadrivecteur impulsion énergie :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{VI-16})$$

ne dépend pas du référentiel dans lequel elle est exprimée et il a été montré que sa constance sert à établir la relation de conservation de l'énergie :

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 = (p_xc)^2 + (p_yc)^2 + (p_zc)^2 + (m_0c^2)^2 \quad (\text{VI-17})$$

Le quadrivecteur homologue à (VI-16) en mécanique quantique s'obtient en multipliant la quadrivecteur d'onde par la constante de PLANCK barrée :

$$\tilde{\mathbf{P}}_Q = \hbar \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ k_t = \frac{\omega}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{VI-18})$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, la pseudo-norme de ce quadrivecteur est constante et cette constante est nécessairement l'énergie de masse au repos divisée par c^2 . On en déduit :

$$\hbar^2(k_t^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) = (m_0c)^2 \quad (\text{VI-19})$$

soit encore, en faisant usage de la notation utilisée dans l'expression du système de DIRAC rappelé en (V-2) :

$$\eta = \frac{m_0c}{\hbar} \quad (\text{VI-20})$$

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 \quad (\text{VI-21})$$

En résumé, si le système de DIRAC a des solutions, celles-ci doivent nécessairement respecter l'équation de conservation de l'énergie (VI-21).

Il est maintenant possible de montrer qu'une solution sous forme d'une combinaison linéaire de modes stationnaires est solution de l'équation de KLEIN-GORDON rappelée ci-dessous :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (\psi) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} (\psi) \quad (\text{VI-22})$$

Considérons une fonction d'onde ψ représentant l'un quelconque des modes de cavité à trois dimensions exprimés en (VI-3), par exemple pour fixer les idées :

$$\psi(x, y, z, t) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t ct) \quad (\text{VI-23})$$

Par substitution de la fonction ψ de (VI-23) dans (VI-22), on obtient :

$$\left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k_t^2 \right) (\psi) = \eta^2 (\psi) \quad (\text{VI-24})$$

ce qui laisse présager que le système de DIRAC admet des solutions sous la forme de modes stationnaires sous réserve que l'équation de conservation de l'énergie (VI-21) soit satisfaite.

Sur la base de ces hypothèses, on peut montrer que le déterminant du système complet de 64 équations à 64 inconnues a pour déterminant :

$$\left(-k_t^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 \right)^{32} \quad (\text{VI-25})$$

On en conclut de manière définitive que lorsque ce déterminant est nul, c'est à dire lorsque l'équation de conservation de l'énergie est vérifiée, il existe des solutions au système de DIRAC sous la forme d'ondes stationnaires.

VII

Les solutions exactes au système de DIRAC

Le chapitre précédent a permis de montrer qu'il existait des solutions stationnaires à ce système. Il faut, pour être convaincant, être en mesure de les expliciter.

Une analyse détaillée du système montre que lorsque le déterminant est nul, c'est à dire lorsque la condition suivante est réalisée :

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 \quad (\text{VII-1})$$

le choix de l'un des spineurs est arbitraire, et l'autre s'en déduit.

En tenant compte de cette observation, deux tableaux de solutions ont été construits pour les spineurs définis dans les chapitres précédents :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{VII-2})$$

I – Les solutions avec un seul mode excité sur l'une des composantes des spineurs

Le premier tableau (Tableau VII-1) a été élaboré en choisissant le spineur φ et en calculant le spineur χ correspondant pour être solution du système de DIRAC. Afin de balayer l'ensemble des solutions, le choix du spineur φ a été fait en affectant à la composante ψ_0 successivement tous les modes possibles tout en maintenant $\psi_1=0$, puis en affectant à la composante ψ_1 successivement tous les modes possibles tout en maintenant $\psi_0=0$.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	
	SxSySzSt	SxSySzSt	CxSySzSt	CxSySzSt	SxSySzSt	SxSySzSt	CxSyCzCt	CxSyCzCt	SxSySzSt	SxSySzSt	CxSySzSt	CxSySzSt	SxSyCzSt	SxSyCzSt	CxSyCzSt	CxSyCzSt	
ψ_0	a0	b0	c0	d0	e0	f0	g0	h0	i0	j0	k0	l0	m0	n0	o0	p0	
ψ_1	a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1	i1	j1	k1	l1	m1	n1	o1	p1	
$\psi_2(\eta^2-k^2)$	j.e0.η.Kz m0.Kt.Kz b1.η.Ky j.c1.η.Kx -j.1.1.Kt.Ky k1.Kt.Kx	j.f0.η.Kz n0.Kt.Kz -a1.η.Ky j.d1.η.Kx j.i1.Kt.Ky l1.Kt.Kx	j.g0.η.Kz o0.Kt.Kz -j.a1.η.Kx d1.η.Ky -i1.Kt.Kx -j.l1.Kt.Ky	j.h0.η.Kz p0.Kt.Kz -j.b1.η.Kx -c1.η.Ky -j.l.Kt.Kx j.k1.Kt.Ky	-j.a0.η.Kz -i0.Kt.Kz f1.η.Ky j.g1.η.Kx -j.n1.Kt.Ky o1.Kt.Kx	-j.b0.η.Kz -j0.Kt.Kz -e1.η.Ky j.h1.η.Kx j.m1.Kt.Ky p1.Kt.Kx	-j.c0.η.Kz -k0.Kt.Kz -j.e1.η.Kx h1.η.Ky -m1.Kt.Kx -j.p1.Kt.Ky	-j.d0.η.Kz -l0.Kt.Kz -j.f1.η.Kx -g1.η.Ky -n1.Kt.Kx j.o1.Kt.Ky	-e0.Kt.Kz j.m0.η.Kz j.b1.Kt.Ky -c1.Kt.Kx j.l.η.Ky j.k1.η.Kx	-f0.Kt.Kz j.n0.η.Kz -j.a1.Kt.Ky -d1.Kt.Kx -i1.η.Ky j.l1.η.Kx	-g0.Kt.Kz j.o0.η.Kz a1.Kt.Kx j.d1.Kt.Ky -j.i1.η.Kx l1.η.Ky	-h0.Kt.Kz j.p0.η.Kz b1.Kt.Kx -j.c1.Kt.Ky -j.j1.η.Kx -k1.η.Ky	a0.Kt.Kz -j.i0.η.Kz j.f1.Kt.Ky -g1.Kt.Kx n1.η.Ky j.o1.η.Kx	b0.Kt.Kz -j.j0.η.Kz -j.e1.Kt.Ky -h1.Kt.Kx -m1.η.Ky j.p1.η.Kx	c0.Kt.Kz -j.k0.η.Kz e1.Kt.Kx j.h1.Kt.Ky -j.m1.η.Kx p1.η.Ky	d0.Kt.Kz -j.l0.η.Kz f1.Kt.Kx -j.g1.Kt.Ky -j.n1.η.Kx -o1.η.Ky	
$\psi_3(\eta^2-k^2)$	-b0.η.Ky j.c0.η.Kx j.j0.Kt.Ky k0.Kt.Kx -j.e1.η.Kz -m1.Kt.Kz	a0.η.Ky j.d0.η.Kx -j.i0.Kt.Ky l0.Kt.Kx -j.f1.η.Kz -n1.Kt.Kz	-j.a0.η.Kx -d0.η.Ky -i0.Kt.Kx j.l0.Kt.Ky -j.g1.η.Kz -o1.Kt.Kz	-j.b0.η.Kx c0.η.Ky -j0.Kt.Kx -j.k0.Kt.Ky -j.h1.η.Kz -p1.Kt.Kz	-f0.η.Ky j.g0.η.Kx j.n0.Kt.Ky o0.Kt.Kx j.a1.η.Kz i1.Kt.Kz	e0.η.Ky j.h0.η.Kx -j.m0.Kt.Ky p0.Kt.Kx j.b1.η.Kz j.l.Kt.Kz	-h0.η.Ky -m0.Kt.Kx j.p0.Kt.Ky j.c1.η.Kz k1.Kt.Kz	g0.η.Ky -n0.Kt.Kx -j.o0.Kt.Ky j.d1.η.Kz l1.Kt.Kz	-c0.Kt.Kx -j0.η.Ky j.k0.η.Kx e1.Kt.Kz -j.m1.η.Kz	-d0.Kt.Kx i0.η.Ky j.l0.η.Kx f1.Kt.Kz -j.n1.η.Kz	-j.d0.Kt.Ky -j.i0.η.Kx -l0.η.Ky g1.Kt.Kz -j.o1.η.Kz	j.c0.Kt.Ky -j.j0.η.Kx k0.η.Ky h1.Kt.Kz -j.p1.η.Kz	-j.f0.Kt.Ky -g0.Kt.Kx -n0.η.Ky j.o0.η.Kx -a1.Kt.Kz j.i1.η.Kz	-h0.Kt.Kx m0.η.Ky j.p0.η.Kx -b1.Kt.Kz j.j1.η.Kz	-j.h0.Kt.Ky -j.m0.η.Kx -p0.η.Ky -c1.Kt.Kz j.k1.η.Kz	j.g0.Kt.Ky j.j0.Kt.Ky -j.n0.η.Kx o0.η.Ky -d1.Kt.Kz j.l1.η.Kz	f0.Kt.Kx e0.Kt.Kx -j.h0.Kt.Ky j.g0.Kt.Ky -j.n0.η.Kx o0.η.Ky -d1.Kt.Kz j.l1.η.Kz

Tableau VII-1 : Solutions stationnaires de l'équation de Dirac en ψ_2 et ψ_3 en fonction des modes excités en ψ_0 et ψ_1 .

La lecture de ce tableau s'effectue de la manière suivante : ψ_0 et ψ_1 étant choisis comme un mode stationnaire d'amplitude x_0 ou x_1 (x représente l'une quelconque de lettres comprises entre a et p), ψ_2 et ψ_3 sont déterminés en repérant dans chacune des colonnes les modes relatifs aux amplitudes x_0 ou x_1 .

Les fonctions d'onde exprimées dans ces solutions sont sans dimension. D'un point de vue purement mathématique, ces fonctions d'ondes sont définies à une constante multiplicative près, ce qui permet de les exprimer dans différentes unités. Nous utiliserons cette propriété ultérieurement.

Quelques exemples sont proposés afin de se familiariser avec la lecture du tableau (VII-1). Pour une homogénéité de notation, on a posé $x_t = ct$ et ce qui permet d'écrire le terme de phase temporelle sous la forme $\omega t = k_t x_t$.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= a_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= 0 \\ \psi_2 &= a_0 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) - ja_0 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_3 &= a_0 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) + ja_0 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ &+ a_0 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) - ja_0 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \end{aligned} \quad \text{(VII-3)}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= a_1 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_2 &= -a_1 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) - ja_1 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ &+ a_1 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) - ja_1 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_3 &= -a_1 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + ja_1 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \end{aligned} \quad \text{(VII-4)}$$

Exemple 3 :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= b_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{(VII-5)}$$

$$\begin{aligned}\psi_2 &= b_0 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) - j b_0 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_3 &= -b_0 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) - j b_0 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ &+ b_0 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) - j b_0 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t)\end{aligned}$$

Exemple 4 :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= b_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_2 &= b_1 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) + j b_1 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ &+ b_1 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) - j b_1 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_3 &= -b_1 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + j b_1 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t)\end{aligned} \tag{VII-6}$$

Le second tableau (Tableau VII-2) a été élaboré en choisissant le spineur χ et en calculant le spineur φ correspondant pour être solution du système de DIRAC. Comme dans le tableau précédent, le choix du spineur χ a été fait en affectant à la composante ψ_2 successivement tous les modes possibles tout en maintenant $\psi_3=0$, puis en affectant à la composante ψ_3 successivement tous les modes possibles tout en maintenant $\psi_2=0$.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
	SxSySzSt	SxSySzSt	CxSySzSt	CxSySzSt	SxSyCzCt	SxSyCzCt	CxSyCzCt	CxSyCzCt	SxSySzSt	SxSySzSt	CxSySzSt	CxSySzSt	SxSyCzSt	SxSyCzSt	CxSyCzSt	CxSyCzSt
	-j.e2.η.Kz m2.Kt.Kz -b3.η.Ky -j.c3.η.Kx -j.j3.Kt.Ky k3.Kt.Kx	-j.f2.η.Kz n2.Kt.Kz a3.η.Ky -j.d3.η.Kx j.i3.Kt.Ky L3.Kt.Kx	-j.g2.η.Kz o2.Kt.Kz j.a3.η.Kx -d3.η.Ky -i3.Kt.Kx -j.L3.Kt.Ky	-j.h2.η.Kz p2.Kt.Kz j.b3.η.Kx c3.η.Ky -j3.Kt.Kx j.k3.Kt.Ky	j.a2.η.Kz -i2.Kt.Kz -f3.η.Ky -j.g3.η.Kx -j.n3.Kt.Ky o3.Kt.Kx	j.b2.η.Kz -j2.Kt.Kz e3.η.Ky -j.h3.η.Kx j.m3.Kt.Ky p3.Kt.Kx	j.c2.η.Kz -k2.Kt.Kz j.e3.η.Kx -h3.η.Ky -m3.Kt.Kx -j.p3.Kt.Ky	j.d2.η.Kz -L2.Kt.Kz j.f3.η.Kx g3.η.Ky -n3.Kt.Kx j.o3.Kt.Ky	-e2.Kt.Kz -j.m2.η.Kz j.b3.Kt.Ky -c3.Kt.Kx -j3.η.Ky -j.k3.η.Kx	-f2.Kt.Kz -j.n2.η.Kz -j.a3.Kt.Ky -d3.Kt.Kx i3.η.Ky -j.L3.η.Kx	-g2.Kt.Kz -j.o2.η.Kz a3.Kt.Kx j.d3.Kt.Ky j.i3.η.Kx -L3.η.Ky	-h2.Kt.Kz -j.p2.η.Kz b3.Kt.Kx -j.c3.Kt.Ky j.j3.η.Kx k3.η.Ky	a2.Kt.Kz j.i2.η.Kz j.f3.Kt.Ky -g3.Kt.Kx -n3.η.Ky -j.o3.η.Kx	b2.Kt.Kz j.j2.η.Kz -j.e3.Kt.Ky -h3.Kt.Kx m3.η.Ky -j.p3.η.Kx	c2.Kt.Kz j.k2.η.Kz e3.Kt.Kx j.h3.Kt.Ky j.m3.η.Kx -p3.η.Ky	d2.Kt.Kz j.l2.η.Kz f3.Kt.Kx -j.g3.Kt.Ky j.n3.η.Kx o3.η.Ky
ψ_0	b2.η.Ky -j.c2.η.Kx j.j2.Kt.Ky k2.Kt.Kx j.e3.η.Kz -m3.Kt.Kz	-a2.η.Ky -j.d2.η.Kx -j.i2.Kt.Ky L2.Kt.Kx j.f3.η.Kz -n3.Kt.Kz	j.a2.η.Kx d2.η.Ky -i2.Kt.Kx j.L2.Kt.Ky j.g3.η.Kz -o3.Kt.Kz	j.b2.η.Kx -c2.η.Ky -j2.Kt.Kx -j.k2.Kt.Ky j.h3.η.Kz -p3.Kt.Kz	f2.η.Ky -j.g2.η.Kx j.n2.Kt.Ky o2.Kt.Kx -j.a3.η.Kz i3.Kt.Kz	-e2.η.Ky -j.h2.η.Kx -j.m2.Kt.Ky p2.Kt.Kx -j.b3.η.Kz j3.Kt.Kz	j.e2.η.Kx h2.η.Ky -m2.Kt.Kx j.p2.Kt.Ky -j.c3.η.Kz k3.Kt.Kz	j.f2.η.Kx -g2.η.Ky -n2.Kt.Kx -j.o2.Kt.Ky -j.d3.η.Kz L3.Kt.Kz	-j.b2.Kt.Ky -c2.Kt.Kx j2.η.Ky -j.k2.η.Kx e3.Kt.Kz j.m3.η.Kz	j.a2.Kt.Ky -d2.Kt.Kx -i2.η.Ky -j.L2.η.Kx f3.Kt.Kz j.n3.η.Kz	a2.Kt.Kx -j.d2.Kt.Ky j.i2.η.Kx L2.η.Ky g3.Kt.Kz j.o3.η.Kz	b2.Kt.Kx j.c2.Kt.Ky j.j2.η.Kx -k2.η.Ky h3.Kt.Kz j.p3.η.Kz	-j.f2.Kt.Ky -g2.Kt.Kx n2.η.Ky -j.o2.η.Kx -a3.Kt.Kz -j.i3.η.Kz	j.e2.Kt.Ky -h2.Kt.Kx -m2.η.Ky -j.p2.η.Kx -b3.Kt.Kz -j.j3.η.Kz	e2.Kt.Kx -j.h2.Kt.Ky j.m2.η.Kx p2.η.Ky -c3.Kt.Kz -j.k3.η.Kz	f2.Kt.Kx j.g2.Kt.Ky j.n2.η.Kx -o2.η.Ky -d3.Kt.Kz -j.l3.η.Kz
$\psi_2(\eta^2-k^2)$	a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2	i2	j2	k2	L2	m2	n2	o2	p2
$\psi_3(\eta^2-k^2)$	a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3	i3	j3	k3	L3	m3	n3	o3	p3

Tableau VII-2 : Solutions stationnaires de l'équation de Dirac en ψ_0 et ψ_1 en fonction des modes excités en ψ_2 et ψ_3 .

Comme précédemment, quelques exemples sont proposés afin de se familiariser avec la lecture du tableau (VII-2). Il est rappelé qu'on a adopté la notation $x_t = ct$ et ce qui permet d'écrire le terme de phase temporelle $\omega t = k_t x_t$.

Exemple 5 :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= a_2 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + ja_2 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= -a_2 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) + ja_2 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ &+ a_2 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) + ja_2 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_2 &= a_2 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_3 &= 0\end{aligned}\tag{VII-7}$$

Exemple 6 :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= a_3 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) - ja_3 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ &+ a_3 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) + ja_3 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= -a_3 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) - ja_3 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_2 &= 0 \\ \psi_3 &= a_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t)\end{aligned}\tag{VII-8}$$

Exemple 7 :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= -h_2 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) - jh_2 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= h_2 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) - jh_2 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ &- h_2 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) - jh_2 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_2 &= h_2 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \\ \psi_3 &= 0\end{aligned}\tag{VII-9}$$

Exemple 8 :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= -h_3 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + j h_3 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \\
 &- h_3 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) - j h_3 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k_t^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \\
 \psi_1 &= h_3 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) + j h_3 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k_t^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\
 \psi_2 &= 0 \\
 \psi_3 &= h_3 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t)
 \end{aligned} \tag{VII-10}$$

Toute combinaison linéaire des solutions au système de Dirac est encore solution au système. On peut ainsi construire d'autres solutions, dont quelques exemples sont donnés ci-après.

II – Solutions propagatives

Une onde qui se propage peut être vue comme la somme de deux ondes stationnaires, ce qui permet d'élaborer des solutions propagatives à partir des tableaux précédents (Tableau VI – 1 et 2).

On peut par exemple choisir les modes suivants, dans lesquels on rappelle la notation de la phase temporelle $\omega t = k_t x_t$:

$$\cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \tag{VII-11}$$

ce qui donne après mise en facteur :

$$\cos(k_x x) \cos(k_y y) \{ \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \} \tag{VII-12}$$

une onde stationnaire en x, y, et propagative suivant l'axe z :

$$\cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_t x_t - k_z z) \tag{VII-13}$$

La démarche est la suivante : on écrit la solution correspondant à chacun des modes que l'on veut sommer en (VII-11), ce qui donne pour le premier mode :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= h_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \\
 \psi_1 &= 0 \\
 \psi_2 &= j h_0 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) - h_0 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \\
 \psi_3 &= -h_0 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) - j h_0 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \\
 &- h_0 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + j h_0 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t)
 \end{aligned} \tag{VII-14}$$

et pour le second :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= l_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \\
 \psi_1 &= 0 \\
 \psi_2 &= -j l_0 \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) - l_0 \frac{k_t k_z}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) \\
 \psi_3 &= -l_0 \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) + j l_0 \frac{k_t k_y}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) \\
 &+ l_0 \frac{k_t k_x}{\eta^2 - k^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) + j l_0 \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t)
 \end{aligned} \tag{VII-15}$$

On pose ensuite $h_0 = l_0 = A$, on effectue la somme terme à terme des solutions (VII-14) et (VII-15), pour obtenir après réduction la solution propagative suivant z :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= A \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_t x_t - k_z z) \\
 \psi_1 &= 0 \\
 \psi_2 &= j A \frac{\eta k_z}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_t x_t - k_z z) - A \frac{k k_z}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_t x_t - k_z z) \\
 \psi_3 &= -A \frac{\eta k_y}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_t x_t - k_z z) + j A \frac{k k_y}{\eta^2 - k^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_t x_t - k_z z) \\
 &+ A \frac{k k_x}{\eta^2 - k^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_t x_t - k_z z) + j A \frac{\eta k_x}{\eta^2 - k^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_t x_t - k_z z)
 \end{aligned} \tag{VII-15}$$

En réitérant ce processus suivant les deux autres directions, on peut élaborer des solutions propagatives en x, y, z dont un exemple est donné ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= \eta \cos(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) - j k_t \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \\
 \psi_1 &= 0 \\
 \psi_2 &= -j k_z \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \\
 \psi_3 &= k_y \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) - j k_x \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z)
 \end{aligned} \tag{VII-16}$$

III – Autres formes des solutions

Les solutions de base exprimées dans les tableaux 1 et 2 ci-dessus peuvent également être combinées pour obtenir des solutions dont la forme est un peu différente. Deux exemples sont proposés.

Dans le premier exemple, deux modes de la fonction d'onde ψ_1 sont excités, l'un pondéré par (-1), et l'autre pondéré par le terme $(j\eta/k_t)$:

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_1 = -\sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + j \frac{\eta}{k_t} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = j \frac{k_y}{k_t} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + \frac{k_x}{k_t} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = \frac{k_z}{k_t} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

(VII-17)

Dans le second exemple, ce sont deux modes de la fonction d'onde ψ_2 qui sont excités, l'un pondéré par (-1), et l'autre pondéré par le terme $(j\eta/k_t)$:

$$\psi_0 = -\frac{k_z}{k_t} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t)$$

$$\psi_1 = \frac{k_x}{k_t} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) + j \frac{k_y}{k_t} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = j \frac{\eta}{k_t} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_t x_t) - \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = 0$$

(VII-18)

VIII

La dualité onde-corpuscule

Lorsque la particule se présente sous la forme de matière, elle obéit à l'équation de conservation de l'énergie de la relativité restreinte :

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (\text{VIII-1})$$

Lorsque la particule se présente sous forme ondulatoire, son énergie totale et son vecteur d'onde sont tels que :

$$E = \hbar\omega \quad p_x = \hbar k_x \quad p_y = \hbar k_y \quad p_z = \hbar k_z \quad (\text{VIII-2})$$

En introduisant ces relations dans (VIII-1), on en déduit que les grandeurs ondulatoires doivent respecter la relation suivante pour assurer la compatibilité avec la conservation de l'énergie imposée par la relativité restreinte :

$$\hbar^2 \omega^2 = \hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) c^2 + m_0^2 c^4 \quad (\text{VIII-3})$$

Soit encore :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \quad (\text{VIII-4})$$

On retrouve exactement la relation exigée pour obtenir des solutions au système de DIRAC.

On en déduit que cette relation, associée aux relations (VIII-2) exprime la conservation de l'énergie, que la particule se présente sous la forme de matière ou sous la forme ondulatoire.

La relation quantique de conservation de l'énergie :

$$\hbar^2 \omega^2 = \hbar^2 c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + (m_0 c^2)^2 \quad (\text{VIII-5})$$

va jouer un rôle fondamental dans l'analyse des solutions stationnaires qui va être proposée.

Comme pour la relation (VIII-1) issue de la relativité restreinte, nous distinguons trois types d'énergie :

$\hbar\omega$: Energie ondulatoire en référence à la pulsation ω qui apparaît dans cette expression.

$\hbar k_x, \hbar k_y, \hbar k_z$: Energie impulsionnelle suivant les directions x, y, z.

$m_0 c^2$: Energie de masse

Parmi les différentes formes de solution, nous en choisissons une qui permet une interprétation directe du rôle de ces énergies dans les fonctions d'onde du bi-spineur de DIRAC.

Nos prenons comme point de départ l'une des solutions exprimées au chapitre précédent :

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_1 = -\sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + j \frac{\eta}{k_t} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = j \frac{k_y}{k_t} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + \frac{k_x}{k_t} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = \frac{k_z}{k_t} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

(VIII-6)

Dans cette solution, les fonctions d'onde sont sans unité. Mais nous avons, d'un point de vue mathématique, toute liberté de multiplier l'ensemble de ces fonctions d'ondes par une constante, et celle qui semble indiquée dans le cas présent est égale à k_t pour obtenir :

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_1 = -k_t \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + j \eta \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = j k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = k_z \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

(VIII-7)

En substituant l'expression de $\eta = \frac{m_0 c}{\hbar}$, et en multipliant à nouveau toutes les fonctions d'onde par la quantité constante $\hbar c$, on obtient :

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_1 = -\hbar \omega \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + j m_0 c^2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

$$\psi_2 = j \hbar c k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + \hbar c k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

$$\psi_3 = \hbar c k_z \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t)$$

(VIII-8)

Chaque fonction d'onde a désormais la dimension d'une énergie, et on fait le constat que dans cette solution, chaque terme contient une énergie de nature différente, si on considère que deux énergies impulsionnelles dans des directions orthogonales sont nécessairement différenciées.

Si on se place en un point où l'énergie de masse est maximum, l'énergie impulsionnelle est nulle, ce qui revient à poser $\cos(k_x x) = \sin(k_y y) = \sin(k_z z) = 0$. La solution se présente alors sous la forme :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= -\hbar\omega \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + j m_0 c^2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ \psi_2 &= 0 \\ \psi_3 &= 0\end{aligned}\tag{VIII-9}$$

La fonction d'onde ψ_1 mérite une attention particulière : compte tenu des conditions particulières ci-dessus, elle peut se mettre sous la forme :

$$\psi_1 = \left\{ -\hbar\omega \cos(k_t x_t) + j m_0 c^2 \sin(k_t x_t) \right\}\tag{VIII-10}$$

où on reconnaît l'énergie ondulatoire $\hbar\omega$ et l'énergie de masse $m_0 c^2$. Mais le résultat remarquable que nous apprend la relation (VIII-9) est que ces énergies évoluent en quadrature dans le temps, et que lorsque l'une est maximale, l'autre est nulle.

En d'autres termes, lorsque la particule se présente sous sa forme massive totale, elle ne présente aucune énergie ondulatoire, et lorsqu'elle se présente sous sa forme ondulatoire totale, elle ne présente aucune énergie massique. L'énergie présente dans la particule alterne donc entre les formes massiques et ondulatoires à la pulsation ω définie par l'équation de conservation de l'énergie quantique qui pour une énergie impulsionnelle nulle s'écrit simplement :

$$\hbar^2 \omega^2 = (m_0 c^2)^2\tag{VIII-11}$$

On peut supposer que c'est dans cet échange permanent d'énergie que réside le mystère de la dualité onde-corpuscule qui apparaît, au vu de la relation (VIII-10), tantôt sous forme de masse, tantôt sous forme ondulatoire.

Dans le cas général, c'est toujours la fonction d'onde ψ_1 qui porte ces échanges d'énergie. Les termes qui portent l'énergie impulsionnelle sont ceux du deuxième spineur, c'est à dire celui qui représente le comportement de l'antiparticule :

$$\begin{aligned}\psi_2 &= j\hbar c k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + \hbar c k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ \psi_3 &= \hbar c k_z \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t)\end{aligned}\tag{VIII-12}$$

Il est rappelé que ces échanges d'énergie s'effectuent dans le respect de la relation de conservation de l'énergie :

$$\hbar^2 \omega^2 = \hbar^2 c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + (m_0 c^2)^2\tag{VIII-13}$$

Le fait que l'énergie impulsionnelle soit portée par l'antiparticule ne semble pouvoir être interprété qu'en imaginant que particule et anti particule sont indissociables. Sur la base de cette hypothèse, celle des deux qui est détectée lors d'une expérience est celle dont le spineur contient l'énergie de masse dans la solution de DIRAC.

La pulsation minimum ω_0 à laquelle s'effectuent ces échanges d'énergies est donnée par la relation :

$$\omega_0 = \frac{m_0 c^2}{\hbar} \quad (\text{VIII-14})$$

L'application numérique pour un électron donne :

$$\omega_0 = \frac{m_0 c^2}{\hbar} = \frac{(9,11 \cdot 10^{-31})(3 \cdot 10^8)^2}{1,05 \cdot 10^{-34}} \approx 7,8 \cdot 10^{20} \text{ rd/s} \quad (\text{VIII-15})$$

La très grande valeur de cette pulsation pourrait expliquer la grande difficulté à la mettre en évidence du point de vue expérimental.

IX

Les courants de DIRAC(1)

L'expression de ces courants a été donnée dans un des chapitres précédents. Elle est rappelée pour mémoire :

$$\begin{aligned} J^0 &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 \\ J^1 &= \psi_3^* \psi_0 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_0^* \psi_3 \\ J^2 &= j\psi_3^* \psi_0 - j\psi_2^* \psi_1 + j\psi_1^* \psi_2 - j\psi_0^* \psi_3 \\ J^3 &= \psi_2^* \psi_0 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_0^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_3 \end{aligned} \quad (\text{IX-1})$$

Ces courants vérifient l'équation de conservation locale :

$$\frac{\partial J^0}{\partial(ct)} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = 0 \quad (\text{IX-2})$$

I – Les courants de DIRAC pour une solution stationnaire

Un calcul concret de ces courants va être effectué pour une solution stationnaire. Nous choisissons pour cela la solution examinée dans le chapitre précédent :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= -k_t \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + j\eta \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ \psi_2 &= jk_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ \psi_3 &= k_z \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \end{aligned} \quad (\text{IX-3})$$

Les calculs, un peu longs, mais sans difficultés, sont reportés en annexe. On obtient finalement les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} J^0 &= k_t^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \cos^2(k_t x_t) + \eta^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ &+ k_y^2 \sin^2(k_x x) \sin^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) + k_x^2 \cos^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ &+ k_z^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \sin^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \end{aligned} \quad (\text{IX-4})$$

$$J^1 = \begin{pmatrix} \eta k_y \sin^2(k_x x) \sin(2k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ -k_x k_t \sin(2k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin(k_t x_t) \cos(k_t x_t) \end{pmatrix} \quad (IX-5)$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} k_y k_t \sin^2(k_x x) \sin(2k_y y) \cos^2(k_z z) \sin(k_t x_t) \cos(k_t x_t) \\ k_x \eta \sin(2k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \end{pmatrix} \quad (IX-6)$$

$$J^3 = k_t k_z \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \sin(2k_z z) \sin(k_t x_t) \cos(k_t x_t) \quad (IX-7)$$

On peut alors vérifier l'équation de conservation (IX-2). Le détail des calculs est à nouveau reporté en annexe. On obtient :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = k_t \sin(2k_t x_t) \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) (-k_t^2 + \eta^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (IX-8)$$

ce qui, compte tenu de la relation de conservation de l'énergie :

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 \quad (IX-9)$$

conduit bien au résultat attendu :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = 0 \quad (IX-10)$$

Nous proposons de reconsidérer les résultats ci-dessus dans une approche plus physique. Cela conduit à multiplier les fonctions d'onde par la quantité $\hbar c$ et les courants de DIRAC par la quantité $(\hbar c)^2$. Dans cette description, la fonction d'onde se présente sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= -\hbar\omega \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + jm_0 c^2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ \psi_2 &= j\hbar c k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + \hbar c k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \\ \psi_3 &= \hbar c k_z \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \end{aligned} \quad (IX-11)$$

D'un point de vue mathématique, on sait que cette fonction d'onde est définie à une constante multiplicative près, que nous appellerons C, si bien qu'on peut poser dans une forme plus générale :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= C \left\{ -\hbar\omega \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + jm_0 c^2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \right\} \\ \psi_2 &= C \left\{ j\hbar c k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + \hbar c k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \right\} \\ \psi_3 &= C \left\{ \hbar c k_z \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \right\} \end{aligned}$$

(IX-12)

La constante C doit permettre :

1 – De donner à la quantité $\psi\psi^*$ la dimension d'une densité volumique d'énergie.

2 – De garantir que la totalité de l'énergie relative à la particule est confinée dans un parallélépipède rectangle dont la dimension suivant x est comprise entre X_1 et X_2 , suivant y entre Y_1 et Y_2 , et suivant z entre Z_1 et Z_2 , si bien que son volume V est égal à :

$$V = (X_2 - X_1) (Y_2 - Y_1) (Z_2 - Z_1) \quad (IX-13)$$

Le terme J^0 des courants de DIRAC représente la densité volumique d'énergie totale comprise dans la boîte. Elle a pour expression :

$$\begin{aligned} J^0 = & C^2 (\hbar\omega)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \cos^2(k_t x_t) \\ & + C^2 (m_0 c^2)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ & + C^2 (\hbar c k_y)^2 \sin^2(k_x x) \sin^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ & + C^2 (\hbar c k_x)^2 \cos^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ & + C^2 (\hbar c k_z)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \sin^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \end{aligned} \quad (IX-14)$$

Pour obtenir l'énergie totale E contenue dans le parallélépipède, nous devons intégrer sur le volume de ce dernier, soit donc :

$$E = \iiint_V \left\{ \begin{aligned} & C^2 (\hbar\omega)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \cos^2(k_t x_t) \\ & + C^2 (m_0 c^2)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ & + C^2 (\hbar c k_y)^2 \sin^2(k_x x) \sin^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ & + C^2 (\hbar c k_x)^2 \cos^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ & + C^2 (\hbar c k_z)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \sin^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \end{aligned} \right\} dx dy dz \quad (IX-15)$$

Nous ferons l'hypothèse classique que des modes stationnaires s'installent dans des conditions telles que les dimensions de la boîte sont des multiples de la demi-longueur d'onde suivant chacune des direction x, y, z.

$$\begin{aligned} (X_2 - X_1) &= n \frac{\lambda_x}{2} = n \frac{\pi}{k_x} \\ (Y_2 - Y_1) &= m \frac{\lambda_y}{2} = m \frac{\pi}{k_y} \\ (Z_2 - Z_1) &= p \frac{\lambda_z}{2} = p \frac{\pi}{k_z} \end{aligned} \quad (IX-16)$$

où m, n, p sont des entiers relatifs. Dans ces conditions, on a la propriété suivante :

$$\int_{X_1}^{X_2} \sin^2(k_x x) dx = \int_{X_1}^{X_2} \cos^2(k_x x) dx = \frac{X_2 - X_1}{2}$$

$$\int_{Y_1}^{Y_2} \sin^2(k_y y) dy = \int_{Y_1}^{Y_2} \cos^2(k_y y) dy = \frac{Y_2 - Y_1}{2} \quad (\text{IX-17})$$

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \sin^2(k_z z) dz = \int_{Z_1}^{Z_2} \cos^2(k_z z) dz = \frac{Z_2 - Z_1}{2}$$

et l'énergie totale calculée suivant la relation (IX-15) se présente sous la forme :

$$E = C^2 \frac{(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)(Z_2 - Z_1)}{8} \left\{ \begin{array}{l} (\hbar\omega)^2 \cos^2(k_t x_t) \\ + (m_0 c^2)^2 \sin^2(k_t x_t) \\ + (\hbar c k_y)^2 \sin^2(k_t x_t) \\ + (\hbar c k_x)^2 \sin^2(k_t x_t) \\ + (\hbar c k_z)^2 \sin^2(k_t x_t) \end{array} \right\} \quad (\text{IX-18})$$

soit encore :

$$E = C^2 \frac{V}{8} \left\{ (\hbar\omega)^2 \cos^2(k_t x_t) + \left\{ (m_0 c^2)^2 + (\hbar c k_y)^2 + (\hbar c k_x)^2 + (\hbar c k_z)^2 \right\} \sin^2(k_t x_t) \right\} \quad (\text{IX-19})$$

De la relation :

$$(\hbar\omega)^2 = (m_0 c^2)^2 + (\hbar c k_y)^2 + (\hbar c k_x)^2 + (\hbar c k_z)^2 \quad (\text{IX-20})$$

on déduit que l'énergie totale se présente dans la cavité soit sous forme ondulatoire, soit sous la forme d'une combinaison d'énergie de masse et d'énergie impulsionnelle. Ces échanges d'énergie se font en quadrature dans le temps, comme indiqué dans la relation (IX-19) : lorsque l'une est maximale, l'autre est nulle et réciproquement.

Des relations (IX-19) et (IX-20), on déduit :

$$E = C^2 \frac{V}{8} (\hbar\omega)^2 \quad (\text{IX-21})$$

et puisque l'énergie totale E est égale à $\hbar\omega$, cela impose à la constante C la valeur :

$$C = \sqrt{\frac{8}{(\hbar\omega)V}} \quad (\text{IX-22})$$

Après prise en compte de cette constante multiplicative, les courants de DIRAC deviennent homogènes à une densité volumique d'énergie, et l'énergie totale est normalisée à l'énergie de la particule.

La quadridivergence :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = 0 \quad (\text{IX-23})$$

s'interprète de la même manière qu'en électromagnétisme (théorème de POYNTING) ou en relativité générale. Elle exprime le fait que s'il y a une variation d'énergie dans un élément de volume $dV=dx dy dz$ pendant un temps dt , c'est que cette variation a traversé la frontière définie par la surface fermée délimitant l'élément de volume.

II – Les courants de DIRAC pour une solution propagative

Nous choisissons comme exemple une solution propagative en x, y, z :

$$\psi_0 = \eta \cos(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) - j k_t \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \quad (\text{IX-24})$$

$$\psi_1 = 0$$

$$\psi_2 = -j k_z \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

$$\psi_3 = k_y \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) - j k_x \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

Les calculs détaillés en annexe donnent les courants de DIRAC suivant :

$$\begin{aligned} J^0 &= \eta^2 \cos^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) + k_t^2 \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \\ &+ k_x^2 \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) + k_y^2 \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \\ &+ k_z^2 \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \end{aligned} \quad (\text{IX-25})$$

$$\begin{aligned} J^1 &= 2k_y \eta \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \cos(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \\ &+ 2k_x k_t \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \end{aligned} \quad (\text{IX-26})$$

$$\begin{aligned} J^2 &= -2k_x \sin(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \cos(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) + \\ &\left(2k_y k_t \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \right) \end{aligned} \quad (\text{IX-27})$$

$$J^3 = \left(2k_t k_z \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \right) \quad (\text{IX-28})$$

Le courant J^0 présente un intérêt particulier puisqu'il contient, à une constante multiplicative près, l'énergie totale de la particule. Il peut se mettre sous la forme :

$$J^0 = \eta^2 \cos^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) + \left(k_t^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \quad (\text{IX-29})$$

Après multiplication par la constante $(\hbar c)^2$ et normalisation par la constante C^2 définie au paragraphe précédent, il représente la densité volumique totale attachée à la particule.

En utilisant la relation de conservation de l'énergie :

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 \quad (\text{IX-30})$$

il devient :

$$J^0 = k_t^2 - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \left\{ \cos^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) - \sin^2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z) \right\} \quad (\text{IX-31})$$

soit encore :

$$J^0 = k_t^2 - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cos[2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z)] \quad (\text{IX-32})$$

La densité volumique d'énergie totale est donnée par le terme $C^2 (\hbar c k_t)^2$. Elle fluctue autour de cette valeur avec une moyenne spatiale et temporelle de variation qui est nulle.

L'équation de conservation locale de l'énergie :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = 0 \quad (\text{IX-33})$$

donne le résultat suivant :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = (k_t^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 - \eta^2) \sin[2(k_t x_t - k_x x - k_y y - k_z z)] = 0 \quad (\text{IX-34})$$

III – Les courants de DIRAC uniformes

Nous désignerons par courants uniformes, des courants qui ne dépendent ni du temps, ni de l'espace. Il existe des solutions exactes à l'équation de DIRAC qui ont cette propriété, dont un exemple est proposé ci-dessous :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= k_z \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\ \psi_1 &= k_x \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} + j k_y \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\ \psi_2 &= (k_t - \eta) \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\ \psi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IX-35})$$

Parce que les produits des fonctions d'onde par les fonctions d'ondes conjuguées éliminent les exponentielles, on trouve :

$$\begin{aligned} J^0 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + (k_t - \eta)^2 \\ J^1 &= 2(k_t - \eta)k_x \\ J^2 &= 2(k_t - \eta)k_y \\ J^3 &= 2(k_t - \eta)k_z \end{aligned} \quad (\text{IX-36})$$

On observe que la densité volumique d'énergie totale $C^2(\hbar c)^2 J^0$ se présente sous la forme d'une combinaison de toutes les énergies présentes dans la cavité, et qu'elle est uniforme, c'est à dire indépendante du point de l'espace et de l'instant considérés.

Cette excitation de certains modes rendant la densité d'énergie uniforme au sein de la particule ne peut se présenter que dans des conditions bien particulières. On sait en effet que la densité totale d'énergie au sein de la particule est égale à $C^2(\hbar c k_t)^2$, d'où la relation :

$$J^0 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + (\eta - k_t)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 + k_t^2 - 2\eta k_t = k_t^2 \quad (\text{IX-37})$$

En introduisant la relation de conservation de l'énergie, on en déduit :

$$2k_t^2 - 2\eta k_t = k_t^2 \quad (\text{IX-38})$$

soit encore en substituant les expressions de k_t et η :

$$\eta = \frac{m_0 c}{\hbar} = \frac{\omega}{2c}$$

La condition d'obtention d'une densité uniforme s'obtient donc par la relation :

$$\hbar c k_t = 2m_0 c^2 \quad (\text{IX-39})$$

Cette relation exprime le fait qu'il faut une énergie totale interne à la particule égale à deux fois son énergie de masse pour que l'installation de tels modes soit possible.

On peut relier cette observation au fait que tous les modes exprimés dans la solution (IX-35) expriment des échanges d'énergie en quadrature dans le temps et l'espace entre des énergies positives et négatives repérées par le facteur $j=\text{racine}(-1)$, c'est à dire entre la particule et son antiparticule, cette dernière ne pouvant apparaître par sa masse que si l'énergie totale de la particule est au moins égale à deux fois son énergie de masse.

X

Le principe d'indétermination

Ce principe, énoncé par HEISENBERG, lors des balbutiements de la mécanique quantique, a été popularisé sous l'expression : « Il est impossible de connaître à la fois la position et la quantité de mouvement d'une particule ». D'un point de vue physique, il est tout entier contenu dans une relation qui relie l'incertitude sur la position Δx et l'incertitude sur la quantité de mouvement Δp_x d'une particule du monde quantique :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x > \frac{\hbar}{2} \quad (\text{X-1})$$

On peut en déduire une autre formulation en notant que le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire que la variation de la quantité de mouvement Δp_x se fait par le biais d'une action extérieure F_x appelée force, pendant une durée Δt :

$$\Delta p_x = F_x \cdot \Delta t \quad (\text{X-2})$$

On obtient, en notant que l'énergie peut être vue comme le produit d'une force par un déplacement :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta x \cdot F_x \cdot \Delta t = \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{X-3})$$

Ce principe a des fondements théoriques solides, basés sur le fait que les opérateurs position et quantité de mouvement de la mécanique quantique ne commutent pas. Puisque le résultat de la mesure de position et de quantité de mouvement, faite au même endroit et au même instant, dépend de l'ordre dans lequel on effectue cette mesure, cela indique qu'il existe nécessairement une incertitude sur le résultat de ces mesures.

Si on considère maintenant une solution stationnaire exacte de l'équation de DIRAC telle que celle qui a été choisie comme exemple dans les chapitres précédents :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= C \left\{ -\hbar \omega \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_t x_t) + j m_0 c^2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \right\} \\ \psi_2 &= C \left\{ j \hbar c k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) + \hbar c k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_t x_t) \right\} \\ \psi_3 &= C \left\{ \hbar c k_z \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(k_t x_t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{X-4})$$

il y a une question qui vient naturellement à l'esprit. La solution (X-4) ci-dessus est parfaitement déterministe : chaque type d'énergie est connu, en théorie, avec une précision infinie pour une position (x,y,z) et un instant (t) donnés. Cet état de fait semble en contradiction avec le principe d'indétermination de HEISENBERG.

Pour lever cette contradiction, il nous faut en premier lieu admettre sous forme de postulat la conclusion suivante : un observateur ne peut obtenir des informations en provenance d'un système physique que s'il échange de l'énergie avec ce système. Un corolaire de ce postulat est que deux systèmes qui n'échangent pas d'énergie s'ignorent et n'interagissent pas : ils peuvent se dérouler simultanément et au même endroit.

Sur la base de ce postulat, nous examinons, pour la solution (X-4) ci-dessus, la densité volumique d'énergie présente dans la particule qui a été calculée au chapitre précédent :

$$\begin{aligned} J^0 &= C^2 (\hbar\omega)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \cos^2(k_t x_t) \\ &+ C^2 (m_0 c^2)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ &+ C^2 (\hbar c k_y)^2 \sin^2(k_x x) \sin^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ &+ C^2 (\hbar c k_x)^2 \cos^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \\ &+ C^2 (\hbar c k_z)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \sin^2(k_z z) \sin^2(k_t x_t) \end{aligned} \quad (X-5)$$

On y retrouve les différents types d'énergie évoquées dans les chapitres précédents :

- l'énergie totale ou énergie ondulatoire : $\hbar\omega$
- l'énergie de masse : $m_0 c^2$
- les énergies impulsionnelles : $\hbar c k_x, \hbar c k_y, \hbar c k_z$

Plaçons nous en un point de l'espace (x,y,z) où la densité volumique de l'énergie de masse de la particule est maximum. La position de cette énergie de masse peut alors être déterminée avec toute la précision que l'on souhaite, conformément aux règles de la mécanique classique. Pour que cette condition soit réalisée, les coordonnées x,y,z doivent vérifier :

$$\sin^2(k_x x) = \cos^2(k_y y) = \cos^2(k_z z) = 1 \quad (X-6)$$

ce qui impose :

$$\cos^2(k_x x) = \sin^2(k_y y) = \sin^2(k_z z) = 0 \quad (X-7)$$

Il apparaît alors le résultat remarquable suivant : toutes les densités d'énergies impulsionnelles présentes dans la particule sont nulles à cet endroit.

En d'autres termes, si on se place en un point où on peut, par un échange d'énergie avec l'énergie de masse, connaître avec précision la position de la particule, on ne peut obtenir aucune information sur son impulsion en ce point car son énergie impulsionnelle est nulle à cet endroit.

La réciproque s'exprime de la manière suivante : si on se place à un endroit où l'énergie impulsionnelle suivant x est maximum, alors l'énergie de masse et les énergies impulsionnelles

suivant y et suivant z sont nulles. Une propriété analogue est vérifiée par permutation circulaire sur les variables x,y,z.

Ces observations permettent de comprendre comment une théorie complètement déterministe construite sur des solutions stationnaires exactes à l'équation de DIRAC reste compatible avec le principe d'indétermination de HEISENBERG.

La seconde relation d'indétermination (X-3) qui porte sur l'énergie et le temps :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{X-8})$$

donne lieu à une interprétation un peu différente. Elle concerne l'énergie totale ou énergie ondulatoire, dont la densité volumique est donnée en (X-5) :

$$C^2(\hbar\omega)^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(k_z z) \cos^2(k_t x_t) \quad (\text{X-9})$$

Les points de l'espace de coordonnées (x,y,z) où cette énergie est maximum sont les mêmes que ceux où l'énergie de masse est maximum, ils obéissent donc aux relations (X-6), et la densité volumique de l'énergie ondulatoire s'écrit en ces points :

$$C^2(\hbar\omega)^2 \cos^2(k_t x_t) \quad (\text{X-10})$$

Il apparaît que la mesure de cette énergie dépend de l'instant à laquelle elle est effectuée, de la même manière que précédemment les énergies impulsionnelles ou l'énergie de masse dépendaient de l'endroit où elles étaient mesurées (mais pas de l'instant), d'où des relations d'incertitude analogues.

XI

La longueur d'onde de DE BROGLIE

Ce chapitre vise à montrer que les solutions stationnaires de l'équation de DIRAC sont entièrement compatibles avec les conclusions de Louis DE BROGLIE concernant la longueur d'onde associée au mouvement de chaque particule. Il permet de faire le lien entre la description ondulatoire de la mécanique quantique et la description relativiste du mouvement d'une particule.

La particule est supposée avoir une trajectoire rectiligne suivant l'axe Oz à vitesse constante v . Pour autant, elle est susceptible de posséder des modes stationnaires suivant Ox et Oy. On se retrouve dans une situation analogue bien connue en électromagnétisme, qui est celle d'une onde guidée dans un guide d'onde rectangulaire parfaitement conducteur. Les éléments présentés dans ce chapitre ont donc une grande analogie avec ceux qui concernent la propagation guidée.

La relation de conservation de l'énergie impose, à une constante multiplicative près :

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{XI-1})$$

En supposant que la particule se déplace suivant Oz, il est naturel d'examiner la pulsation spatiale k_z déduite de (XI-1) :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - (k_x^2 + k_y^2 + \eta^2) \quad (\text{XI-2})$$

On désigne par pulsation de coupure temporelle, la pulsation ω_c telle que :

$$\omega_c^2 = (k_x^2 + k_y^2 + \eta^2)c^2 \quad (\text{XI-3})$$

Ce qui permet d'exprimer la pulsation spatiale k_z sous la forme :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \quad (\text{XI-4})$$

dont la courbe représentative $k_z = f(\omega)$ à l'allure suivante :

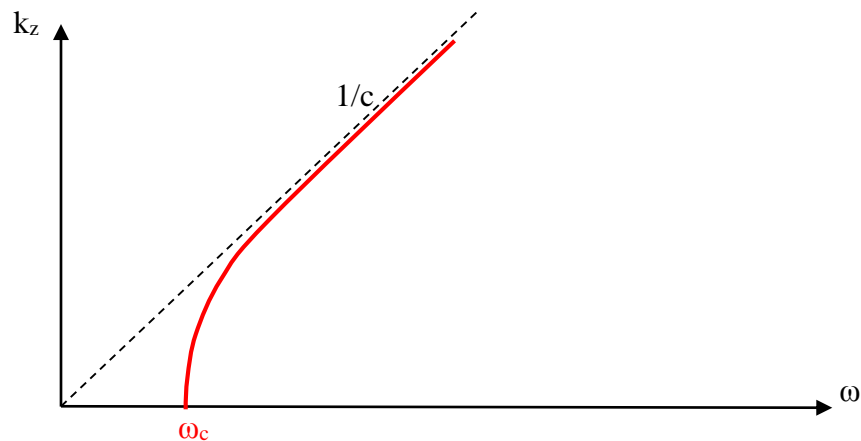


Figure (XI-1) : représentation de la pulsation spatiale en fonction de la pulsation temporelle

Pour une onde qui sera désignée par onde de phase, et qui se propage avec une phase :

$$\varphi = \omega t - k_z z \quad (\text{XI-5})$$

on définit la vitesse de phase comme étant la vitesse de glissement de la phase de l'onde soit :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_z} \quad (\text{XI-6})$$

On peut exprimer cette vitesse de phase en fonction de la pulsation de coupure ω_c définie ci-dessus, au moyen de la relation (XI-4) :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \quad (\text{XI-7})$$

Puisque $\omega > \omega_c$, cette vitesse est supérieure à la vitesse de la lumière. Elle a une réalité physique puisqu'elle représente la vitesse de glissement de la phase, mais elle ne peut représenter la vitesse de déplacement de l'énergie qui doit toujours rester inférieure à c .

Pour ce dernier déplacement, on définit la vitesse de propagation de l'énergie, ou vitesse de groupe v_g par la dérivée de la pulsation temporelle par rapport à la pulsation spatiale :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} \quad (\text{XI-8})$$

On note sur la figure (XI-1) que la vitesse de propagation de l'énergie est nulle pour $\omega = \omega_c$, et qu'elle tend vers c pour $\omega \gg \omega_c$. L'énergie ne peut pas se propager pour $\omega < \omega_c$.

La vitesse de groupe peut s'exprimer au moyen de la pulsation de coupure, comme cela a été fait pour la vitesse de phase. Dans un premier temps, on différencie la relation de conservation de l'énergie (XI-1) pour obtenir :

$$k_z \cdot dk_z = \frac{\omega \cdot d\omega}{c^2} \quad (\text{XI-9})$$

D'où on tire une relation immédiate entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe :

$$\frac{\omega}{k_z} \frac{d\omega}{dk_z} = c^2 \quad \text{soit donc : } v_\phi v_g = c^2 \quad (\text{XI-10})$$

On en déduit :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{k_z}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (\text{XI-11})$$

Pour faire le lien avec la mécanique relativiste de déplacement d'une particule, et suivant en cela Louis DE BROGLIE, nous admettons qu'une particule de masse m_0 au repos présente une énergie ondulatoire à la pulsation ω_c puisqu'il n'y a pas de déplacement d'énergie :

$$\hbar\omega_c = m_0 c^2 \quad (\text{XI-12})$$

Lorsque cette particule est en mouvement à la vitesse v , elle présente un accroissement de son énergie totale donnée par la théorie de la relativité restreinte, dont la représentation ondulatoire va se faire à la pulsation ω :

$$\hbar\omega = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (\text{XI-13})$$

Sur la base des hypothèses (XI-12) et (XI-13), on en déduit que les pulsations ω et ω_c doivent vérifier entre elles les relations :

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (\text{XI-14})$$

De la définition de la vitesse de groupe (XI-11), on déduit :

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 = 1 - \left(\frac{v_g}{c}\right)^2 \quad (\text{XI-15})$$

Il suit de (XI-14) et (XI-15) qu'on peut identifier la vitesse de la masse v à la vitesse de groupe v_g de l'onde de phase attachée à la masse mobile. Cette identification garantit une représentation de l'énergie de masse relativiste et de l'énergie ondulatoire quantique qui soit totalement compatibles.

La dernière étape consiste à exprimer la longueur d'onde λ associée à l'onde de phase de fréquence ν et de pulsation ω qui se déplace à la vitesse v_ϕ . Du paragraphe précédent, on déduit qu'elle est associée, par le biais de sa vitesse de groupe, à une masse m qui se déplace à

la vitesse v . En faisant usage de la relation $v_\phi v_g = c^2$ qui établit une relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe ou vitesse de la particule, on obtient :

$$\lambda = \frac{v_\phi}{v} = v_\phi \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c^2}{v} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c^2}{v} \frac{2\pi}{\frac{m_0 c^2}{\hbar \sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{h}{mv} \quad (\text{XI-16})$$

XII

Equation de DIRAC généralisée

Cette partie traite de l'équation de DIRAC pour une particule chargée placée dans un champ électromagnétique caractérisé par un potentiel scalaire ϕ et un potentiel vecteur (A_x, A_y, A_z). Nous recherchons, comme précédemment des solutions sous la forme de combinaisons linéaires de modes stationnaires susceptibles de s'établir dans une cavité rectangulaire.

Suivant une démarche analogue au chapitre II, le formalisme de DIRAC conduit à rechercher les solutions de la nouvelle équation dans laquelle est introduit le quadri-vecteur potentiel électromagnétique :

$$\left\{ \gamma_0 \left(j \frac{\partial}{\partial x_t} - \frac{q\phi}{c\hbar} \right) + \gamma_1 \left(j \frac{\partial}{\partial x} - \frac{qA_x}{\hbar} \right) + \gamma_2 \left(j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{qA_y}{\hbar} \right) + \gamma_3 \left(j \frac{\partial}{\partial z} - \frac{qA_z}{\hbar} \right) \right\} (\psi) = \frac{m_0 c}{\hbar} (\psi) \quad (\text{XII-1})$$

La fonction d'onde ψ est un bi-spineur à quatre composantes :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{XII-2})$$

Les matrices $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, sont données au chapitre II, et afin d'alléger les expressions, on pose :

$$\eta = \frac{m_0 c}{\hbar} \quad (\text{XII-3})$$

En injectant explicitement les matrices γ_i dans l'équation (XII-3) ci-dessus, on obtient le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned}
 \eta \psi_0 &= j \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} + j \frac{q\phi}{\hbar} \psi_0 \right) + j \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x} + j \frac{qA_x}{\hbar} \psi_3 \right) + \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial y} + j \frac{qA_y}{\hbar} \psi_3 \right) + j \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + j \frac{qA_z}{\hbar} \psi_2 \right) \\
 \eta \psi_1 &= j \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + j \frac{q\phi}{\hbar} \psi_1 \right) + j \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + j \frac{qA_x}{\hbar} \psi_2 \right) - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + j \frac{qA_y}{\hbar} \psi_2 \right) - j \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial z} + j \frac{qA_z}{\hbar} \psi_3 \right) \\
 \eta \psi_2 &= -j \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} + j \frac{q\phi}{\hbar} \psi_2 \right) - j \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + j \frac{qA_x}{\hbar} \psi_1 \right) - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + j \frac{qA_y}{\hbar} \psi_1 \right) - j \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z} + j \frac{qA_z}{\hbar} \psi_0 \right) \\
 \eta \psi_3 &= -j \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} + j \frac{q\phi}{\hbar} \psi_3 \right) - j \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + j \frac{qA_x}{\hbar} \psi_0 \right) + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + j \frac{qA_y}{\hbar} \psi_0 \right) + j \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + j \frac{qA_z}{\hbar} \psi_1 \right)
 \end{aligned}
 \tag{XII-4}$$

soit encore, en faisant apparaître le système différentiel de la particule libre :

$$\begin{aligned}
 \left(\eta + \frac{q\phi}{\hbar c} \right) \psi_0 + \frac{qA_x}{\hbar} \psi_3 - j \frac{qA_y}{\hbar} \psi_3 + \frac{qA_z}{\hbar} \psi_2 &= j \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} + j \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\
 \left(\eta + \frac{q\phi}{\hbar c} \right) \psi_1 + \frac{qA_x}{\hbar} \psi_2 + j \frac{qA_y}{\hbar} \psi_2 - \frac{qA_z}{\hbar} \psi_3 &= j \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \\
 \left(\eta - \frac{q\phi}{\hbar c} \right) \psi_2 - \frac{qA_x}{\hbar} \psi_1 + j \frac{qA_y}{\hbar} \psi_1 - \frac{qA_z}{\hbar} \psi_0 &= -j \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} - j \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \\
 \left(\eta - \frac{q\phi}{\hbar c} \right) \psi_3 - \frac{qA_x}{\hbar} \psi_0 - j \frac{qA_y}{\hbar} \psi_0 + \frac{qA_z}{\hbar} \psi_1 &= -j \frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_1}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{XII-5}$$

A nouveau dans un souci d'allègement de notation, on pose :

$$\eta_t = \frac{q\phi}{\hbar c} \quad \eta_x = \frac{qA_x}{\hbar} \quad \eta_y = \frac{qA_y}{\hbar} \quad \eta_z = \frac{qA_z}{\hbar}
 \tag{XII-6}$$

ce qui conduit au système représentant l'équation de DIRAC :

$$\begin{aligned}
 (\eta + \eta_t) \psi_0 + \eta_x \psi_3 - j \eta_y \psi_3 + \eta_z \psi_2 &= j \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} + j \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\
 (\eta + \eta_t) \psi_1 + \eta_x \psi_2 + j \eta_y \psi_2 - \eta_z \psi_3 &= j \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \\
 (\eta - \eta_t) \psi_2 - \eta_x \psi_1 + j \eta_y \psi_1 - \eta_z \psi_0 &= -j \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} - j \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \\
 (\eta - \eta_t) \psi_3 - \eta_x \psi_0 - j \eta_y \psi_0 + \eta_z \psi_1 &= -j \frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_1}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{XII-7}$$

Il s'agit probablement d'un des systèmes différentiels les plus complexes de la physique après les équations tensorielles de la gravitation.

On peut tenter de rechercher les fonctions d'onde ψ_i ($i=0,1,2,3$) solutions de ce système comme cela a été fait au chapitre VI, sous la forme :

$$\psi_i = \left\{ a_i S_x S_y S_z + b_i S_x C_y S_z + c_i C_x S_y S_z + d_i C_x C_y S_z + e_i S_x S_y C_z + f_i S_x C_y C_z + g_i C_x S_y C_z + h_i C_x C_y C_z \right\} C_t + \left\{ i_i S_x S_y S_z + j_i S_x C_y S_z + k_i C_x S_y S_z + l_i C_x C_y S_z + m_i S_x S_y C_z + n_i S_x C_y C_z + o_i C_x S_y C_z + p_i C_x C_y C_z \right\} S_t \quad (\text{XII-8})$$

avec la notation habituelle :

$$S_x = \sin(k_x x) \quad S_y = \sin(k_y y) \quad S_z = \sin(k_z z) \quad S_t = \sin(k_t ct) \quad (\text{XII-9})$$

$$C_x = \cos(k_x x) \quad C_y = \cos(k_y y) \quad C_z = \cos(k_z z) \quad C_t = \cos(k_t ct) \quad (\text{XII-10})$$

En reprenant la méthode exposée au chapitre VI, on est conduit à formuler un système homogène de 64 équations à 64 inconnues qui est décrit ci-dessous :

$$\begin{aligned} -jka_0 - jk_x k_3 - k_y j_3 - jk_z m_2 - (\eta + \eta_t) i_0 + (\eta_x - j\eta_y) i_3 + \eta_z i_2 &= 0 \\ -jkb_0 - jk_x l_3 + k_y i_3 - jk_z n_2 - (\eta + \eta_t) j_0 + (\eta_x - j\eta_y) j_3 + \eta_z j_2 &= 0 \\ -jkc_0 + jk_x i_3 - k_y l_3 - jk_z o_2 - (\eta + \eta_t) k_0 + (\eta_x - j\eta_y) k_3 + \eta_z k_2 &= 0 \\ -jkd_0 + jk_x j_3 + k_y k_3 - jk_z p_2 - (\eta + \eta_t) l_0 + (\eta_x - j\eta_y) l_3 + \eta_z l_2 &= 0 \\ -jke_0 - jk_x o_3 - k_y n_3 + jk_z i_2 - (\eta + \eta_t) m_0 + (\eta_x - j\eta_y) m_3 + \eta_z m_2 &= 0 \\ -jkf_0 - jk_x p_3 + k_y m_3 + jk_z j_2 - (\eta + \eta_t) n_0 + (\eta_x - j\eta_y) n_3 + \eta_z n_2 &= 0 \\ -jkg_0 + jk_x m_3 - k_y p_3 + jk_z k_2 - (\eta + \eta_t) o_0 + (\eta_x - j\eta_y) o_3 + \eta_z o_2 &= 0 \\ -jkh_0 + jk_x n_3 + k_y o_3 + jk_z l_2 - (\eta + \eta_t) p_0 + (\eta_x - j\eta_y) p_3 + \eta_z p_2 &= 0 \\ jki_0 - jk_x c_3 - k_y b_3 - jk_z e_2 - (\eta + \eta_t) a_0 + (\eta_x - j\eta_y) a_3 + \eta_z a_2 &= 0 \\ jkj_0 - jk_x d_3 + k_y a_3 - jk_z f_2 - (\eta + \eta_t) b_0 + (\eta_x - j\eta_y) b_3 + \eta_z b_2 &= 0 \\ jkk_0 + jk_x a_3 - k_y d_3 - jk_z g_2 - (\eta + \eta_t) c_0 + (\eta_x - j\eta_y) c_3 + \eta_z c_2 &= 0 \\ jkl_0 + jk_x b_3 + k_y c_3 - jk_z h_2 - (\eta + \eta_t) d_0 + (\eta_x - j\eta_y) d_3 + \eta_z d_2 &= 0 \\ jkm_0 - jk_x g_3 - k_y f_3 + jk_z a_2 - (\eta + \eta_t) e_0 + (\eta_x - j\eta_y) e_3 + \eta_z e_2 &= 0 \\ jkn_0 - jk_x h_3 + k_y e_3 + jk_z b_2 - (\eta + \eta_t) f_0 + (\eta_x - j\eta_y) f_3 + \eta_z f_2 &= 0 \\ jko_0 + jk_x e_3 - k_y h_3 + jk_z c_2 - (\eta + \eta_t) g_0 + (\eta_x - j\eta_y) g_3 + \eta_z g_2 &= 0 \\ jkp_0 + jk_x f_3 + k_y g_3 + jk_z d_2 - (\eta + \eta_t) h_0 + (\eta_x - j\eta_y) h_3 + \eta_z h_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{XII-11})$$

$$\begin{aligned}
& -jka_1 - jk_x k_2 + k_y j_2 + jk_z m_3 - (\eta + \eta_t) i_1 + (\eta_x + j\eta_y) i_2 - \eta_z i_3 = 0 \\
& -jkb_1 - jk_x l_2 - k_y i_2 + jk_z n_3 - (\eta + \eta_t) j_1 + (\eta_x + j\eta_y) j_2 - \eta_z j_3 = 0 \\
& -jkc_1 + jk_x i_2 + k_y l_2 + jk_z o_3 - (\eta + \eta_t) k_1 + (\eta_x + j\eta_y) k_2 - \eta_z k_3 = 0 \\
& -jkd_1 + jk_x j_2 - k_y k_2 + jk_z p_3 - (\eta + \eta_t) l_1 + (\eta_x + j\eta_y) l_2 - \eta_z l_3 = 0 \\
& -jke_1 - jk_x o_2 + k_y n_2 - jk_z i_3 - (\eta + \eta_t) m_1 + (\eta_x + j\eta_y) m_2 - \eta_z m_3 = 0 \\
& -jkf_1 - jk_x p_2 - k_y m_2 - jk_z j_3 - (\eta + \eta_t) n_1 + (\eta_x + j\eta_y) n_2 - \eta_z n_3 = 0 \\
& -jkg_1 + jk_x m_2 + k_y p_2 - jk_z k_3 - (\eta + \eta_t) o_1 + (\eta_x + j\eta_y) o_2 - \eta_z o_3 = 0 \\
& -jkh_1 + jk_x n_2 - k_y o_2 - jk_z l_3 - (\eta + \eta_t) p_1 + (\eta_x + j\eta_y) p_2 - \eta_z p_3 = 0 \\
& jki_1 - jk_x c_2 + k_y b_2 + jk_z e_3 - (\eta + \eta_t) a_1 + (\eta_x + j\eta_y) a_2 - \eta_z a_3 = 0 \\
& jkj_1 - jk_x d_2 - k_y a_2 + jk_z f_3 - (\eta + \eta_t) b_1 + (\eta_x + j\eta_y) b_2 - \eta_z b_3 = 0 \\
& jkk_1 + jk_x a_2 + k_y d_2 + jk_z g_3 - (\eta + \eta_t) c_1 + (\eta_x + j\eta_y) c_2 - \eta_z c_3 = 0 \\
& jkl_1 + jk_x b_2 - k_y c_2 + jk_z h_3 - (\eta + \eta_t) d_1 + (\eta_x + j\eta_y) d_2 - \eta_z d_3 = 0 \\
& jkm_1 - jk_x g_2 + k_y f_2 - jk_z a_3 - (\eta + \eta_t) e_1 + (\eta_x + j\eta_y) e_2 - \eta_z e_3 = 0 \\
& jkn_1 - jk_x h_2 - k_y e_2 - jk_z b_3 - (\eta + \eta_t) f_1 + (\eta_x + j\eta_y) f_2 - \eta_z f_3 = 0 \\
& jko_1 + jk_x e_2 + k_y h_2 - jk_z c_3 - (\eta + \eta_t) g_1 + (\eta_x + j\eta_y) g_2 - \eta_z g_3 = 0 \\
& jkp_1 + jk_x f_2 - k_y g_2 - jk_z d_3 - (\eta + \eta_t) h_1 + (\eta_x + j\eta_y) h_2 - \eta_z h_3 = 0
\end{aligned} \tag{XII-12}$$

$$\begin{aligned}
& jka_2 + jk_x k_1 + k_y j_1 + jk_z m_0 - (\eta + \eta_t) i_2 + (\eta_x - j\eta_y) i_1 + \eta_z i_0 = 0 \\
& jkb_2 + jk_x l_1 - k_y i_1 + jk_z n_0 - (\eta + \eta_t) j_2 + (\eta_x - j\eta_y) j_1 + \eta_z j_0 = 0 \\
& jkc_2 - jk_x i_1 + k_y l_1 + jk_z o_0 - (\eta + \eta_t) k_2 + (\eta_x - j\eta_y) k_1 + \eta_z k_0 = 0 \\
& jkd_2 - jk_x j_1 - k_y k_1 + jk_z p_0 - (\eta + \eta_t) l_2 + (\eta_x - j\eta_y) l_1 + \eta_z l_0 = 0 \\
& jke_2 + jk_x o_1 + k_y n_1 - jk_z i_0 - (\eta + \eta_t) m_2 + (\eta_x - j\eta_y) m_1 + \eta_z m_0 = 0 \\
& jkf_2 + jk_x p_1 - k_y m_1 - jk_z j_0 - (\eta + \eta_t) n_2 + (\eta_x - j\eta_y) n_1 + \eta_z n_0 = 0 \\
& jkg_2 - jk_x m_1 + k_y p_1 - jk_z k_0 - (\eta + \eta_t) o_2 + (\eta_x - j\eta_y) o_1 + \eta_z o_0 = 0 \\
& jkh_2 - jk_x n_1 - k_y o_1 - jk_z l_0 - (\eta + \eta_t) p_2 + (\eta_x - j\eta_y) p_1 + \eta_z p_0 = 0 \\
& -jki_2 + jk_x c_1 + k_y b_1 + jk_z e_0 - (\eta + \eta_t) a_2 + (\eta_x - j\eta_y) a_1 + \eta_z a_0 = 0 \\
& -jkj_2 + jk_x d_1 - k_y a_1 + jk_z f_0 - (\eta + \eta_t) b_2 + (\eta_x - j\eta_y) b_1 + \eta_z b_0 = 0 \\
& -jkk_2 - jk_x a_1 + k_y d_1 + jk_z g_0 - (\eta + \eta_t) c_2 + (\eta_x - j\eta_y) c_1 + \eta_z c_0 = 0 \\
& -jkl_2 - jk_x b_1 - k_y c_1 + jk_z h_0 - (\eta + \eta_t) d_2 + (\eta_x - j\eta_y) d_1 + \eta_z d_0 = 0 \\
& -jkm_2 + jk_x g_1 + k_y f_1 - jk_z a_0 - (\eta + \eta_t) e_2 + (\eta_x - j\eta_y) e_1 + \eta_z e_0 = 0 \\
& -jkn_2 + jk_x h_1 - k_y e_1 - jk_z b_0 - (\eta + \eta_t) f_2 + (\eta_x - j\eta_y) f_1 + \eta_z f_0 = 0 \\
& -jko_2 - jk_x e_1 + k_y h_1 - jk_z c_0 - (\eta + \eta_t) g_2 + (\eta_x - j\eta_y) g_1 + \eta_z g_0 = 0 \\
& -jkp_2 - jk_x f_1 - k_y g_1 - jk_z d_0 - (\eta + \eta_t) h_2 + (\eta_x - j\eta_y) h_1 + \eta_z h_0 = 0
\end{aligned} \tag{XII-13}$$

$$\begin{aligned}
& jka_3 + jk_x k_0 - k_y j_0 - jk_z m_1 - (\eta + \eta_t) i_3 + (\eta_x + j\eta_y) i_0 - \eta_z i_1 = 0 \\
& jkb_3 + jk_x l_0 + k_y i_0 - jk_z n_1 - (\eta + \eta_t) j_3 + (\eta_x + j\eta_y) j_0 - \eta_z j_1 = 0 \\
& jkc_3 - jk_x i_0 - k_y l_0 - jk_z o_1 - (\eta + \eta_t) k_3 + (\eta_x + j\eta_y) k_0 - \eta_z k_1 = 0 \\
& jkd_3 - jk_x j_0 + k_y k_0 - jk_z p_1 - (\eta + \eta_t) l_3 + (\eta_x + j\eta_y) l_0 - \eta_z l_1 = 0 \\
& jke_3 + jk_x o_0 - k_y n_0 + jk_z i_1 - (\eta + \eta_t) m_3 + (\eta_x + j\eta_y) m_0 - \eta_z m_1 = 0 \\
& jkf_3 + jk_x p_0 + k_y m_0 + jk_z j_1 - (\eta + \eta_t) n_3 + (\eta_x + j\eta_y) n_0 - \eta_z n_1 = 0 \\
& jkg_3 - jk_x m_0 - k_y p_0 + jk_z k_1 - (\eta + \eta_t) o_3 + (\eta_x + j\eta_y) o_0 - \eta_z o_1 = 0 \\
& jkh_3 - jk_x n_0 + k_y o_0 + jk_z l_1 - (\eta + \eta_t) p_3 + (\eta_x + j\eta_y) p_0 - \eta_z p_1 = 0 \\
& - jki_3 + jk_x c_0 - k_y b_0 - jk_z e_1 - (\eta + \eta_t) a_3 + (\eta_x + j\eta_y) a_0 - \eta_z a_1 = 0 \\
& - jkj_3 + jk_x d_0 + k_y a_0 - jk_z f_1 - (\eta + \eta_t) b_3 + (\eta_x + j\eta_y) b_0 - \eta_z b_1 = 0 \\
& - jkk_3 - jk_x a_0 - k_y d_0 - jk_z g_1 - (\eta + \eta_t) c_3 + (\eta_x + j\eta_y) c_0 - \eta_z c_1 = 0 \\
& - jkl_3 - jk_x b_0 + k_y c_0 - jk_z h_1 - (\eta + \eta_t) d_3 + (\eta_x + j\eta_y) d_0 - \eta_z d_1 = 0 \\
& - jkm_3 + jk_x g_0 - k_y f_0 + jk_z a_1 - (\eta + \eta_t) e_3 + (\eta_x + j\eta_y) e_0 - \eta_z e_1 = 0 \\
& - jkn_3 + jk_x h_0 + k_y e_0 + jk_z b_1 - (\eta + \eta_t) f_3 + (\eta_x + j\eta_y) f_0 - \eta_z f_1 = 0 \\
& - jko_3 - jk_x e_0 - k_y h_0 + jk_z c_1 - (\eta + \eta_t) g_3 + (\eta_x + j\eta_y) g_0 - \eta_z g_1 = 0 \\
& - jkp_3 - jk_x f_0 + k_y g_0 + jk_z d_1 - (\eta + \eta_t) h_3 + (\eta_x + j\eta_y) h_0 - \eta_z h_1 = 0
\end{aligned}$$

(XII-14)

La première idée consiste à prendre appui sur les résultats du chapitre VI, c'est à dire à affecter un mode à ψ_0 , et à rechercher les modes qui sont solutions du système pour les fonctions d'ondes ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Un travail mathématique long et fastidieux ne permettra pas d'exprimer une solution exacte pour ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Ce travail ne permettra pas non plus de montrer qu'une telle solution n'existe pas, et donc le problème reste ouvert.

La progression vers une solution possible viendra d'une analyse physique de ce système.

En tout premier lieu, il faut que le déterminant de ce système soit nul. Nous conjecturons que la condition de nullité est fournie par l'équation de conservation de l'énergie.

Il faut donc établir cette nouvelle équation de conservation en fonction de l'énergie apportée à la particule chargée par la présence du champ électromagnétique. Cette énergie est de deux sortes :

- l'énergie apportée par le potentiel scalaire ϕ permet d'augmenter l'énergie cinétique de la particule chargée. La relativité restreinte nous suggère que cet accroissement d'énergie est engrangé sous la forme d'énergie de masse.
- L'énergie apportée par le potentiel vecteur (A_x, A_y, A_z) ne permet que de faire changer la direction de la trajectoire de la particule sans apport d'énergie cinétique : il s'agit donc d'une énergie purement impulsionnelle.

En dehors de la présence du champ électromagnétique, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$-k_t^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \eta^2 = 0 \quad (\text{XII-15})$$

Les apports d'énergie du champ électromagnétique dans cette relation peuvent être introduits de multiples manières sans qu'il soit trivial de faire un choix à priori parmi toutes les formulations possibles. Une réflexion approfondie a permis de conclure que la forme correcte est la suivante :

$$-(k_t + \eta_t)^2 + (k_x + \eta_x)^2 + (k_y + \eta_y)^2 + (k_z + \eta_z)^2 + \eta^2 = 0 \quad (\text{XII-16})$$

On notera en particulier que l'énergie cinétique relative à η_t apportée par le potentiel scalaire ϕ n'est pas associée à l'énergie de masse relative à η comme on aurait pu le penser de manière intuitive.

La justification rigoureuse provient du fait que la somme du quadrivecteur onde et du quadrivecteur potentiel électromagnétique donne également un quadrivecteur :

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ k_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \\ \eta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x + \eta_x \\ k_y + \eta_y \\ k_z + \eta_z \\ k_t + \eta_t \end{pmatrix} \quad (\text{XII-17})$$

Et puisque la pseudo norme du quadrivecteur somme est une constante, cela conduit directement à l'équation de conservation de l'énergie (XII-16).

Dès lors, nous conjecturons que le déterminant du système global de 64 équations à 64 inconnues est nul lorsque l'équation de conservation de l'énergie (XII-16) est vérifiée.

Cela ne fournit pas pour autant de piste permettant d'avancer vers une solution du système d'équation de DIRAC généralisé à l'interaction électromagnétique.

Une analyse détaillée du système de DIRAC reportée en annexe permet toutefois d'entrevoir que si on excite sur une fonction d'onde des modes en quadrature dans le temps pour le potentiel scalaire et en quadrature dans l'espace pour le potentiel vecteur, on parvient à obtenir des solutions du système relative aux modes stationnaires (XII-11,12,13,14). Les modes en quadrature doivent de plus exprimer des échanges d'énergie entre énergie positive et énergie négative ce qui introduit donc la quantité $j = \text{racine}(-1)$ entre les expressions de ces modes.

En résumé, la présence du champ électromagnétique n'excite plus les fonctions d'ondes sous la forme de modes stationnaires indépendants, mais sous la forme de combinaisons de modes associés en quadrature dans le temps et dans l'espace, et qui traduisent des échanges d'énergie entre matière et anti-matière.

Ces modes vont donc se présenter sous la forme de combinaisons de fonctions de x, y, z, t , d'amplitude A qui ont l'expression suivante :

$$A \exp(\pm j k_x x) \exp(\pm j k_y y) \exp(\pm k_z z) \exp(\pm j k_t x_t) = A \exp\{j(\pm k_t x_t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z)\} \quad (\text{XII-18})$$

Les signes + et – présents dans cette expression vont affecter la relation de conservation de l'énergie qui doit les prendre en compte sous la forme :

$$-(\eta_t \pm k_t)^2 + (\eta_x \pm k_x)^2 + (\eta_y \pm k_y)^2 + (\eta_z \pm k_z)^2 + \eta^2 = 0 \quad (\text{XII-19})$$

Ces considérations sont illustrées sur l'exemple particulier suivant, qui correspond à une solution exacte de l'équation de DIRAC généralisée à l'interaction électromagnétique.

$$\begin{aligned} \psi_0 &= -(k_z + \eta_z) \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\ \psi_1 &= -(k_x + \eta_x) \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} - j(k_y + \eta_y) \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\ \psi_2 &= (\eta - k_t + \eta_t) \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\ \psi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{XII-20})$$

Cette solution est associée à l'équation de conservation de l'énergie :

$$-(\eta_t - k_t)^2 + (\eta_x + k_x)^2 + (\eta_y + k_y)^2 + (\eta_z + k_z)^2 + \eta^2 = 0 \quad (\text{XII-21})$$

Il convient pour être convaincant de détailler les vérifications de ces propriétés. Nous omettrons dans les calculs ci-dessous les exponentielles qui viennent en facteur de tous les termes.

Première équation du système de DIRAC généralisé :

$$(\eta + \eta_t)\psi_0 + \eta_x \psi_3 - j\eta_y \psi_3 + \eta_z \psi_2 = j \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} + j \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \quad (\text{XII-22})$$

$$-(\eta + \eta_t)(k_z + \eta_z) + 0 + 0 + \eta_z(\eta - k_t + \eta_t) = -(k_z + \eta_z)k_t + 0 + 0 - (\eta - k_t + \eta_t)k_z \quad (\text{XII-23})$$

Deuxième équation du système de DIRAC généralisé :

$$(\eta + \eta_t)\psi_1 + \eta_x \psi_2 + j\eta_y \psi_2 - \eta_z \psi_3 = j \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + j \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \quad (\text{XII-24})$$

$$\begin{aligned} (\eta + \eta_t)\{-(k_x + \eta_x) - j(k_y + \eta_y)\} + \eta_x(\eta - k_t + \eta_t) + j\eta_y(\eta - k_t + \eta_t) - 0 = \\ k_t\{-(k_x + \eta_x) - j(k_y + \eta_y)\} - k_x(\eta - k_t + \eta_t) - jk_y(\eta - k_t + \eta_t) - 0 \end{aligned} \quad (\text{XII-25})$$

Troisième équation du système de DIRAC généralisé :

$$(\eta - \eta_t)\psi_2 - \eta_x \psi_1 + j\eta_y \psi_1 - \eta_z \psi_0 = -j \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} - j \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - j \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \quad (\text{XII-26})$$

$$\begin{aligned} (\eta - \eta_t)(\eta - k_t + \eta_t) + \eta_x\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} - j\eta_y\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} + \eta_z(k_z + \eta_z) = \\ -(\eta - k_t + \eta_t)k_t - k_x\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} + jk_y\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} - k_z(k_z + \eta_z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{XII-27})$$

Les termes imaginaires s'annulent, et il reste :

$$-(\eta_t - k_t)^2 + (\eta_x + k_x)^2 + (\eta_y + k_y)^2 + (\eta_z + k_z)^2 + \eta^2 = 0 \quad (\text{XII-28})$$

soit donc l'équation de conservation de l'énergie.

Quatrième équation du système de DIRAC généralisé :

$$(\eta - \eta_t)\psi_3 - \eta_x\psi_0 - j\eta_y\psi_0 + \eta_z\psi_1 = -j\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - j\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + j\frac{\partial\psi_1}{\partial z} \quad (\text{XII-29})$$

$$\begin{aligned} 0 + \eta_x(k_z + \eta_z) + j\eta_y(k_z + \eta_z) - \eta_z\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} = \\ 0 - k_x(k_z + \eta_z) - jk_y(k_z + \eta_z) + k_z\{(k_x + \eta_x) + j(k_y + \eta_y)\} \end{aligned} \quad (\text{XII-30})$$

La vérification que la solution (XII-20) est bien une solution exacte au système de DIRAC généralisé est achevée.

On pourrait penser que sur la base de la solution exacte (XII-20), il est possible de construire des solutions stationnaires purement réelles en sommant par exemple deux solutions en $\exp(j\omega t)$ et $\exp(-j\omega t)$, ce qui viendrait en contradiction avec l'affirmation précédente sur l'impossibilité de faire apparaître de telles solutions dans le système de DIRAC généralisé.

En fait, il est impossible de sommer ces solutions, car elles sont relatives chacune à une équation de conservation de l'énergie différente, et donc à une condition de nullité du déterminant du système différente.

On peut par contre mixer des modes stationnaires réels et des modes stationnaires complexes, comme le montre la solution exacte ci-dessous, dans laquelle la présence du champ électromagnétique est réduite au potentiel scalaire :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= -(\eta - k_t - \eta_t)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\exp(jk_t x_t) \\ \psi_2 &= -k_y \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\exp(jk_t x_t) + jk_x \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\exp(jk_t x_t) \\ \psi_3 &= jk_z \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\exp(jk_t x_t) \end{aligned} \quad (\text{XII-31})$$

Elle est associée à l'équation de conservation de l'énergie :

$$(k_t + \eta_t)^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 - \eta^2 = 0 \quad (\text{XII-32})$$

XIII

Les courants de DIRAC(2)

Les courants de DIRAC relatifs aux solutions de l'équation généralisée à la présence d'un champ électromagnétique possèdent une propriété remarquable qui va être illustrée sur l'exemple de solution proposée au chapitre précédent et rappelé pour mémoire :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= -(k_z + \eta_z) \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\ \psi_1 &= -(k_x + \eta_x) \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} - j(k_y + \eta_y) \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\ \psi_2 &= (\eta - k_t + \eta_t) \exp \{j(-k_t x_t + k_x x + k_y y + k_z z)\} \\ \psi_3 &= 0\end{aligned}\tag{XIII-1}$$

L'expression de ces courants est rappelée ci-dessous. Multipliés par une constante adéquate, ils deviennent homogènes à une densité volumique d'énergie, et le terme J^0 représente la densité volumique d'énergie totale.

$$\begin{aligned}J^0 &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 \\ J^1 &= \psi_3^* \psi_0 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_0^* \psi_3 \\ J^2 &= j\psi_3^* \psi_0 - j\psi_2^* \psi_1 + j\psi_1^* \psi_2 - j\psi_0^* \psi_3 \\ J^3 &= \psi_2^* \psi_0 - \psi_3^* \psi_1 + \psi_0^* \psi_2 - \psi_1^* \psi_3\end{aligned}\tag{XIII-2}$$

De plus, ces courants doivent vérifier l'équation de conservation locale de l'énergie :

$$\frac{\partial J^0}{\partial x_t} + \frac{\partial J^1}{\partial x} + \frac{\partial J^2}{\partial y} + \frac{\partial J^3}{\partial z} = 0\tag{XIII-3}$$

On obtient, de manière assez simple, à partir des fonctions d'onde (XIII-1), et des expressions des courants (XIII-2) :

$$\begin{aligned}J^0 &= (k_x + \eta_x)^2 + (k_z + \eta_z)^2 + (k_z + \eta_z)^2 + (\eta - k_t + \eta_t)^2 \\ J^1 &= -2(\eta - k_t + \eta_t)(k_x + \eta_x) \\ J^2 &= -2(\eta - k_t + \eta_t)(k_y + \eta_y) \\ J^3 &= -2(\eta - k_t + \eta_t)(k_z + \eta_z)\end{aligned}\tag{XIII-4}$$

Le résultat remarquable qui apparaît dans l'expression de ces courants est qu'ils ne dépendent ni du temps, ni de l'espace. En d'autres termes, la densité volumique d'énergie totale représentée par J^0 est uniforme à l'intérieur du parallélépipède qui contient l'énergie de la particule.

Ce résultat présente une grande analogie avec l'exemple d'une particule qui possède deux fois son énergie de masse qui est présenté au chapitre VI, avec toutefois une différence sujette aux hypothèses formulées lors de l'élaboration des solutions en présence de champ électromagnétique.

Si on admet qu'il n'existe pas de solution purement réelle pour les fonctions d'ondes obtenues en présence d'un champ électromagnétique, ce régime particulier de densité d'énergie uniforme au sein de la particule est imposé par la présence du champ électromagnétique, alors que rien ne l'impose pour la particule libre.

La constante de normalisation C est obtenue en écrivant que J^0 représente la densité volumique d'énergie totale de la particule placée dans un champ électromagnétique, soit donc pour l'énergie totale comprise dans le volume V qui délimite la particule :

$$E = (\hbar^2 c^2) (k_t + \eta_t)^2 V \quad (\text{XIII-5})$$

En égalant cette relation avec (XIII-4) multipliée par la constante de normalisation C^2 , on obtient :

$$E = C^2 \left\{ (k_x + \eta_x)^2 + (k_y + \eta_y)^2 + (k_z + \eta_z)^2 + (\eta - k_t + \eta_t)^2 \right\} = (\hbar^2 c^2) (k_t + \eta_t)^2 V \quad (\text{XIII-6})$$

soit encore en introduisant l'équation de conservation de l'énergie rappelée pour mémoire :

$$(k_t + \eta_t)^2 = (k_x + \eta_x)^2 + (k_y + \eta_y)^2 + (k_z + \eta_z)^2 + \eta^2 \quad (\text{XIII-7})$$

$$C^2 = \frac{(\hbar^2 c^2) (k_t + \eta_t)^2 V}{(k_t + \eta_t)^2 - \eta^2 + (\eta - k_t + \eta_t)^2} \quad (\text{XIII-8})$$

XIV

Conclusion de la deuxième partie

On sait que les solutions à l'équation de DIRAC qui correspondent à la réalité des observations sont des solutions élaborées à l'aide de modes sphériques et dans ce contexte, on peut se demander quel est l'intérêt de s'appesantir sur des solutions obtenues en coordonnées cartésiennes.

Il apparaît que les solutions cartésiennes sont plus rapidement atteignables, et qu'on peut en tirer des informations précieuses sur le comportement de l'énergie dont la particule est constituée.

Sur la base d'une équation de conservation de l'énergie qui constitue un des fondamentaux du raisonnement physique et sur l'hypothèse d'une évolution interne de l'énergie basée sur des échanges entre des modes stationnaires, les solutions exactes à l'équation de DIRAC livrent des éléments nouveaux susceptibles de décrire la physique de l'infiniment petit.

Il n'est fait aucune hypothèse sur l'étendue spatiale des modes qui sont censés décrire le comportement de la particule, mais il est légitime de penser que cette étendue dépasse la taille que lui donne la physique classique si on veut par exemple pouvoir expliquer les phénomènes d'interférences. Cette interprétation était déjà présente dans la pensée de Louis DE BROGLIE lors de la rédaction de sa thèse : « Devons-nous supposer le phénomène périodique localisé à l'intérieur du morceau d'énergie ? Cela n'est nullement nécessaire et il résultera du paragraphe III qu'il est sans doute répandu dans une région étendue de l'espace. »

Par opposition à l'Ecole de Copenhague, l'interprétation énergétique des solutions stationnaires est parfaitement déterministe, mais elle ne contredit pas pour autant l'ensemble des acquis de la vision probabiliste de la mécanique quantique.

Elle justifie la dualité onde corpuscule en indiquant que l'énergie interne à la particule se présente alternativement sous la forme d'énergie de masse puis d'énergie ondulatoire.

Elle montre comment le principe d'indétermination de HEISENBERG s'interprète en indiquant comment l'énergie de masse et l'énergie impulsionnelle ne sont pas simultanément présentes au même endroit.

Enfin, elle est totalement compatible avec l'interprétation d'un phénomène ondulatoire associé à la particule suivant la longueur d'onde de DE BROGLIE.

Troisième partie

L'approche énergétique de l'équation de DIRAC et de ses solutions en coordonnées sphériques

XV

Equation de DIRAC en coordonnées sphériques

L'analyse de solutions stationnaires de l'équation de DIRAC en coordonnées cartésiennes a permis de mettre en évidence des propriétés qui, tout en étant adossées à une théorie parfaitement déterministe, sont en accord avec tous les résultats obtenus dans l'interprétation statistique de l'Ecole de Copenhague.

Si des modes stationnaires sont capables de représenter les échanges d'énergies au sein des particules, il y a peu de chance que ce soit dans des cavités ayant la forme d'un parallélépipède. Tout indique, et en particulier les solutions de l'équation de SCHRÖDINGER, que le système de coordonnées le plus adapté, celui qui fournit des solutions en accord avec les observations expérimentales, est le système de coordonnées sphériques (Figure XV-1)

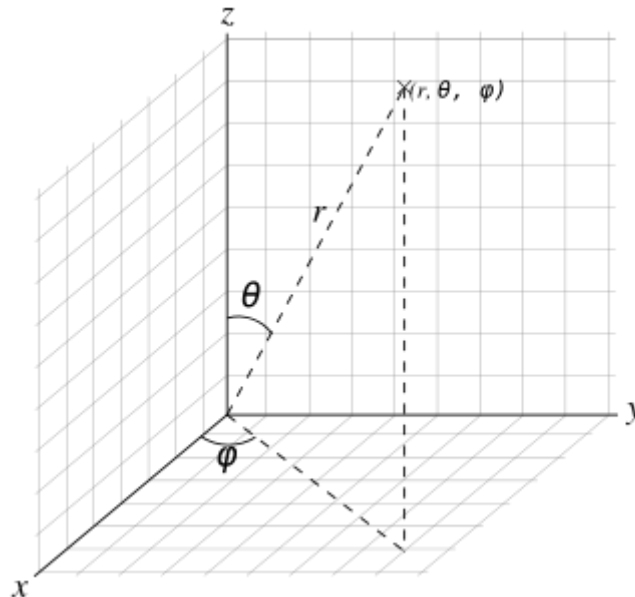


Figure XV-1 : représentation du système de coordonnées sphériques

On s'attend en particulier à voir apparaître dans des solutions exactes à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques, des éléments qui permettent de mieux comprendre comment le spin de l'électron est lié à la rotation de l'énergie interne.

Avant même d'aborder la recherche de solutions, il convient de transformer l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques.

Le point de départ est donné par les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\tag{XV-1}$$

On en déduit les relations sur les différentielles :

$$\begin{aligned}dx &= dr \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\dy &= dr \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi \\dz &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta\end{aligned}\tag{XV-2}$$

Soit encore en écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}\tag{XV-3}$$

Et donc par inversion de matrice :

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\cos \theta \cos \varphi} & \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta \sin \varphi} & \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} \\ \frac{r}{-r \sin \theta} & \frac{r}{r \sin \theta} & \frac{r}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}\tag{XV-4}$$

L'équation de DIRAC en coordonnées cartésiennes est rappelée ci-dessous :

$$j \left[\gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_t} \right) + \gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \gamma_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \gamma_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (\psi) = \eta(\psi)\tag{XV-5}$$

où les matrices γ_i sont de la forme :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{XV-6}$$

L'objectif est de transformer cette équation, en faisant apparaître les dérivées partielles par rapport aux variables sphériques r, θ, φ :

$$j \left[\gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_t} \right) + \gamma_r \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \gamma_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \gamma_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] (\psi) = \eta(\psi) \quad (\text{XV-7})$$

L'enjeu est dans la détermination des nouvelles matrices $\gamma_r, \gamma_\theta, \gamma_\varphi$. Il faut pour cela, dans un premier temps, formaliser le passage des dérivées partielles par rapport à x, y, z , aux dérivées partielles par rapport à r, θ, φ .

Pour établir ces relations, on peut utiliser la différentielle totale qui est une constante de la transformation :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} d\varphi \quad (\text{XV-8})$$

En reportant dans cette relation les différentielles $dr, d\theta, d\varphi$ données en (XV-4), on obtient :

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} (\sin \theta \cos \varphi dx + \sin \theta \sin \varphi dy + \cos \theta dz) + \\ &\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} (\cos \theta \cos \varphi dx + \cos \theta \sin \varphi dy - \sin \theta dz) \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} (-\sin \varphi dx + \cos \varphi dy) \end{aligned} \quad (\text{XV-9})$$

On regroupe ensuite les termes relatifs aux différentielles dx, dy, dz :

$$\begin{aligned} d\psi &= dx \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \sin \varphi \right\} \\ &+ dy \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \cos \varphi \right\} \\ &+ dz \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \right\} \end{aligned} \quad (\text{XV-10})$$

On identifie alors cette expression avec la différentielle totale en coordonnées cartésiennes qui est une constante de la transformation :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz \quad (\text{XV-11})$$

Cette identification fournit la transformation recherchée entre les dérivées partielles en coordonnées sphériques et les différentielles partielles en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \sin \varphi \\
 \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \cos \varphi \\
 \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{XV-12}$$

Il est alors possible de procéder au changement de coordonnées en reportant ces égalités dans l'équation de DIRAC en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{j} \left[\gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_t} \right) + \gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \gamma_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \gamma_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (\psi) = \frac{m_0 c}{\hbar} (\psi)
 \tag{XV-13}$$

La formulation explicite est complètement développée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \eta \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} &= j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} \end{pmatrix} \\
 + j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi - \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \sin \varphi \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi - \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \sin \varphi \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi - \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \sin \varphi \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi - \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \sin \varphi \end{pmatrix} \\
 + j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \cos \varphi \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \cos \varphi \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \cos \varphi \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \cos \varphi \end{pmatrix} \\
 + j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{XV-14}$$

On regroupe ensuite les termes relatifs aux dérivées partielles en r , θ , φ , afin d'obtenir une écriture matricielle sous la forme :

$$j \left[\gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_t} \right) + \gamma_r \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \gamma_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \gamma_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] (\psi) = \eta(\psi) \tag{XV-15}$$

Ce regroupement conduit, par identification, aux matrices γ_r , γ_θ , γ_φ recherchées :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \sin \theta e^{j\varphi} & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\sin \theta e^{j\varphi} & \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \cos \theta e^{j\varphi} & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\cos \theta e^{j\varphi} & -\sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & j e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & j e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -j e^{j\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(XV-16)

On notera en particulier que les matrices obtenues vérifient les propriétés générales des matrices de DIRAC :

$$(\gamma_0)^2 = 1, \quad (\gamma_r)^2 = (\gamma_\theta)^2 = (\gamma_\varphi)^2 = -1 \quad \text{(XV-17)}$$

L'écriture matricielle développée du système de DIRAC se présente sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \eta \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} &= j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} \end{pmatrix} \\
 + j \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \sin \theta e^{j\varphi} & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\sin \theta e^{j\varphi} & \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \end{pmatrix} \\
 + j \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \cos \theta e^{j\varphi} & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\cos \theta e^{j\varphi} & -\sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
 + j \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & j e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & j e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -j e^{j\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} +
 \end{aligned}
 \tag{XV-18}$$

On en déduit les 4 équations aux dérivées partielles qui expriment le système de DIRAC en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
 \eta_{\psi_0} &= j \left\{ \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} + \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \sin \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\sin \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \cos \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \right) - \frac{j e^{-j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right\} \\
 \eta_{\psi_1} &= j \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + \sin \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\cos \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \right) + \frac{j e^{j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right\} \\
 \eta_{\psi_2} &= j \left\{ -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} - \cos \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \sin \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \cos \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{j e^{-j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right\} \\
 \eta_{\psi_3} &= j \left\{ -\frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} - \sin \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\cos \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) - \frac{j e^{j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi} \right\}
 \end{aligned}$$

(XV-19)

Il s'agit d'un système non linéaire, et la méthode utilisée avec les coordonnées cartésiennes n'est plus applicable.

La complexité de ce système est telle qu'il est difficile (impossible ?) d'envisager une méthode purement mathématique qui permette d'avancer vers une solution exacte. Nous allons montrer dans les chapitres suivants qu'une approche physique, basée sur des échanges d'énergie entre des modes sphériques permet d'aboutir à de telles solutions.

XVI

Equation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques

Dans la démarche de recherche de solutions exactes à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques, nous conjecturons que l'équation de conservation de l'énergie entre l'énergie de masse, l'énergie ondulatoire, et l'énergie impulsionnelle va nous être donnée par l'équation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques :

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} \right] (\psi) = \eta^2 (\psi) \quad (\text{XVI-1})$$

Les solutions modales de cette équation se présentent sous la forme d'un produit de trois fonctions séparables en (r) , (x_t) , et (θ, φ) .

I – La solution séparable en (θ, φ)

Cette solution est définie à partir des harmoniques sphériques $Y_{\ell m}$ qui sont fonctions de deux paramètres :

- ℓ est appelé degré de l'harmonique $Y_{\ell m}$, et ℓ est un entier naturel.
- m est appelé ordre de l'harmonique sphérique : m est un entier relatif tel que $|m| \leq \ell$ soit donc : $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_{\ell}^{|m|}(\cos \theta) \exp(jm\varphi) \quad (\text{XVI-2})$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

P_{ℓ}^m est un polynôme de LEGENDRE élevé à la puissance m .

Les harmoniques sphériques sont solutions de l'équation aux valeurs propres :

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (\text{XVI-3})$$

Les premières harmoniques sphériques normalisées sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta & Y_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-j\varphi} & Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{j\varphi} \\
 Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) & Y_{2-1} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-j\varphi} & Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{j\varphi} \\
 & & Y_{2-2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-j2\varphi} & Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{j2\varphi} \\
 Y_{30} &= \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta & Y_{3\mp 1} &= \pm \sqrt{\frac{35}{64\pi}} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta e^{\mp j\varphi} \\
 Y_{3\mp 2} &= \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\mp j2\varphi} & Y_{3\mp 3} &= \pm \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{\mp j3\varphi}
 \end{aligned} \tag{XVI-4}$$

II – La solution séparable en r

Cette solution est donnée par toute combinaison linéaire des fonctions de BESSEL sphériques $j_n(r)$ et $y_n(r)$ où l'indice n est un entier naturel. Ces fonctions peuvent être définies à partir des fonctions de BESSEL :

$$\begin{aligned}
 j_n(r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+\frac{1}{2}}(r) \\
 y_n(r) &= \sqrt{\frac{\pi}{2r}} N_{n+\frac{1}{2}}(r)
 \end{aligned} \tag{XVI-5}$$

ou à partir de formules génératrices, plus commodes pour déterminer les formulations explicites :

$$\begin{aligned}
 j_n(r) &= +(-1)^n r^n \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^n \left(\frac{\sin r}{r} \right) \\
 y_n(r) &= -(-1)^n r^n \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^n \left(\frac{\cos r}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{XVI-6}$$

Les premières fonctions de BESSEL sphériques sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 j_0(r) &= \frac{\sin r}{r} & y_0(r) &= -\frac{\cos r}{r} \\
 j_1(r) &= \frac{\sin r}{r^2} - \frac{\cos r}{r} & y_1(r) &= -\frac{\cos r}{r^2} - \frac{\sin r}{r} \\
 j_2(r) &= \left(\frac{3}{r^3} - \frac{1}{r}\right)\sin r - 3\frac{\cos r}{r^2} & y_2(r) &= -\left(\frac{3}{r^3} - \frac{1}{r}\right)\cos r - 3\frac{\sin r}{r^2} \\
 j_3(r) &= \left(\frac{15}{r^4} - \frac{6}{r^2}\right)\sin r - \left(\frac{15}{r^3} - \frac{1}{r}\right)\cos r & y_3(r) &= -\left(\frac{15}{r^4} - \frac{6}{r^2}\right)\cos r - \left(\frac{15}{r^3} - \frac{1}{r}\right)\sin r
 \end{aligned}
 \tag{XVI-7}$$

Si nous désignons par $f_n(r)$ la fonction générique représentant $j_n(r)$ ou $y_n(r)$, $f_n(r)$ est solution de l'équation différentielle de BESSEL sphérique :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f_n(r) + \left[1 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] f_n(r) = 0
 \tag{XVI-8}$$

ou dans une écriture équivalente :

$$\frac{\partial^2 f_n(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f_n(r)}{\partial r} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] f_n(r) = 0
 \tag{XVI-9}$$

Les modes de cavité à symétrie sphérique ne dépendent que de r et sont appelés les modes pulsés. Ils sont fonctions d'une constante de propagation radiale ou pulsation spatiale radiale que nous désignerons par k_r et qui joue un rôle analogue aux constantes de propagation k_x , k_y , ou k_z pour les cavités rectangulaires.

En introduisant la variable $R = k_r r$ dans l'équation de BESSEL sphérique (XVI-9), nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f_n(R)}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial f_n(R)}{\partial R} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{R^2} \right] f_n(R) &= 0 \\
 \frac{1}{k_r^2} \frac{\partial^2 f_n(k_r r)}{\partial r^2} + \frac{1}{k_r^2} \frac{2}{r} \frac{\partial f_n(k_r r)}{\partial r} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{(k_r r)^2} \right] f_n(k_r r) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 f_n(k_r r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f_n(k_r r)}{\partial r} + \left[k_r^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] f_n(k_r r) &= 0 \\
 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f_n(k_r r) + \left[k_r^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] f_n(k_r r) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{XVI-10}$$

III – La solution séparable en x_t

Si on désigne par u cette fonction, elle est solution de l'équation aux valeurs propres :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} u(k_t x_t) + k_t^2 u(k_t x_t) = 0 \quad (\text{XVI-11})$$

Elle est donc constituée par toute combinaison linéaire des fonctions trigonométriques $\cos(k_t x_t)$ et $\sin(k_t x_t)$.

IV – La solution complète en modes stationnaires séparés en (r, θ, φ et x_t)

L'équation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques est rappelée pour mémoire :

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} \right] (\psi) = \eta^2 (\psi) \quad (\text{XVI-12})$$

Les solutions en modes stationnaires se présentent sous la forme d'un produit de fonctions indépendantes en r, (θ, φ), et x_t :

$$\psi(r, \theta, \varphi, t) = f_r(k_r r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) u(k_t x_t) \quad (\text{XVI-13})$$

L'introduction de cette forme de solution dans l'équation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques amène aux substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r, \theta, \varphi, t) &= - \left[k_r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] f_r(k_r r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) u(k_t x_t) \\ \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi(r, \theta, \varphi, t) &= - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f_r(k_r r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) u(k_t x_t) \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} \psi(r, \theta, \varphi, t) &= k_t^2 f_r(k_r r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) u(k_t x_t) \end{aligned} \quad (\text{XVI-14})$$

Par substitution de ces 3 relations dans (XVI-12), on obtient la relation de conservation de l'énergie :

$$k_t^2 = \eta^2 + k_r^2 \quad (\text{XVI-15})$$

Après multiplication par la constante $(\hbar c)^2$, cette relation devient :

$$(\hbar c k_t)^2 = (\hbar c \eta)^2 + (\hbar c k_r)^2 \quad (\text{XVI-16})$$

soit encore :

$$(\hbar \omega)^2 = (m_0 c^2)^2 + (\hbar c k_r)^2 \quad (\text{XVI-17})$$

Comme en coordonnées cartésiennes, on identifie dans cette relation trois catégories d'énergie : l'énergie ondulatoire ($\hbar\omega$), l'énergie de masse (m_0c^2) et l'énergie impulsionnelle ($\hbar ck_r$).

On notera que cette relation de conservation est indépendante des modes excités suivant θ et φ . Cela signifie que la répartition entre énergie de masse, énergie ondulatoire, et énergie impulsionnelle ne dépend pas des modes excités en rotation suivant θ et φ .

Comme dans le cas des coordonnées cartésiennes, cette relation de conservation de l'énergie va jouer un rôle fondamental dans l'obtention de solutions stationnaires à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques.

XVII

Solutions exactes de l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques

Des chapitres précédents, nous avons montré que les solutions exactes de l'équation de Dirac en coordonnées sphériques doivent vérifier le système :

$$\begin{aligned}\eta\psi_0 &= j \left\{ \frac{\partial\psi_0}{\partial x_t} + \cos\theta \frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \sin\theta e^{-j\varphi} \frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\sin\theta \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \cos\theta e^{-j\varphi} \frac{\partial\psi_3}{\partial\theta} \right) - \frac{je^{-j\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi} \right\} \\ \eta\psi_1 &= j \left\{ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + \sin\theta e^{j\varphi} \frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \cos\theta \frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\cos\theta e^{j\varphi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \sin\theta \frac{\partial\psi_3}{\partial\theta} \right) + \frac{je^{j\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} \right\} \\ \eta\psi_2 &= j \left\{ -\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - \cos\theta \frac{\partial\psi_0}{\partial r} - \sin\theta e^{-j\varphi} \frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \cos\theta e^{-j\varphi} \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} \right) + \frac{je^{-j\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} \right\} \\ \eta\psi_3 &= j \left\{ -\frac{\partial\psi_3}{\partial x_t} - \sin\theta e^{j\varphi} \frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\cos\theta e^{j\varphi} \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \sin\theta \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} \right) - \frac{je^{j\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi} \right\}\end{aligned}\tag{XVII-1}$$

Nous avons également formulé l'hypothèse que si des solutions exactes existent sous la forme de modes stationnaires décrivant les échanges d'énergie au sein de la particule, ces solutions doivent être compatibles avec l'équation de conservation de l'énergie établie à l'aide de l'équation de KLEIN-GORDON :

$$k_t^2 = \eta^2 + k_r^2\tag{XVII-2}$$

Pour autant, ces éléments sont insuffisants pour progresser dans la recherche de solutions exactes au système (XVII-1) ci-dessus.

Il faut donc trouver de nouveaux indices susceptibles, dans une démarche heuristique, de restreindre le champ de recherche des solutions possibles.

Nous allons pour cela nous appuyer sur deux observations issues des solutions exactes obtenues en coordonnées cartésiennes. Considérons par exemple la solution suivante :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= 0 \\
 \psi_1 &= -(\hbar\omega)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(k_t x_t) + j(m_0 c^2)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) \\
 \psi_2 &= j\hbar c k_y \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) + \hbar c k_x \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\sin(k_t x_t) \\
 \psi_3 &= \hbar c k_z \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\sin(k_t x_t)
 \end{aligned}
 \tag{XVII-3}$$

La première observation consiste à remarquer que le bi-spineur qui représente certaines de ces solutions peut se décomposer de la manière suivante :

- le premier spineur exprime sur l'une de ses composantes les échanges entre énergie de masse et énergie ondulatoire.
- le second spineur exprime sur ses deux composantes les échanges concernant l'énergie impulsionnelle.

La seconde observation est relative à la dualité onde-corpuscule. Elle se présente dans les solutions exactes sous la forme d'un même mode spatial, l'un à énergie positive, l'autre à énergie négative (d'où la présence du nombre complexe $j = \sqrt{-1}$), excité en quadrature dans le temps, ce qui indique que quand l'énergie de masse est maximum, l'énergie ondulatoire est nulle, et réciproquement. Les modes présents dans cet échange d'énergie doivent être solution de l'équation de KLEIN-GORDON qui apparaît systématiquement dans l'une des équations du système de DIRAC.

Sur la base de ces deux observations, des essais empiriques permettent alors de montrer qu'il existe bien des solutions exactes au système de DIRAC sphérique (XVII-1), sous la forme de modes stationnaires respectant l'équation de conservation de l'énergie (XVII-2).

Certains modes sphériques ne permettent pas d'obtenir des solutions exactes à l'équation de DIRAC. La méthode empirique utilisée ne permet pas de préciser s'il s'agit d'une absence mathématique de ces solutions, ou si des solutions relatives à ces modes sont atteignables par d'autres méthodes.

Le premier mode sphérique $Y_{00}(r,\theta,\varphi)$ solution de l'équation de KLEIN-GORDON est égal à une constante, il est donc indépendant de r , θ et φ . Si on associe la fonction d'onde ψ_0 à l'échange d'énergie relatif à la dualité onde corpuscule, cela conduit à poser, à une constante multiplicative près :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= \eta \sin(k_t x_t) + j k_t \cos(k_t x_t) \\
 \psi_1 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{XVII-4}$$

On déduit du système (XVII-1) que le deuxième spineur est nul.

$$\begin{aligned}
 \psi_2 &= 0 \\
 \psi_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{XVII-5}$$

Nous allons développer en détail dans les chapitres suivants, quelques-unes des solutions exactes pour certains modes sphériques solutions de l'équation de KLEIN-GORDON.

XVIII

Solutions exactes de l'équation de DIRAC pour les modes Y_{n-n} et Y_{nn}

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux modes solutions de l'équation de KLEIN-GORDON pour lesquels les paramètres ℓ et $|m|$ sont égaux, et nous poserons $\ell = |m| = n$.

La description angulaire de ces modes est donnée par les harmoniques sphériques suivants, dans lesquels la constante de normalisation qui ne joue aucun rôle pour établir la validité des solutions a été omise :

$$Y_{n-n} = \sin^n \theta e^{-jn\varphi} \quad Y_{nn} = \sin^n \theta e^{jn\varphi} \quad (\text{XVIII-1})$$

Nous travaillerons sur le premier mode Y_{n-n} , avant d'en déduire, par des considérations simples, l'expression des solutions relatives au mode Y_{nn} .

L'harmonique sphérique Y_{n-n} est associé à la fonction radiale donnée par les deux fonctions de BESSEL sphériques d'ordre n :

$$f_n(k_r r) = j_n(k_r r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_r r) \quad (\text{XVIII-2})$$

ou

$$f_n(k_r r) = y_n(k_r r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} N_{n+\frac{1}{2}}(k_r r) \quad (\text{XVIII-3})$$

Les solutions modales de l'équation de KLEIN-GORDON s'expriment sous la forme :

$$\psi(r, \theta, \varphi, t) = f_n(k_r r) Y_{n-n}(\theta, \varphi) u(k_t x_t) \quad (\text{XVIII-4})$$

où la dépendance temporelle est donnée par toute combinaison linéaire des fonctions :

$$u(k_t x_t) = \cos(k_t x_t) \quad \text{ou} \quad u(k_t x_t) = \sin(k_t x_t)$$

La méthode évoquée au chapitre précédent incite à proposer la solution suivante qui va se révéler être une solution exacte :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= \eta f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \sin(k_t x_t) + j k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \cos(k_t x_t) \\
 \psi_1 &= 0 \\
 \psi_2 &= j \cos \theta \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \sin(k_t x_t) \left\{ -k_r f_n'(k_r r) + n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\
 \psi_3 &= j \sin(k_t x_t) \sin^{n-1} \theta e^{-(n-1)j\varphi} \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\}
 \end{aligned} \tag{XVIII-5}$$

dans laquelle nous avons adopté la notation allégée : $f_n'(k_r r) = df_n(k_r r)/d(k_r r)$.

Le premier spineur porte la dualité onde-corpuscule à travers la fonction d'onde ψ_0 . L'énergie de masse s'échange avec l'énergie ondulatoire sur le mode spatial défini par l'harmonique sphérique Y_{n-n} . Il répond à la démarche évoquée au chapitre précédent.

Le second spineur porte les échanges d'énergie impulsionnelle sur lesquels nous reviendrons ultérieurement. Il est déduit du système de DIRAC sphérique après substitution du premier spineur.

L'équation de conservation de l'énergie associée à cette solution est rappelée pour mémoire :

$$k_t^2 = \eta^2 + k_r^2 \tag{XVIII-6}$$

Cette relation est indépendante de la nature des modes sphériques excités.

Des chapitres précédents, nous avons montré que les solutions exactes de l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques doivent vérifier le système :

$$\begin{aligned}
 \eta \psi_0 &= j \left\{ \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} + \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \sin \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\sin \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \cos \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \right) - \frac{j e^{-j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right\} \\
 \eta \psi_1 &= j \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + \sin \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\cos \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \right) + \frac{j e^{j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right\} \\
 \eta \psi_2 &= j \left\{ -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} - \cos \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \sin \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \cos \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{j e^{-j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right\} \\
 \eta \psi_3 &= j \left\{ -\frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} - \sin \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\cos \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) - \frac{j e^{j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi} \right\}
 \end{aligned} \tag{XVIII-7}$$

La vérification de ce système ne nécessite que des calculs élémentaires, mais elle est laborieuse. Il s'agit toutefois d'un argument décisif pour convaincre de la validité de la solution (XVIII-5), et une assistance est proposée en donnant ci-dessous la formulation explicite de chacun des termes de ces équations.

La première équation, plus complexe car elle contient l'équation de KLEIN-GORDON, sera traitée en dernier, et nous proposons d'expliciter d'abord les termes relatifs aux équations 2, 3, et 4. La vérification des sommes est laissée aux soins du lecteur.

Éléments de vérification de l'équation 2 du système de DIRAC sphérique :

$$\eta\psi_1 = j \left\{ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} + \sin\theta e^{j\varphi} \frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \cos\theta \frac{\partial\psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\cos\theta e^{j\varphi} \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} + \sin\theta \frac{\partial\psi_3}{\partial\theta} \right) + \frac{j e^{j\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} \right\} \quad (\text{XVIII-8})$$

$$\eta\psi_1 = 0$$

$$j \frac{\partial\psi_1}{\partial x_t} = 0$$

$$\begin{aligned} j \sin\theta e^{j\varphi} \frac{\partial\psi_2}{\partial r} &= -\cos\theta \sin^{n+1}\theta \sin(k_t x_t) e^{-(n-1)j\varphi} \left\{ -k_r^2 f_n''(k_r r) + n \left(\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \right) \right\} \\ -j \cos\theta \frac{\partial\psi_3}{\partial r} &= \cos\theta \sin^{n-1}\theta \sin(k_t x_t) e^{-(n-1)j\varphi} \left\{ -\sin^2\theta k_r^2 f_n''(k_r r) - n \left(\cos^2\theta + 1 \right) \left(\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \right) \right\} \\ j \frac{\cos\theta e^{j\varphi}}{r} \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} &= -\cos\theta \sin^{n-1}\theta \left(n \cos^2\theta - \sin^2\theta \right) \sin(k_t x_t) e^{-(n-1)j\varphi} \left\{ -\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} + n \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \right\} \\ j \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial\psi_3}{\partial\theta} &= \sin(k_t x_t) \sin^{n-1}\theta e^{-(n-1)j\varphi} \left\{ \begin{aligned} &(n+1) \sin^2\theta \cos\theta \frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} \\ &+ n \left((n-1) \cos^3\theta - 2 \sin^2\theta \cos\theta + (n-1) \cos\theta \right) \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \end{aligned} \right\} \\ -\frac{e^{j\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} &= -n \cos\theta \sin^{n-1}\theta \sin(k_t x_t) e^{-(n-1)j\varphi} \left\{ -\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} + n \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \right\} \end{aligned}$$

(XVIII-9)

Éléments de vérification de l'équation 3 du système de DIRAC sphérique :

$$\eta\psi_2 = j \left\{ -\frac{\partial\psi_2}{\partial x_t} - \cos\theta \frac{\partial\psi_0}{\partial r} - \sin\theta e^{-j\varphi} \frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} - \cos\theta e^{-j\varphi} \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} \right) + \frac{j e^{-j\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} \right\} \quad (\text{XVIII-10})$$

$$\begin{aligned}
 \eta \psi_2 &= j \eta \cos \theta \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \sin(k_t x_t) \left\{ -k_r f_n'(k_r r) + n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\
 -j \frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} &= k_t \cos \theta \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \cos(k_t x_t) \left\{ -k_r f_n'(k_r r) + n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\
 -j \cos \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial r} &= -j \eta k_r f_n'(k_r r) \cos \theta \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \sin(k_t x_t) + k_t k_r f_n'(k_r r) \cos \theta \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \cos(k_t x_t) \\
 -j \sin \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= 0 \\
 j \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} &= j \eta \frac{f_n(k_r r)}{r} n \sin^n \theta \cos \theta e^{-nj\varphi} \sin(k_t x_t) - k_t \frac{f_n(k_r r)}{r} n \sin^n \theta \cos \theta e^{-nj\varphi} \cos(k_t x_t) \\
 -j \frac{\cos \theta}{r} e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} &= 0 \\
 -\frac{e^{-j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{XVIII-11}$$

Éléments de vérification de l'équation 4 du système de DIRAC sphérique :

$$\eta \psi_3 = j \left\{ -\frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} - \sin \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\cos \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) - \frac{j e^{j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi} \right\}
 \tag{XVIII-12}$$

$$\begin{aligned}
 \eta \psi_3 &= j \eta \sin(k_t x_t) \sin^{n-1} \theta e^{-(n-1)j\varphi} \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\
 -j \frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} &= k_t \cos(k_t x_t) \sin^{n-1} \theta e^{-(n-1)j\varphi} \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\
 -j \sin \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} &= -j \eta k_r f_n'(k_r r) \sin^{n+1} \theta e^{-(n-1)j\varphi} \sin(k_t x_t) + k_r k_t f_n'(k_r r) \sin^{n+1} \theta e^{-(n-1)j\varphi} \cos(k_t x_t) \\
 j \cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= 0 \\
 -j \frac{\cos \theta e^{j\varphi}}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} &= \left\{ \begin{aligned} &-j \eta \frac{f_n(k_r r)}{r} n \sin^{n-1} \theta \cos^2 \theta e^{-(n-1)j\varphi} \sin(k_t x_t) \\ &+ k_t \frac{f_n(k_r r)}{r} n \sin^{n-1} \theta \cos^2 \theta e^{-(n-1)j\varphi} \cos(k_t x_t) \end{aligned} \right\} \\
 -j \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} &= 0 \\
 \frac{e^{j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi} &= -j n \eta \frac{f_n(k_r r)}{r} \sin^{n-1} \theta e^{-(n-1)j\varphi} \sin(k_t x_t) + n k_t \frac{f_n(k_r r)}{r} \sin^{n-1} \theta e^{-(n-1)j\varphi} \cos(k_t x_t)
 \end{aligned}
 \tag{XVIII-13}$$

Éléments de vérification de l'équation 1 du système de DIRAC :

Comme il a été indiqué précédemment, cette vérification mérite une attention particulière car on y retrouve l'équation de conservation de l'énergie déduite de l'équation de KLEIN-GORDON.

$$\eta\Psi_0 = j \left\{ \frac{\partial\Psi_0}{\partial x_t} + \cos\theta \frac{\partial\Psi_2}{\partial r} + \sin\theta e^{-j\varphi} \frac{\partial\Psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\sin\theta \frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta} + \cos\theta e^{-j\varphi} \frac{\partial\Psi_3}{\partial\theta} \right) - \frac{j e^{-j\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial\Psi_3}{\partial\varphi} \right\} \quad (\text{XVIII-14})$$

Le calcul explicite de chacun des termes est donné ci-dessous :

$$\begin{aligned} \eta\Psi_0 &= \eta^2 f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \sin(k_t x_t) + j\eta k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \cos(k_t x_t) \\ j \frac{\partial\Psi_0}{\partial x_t} &= j\eta k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \cos(k_t x_t) + k_t^2 f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\varphi} \sin(k_t x_t) \\ j \cos\theta \frac{\partial\Psi_2}{\partial r} &= -\cos^2 \theta \sin^n \theta \sin(k_t x_t) e^{-nj\varphi} \left\{ -k_r^2 f_n''(k_r r) + n \left(\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \right) \right\} \\ j \sin\theta e^{-j\varphi} \frac{\partial\Psi_3}{\partial r} &= -\sin^n \theta \sin(k_t x_t) e^{-nj\varphi} \left\{ -\sin^2 \theta k_r^2 f_n''(k_r r) - n(\cos^2 \theta + 1) \left(\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \right) \right\} \\ -j \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta} &= \sin^n \theta (n \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin(k_t x_t) e^{-nj\varphi} \left\{ -\frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} + n \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \right\} \\ j \frac{\cos\theta}{r} e^{-j\varphi} \frac{\partial\Psi_3}{\partial\theta} &= \sin(k_t x_t) \cos\theta e^{-nj\varphi} \left\{ \begin{aligned} &(n+1) \sin^n \theta \cos\theta \frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} \\ &+ n((n-1) \sin^{n-2} \theta \cos^3 \theta - 2 \sin^n \theta \cos\theta + (n-1) \sin^{n-2} \theta \cos\theta) \frac{f_n(k_r r)}{r} \end{aligned} \right\} \\ \frac{e^{-j\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial\Psi_3}{\partial\varphi} &= (n-1) \sin(k_t x_t) \sin^{n-2} \theta e^{-nj\varphi} \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n \frac{\cos^2 \theta + 1}{r} f_n(k_r r) \right\} \end{aligned} \quad (\text{XVIII-15})$$

Après simplification par $\sin(k_t x_t) \cdot e^{-nj\varphi}$, la première équation du système de DIRAC s'écrit :

$$\begin{aligned} \eta^2 f_n(k_r r) \sin^n \theta &= \sin^n \theta k_t^2 f_n(k_r r) + \sin^n \theta k_r^2 f_n''(k_r r) \\ &+ \frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} \left\{ -n \cos^2 \theta \sin^n \theta + n \sin^n \theta (\cos^2 \theta + 1) - \sin^n \theta (n \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right\} \\ &+ \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \left\{ \begin{aligned} &n \cos^2 \theta \sin^n \theta - n \sin^n \theta (\cos^2 \theta + 1) + n \sin^n \theta (n \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &+ n((n-1) \sin^{n-2} \theta \cos^4 \theta - 2 \sin^n \theta \cos^2 \theta + (n-1) \sin^{n-2} \theta \cos^2 \theta) \\ &- n(n-1) \sin^{n-2} \theta (\cos^2 \theta + 1) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{XVIII-16})$$

Les termes entre accolades se réduisent d'une manière remarquable pour obtenir :

$$\eta^2 f_n(k_r r) = k_t^2 f_n(k_r r) + k_r^2 f_n''(k_r r) + 2 \frac{k_r f_n'(k_r r)}{r} - n(n+1) \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \quad (\text{XVIII-17})$$

On peut réécrire cette relation en introduisant les dérivées partielles par rapport à r :

$$\eta^2 f_n(k_r r) = k_r^2 f_n(k_r r) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} f_n(k_r r) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} f_n(k_r r) - n(n+1) \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \quad (\text{XVIII-18})$$

Soit encore :

$$\eta^2 f_n(k_r r) = k_r^2 f_n(k_r r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f_n(k_r r) - n(n+1) \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \quad (\text{XVIII-19})$$

En utilisant la propriété de la fonction de BESSEL sphérique établie en (XVI-10) et rappelée pour mémoire :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f_l(k_r r) + \left[k_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(k_r r) = 0 \quad (\text{XVIII-20})$$

on obtient pour $l = n$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f_n(k_r r) + \left[k_r^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] f_n(k_r r) = 0 \quad (\text{XVIII-21})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f_n(k_r r) - \frac{n(n+1)}{r^2} f_n(k_r r) = -k_r^2 f_n(k_r r)$$

En reportant ce dernier résultat dans la relation (XVIII-19) rappelée ci-dessous :

$$\eta^2 f_n(k_r r) = k_r^2 f_n(k_r r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f_n(k_r r) - n(n+1) \frac{f_n(k_r r)}{r^2} \quad (\text{XVIII-22})$$

on obtient la relation de conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \eta^2 f_n(k_r r) &= k_r^2 f_n(k_r r) - k_r^2 f_n(k_r r) \\ k_r^2 &= \eta^2 + k_r^2 \end{aligned} \quad (\text{XVIII-22})$$

La vérification de la solution exacte à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques est achevée. Comme en coordonnées cartésiennes, pour être valide, cette solution doit être associée à l'équation de conservation de l'énergie en coordonnées sphériques.

En conclusion de ce chapitre, nous nous intéressons au mode analogue en Y_{nn} :

$$Y_{nn} = \sin^n \theta e^{jn\varphi} \quad (\text{XVIII-23})$$

Si on fait abstraction de la constante de normalisation qui n'intervient pas dans les calculs, la seule différence par rapport à l'harmonique sphérique Y_{n-n} du paragraphe précédent est dans le signe de φ .

Cela induit une conséquence immédiate : on ne peut plus trouver de solution exacte en faisant porter la dualité onde-corpuscule par la fonction d'onde ψ_0 . La solution exacte au système de DIRAC sphérique ne peut être construite qu'en faisant porter cette dualité par la

fonction d'onde ψ_1 . On obtient alors une solution analogue à la précédente, dans laquelle les fonctions d'ondes du spineur qui porte l'énergie impulsionnelle sont échangées :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= \eta f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{nj\phi} \sin(k_t x_t) + j k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{nj\phi} \cos(k_t x_t) \\ \psi_2 &= j \sin(k_t x_t) \sin^{n-1} \theta e^{(n-1)j\phi} \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n (\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\ \psi_3 &= j \cos \theta \sin^n \theta e^{nj\phi} \sin(k_t x_t) \left\{ k_r f_n'(k_r r) - n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\}\end{aligned}\quad (\text{XVIII-24})$$

Nous verrons dans un prochain chapitre que le signe de ϕ détermine le sens de rotation de l'énergie. En appliquant les règles classiques d'orientation du spin (règle du tire-bouchon par exemple), on peut associer une direction de spin à chacune des solutions exactes proposées.

Le spineur

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \eta f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\phi} \sin(k_t x_t) + j k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{-nj\phi} \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= 0\end{aligned}\quad (\text{XVIII-25})$$

peut être associé au spin orienté vers les z positifs et il est généralement qualifié de spin « up ».

Le spineur :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= \eta f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{nj\phi} \sin(k_t x_t) + j k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{nj\phi} \cos(k_t x_t)\end{aligned}\quad (\text{XVIII-26})$$

peut être associé au spin orienté vers les z négatifs, et il est généralement qualifié de spin « down ».

XIX

Autres solutions exactes

I - Les modes en rotation

Les solutions exactes élémentaires présentées au chapitre précédent ne permettent pas de mettre en évidence la rotation de l'énergie.

En procédant de manière analogue à la recherche de solutions propagatives lors de l'étude en coordonnées cartésiennes, il est possible de trouver des solutions exactes qui expriment cette rotation.

Le système de DIRAC sphérique n'étant linéaire que par rapport aux fonctions sinusoïdales de x_t , nous ne pouvons construire de nouvelles solutions exactes qu'en sommant des solutions dont les variations de modes portent sur x_t .

Nous choisissons de travailler sur un mode représentant un spin « down » et désignons par (solution 1) la solution obtenue en (XVIII-24) :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= \eta f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{nj\phi} \sin(k_t x_t) + j k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{nj\phi} \cos(k_t x_t) \\ \psi_2 &= j \sin(k_t x_t) \sin^{n-1} \theta e^{(n-1)j\phi} \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\ \psi_3 &= j \cos \theta \sin^n \theta e^{nj\phi} \sin(k_t x_t) \left\{ k_r f_n'(k_r r) - n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\}\end{aligned} \quad (\text{XIX-1})$$

Nous désignons par (solution 2) la solution exacte obtenue en échangeant les sinus et cosinus dans la fonction d'onde ψ_1 :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= \eta f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{nj\phi} \cos(k_t x_t) - j k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta e^{nj\phi} \sin(k_t x_t) \\ \psi_2 &= j \cos(k_t x_t) \sin^{n-1} \theta e^{(n-1)j\phi} \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\ \psi_3 &= j \cos \theta \sin^n \theta e^{nj\phi} \cos(k_t x_t) \left\{ k_r f_n'(k_r r) - n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\}\end{aligned} \quad (\text{XIX-2})$$

Nous construisons la solution exacte obtenue par la combinaison linéaire : (solution 2) + j (solution 1) :

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_1 = \eta f_n(k_r r) \sin^n \theta \exp j(k_t x_t + n\varphi) - k_t f_n(k_r r) \sin^n \theta \exp j(k_t x_t + n\varphi)$$

$$\psi_2 = j \exp j(k_t x_t + (n-1)\varphi) \sin^{n-1} \theta \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n \left(\cos^2 \theta + 1 \right) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \quad (\text{XIX-3})$$

$$\psi_3 = j \cos \theta \sin^n \theta \exp j(k_t x_t + n\varphi) \left\{ k_r f_n'(k_r r) - n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\}$$

Les termes en $\exp j(k_t x_t + n\varphi)$ et $\exp j(k_t x_t + (n-1)\varphi)$ représentent à la fois une rotation temporelle de l'énergie suivant l'angle φ et des échanges entre énergie positive et énergie négative indiqués par la présence du terme imaginaire j .

Le sens de rotation peut être évalué de la même manière que le sens de propagation d'une onde progressive.

Une onde en $(\omega t - kx)$ progresse vers les x positifs : une onde en $(k_t x_t - n\varphi)$ progresse vers les φ positifs.

Une onde en $(\omega t + kx)$ progresse vers les x négatifs : une onde en $(k_t x_t + n\varphi)$ progresse vers les φ négatifs, ce qui justifie l'appellation de spin « down » pour la solution (XIX-3).

Il apparaît impossible de construire des solutions exactes en rotation de la forme $(k_t x_t + \theta)$ car on ne dispose pas des solutions analogues en $\sin\theta$ et $\cos\theta$ qui sont nécessaires pour obtenir par combinaison avec les fonctions temporelles $\sin(k_t x_t)$ et $\cos(k_t x_t)$ les fonctions de rotation en θ .

II – Autres solutions

Parmi les solutions modales de l'équation de KLEIN-GORDON, pour un ordre ℓ donné, $|m|$ peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et ℓ . L'étude des chapitres précédents a permis de montrer que les modes tels que $\ell = |m| = n$ conduisent à des solutions exactes de l'équation de DIRAC.

Il s'avère que tous les modes ne permettent pas d'aboutir à des solutions exactes.

Un essai spécifique sur les modes Y_{2-1} et Y_{21} montre que ces modes autorisent des solutions exactes qui sont reportées ci-dessous.

II-1 - Le mode Y_{2-1}

Il est associé à l'harmonique sphérique Y_{2-1} :

$$Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-j\varphi} \quad (\text{XIX-4})$$

La fonction radiale est donnée par les deux fonctions de BESSEL sphériques d'ordre 2 :

$$f_2(k_r r) = j_2(k_r r) = \left(\frac{3}{(k_r r)^3} - \frac{1}{(k_r r)} \right) \sin(k_r r) - 3 \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} \quad (\text{XIX-5})$$

ou

$$f_2(k_r r) = y_2(k_r r) = - \left(\frac{3}{(k_r r)^3} - \frac{1}{(k_r r)} \right) \cos(k_r r) - 3 \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^2} \quad (\text{XIX-6})$$

Les solutions modales de l'équation de KLEIN-GORDON s'expriment sous la forme :

$$\psi(r, \theta, \varphi, t) = f_2(k_r r) Y_{2-1}(\theta, \varphi) u(k_t x_t) \quad (\text{XIX-7})$$

où la dépendance temporelle est donnée par toute combinaison linéaire des fonctions :

$$u(k_t x_t) = \cos(k_t x_t) \quad \text{ou} \quad u(k_t x_t) = \sin(k_t x_t)$$

La méthode proposée dans les chapitres précédents permet d'obtenir la solution exacte suivante :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \eta f_2(k_r r) \sin \theta \cos \theta e^{-j\varphi} \sin(k_t x_t) + j k_t f_2(k_r r) \sin \theta \cos \theta e^{-j\varphi} \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= 0 \\ \psi_2 &= j \sin \theta e^{-j\varphi} \sin(k_t x_t) \left\{ -\cos^2 \theta k_r f_2'(k_r r) + (1 - 2 \sin^2 \theta) \frac{f_2(k_r r)}{r} \right\} \\ \psi_3 &= j \sin(k_t x_t) \cos \theta \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_2'(k_r r) - 2 \cos^2 \theta \frac{f_2(k_r r)}{r} \right\} \end{aligned} \quad (\text{XIX-8})$$

dans laquelle nous avons adopté la notation : $f_2'(k_r r) = df_2(k_r r)/d(k_r r)$.

II-2 - Le mode Y_{21}

Il est associé à l'harmonique sphérique Y_{21} rappelé ci-dessous :

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{j\varphi} \quad (\text{XIX-9})$$

La constante de normalisation n'intervenant pas dans les calculs, la seule différence par rapport à l'harmonique sphérique Y_{2-1} du paragraphe précédent est dans le signe de φ . Cela indique que le sens de rotation de l'énergie est inversé par rapport au mode Y_{2-1} .

On obtient la solution exacte suivante :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= \eta f_2(k_r r) \sin \theta \cos \theta e^{j\varphi} \sin(k_t x_t) + j k_t f_2(k_r r) \sin \theta \cos \theta e^{j\varphi} \cos(k_t x_t) \\ \psi_2 &= -j \sin(k_t x_t) \cos \theta \left\{ \sin^2 \theta k_r f_2'(k_r r) + 2 \cos^2 \theta \frac{f_2(k_r r)}{r} \right\} \\ \psi_3 &= j \sin(k_t x_t) \sin \theta e^{j\varphi} \left\{ \cos^2 \theta k_r f_2'(k_r r) - (1 - 2 \sin^2 \theta) \frac{f_2(k_r r)}{r} \right\} \end{aligned} \quad (\text{XIX-10})$$

II-3 – Autres modes

Il n'a pas été établi de règle simple permettant de savoir si un mode est solution exacte ou non lorsque $\ell > |m|$, ce qui oblige à une recherche et une vérification spécifique qui devient particulièrement laborieuse lorsque l'ordre des modes augmente. Il s'agit d'un problème ouvert : si certains modes ne conduisent pas à des solutions exactes de l'équation de DIRAC, il existe nécessairement une raison physique qui empêche l'installation de ces modes et qu'il convient d'élucider.

XX

Quelques éléments de réflexion sur les solutions exactes en coordonnées sphériques

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques permet de retrouver, dans une approche complètement déterministe, les propriétés qui ont été mises en évidence dans l'analyse des solutions exactes en coordonnées cartésiennes.

L'intérêt majeur d'une formulation de solutions exactes à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques réside dans le fait qu'on va pouvoir exprimer analytiquement la rotation de l'énergie.

Quelques premiers éléments de réflexion sont donnés ci-dessous. Ces éléments semblent confirmer que les solutions élaborées sont en accord avec les principaux phénomènes physiques observés. Il faudra toutefois avancer plus avant dans cette réflexion avant de conclure ou non à la validité définitive des solutions proposées.

I – Particule de spin 1

Considérons une solution exacte obtenue sur le mode Y_{1-1} :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \eta f_1(k_r r) \sin \theta e^{-j\varphi} \sin(k_t x_t) + j k_t f_1(k_r r) \sin \theta e^{-j\varphi} \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= 0 \\ \psi_2 &= j \cos \theta \sin \theta e^{-j\varphi} \sin(k_t x_t) \left\{ -k_r f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{r} \right\} \\ \psi_3 &= j \sin(k_t x_t) \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_1'(k_r r) - (\cos^2 \theta + 1) \frac{f_1(k_r r)}{r} \right\}\end{aligned} \quad (\text{XX-1})$$

où f_1 représente une fonction de BESSEL sphérique d'ordre 1 :

$$j_1(k_r r) = \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^2} - \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)} \quad y_1(k_r r) = -\frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} - \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)} \quad (\text{XX-2})$$

et où nous avons adopté la notation $f_1'(k_r r) = df_1(k_r r)/d(k_r r)$.

Après multiplication par la constante $\hbar c$, chacune des fonctions d'onde a la dimension d'une énergie :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= (m_0 c^2) f_1(k_r r) \sin \theta e^{-j\varphi} \sin(k_t x_t) + j(\hbar \omega) f_1(k_r r) \sin \theta e^{-j\varphi} \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= 0 \\ \psi_2 &= j(\hbar c k_r) \cos \theta \sin \theta e^{-j\varphi} \sin(k_t x_t) \left\{ -f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{k_r r} \right\} \\ \psi_3 &= j(\hbar c k_r) \sin(k_t x_t) \left\{ -\sin^2 \theta f_1'(k_r r) - (\cos^2 \theta + 1) \frac{f_1(k_r r)}{k_r r} \right\}\end{aligned} \quad (\text{XX-3})$$

La présence de la variable r au dénominateur de toutes les solutions obtenues semble indiquer que les conditions aux limites qui vont influencer sur la valeur de la pulsation spatiale k_r vont imposer à r une valeur limite inférieure r_{\min} . Cette valeur devra être différente de 0 pour assurer la validité physique de ces solutions.

Nous faisons abstraction dans la discussion qui suit de la constante multiplicative de normalisation. Il est rappelé que cette constante a un double rôle : faire en sorte que chaque fonction d'onde ait la dimension d'une racine carré de densité volumique d'énergie, et que l'intégrale de cette densité sur le volume contenant l'énergie donne l'énergie totale contenue dans la particule.

Le premier spineur formé par ψ_0 et ψ_1 porte les échanges d'énergie entre énergie de masse et énergie ondulatoire.

Le deuxième spineur formé par ψ_2 et ψ_3 porte les évolutions spatiales et temporelles de l'énergie impulsionnelle, ce qui est confirmé par la présence du terme $(\hbar c k_r)$. Cette énergie impulsionnelle peut être a priori affectée à chacune des variables d'espace r , θ , φ .

Le mouvement de rotation qui est mis en évidence dans les solutions exactes s'effectue autour de l'axe Oz : il induit une énergie impulsionnelle suivant φ .

La variable spatial r joue un rôle analogue aux variables spatiales x , y et z en coordonnées cartésiennes : elle induit une énergie impulsionnelle suivant r .

La variable θ ne semble jouer aucun rôle en terme impulsionnel, et nous ferons l'hypothèse que l'énergie impulsionnelle associée à cette variable est nulle.

La fonction d'onde ψ_3 ne peut pas être associée à un mouvement de rotation suivant φ : nous admettons qu'elle porte l'énergie impulsionnelle relative à r . Nous associerons par conséquent la fonction d'onde ψ_2 à l'énergie impulsionnelle de rotation. Cette hypothèse est confortée par le fait que la fonction d'onde ψ_2 change de signe lorsqu'on passe d'un spin « up » à un spin « down ». Elle est également confirmée par la distribution spatiale de l'énergie suivant θ , comme nous allons le voir par la suite.

Lorsqu'on effectue une rotation d'un angle $\varphi = 2\pi$, le bispineur (XX-1) retrouve sa position initiale, ce qui laisse à penser qu'on peut associer ce mode à une particule de spin 1. On sait que dans ce cas le moment cinétique angulaire a la probabilité maximum de faire un angle $\theta = 45^\circ$ et $\theta = 135^\circ$ avec l'axe Oz .

On peut relier cette propriété à l'énergie impulsionnelle de rotation portée par la fonction d'onde ψ_2 :

$$\psi_2 = j(\hbar ck_r) \cos \theta \sin \theta e^{-j\phi} \sin(k_t x_t) \left\{ -f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{k_r r} \right\} \quad (\text{XX-4})$$

Du point de vue de la densité volumique d'énergie, la dépendance en θ est donnée par la fonction :

$$A(\theta) = (\cos \theta \sin \theta)^2 \quad (\text{XX-5})$$

Cette fonction est représentée sur la figure (XX-1) ci-dessous :

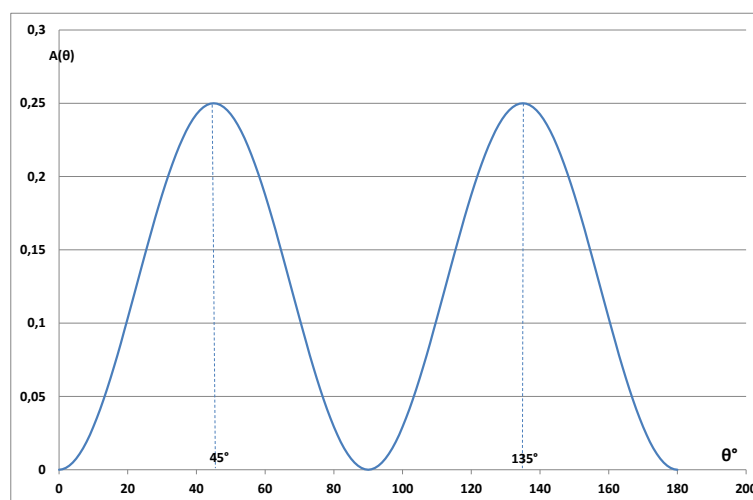


Figure (XX-1) : Représentation de la répartition en amplitude de la densité volumique d'énergie impulsionnelle suivant θ sur le mode Y_{11} ou Y_{1-1} susceptible de représenter une particule de spin 1

La densité d'énergie impulsionnelle de rotation présente, en valeur absolue, un maximum dans les directions $\theta = 45^\circ$ et $\theta = 135^\circ$. Il est rappelé que dans une approche énergétique et déterministe, la répartition autour de ces valeurs ne représente plus une densité de probabilité, mais une densité volumique d'énergie.

L'énergie impulsionnelle suivant r est portée par la fonction d'onde ψ_3 :

$$\psi_3 = j(\hbar ck_r) \sin(k_t x_t) \left\{ -\sin^2 \theta f_1'(k_r r) - (\cos^2 \theta + 1) \frac{f_1(k_r r)}{k_r r} \right\} \quad (\text{XX-6})$$

Aucun des termes de la relation (XX-6) séparément n'a pu faire à ce jour l'objet d'une interprétation physique simple.

Le photon constitue un cas particulier important de particule de spin 1. Il s'agit d'une particule sans masse au repos, et il en résulte que dans cette approche énergétique, les fonctions d'ondes qui le décrivent obéissent aux relations suivantes à une constante multiplicative près :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= (\hbar\omega)f_1(k_r r)\sin\theta e^{-j\varphi} \cos(k_t x_t) \\
 \psi_1 &= 0 \\
 \psi_2 &= (\hbar ck_r)\cos\theta \sin\theta e^{-j\varphi} \sin(k_t x_t) \left\{ -f_1'(k_r r) + \frac{f_1(k_r r)}{k_r r} \right\} \\
 \psi_3 &= (\hbar ck_r)\sin(k_t x_t) \left\{ -\sin^2\theta f_1'(k_r r) - (\cos^2\theta + 1) \frac{f_1(k_r r)}{k_r r} \right\}
 \end{aligned} \tag{XX-7}$$

Les échanges d'énergie s'effectuent entre l'énergie ondulatoire portée par le premier spineur, et l'énergie impulsionnelle portée par le second spineur : lorsque la première est maximum ($|\cos(k_t x_t)| = 1$), la seconde est nulle ($\sin(k_t x_t) = 0$) et réciproquement.

Dans l'approche énergétique, l'énergie de masse du photon étant nulle, il est impossible de connaître sa position. Lors de sa rencontre avec d'autres particules, il ne peut échanger que de l'énergie impulsionnelle.

II – Particule de spin 1/2

On sait que l'équation de DIRAC est l'équation dont les solutions sont les plus proches du comportement physique de l'électron. On doit donc retrouver dans les solutions exactes à cette équation en coordonnées sphériques, les principales propriétés mises en évidence tant sur le plan théoriques que sur le plan expérimental.

La solution qui semble présenter le plus d'analogie est celle qui repose sur le mode Y_{22} ou Y_{2-2} :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= \eta f_2(k_r r)\sin^2\theta e^{-2j\varphi} \sin(k_t x_t) + jk_t f_2(k_r r)\sin^2\theta e^{-2j\varphi} \cos(k_t x_t) \\
 \psi_1 &= 0 \\
 \psi_2 &= jk_r \cos\theta \sin^2\theta e^{-2j\varphi} \sin(k_t x_t) \left\{ -f_2'(k_r r) + 2 \frac{f_2(k_r r)}{k_r r} \right\} \\
 \psi_3 &= jk_r \sin(k_t x_t) \sin\theta e^{-j\varphi} \left\{ -\sin^2\theta f_2'(k_r r) - 2(\cos^2\theta + 1) \frac{f_2(k_r r)}{k_r r} \right\}
 \end{aligned} \tag{XX-8}$$

où f_2 représente une fonction de BESSEL sphérique d'ordre 2 :

$$j_2(k_r r) = \left(\frac{3}{(k_r r)^3} - \frac{1}{(k_r r)} \right) \sin(k_r r) - 3 \frac{\cos(k_r r)}{(k_r r)^2} \tag{XX-9}$$

$$y_2(k_r r) = - \left(\frac{3}{(k_r r)^3} - \frac{1}{(k_r r)} \right) \cos(k_r r) - 3 \frac{\sin(k_r r)}{(k_r r)^2} \tag{XX-10}$$

et où nous avons adopté la notation $f_2'(k_r r) = df_2(k_r r)/d(k_r r)$.

Après multiplication par la constante $\hbar c$, chacune des fonctions d'onde a la dimension d'une énergie, et nous ferons comme précédemment, abstraction de la constante de normalisation dans l'analyse de cette solution :

$$\begin{aligned}\psi_0 &= (m_0 c^2) f_2(k_r r) \sin^2 \theta e^{-2j\varphi} \sin(k_t x_t) + j(\hbar\omega) f_2(k_r r) \sin^2 \theta e^{-2j\varphi} \cos(k_t x_t) \\ \psi_1 &= 0 \\ \psi_2 &= j(\hbar c k_r) \cos \theta \sin^2 \theta e^{-2j\varphi} \sin(k_t x_t) \left\{ -f_2'(k_r r) + 2 \frac{f_2(k_r r)}{k_r r} \right\} \\ \psi_3 &= j(\hbar c k_r) \sin(k_t x_t) \sin \theta e^{-j\varphi} \left\{ -\sin^2 \theta f_2'(k_r r) - 2(\cos^2 \theta + 1) \frac{f_2(k_r r)}{k_r r} \right\}\end{aligned}\quad (\text{XX-11})$$

Le premier élément important concerne l'angle de rotation φ : si on impose une rotation de 2π à la fonction d'onde ψ_3 , alors les fonctions d'onde ψ_0 et ψ_2 subissent une rotation de 4π .

Le spin $1/2$ de l'électron est souvent présenté en expliquant que le bi-spineur doit effectuer une rotation de 4π avant de retrouver sa position initiale. Il apparaît dans la solution (XX-8) des éléments nouveaux qui indiquent que toutes les composantes de rotation d'un spineur ne varient pas obligatoirement avec la même plage de variation angulaire.

Vu sous cet aspect, il faut effectivement que les composantes ψ_0 et ψ_2 tournent de 4π pour que la composante ψ_3 retrouve son état initial.

Le deuxième élément qui laisse à penser que la solution (XX-8) peut caractériser le fonctionnement interne de l'électron est contenu dans la fonction d'onde ψ_2 :

$$\psi_2 = j(\hbar c k_r) \cos \theta \sin^2 \theta e^{-2j\varphi} \sin(k_t x_t) \left\{ -f_2'(k_r r) + 2 \frac{f_2(k_r r)}{k_r r} \right\} \quad (\text{XX-12})$$

Cette fonction d'onde est porteuse de l'énergie impulsionnelle suivant φ . Puisque la direction en θ est séparable, on peut chercher à savoir dans quelle direction cette énergie impulsionnelle suivant φ est maximum, soit donc à résoudre :

$$\frac{d}{d\theta} (\cos \theta \sin^2 \theta) = -\sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta = 0 \quad (\text{XX-13})$$

ce qui donne un angle θ_{\max} tel que

$$\text{tg}(\theta_{\max}) = \sqrt{2} \quad (\text{XX-14})$$

soit donc :

$$\theta_{\max} = 54,73^\circ \quad (\text{XX-15})$$

Du point de vue de la densité volumique d'énergie, la dépendance en θ est donnée par la fonction :

$$A(\theta) = (\cos \theta \sin^2 \theta)^2 \quad (\text{XX-16})$$

Cette fonction est représentée sur la figure (XX-2) ci-dessous :

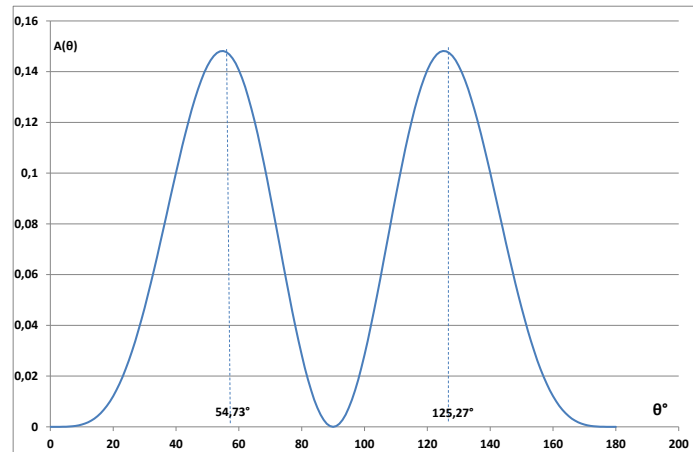


Figure (XX-2) : Représentation de la répartition en amplitude de la densité volumique d'énergie impulsionnelle suivant θ sur le mode Y_{22} ou Y_{2-2} susceptible de représenter une particule de spin 2

Il apparaît que ces directions correspondent bien aux directions du moment cinétique de l'électron prévues par la quantification du moment cinétique de spin.

III – Particule de spin « 1/n »

On peut rechercher dans les solutions exactes à l'équation de DIRAC sur les modes Y_{nn} ou Y_{n-n} , l'expression générale de la direction dans laquelle le moment cinétique de spin est maximum.

L'énergie impulsionnelle de spin est portée par la fonction d'onde ψ_2 qui est rappelée pour mémoire :

$$\psi_2 = j \cos \theta \sin^n \theta e^{-nj\phi} \sin(k_t x_t) \left\{ -k_r f_n'(k_r r) + n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \quad (\text{XX-17})$$

Puisque cette expression est séparable en θ , on peut déterminer la valeur θ_{\max} pour laquelle cette énergie impulsionnelle est maximale. Cela revient à résoudre l'équation :

$$\frac{d}{d\theta} (\cos \theta \sin^n \theta) = -\sin^{n+1} \theta + n \sin^{n-1} \theta \cos^2 \theta = 0 \quad (\text{XX-18})$$

ce qui donne un angle θ_{\max} tel que

$$\text{tg}^2(\theta_{\max}) = n \quad (\text{XX-19})$$

Il s'avère que cette direction est identique à celle qui est prévue par la quantification du moment cinétique de spin de la mécanique classique pour un spin en « 1/n ». Les guillemets signifient qu'on entre ici dans un domaine pour lequel il n'y a, à la connaissance de l'auteur, aucune particule connue à ce jour possédant cette propriété pour n différent de 1 ou n différent de 2.

Pour le montrer, nous adoptons une quantification du moment cinétique de spin suivant l'axe Oz sous la forme :

$$S_z = \frac{1}{n} \hbar \quad (\text{XX-20})$$

La norme S du moment cinétique prévue par la mécanique quantique s'écrit :

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)} \hbar \quad (\text{XX-21})$$

Et l'angle θ_{\max} est donné par la relation :

$$\cos(\theta_{\max}) = \frac{S_z}{S} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (\text{XX-22})$$

L'égalité entre l'angle (XX-19) fourni par l'approche énergétique et l'angle (XX-22) fourni par la quantification classique du moment cinétique de spin est donnée par la relation trigonométrique :

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \text{tg}^2 \theta + 1 \quad (\text{XX-23})$$

XXI

Les courants de DIRAC sphériques

Les solutions exactes à l'équation de DIRAC ne peuvent représenter des solutions physiques que si elles respectent la conservation locale de l'énergie, dont la traduction mathématique s'effectue en exprimant que la quadri-divergence de la densité volumique d'énergie doit être nulle.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu = \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (\text{XXI-1})$$

Nous avons vu en coordonnées cartésiennes qu'on pouvait extraire des équations de DIRAC la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (\text{XXI-2})$$

dans laquelle :

$$\bar{\psi} = (\psi^*)^T \gamma^0 = (\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*) \quad (\text{XXI-3})$$

Par identification de (XXI-2) avec (XXI-1), on en déduit le quadri vecteur courant de DIRAC.

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{XXI-4})$$

où les γ^μ représentent les matrices de DIRAC.

Pour établir les expressions de ces courants en coordonnées sphériques, nous devons utiliser les matrices de DIRAC obtenues dans ce système de coordonnées. Ces matrices sont indicées par les lettres t, r, θ , φ qui représentent les différentielles auxquelles elles s'appliquent.

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{XXI-5})$$

$$\gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \sin \theta e^{j\varphi} & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\sin \theta e^{j\varphi} & \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XXI-6})$$

$$\gamma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \cos \theta e^{j\varphi} & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\cos \theta e^{j\varphi} & -\sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XXI-7})$$

$$\gamma_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -je^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & je^{j\varphi} & 0 \\ 0 & je^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -je^{j\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XXI-8})$$

Le détail des expressions analytiques de ces courants est présenté ci-dessous :

composante d'indice t :

$$\mathbf{J}^t = \overline{\Psi} \gamma_0 \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0^* & \Psi_1^* & -\Psi_2^* & -\Psi_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0^* & \Psi_1^* & \Psi_2^* & \Psi_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}^t = \Psi_0^* \Psi_0 + \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 \quad (\text{XXI-9})$$

composante d'indice r :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}^r &= \overline{\Psi} \gamma_r \Psi = (\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \sin \theta e^{j\varphi} & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\sin \theta e^{j\varphi} & \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \\
 &= (\psi_2^* \cos \theta + \psi_3^* \sin \theta e^{j\varphi}, \psi_2^* \sin \theta e^{-j\varphi} - \psi_3^* \cos \theta, \psi_0^* \cos \theta + \psi_1^* \sin \theta e^{j\varphi}, \psi_0^* \sin \theta e^{-j\varphi} - \psi_1^* \cos \theta) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{J}^r &= \psi_0 (\psi_2^* \cos \theta + \psi_3^* \sin \theta e^{j\varphi}) + \psi_1 (\psi_2^* \sin \theta e^{-j\varphi} - \psi_3^* \cos \theta) \\
 &+ \psi_2 (\psi_0^* \cos \theta + \psi_1^* \sin \theta e^{j\varphi}) + \psi_3 (\psi_0^* \sin \theta e^{-j\varphi} - \psi_1^* \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{XXI-10}$$

composante d'indice θ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}^\theta &= \overline{\Psi} \frac{\gamma_\theta}{r} \Psi = (\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*) \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & \cos \theta e^{j\varphi} & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -\cos \theta e^{j\varphi} & -\sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{r} (-\psi_2^* \sin \theta + \psi_3^* \cos \theta e^{j\varphi}, \psi_2^* \cos \theta e^{-j\varphi} + \psi_3^* \sin \theta, -\psi_0^* \sin \theta + \psi_1^* \cos \theta e^{j\varphi}, \psi_0^* \cos \theta e^{-j\varphi} + \psi_1^* \sin \theta) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \\
 r\mathbf{J}^\theta &= \psi_0 (-\psi_2^* \sin \theta + \psi_3^* \cos \theta e^{j\varphi}) + \psi_1 (\psi_2^* \cos \theta e^{-j\varphi} + \psi_3^* \sin \theta) \\
 &+ \psi_2 (-\psi_0^* \sin \theta + \psi_1^* \cos \theta e^{j\varphi}) + \psi_3 (\psi_0^* \cos \theta e^{-j\varphi} + \psi_1^* \sin \theta)
 \end{aligned} \tag{XXI-11}$$

composante d'indice φ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}^\varphi &= \overline{\Psi} \frac{\gamma_\varphi}{r \sin \theta} \Psi = (\psi_0^*, \psi_1^*, -\psi_2^*, -\psi_3^*) \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j e^{-j\varphi} \\ 0 & 0 & j e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & j e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ -j e^{j\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{J}^\varphi &= \frac{j}{r \sin \theta} (\psi_3^* e^{j\varphi}, -\psi_2^* e^{-j\varphi}, \psi_1^* e^{j\varphi}, -\psi_0^* e^{-j\varphi}) \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \\
 r \sin \theta \mathbf{J}^\varphi &= j (\psi_0 \psi_3^* e^{j\varphi} - \psi_1 \psi_2^* e^{-j\varphi} + \psi_2 \psi_1^* e^{j\varphi} - \psi_3 \psi_0^* e^{-j\varphi})
 \end{aligned} \tag{XXI-12}$$

Ces expressions analytiques permettent de vérifier comment les solutions exactes obtenues respectent la conservation locale de l'énergie. Les calculs peuvent être

particulièrement laborieux. Quelques éléments de calculs sont présentés ci-dessous, sur l'exemple de la solution en rotation obtenue dans un chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= 0 \\
 \psi_1 &= (\eta - k_t) f_n(k_r r) \sin^n \theta \exp j(k_t x_t + n\varphi) \\
 \psi_2 &= j \exp j(k_t x_t + (n-1)\varphi) \sin^{n-1} \theta \left\{ -\sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) - n(\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \\
 \psi_3 &= j \cos \theta \sin^n \theta \exp j(k_t x_t + n\varphi) \left\{ k_r f_n'(k_r r) - n \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\}
 \end{aligned} \tag{XXI-13}$$

Calcul de J^t :

$$\begin{aligned}
 J^t &= \psi_0^* \psi_0 + \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 \\
 J^t &= (\eta - k_t)^2 \left\{ f_n(k_r r) \sin^n \theta \right\}^2 + k_r^2 \left\{ -\sin^{n+1} \theta f_n'(k_r r) - n \sin^{n-1} \theta (\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{k_r r} \right\}^2 \\
 &+ (\cos \theta \sin^n \theta)^2 k_r^2 \left\{ f_n'(k_r r) - n \frac{f_n(k_r r)}{k_r r} \right\}^2
 \end{aligned} \tag{XXI-14}$$

Sur ce mode particulier, la densité volumique d'énergie totale ne dépend ni du temps, ni de la variable spatiale φ .

Calcul de J^r :

$$\begin{aligned}
 J^r &= \psi_0 (\psi_2^* \cos \theta + \psi_3^* \sin \theta e^{j\varphi}) + \psi_1 (\psi_2^* \sin \theta e^{-j\varphi} - \psi_3^* \cos \theta) \\
 &+ \psi_2 (\psi_0^* \cos \theta + \psi_1^* \sin \theta e^{j\varphi}) + \psi_3 (\psi_0^* \sin \theta e^{-j\varphi} - \psi_1^* \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{XXI-15}$$

Pour la solution examinée, on a $\psi_0 = 0$:

$$J^r = \psi_1 (\psi_2^* \sin \theta e^{-j\varphi} - \psi_3^* \cos \theta) + \psi_2 (\psi_1^* \sin \theta e^{j\varphi}) + \psi_3 (-\psi_1^* \cos \theta) \tag{XXI-16}$$

Les exponentielles s'annulent par conjugaison dans les produits des fonctions d'ondes. Après cette annulation, il ne reste dans ψ_2 et ψ_3 que des termes purement imaginaires. On en déduit :

$$J^r = 0 \tag{XXI-17}$$

Calcul de J^θ :

$$\begin{aligned}
 rJ^\theta &= \psi_0 (-\psi_2^* \sin \theta + \psi_3^* \cos \theta e^{j\varphi}) + \psi_1 (\psi_2^* \cos \theta e^{-j\varphi} + \psi_3^* \sin \theta) \\
 &+ \psi_2 (-\psi_0^* \sin \theta + \psi_1^* \cos \theta e^{j\varphi}) + \psi_3 (\psi_0^* \cos \theta e^{-j\varphi} + \psi_1^* \sin \theta)
 \end{aligned} \tag{XXI-18}$$

Pour la solution examinée, on a $\psi_0 = 0$:

$$rJ^{\theta} = \psi_1(\psi_2^* \cos \theta e^{-j\varphi} + \psi_3^* \sin \theta) + \psi_2(\psi_1^* \cos \theta e^{j\varphi}) + \psi_3(\psi_1^* \sin \theta) \quad (\text{XXI-19})$$

Les exponentielles s'annulent par conjugaison dans les produits des fonctions d'ondes. Après cette annulation, il ne reste dans ψ_2 et ψ_3 que des termes purement imaginaires. On en déduit :

$$J^{\theta} = 0 \quad (\text{XXI-20})$$

Calcul de J^{φ} :

$$r \sin \theta J^{\varphi} = j(\psi_0 \psi_3^* e^{j\varphi} - \psi_1 \psi_2^* e^{-j\varphi} + \psi_2 \psi_1^* e^{j\varphi} - \psi_3 \psi_0^* e^{-j\varphi}) \quad (\text{XXI-21})$$

Pour la solution examinée, on a $\psi_0 = 0$:

$$r \sin \theta J^{\varphi} = j(-\psi_1 \psi_2^* e^{-j\varphi} + \psi_2 \psi_1^* e^{j\varphi}) \quad (\text{XXI-22})$$

On obtient :

$$J^{\varphi} = 2(k_t - \eta) \frac{f_n(k_r r)}{r} \sin^{2n-2} \theta \left\{ \sin^2 \theta k_r f_n'(k_r r) + n(\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r r)}{r} \right\} \quad (\text{XXI-23})$$

Puisque nous sommes en possession des courants de DIRAC, nous pouvons maintenant vérifier si ces courants qu'on peut associer à l'évolution de la densité d'énergie dans le temps et dans l'espace vérifient bien la relation de conservation locale de l'énergie.

Cette relation s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial J^t}{\partial x_t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 J^r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta J^{\theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial J^{\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{XXI-24})$$

Elle est vérifiée, car chacun des termes de cette divergence, pris séparément, est nul. Une analyse un peu plus détaillée montre que sur ces modes en rotation :

- La densité volumique d'énergie totale J^t ne dépend pas du temps, ni de la variable spatiale φ . Par contre, elle varie en fonction de r et de θ , et en fonction des modes qui sont excités.
- Les courants de DIRAC suivant r et θ étant nuls, il n'y a pas de flux d'énergie suivant ces directions.
- Le courant de Dirac suivant φ est non nul, ce qui traduit l'existence d'un flux d'énergie en relation avec la rotation angulaire de l'énergie dans cette direction. Ce flux d'énergie est uniforme car il ne dépend pas de φ . Il peut être rattaché à la rotation à vitesse constante de l'énergie suivant cette direction.

XXII

Equation de Dirac généralisée en coordonnées sphériques

L'obtention de solutions à l'équation de Dirac sous la forme de modes sphériques amène naturellement à s'interroger sur l'existence de telles solutions lorsque la particule est plongée dans un champ électromagnétique constant caractérisé par son potentiel scalaire et son potentiel vecteur, les deux pouvant être regroupés sous la forme d'un quadri-potentiel.

Ce problème a déjà été traité en coordonnées cartésiennes au chapitre XII. Nous proposons de le reprendre en coordonnées sphériques dans une approche un peu différente.

Il nous faut dans un premier temps déterminer l'équation de conservation de l'énergie entre deux référentiels liés par la relativité restreinte.

Nous adoptons comme point de départ un système de coordonnées cartésiennes et la forme de l'équation de KLEIN-GORDON invariante sous la transformation de LORENTZ :

$$\left\{ \left(j \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{q}{\hbar} A_\mu \right) \left(j \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{q}{\hbar} A_\mu \right) \right\} (\psi) = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 (\psi) \quad (\text{XXII-1})$$

Dans cette relation, les A_μ représentent les composantes du quadri-potentiel (ϕ/c , A_x , A_y , A_z). Afin d'alléger l'écriture nous posons, comme au chapitre XII :

$$\eta_t = \frac{q\phi}{\hbar c} \quad \eta_x = \frac{qA_x}{\hbar} \quad \eta_y = \frac{qA_y}{\hbar} \quad \eta_z = \frac{qA_z}{\hbar} \quad \eta = \frac{m_0 c}{\hbar} \quad (\text{XXII-2})$$

Le développement de l'équation (XXII-1) dans une métrique (+,-,-,-) nous donne :

$$\left\{ \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} - 2j\eta_t \frac{\partial}{\partial x_t} + \eta_t^2 \right) - \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2j\eta_x \frac{\partial}{\partial x} + \eta_x^2 \right) \right\} \left\{ \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2j\eta_y \frac{\partial}{\partial y} + \eta_y^2 \right) - \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2j\eta_z \frac{\partial}{\partial z} + \eta_z^2 \right) \right\} (\psi) = \eta^2 (\psi) \quad (\text{XXII-3})$$

Soit encore :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} - 2j\eta_t \frac{\partial}{\partial x_t} + \eta_t^2\right)(\psi) = \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2j\eta_x \frac{\partial}{\partial x} + \eta_x^2\right) + \\ \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2j\eta_y \frac{\partial}{\partial y} + \eta_y^2\right) + \\ \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2j\eta_z \frac{\partial}{\partial z} + \eta_z^2\right) \end{array} \right\} (\psi) + \eta^2(\psi) \quad (\text{XXII-4})$$

Le potentiel scalaire affecte le terme à gauche du signe égal, tandis que le potentiel vecteur affecte le terme de droite. Nous allons considérer séparément ces deux cas.

I – Le potentiel scalaire

Nous nous intéressons dans cette partie à l'effet du potentiel scalaire, et nous travaillons avec un potentiel vecteur nul, ce qui conduit à poser $\eta_x = \eta_y = \eta_z = 0$ dans l'équation (XXII-4) :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} - 2j\eta_t \frac{\partial}{\partial x_t} + \eta_t^2\right)(\psi) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\psi) + \eta^2(\psi) \quad (\text{XXII-5})$$

L'introduction des coordonnées sphériques fournit le laplacien sous la forme :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} - 2j\eta_t \frac{\partial}{\partial x_t} + \eta_t^2\right)(\psi) = -\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} (\psi) + \eta^2(\psi) \quad (\text{XXII-6})$$

Il ressort de l'analyse des modes sphériques du chapitre XVI que les modes stationnaires doivent vérifier la relation :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2} - 2j\eta_t \frac{\partial}{\partial x_t} + \eta_t^2\right)(\psi) = (k_r^2 + \eta^2)(\psi) \quad (\text{XXII-7})$$

Il apparaît alors une remarque déjà formulée d'une autre manière au chapitre XII sur la base d'observations relatives au système linéaire XII-11,12,13,14 : il est impossible de trouver une solution stationnaire en $\sin(k_t x_t)$ ou $\cos(k_t x_t)$ qui permette d'obtenir une équation de conservation de l'énergie déduite de (XXII-7).

Les solutions possibles apparaissent sous la forme :

$$\cos(k_t x_t) \pm j \sin(k_t x_t) = \exp(\pm j k_t x_t) \quad (\text{XXII-8})$$

Elles traduisent l'excitation de modes en quadrature dans des échanges entre énergie positive et énergie négative.

En reportant cette relation (XXII-8) dans (XXII-7), on obtient la relation de conservation de l'énergie qui doit être vérifiée par les solutions du système de Dirac en coordonnées sphérique dans un potentiel scalaire :

$$(\mathbf{k}_t^2 \pm 2k_t \eta_t + \eta_t^2) = (\mathbf{k}_r^2 + \eta^2) \quad (\text{XXII-9})$$

Soit encore :

$$(\mathbf{k}_t \pm \eta_t)^2 = (\mathbf{k}_r^2 + \eta^2) \quad (\text{XXII-10})$$

Il s'agit de la relation obtenue au chapitre XII, transposée en coordonnées sphériques.

Le système de Dirac généralisé au potentiel scalaire en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\begin{aligned} (\eta + \eta_t) \psi_0 &= j \left\{ \frac{\partial \psi_0}{\partial x_t} + \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \sin \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\sin \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \cos \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \right) - \frac{j e^{-j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} \right\} \\ (\eta + \eta_t) \psi_1 &= j \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_t} + \sin \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\cos \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \right) + \frac{j e^{j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right\} \\ (\eta - \eta_t) \psi_2 &= j \left\{ -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_t} - \cos \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \sin \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \cos \theta e^{-j\varphi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{j e^{-j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right\} \\ (\eta - \eta_t) \psi_3 &= j \left\{ -\frac{\partial \psi_3}{\partial x_t} - \sin \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(-\cos \theta e^{j\varphi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) - \frac{j e^{j\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \varphi} \right\} \end{aligned} \quad (\text{XXII-11})$$

En utilisant la solution exacte XXI-13 par exemple, on obtient la solution exacte dans un potentiel scalaire sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0 \\ \psi_1 &= (\eta - k_t - \eta_t) f_n(k_r, r) \sin^n \theta \exp j(k_t x_t + n\varphi) \\ \psi_2 &= -j \exp j(k_t x_t + (n-1)\varphi) \sin^{n-1} \theta \left\{ \sin^2 \theta k_r f_n'(k_r, r) + n(\cos^2 \theta + 1) \frac{f_n(k_r, r)}{r} \right\} \\ \psi_3 &= j \cos \theta \sin^n \theta \exp j(k_t x_t + n\varphi) \left\{ k_r f_n'(k_r, r) - n \frac{f_n(k_r, r)}{r} \right\} \end{aligned} \quad (\text{XXII-12})$$

Elle est associée à l'équation de conservation de l'énergie :

$$(\mathbf{k}_t + \eta_t)^2 = (\mathbf{k}_r^2 + \eta^2) \quad (\text{XXII-13})$$

II – Le potentiel vecteur

De (XXII-4), nous déduisons l'équation de KLEIN-GORDON écrites en coordonnées cartésiennes pour un potentiel scalaire nul et un potentiel vecteur constant :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}(\psi) = \left\{ \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2j\eta_x \frac{\partial}{\partial x} + \eta_x^2 \right) + \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2j\eta_y \frac{\partial}{\partial y} + \eta_y^2 \right) + \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2j\eta_z \frac{\partial}{\partial z} + \eta_z^2 \right) + \eta^2 \right\} (\psi) \quad (\text{XXII-14})$$

Soit encore en réarrangeant les termes :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}(\psi) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2j\frac{\partial}{\partial x}\eta_x - 2j\frac{\partial}{\partial y}\eta_y - 2j\frac{\partial}{\partial z}\eta_z + \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 + \eta^2 \right) (\psi) \quad (\text{XXII-15})$$

Le passage aux coordonnées sphériques s'effectue en substituant le laplacien, ainsi que les dérivées partielles déjà rencontrées au chapitre XV :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \sin \varphi \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \cos \varphi \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{XXII-16})$$

Les composantes relatives au potentiel vecteur sont transformées suivant les relations :

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{qA_x}{\hbar} = \frac{qA_r}{\hbar} \sin \theta \cos \varphi = \eta_r \sin \theta \cos \varphi \\ \eta_y &= \frac{qA_y}{\hbar} = \frac{qA_r}{\hbar} \sin \theta \sin \varphi = \eta_r \sin \theta \sin \varphi \\ \eta_z &= \frac{qA_z}{\hbar} = \frac{qA_r}{\hbar} \cos \theta = \eta_r \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{XXII-17})$$

On en déduit l'équation de KLEIN-GORDON en coordonnées sphériques dans un potentiel vecteur :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}(\psi) = \left(\begin{aligned} &-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &- 2j \left(\frac{\partial}{\partial r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \sin \varphi \right) \eta_r \sin \theta \cos \varphi \\ &- 2j \left(\frac{\partial}{\partial r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \cos \varphi \right) \eta_r \sin \theta \sin \varphi \\ &- 2j \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \right) \eta_r \cos \theta \\ &+ (\eta_r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\eta_r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (\eta_r \cos \theta)^2 + \eta^2 \end{aligned} \right) (\psi) \quad (\text{XXII-18})$$

Après réduction des termes qui s'annulent, il reste :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}(\psi) = \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ -2j \frac{\partial}{\partial r} \eta_r + \eta_r^2 + \eta^2 \end{array} \right) (\psi) \quad (\text{XXII-19})$$

Si nous exigeons que la fonction d'onde ψ se présente sous la forme de modes stationnaires sphériques, cela conduit à l'expression suivante de conservation de l'énergie :

$$k_t^2(\psi) = \left(k_r^2 - 2j \frac{\partial}{\partial r} \eta_r + \eta_r^2 + \eta^2 \right) (\psi) \quad (\text{XXII-20})$$

Cette relation est complètement analogue à la relation (XXII-7) obtenue pour le potentiel scalaire.

Il apparaît alors une difficulté qui n'a pu être surmontée par l'auteur : la dépendance en r des fonctions de BESSEL sphériques présentes dans la solution stationnaire ne permet pas de rendre la relation de conservation de l'énergie (XXII-20) indépendante de r . Il s'ensuit qu'aucune formulation d'une solution exacte à l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques et sous un potentiel vecteur constant n'a pu être formulée.

XXIII

Conclusion générale

I – Sur la conservation de l'énergie

L'importance de cette conservation a été maintes fois rappelée dans ce manuscrit. Elle est de deux sortes : l'une porte sur la conservation de l'énergie lors d'un changement de référentiel galiléen, l'autre sur la conservation locale de l'énergie. Les deux contribuent à la cohérence des solutions présentées.

I-1 la conservation de l'énergie par changement de référentiel

Elle est liée au fait que la pseudo-norme du quadrivecteur impulsion énergie :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} m \frac{dx}{dt} \\ m \frac{dy}{dt} \\ m \frac{dz}{dt} \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{XXIII-1})$$

qui s'exprime explicitement sous la forme :

$$E^2 - p^2c^2 = \text{cte} \quad (\text{XXIII-2})$$

est une constante qui ne dépend pas du référentiel galiléen dans lequel elle est évaluée. Cette constante étant égale à l'énergie de la masse au repos élevée au carré, on en déduit que dans tout référentiel galiléen dans lequel la particule est susceptible d'évoluer, la relation suivante est vérifiée :

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \quad (\text{XXIII-3})$$

Dans le référentiel dans lequel elle est au repos, son énergie impulsionnelle est nulle, et son énergie totale est égale à son énergie de masse. Dans un référentiel dans lequel elle n'est plus au repos, son énergie impulsionnelle prend une valeur finie qui accroît son énergie totale dans le rapport donné par le respect de la relation (XXIII-2) ou (XXIII-3) ci-dessus.

Lorsqu'on transpose ces notions à la mécanique quantique, on obtient la relation qui traduit les mêmes phénomènes de conservation énergétique par changement de référentiel :

$$\hbar^2 c^2 k_t^2 = \hbar^2 c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + (m_0 c^2)^2 \quad (\text{XXIII-4})$$

Soit encore après division des deux membres de l'égalité par $\hbar^2 c^2$;

$$k_t^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \eta^2 \quad (\text{XXIII-5})$$

Lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre référentiel galiléen, cette relation exprime le fait que dans les variations des 3 sortes d'énergies différentes, l'énergie de masse reste constante, tandis que l'énergie impulsionnelle et l'énergie ondulatoire varient dans les proportions données par la relation (XXIII-4)

Parce que l'équation de DIRAC relativiste :

$$\left(j\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi(x^\mu) = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{XXIII-6})$$

est invariante par changement de référentiel galiléen, cela impose de fait que les solutions qui s'expriment en fonction de k_t , k_x , k_y , k_z , m_0 , vérifient l'équation de conservation de l'énergie (XXIII-4).

II – Sur la forme imaginaire des solutions de l'équation de DIRAC

Les solutions de l'équation de DIRAC sont représentées par un bispineur. Il est admis que chacun de ces spineurs représente pour l'un la particule, pour l'autre son antiparticule.

Dès lors que la particule est en mouvement, il apparaît que les deux spineurs ne sont plus indépendants, mais étroitement corrélés, dans une relation dont le sens physique échappe à la mécanique quantique classique. En particulier, la présence de termes imaginaires ne trouve aucune explication satisfaisante, si on admet que les fonctions d'onde élevées au carré représentent des densités de probabilité.

Dans une approche énergétique, les fonctions d'onde élevées au carré sont homogènes à une densité volumique d'énergie. Or toute la physique est construite autour d'une représentation énergétique signée, qui peut être positive ou négative. On admet par exemple que l'énergie totale d'un satellite en orbite autour de la terre est négative, et on justifie par là le fait qu'il ne puisse échapper à l'attraction terrestre. L'analyse présentée en première partie montre également que les deux spineurs qui sont solutions de l'équation de DIRAC ont une énergie de masse opposée lorsque la particule est au repos. Dès lors, si l'on considère une quantité qui représente la racine carré de cette énergie, ou plus exactement la racine carré de la densité volumique d'énergie, il n'y a aucune inquiétude à voir apparaître le nombre complexe $j = \text{racine}(-1)$ qui indique simplement qu'il s'agit d'une quantité relative à une énergie négative. Ainsi, dans les échanges d'énergie que traduisent les solutions sous formes de modes stationnaires, la présence du nombre complexe $j = \text{racine}(-1)$ fait simplement référence à une énergie qui doit être comptée négativement.

Dans une approche énergétique, les courants de DIRAC prennent un sens physique clair : ils sont homogènes à une densité volumique d'énergie, et vérifient ainsi naturellement l'équation de conservation locale de l'énergie.

III – Conclusion

La mécanique quantique ne pourra se satisfaire très longtemps encore de l'impasse dans laquelle elle est maintenue par la méconnaissance des phénomènes physiques sous-jacents à la dualité onde-corpuscule.

Parce que l'équation de DIRAC est l'équation qui décrit le mieux, à ce jour, le comportement des particules qui composent l'infiniment petit, on peut penser en tirer des informations significatives si on est capable d'en extraire des solutions exactes.

Le traitement général de cette équation tel qu'il est adopté aujourd'hui, et tel qu'il est développé en première partie, ne livre pas toutes les informations exploitables de cette équation.

Certaines solutions ne sont atteignables qu'au prix de conditions supplémentaires portant sur la conservation de l'énergie. En associant ces conditions à l'hypothèse de solutions sous la forme de modes stationnaires, il est possible de montrer qu'on peut construire une vision énergétique et déterministe de la physique de l'infiniment petit.

L'analyse des solutions en coordonnées cartésiennes permet de vérifier la cohérence complète de ces solutions avec la vision probabiliste de l'Ecole de Copenhague.

L'obtention de solutions en coordonnées sphériques confirme cette cohérence avec plusieurs éléments théoriques et expérimentaux.

La dualité onde-corpuscule est confirmée comme un échange d'énergie entre énergie de masse, et énergie ondulatoire. La présence de termes imaginaires dans ces échanges montre qu'il y a en permanence des transferts d'énergie entre la particule d'énergie positive et son antiparticule d'énergie négative. C'est cet échange, pris comme hypothèse plausible, qui a permis l'accès par un raisonnement heuristique à des solutions exactes de l'équation de DIRAC en coordonnées sphériques.

La notion de spin $\frac{1}{2}$, et son étrange rotation de 4π pour retrouver l'état initial trouve une explication physique extrêmement simple dans une des solutions exactes : lorsque la composante qui porte l'énergie impulsionnelle suivant r tourne de 2π pour revenir à son point de départ, la composante qui porte l'énergie impulsionnelle suivant φ et la composante qui porte la dualité onde-corpuscule tournent de 4π .

Le principe d'incertitude n'est pas aussi exclusif qu'en coordonnées cartésiennes, mais on peut noter qu'à un instant donné, l'énergie de masse et l'énergie impulsionnelle ne sont jamais maximale au même endroit, ce qui suffit à montrer qu'en un point de l'espace on ne peut avoir la totalité de l'information concernant ces deux types d'énergie. Puisque nous ne pouvons avoir une mesure de l'impulsion ou de la position que par un échange d'énergie avec ces deux quantités, ces mesures sont nécessairement entachées d'une incertitude lorsqu'elles sont effectuées en un même point de l'espace.

Ce travail de recherche est proposé à la communauté scientifique intéressée par ce sujet pour être partagé, critiqué, amendé et/ou peut être conforté.

BIBLIOGRAPHIE

Première Partie

La mécanique quantique repose sur les trois équations fondamentales de SCHRODINGER, KLEIN-GORDON et DIRAC et sur une interprétation probabiliste induite par le principe d'incertitude de HEISENBERG.

La première partie de ce document s'intéresse essentiellement à l'équation de DIRAC et à son traitement général tel qu'il est présenté aujourd'hui par de nombreux scientifiques. La bibliographie est abondante à ce niveau. Les documents internet suivants ont été consultés sur la période 2010-2015.

Sur la mécanique quantique en général :

www.phys.ens.fr/cours/cours-mip/MagL6Complet.pdf
www.phys.ens.fr/cours/cours-mip/
www.eleves.ens.fr/home/bolgar/Mécanique%20quantique.pdf
www.phys.ens.fr/~dalibard/Notes_de_cours/X_MQ_2003.pdf
www.phys.ens.fr/~sinatra/cours.pdf
www.lcar.ups-tlse.fr/IMG/pdf/Poly-2.pdf
http://daniel.farquet.com/wp-content/uploads/Physique_quantique_relativiste.pdf
<http://dirac.cnrs-orleans.fr/~kneller/MecaniqueQuantique/cours.pdf>
http://aflb.ensmp.fr/LDB-oeuvres/De_Broglie_Kracklauer.htm
https://cp3.irmp.ucl.ac.be/~maltoni/PHY1222/QM_all.pdf
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0404009>
<http://www.lct.jussieu.fr/enseignement/PDF/SilviPolytech.pdf>
<http://iate.oac.uncor.edu/~manuel/libros/Modern%20Physics/Quantum%20Mechanics/Relativistic%20Quantum%20Mechanics.%20Wave%20Equations.%203rd%20ed.%20-%20W.%20Greiner.pdf>
W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics – wave equations*. 3rd edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 2000, ch. 6.
V G. Bagrov, D. Gitman, *The Dirac equation and its solutions*, De Gruyter- Berlin/Boston, 2014.
C. Cohen Tannoudji, B.Diu, F.Laloë, *Mécanique quantique*, tomes 1 et 2, Hermann, Paris (1973)
C. Aslangul, *Mécanique quantique*, Tomes 1 et 2, de Boeck, Bruxelles (2007)
J.-L. Basdevant, J. Dalibard, *Mécanique quantique*, Les éditions de l'Ecole polytechnique, Palaiseau (2004)
R.P. Feynmann, *Le cours de physique de Feynman : Mécanique quantique*, InterEditions, Paris (1979), réédition par Dunod(2014)

Sur l'équation de DIRAC :

<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00233025/document>
www.phy.ohiou.edu/~elster/lectures/advqm_4.pdf
www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/Cours/dirac09.pdf
<http://aflb.ensmp.fr/AFLB-351/aflb351m687.pdf>
<http://aflb.ensmp.fr/AFLB-241/aflb241p175.pdf>
<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/publi/diracintro/diracintro.html>
<http://physics.gu.se/~tfkhj/TOPO/DiracEquation.pdf>
<http://arxiv.org/vc/quant-ph/papers/0607/0607001v1.pdf>
<http://www.physics.udel.edu/~msafrono/PDF/L23.pdf>

<http://patrick.vaudon.pagesperso-orange.fr>

<http://aflb.ensmp.fr/AFLB-26j/aflb26jp149.pdf>

<http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:019290010011039200>

http://www.physics-quest.org/Book_Chapter_Dirac.pdf

http://www.ktf.franko.lviv.ua/users/vasya/vk_files/science/articles/ROMP_2002.pdf

Sur les spineurs :

<http://arxiv.org/pdf/1312.3824>

<http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/longuemare/SpineursDeDirac.pdf>

<http://aflb.ensmp.fr/AFLB-26j/aflb26jp095.pdf>

Luc Rozoy, *De $E = mc^2$ à l'équation de Dirac : une introduction heuristique aux spineurs*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996)

<http://aflb.ensmp.fr/AFLB-26j/aflb26jp095.pdf>

<http://www.quimica.ufpr.br/edulsa/cq115/artigos/ed072p412.pdf>

https://www.researchgate.net/publication/28233857_On_the_relativistic_concept_of_the_Dirac's_electron_spin

<http://didel.script.univ-paris->

[diderot.fr/claroline/backends/download.php?url=LzA1X0NoYXBpdHJlX1hWL1NwaW5fZXRfbG9jYWxpc2F0aW9uX3NwYXRpby10ZW1wb3JlbGxlnBkZg%3D%3D&cidReset=true&cidReq=53PH3PP8](http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/backends/download.php?url=LzA1X0NoYXBpdHJlX1hWL1NwaW5fZXRfbG9jYWxpc2F0aW9uX3NwYXRpby10ZW1wb3JlbGxlnBkZg%3D%3D&cidReset=true&cidReq=53PH3PP8)

Deuxième Partie

La deuxième partie traite de la recherche de solutions exactes à l'équation de DIRAC sous la forme de modes stationnaires. Il n'a été trouvé aucun document en lien direct avec cette problématique. Les publications consultées concernent la recherche de solutions exactes à l'équation de DIRAC associées à des potentiels variés ou associées à des problèmes gravitationnels

<http://arxiv.org/pdf/1410.5810v4>

<http://arxiv.org/abs/1305.4370>

<https://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103858214>

Physics Letters A 365 (2006) 215-219

Journal of Modern Physics, 2012, 3, 170-179

Physics Letters A 339 (2005) 283-287

Math. Meth. Appl. Sci., 23, 769-776(2000)

Pramana, Vol.12, No. 5, May 1979, pp. 475-480

Cent. Eur. J. Phys. 12(4) 2014 266-273

<http://www.hindawi.com/journals/isrn/2013/310392/>

http://www.nipne.ro/rjp/2005_50_1-2/0019_0036.pdf

<http://www.strings.ph.qmul.ac.uk/~andreas/RWQF/QFTnotes.pdf>

<http://arxiv.org/pdf/1103.0716>

Z.G. Zhang, *Exact solutions of time-dependent Dirac equations and the quantum-classical correspondence*, The Royal Swedish Academy of Sciences, Physica Scripta, Volume 74, Number 2.

N.L. Chuprikov, *The stationary Dirac equation as a generalized Pauli equation for two quasiparticles*, arXiv:1410.5810v4.

A.D. Alhaidari, *Solution of the Dirac equation for potential interaction*, arXiv:math-ph/0211049v2.

B. Ita and A. Ikeuba, *Solutions of the Dirac Equation with Gravitational plus Exponential Potential*, Applied Mathematics, Vol. 4 No. 10C, 2013, pp. 1-6.

E.J. Kanellopoulos; Th.V. Kanellopoulos; K.Wildermuth, *Exact solution of the Dirac equation with a central potential*. Comm. Math. Phys. 27 (1972), no. 2, 155—161

<http://patrick.vaudon.pagesperso-orange.fr>

S.H. Donga, Q.M. Zhong, *Exact solutions to the Dirac equation with a Coulomb potential in 2+1 dimensions*, Physics Letters A, Volume 312, Issues 1–2, 2 June 2003, Pages 78–83

Troisième Partie

La troisième partie traite de la recherche de solutions exactes à l'équation de DIRAC sous la forme de modes stationnaires, mais en coordonnées sphériques. Comme pour le chapitre précédent, il n'a été trouvé aucun document en lien direct avec cette problématique.

Les publications consultées concernent la forme de l'équation de DIRAC dans un repère sphérique ou en coordonnées curvilignes, ainsi que la recherche de solutions classiques lorsque cette équation est associée à des potentiels à symétrie sphérique.

<http://arxiv.org/abs/hep-th/0501004>

http://www.nipne.ro/rjp/2005_50_1-2/0019_0036.pdf

http://rmf.smf.mx/pdf/rmf/42/1/42_1_1.pdf

<https://journals.iupui.edu/index.php/ias/article/view/5437>

<http://www.hindawi.com/journals/ahep/2015/612757/ref/>

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00907340/document>

<http://arxiv.org/abs/hep-th/9405033>

https://www.researchgate.net/publication/274264737_A_self-adjoint_decomposition_of_the_radial_momentum_operator

<http://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v54n2/v54n2a8.pdf>