



**HAL**  
open science

# DIMINUTION DU NIVEAU ET LEMME D'IHARA POUR LES GROUPES UNITAIRES

Pascal Boyer

► **To cite this version:**

Pascal Boyer. DIMINUTION DU NIVEAU ET LEMME D'IHARA POUR LES GROUPES UNITAIRES. 2015. hal-01222967v1

**HAL Id: hal-01222967**

**<https://hal.science/hal-01222967v1>**

Preprint submitted on 2 Nov 2015 (v1), last revised 19 May 2019 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# DIMINUTION DU NIVEAU ET LEMME D'IHARA POUR LES GROUPES UNITAIRES

*par*

Boyer Pascal

---

**Résumé.** — Le résultat principal de ce travail est la preuve de certaines instances de ce que depuis les travaux de Clozel-Harris-Taylor sur Sato-Tate, on appelle le lemme d'Ihara. Ces instances sont liées aux hypothèses restrictives portées par l'idéal maximal de l'algèbre de Hecke par lequel on localise l'espace des formes automorphes modulo  $l$  du groupe unitaire considéré. La stratégie consiste à transférer cet énoncé en une propriété similaire portant sur la cohomologie d'une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor que l'on montre en prouvant une propriété de diminution du niveau. La preuve d'un tel résultat repose sur l'absence de torsion dans la localisation de la cohomologie de la variété de Shimura d'après [7] et de la description des réseaux des faisceaux pervers d'Harris-Taylor à l'intérieur du faisceau pervers des cycles évanescents de ces variétés d'après [6] et [4].

**Abstract (Lowering the level and Ihara's lemma for some unitary groups)**

The main result of this paper is the proof of some new instances of the so called Ihara's lemma as it was introduced in their work on Sato-Tate by Clozel-Harris-Taylor. These new cases are linked to the particular hypothesis on the maximal ideal of the Hecke algebra by which we localize the space of automorphic forms modulo  $l$  of the unitary group. The strategy consist to go through the same property of genericness of subspace of the localized cohomology of some Kottwitz-Harris-Taylor Shimura variety, by proving some sort of level lowering property. The proof relies on the freeness of the localized cohomology of these Shimura variety as it is proved in [7] and the description of the lattices in the Harris-Taylor perverse sheaves in the vanishing cycle perverse sheaf of these varieties, cf. [6] and [4].

## Table des matières

Introduction.....	2
1. Géométrie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor.....	5
1.1. Données de Shimura.....	5

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

**Mots clefs.** — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

1.2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	7
1.3. Faisceau pervers des cycles évanescents.....	9
1.4. Structures entières.....	10
2. Cohomologie entière.....	14
2.1. Localisation en un idéal non pseudo-Eisenstein.....	14
2.2. Représentations elliptiques et cohomologie.....	15
2.3. Du lemme d'Ihara à la cohomologie.....	19
3. Diminution du niveau : cas supercuspidal.....	20
3.1. Réseaux globaux.....	20
3.2. Combinatoire.....	21
3.3. Lemme d'Ihara.....	24
Références.....	25

## Introduction

Soit  $F = F^+E$  un corps CM avec  $E/\mathbb{Q}$  quadratique imaginaire. Pour  $\overline{B}$  une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  munie d'une involution de seconde espèce  $*$  et  $\beta \in \overline{B}^{*-1}$ , on considère le groupe des similitudes  $\overline{G}/\mathbb{Q}$  défini pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  par

$$\overline{G}(R) := \{(\lambda, g) \in R^\times \times (\overline{B}^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^{\sharp_\beta} = \lambda\}$$

avec  $\overline{B}^{op} = \overline{B} \otimes_{F,c} F$  où  $c = *|_F$  est la conjugaison complexe et  $\sharp_\beta$  l'involution  $x \mapsto x^{\sharp_\beta} = \beta x^* \beta^{-1}$ . On note  $\overline{G}_0$  le groupe des similitudes associé. Pour  $p = uu^c$  un premier décomposé dans  $E$ , on a

$$\overline{G}(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{w|u} (\overline{B}_v^{op})^\times$$

où  $w$  décrit les places de  $F$  au dessus de  $u$ . On suppose en outre que :

- $\overline{G}_0(\mathbb{R})$  est compact,
- si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  qui n'est pas décomposée dans  $E$  alors  $G(\mathbb{Q}_x)$  est quasi-déployé,
- qu'il existe une place  $v_0$  de  $F$  au dessus de  $u$  telle que  $\overline{B}_{v_0} \simeq D_{v_0,d}$  est l'algèbre à division centrale sur le complété  $F_{v_0}$  de  $F$  à la place  $v_0$ , d'invariant  $\frac{1}{d}$ .

Soit à présent  $l$  un nombre premier distinct de  $p$  et  $S$  un ensemble fini de premiers de  $\mathbb{Q}$  contenant  $l$  : on note  $\text{Spl}$  (resp.  $\text{Spl}^S$ ) l'ensemble des places finies de  $F$  (resp. et  $p_w := w|_{\mathbb{Q}} \notin S$ ) telles que  $p_w$  est décomposé dans  $E$  et le facteur de  $\overline{G}(\mathbb{Q}_{p_w})$  correspondant à  $w$  soit isomorphe à  $GL_d(F_w)$ . Soit alors

$$\mathbb{T}_S = \mathbb{Z}_l[T_{w,1}, \dots, T_{w,d} : w \in \text{Spl}^S]$$

l'algèbre de Hecke associée aux opérateurs de Hecke non ramifiés aux places  $w \in \text{Spl}^S$ . Pour  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $\mathbb{T}_S$  et  $w \in \text{Spl}^S$ , on note

$$S_{\mathfrak{m}}(w) = \left\{ \frac{\overline{T_{w,i}}}{\overline{T_{w,i-1}}}, i = 1, \dots, d \right\},$$

le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo  $l$  en  $w$  associé à  $\mathfrak{m}$ , où on a posé  $T_{w,0} = 1$ .

Les idéaux premiers minimaux de  $\mathbb{T}_S$  sont ceux au dessus de l'idéal nul de  $\mathbb{Z}_l$  et sont donc en bijection naturelle avec les idéaux premiers de  $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ . Ainsi pour  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  un tel idéal premier minimal,  $(\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)/\tilde{\mathfrak{m}}$  est une extension finie  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  de  $\mathbb{Q}_l$ .

À un idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}}$  cohomologique est associé une classe d'équivalence proche  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  au sens de [12], i.e. un ensemble fini de représentations automorphes irréductibles  $\Pi$  non ramifiées aux places  $w \notin S$  telles que la réduction modulo  $l$  de ses paramètres de Satake est le multi-ensemble  $S_{\mathfrak{m}}(w)$ . On note

$$\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}} : G_F := \text{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_d(\bar{\mathbb{Q}}_l)$$

la représentation galoisienne associée à un tel  $\Pi$  d'après [11] et [12], laquelle est nécessairement bien définie à isomorphisme près d'après le théorème de Cebotarev. Les valeurs propres de  $\text{Frob}_w$  de la réduction modulo  $l$ ,  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}} : G_F \longrightarrow GL_d(\bar{\mathbb{F}}_l)$  sont alors données par le multi-ensemble  $S_{\mathfrak{m}}(w)$ . La version du lemme d'Ihara pour  $\bar{G}$  est la conjecture suivante.

**Conjecture. — (Lemme d'Ihara)** Soient

- $\bar{U}$  un sous-groupe ouvert compact de  $\bar{G}(\mathbb{A})$  tel que pour toute place  $w \in \text{Spl}^S$ , sa composante locale  $\bar{U}_w$  est le sous-groupe compact maximal  $GL_d(\mathcal{O}_w)$ ,
- $w_0 \in \text{Spl}^S$  et
- $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $\mathbb{T}_S$  tel que  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est absolument irréductible.

Si  $\bar{\pi}$  est une sous-représentation irréductible de  $\mathcal{C}^\infty(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A}) / \bar{U}^{w_0}, \bar{\mathbb{F}}_l)$ , où  $\bar{U} = \bar{U}_{w_0} \bar{U}^{w_0}$ , alors la composante locale  $\bar{\pi}_{w_0}$  de  $\bar{\pi}$  en  $w_0$  est générique.

*Remarque :* cette version en dimension supérieure du classique lemme d'Ihara pour  $GL_2$  est due à Clozel-Harris-Taylor dans leur preuve de la conjecture de Sato-Tate. Pour contourner cette conjecture, Taylor inventa, peu après, ce que désormais on appelle « Ihara avoidance », qui lui permit donc de faire l'automorphie nécessaire pour prouver la conjecture de Sato-Tate. Malgré cela l'obtention du lemme d'Ihara soulève toujours un très vif intérêt, cf. par exemple les travaux de Clozel et Thorne [8], ou ceux d'Emerton et Helm [10].

Dans cet article, nous allons prouver cette conjecture sous les conditions restrictives suivantes portant sur  $\mathfrak{m}$ .

- (H1) Il existe une place  $v_1 \in \text{Spl}$  telle que la restriction  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m},v_1}$  de  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  au groupe de décomposition en  $v_1$  est irréductible,
- (H2) Il existe  $w_1 \in \text{Spl}^S$  tel que  $S_{\mathfrak{m}}(w_1)$  ne contient aucun sous-multi-ensemble de la forme  $\{\alpha, q_{w_1}\alpha\}$  où  $q_{w_1}$  est le cardinal du corps résiduel de  $F_{w_1}$ ,
- (H3) L'image de  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m},w_0}$  dans son groupe de Grothendieck, est sans multiplicités.

La stratégie consiste à considérer la cohomologie de la tour de variétés de Shimura  $X_{\mathcal{I}}$  associée au groupe des similitudes  $G$  où  $G/\mathbb{Q}$  est tel que

- $G(\mathbb{A}^\infty) = \bar{G}(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times GL_d(F_{v_0}) \times \prod_{\substack{w|u \\ w \neq v_0}} (\bar{B}_w^{op})^\times$ ,
- $G(\mathbb{R})$  a pour signatures  $(1, d-1) \times (0, d) \times \cdots \times (0, d)$ .

En calculant la cohomologie de  $X_U$  à l'aide de la suite spectrale des cycles évanescents à la place  $v_0$ , on construit tout d'abord une sous-représentation irréductible  $\pi$  du localisé  $H^{d-1}(X_U, \overline{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$  en  $\mathfrak{m}$  de  $H^{d-1}(X_U, \overline{\mathbb{F}}_l)$  telle que  $\pi^{\infty, v_0} \simeq \overline{\pi}^{\infty, v_0}$ . On est ainsi ramener à prouver que  $\pi_{w_0}$  est générique.

Avant d'expliquer la stratégie, considérons le raisonnement suivant dans le cas  $d = 2$ . Supposons qu'il existe  $\tilde{\mathfrak{m}}$  tel que

- (a) pour tout idéal premier  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ , la composante locale en  $w_0$  de  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  est non ramifiée,
- (b) qu'il existe un tel idéal premier avec  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0} \simeq \chi_{w_0, 1} \times \chi_{w_0, 2}$  tel que  $\chi_{w_0, 1} \chi_{w_0, 2}^{-1} = \nu$ , et
- (c) que l'ordre de  $q_{w_0}$  modulo  $l \geq 3$  est égal à 2.

De (a), en utilisant la suite spectrale des cycles évanescents à la place  $w_0$ , on en déduit que

$$H^1(X_U, \overline{\mathbb{F}}_l) = H^1(X_{U, \overline{s}_{w_0}}^{-1}, \Psi(\overline{\mathbb{F}}_l))$$

où  $X_{U, \overline{s}_{w_0}}^{-1}$  est la fibre spéciale géométrique de  $X_U$  en  $w_0$  privée de ses points supersinguliers. Classiquement cette cohomologie est une induite parabolique et d'après (b) et (c), la seule représentation irréductible non dégénérée sous-quotient de la réduction modulo  $l$  de  $\chi_{w_0, 1} \times \chi_{w_0, 1} \nu$  est cuspidale et ne peut donc pas être une sous-représentation de  $H^1(X_U, \overline{\mathbb{F}}_l)$ . Ainsi, si le lemme d'Ihara est vrai, pour  $\mathfrak{m}$  vérifiant les points (b) et (c) ci-dessus, le point (a) doit être faux, autrement dit il existe un  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  tel que  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}$  est une représentation de Steinberg tordue par un caractère. En d'autres termes, on a une propriété de diminution du niveau.

Dans un premier temps, nous allons prouver un résultat similaire de diminution du niveau. Plus précisément, pour un idéal premier  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ , la réduction modulo  $l$  de  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}$  qui ne dépend que de  $\mathfrak{m}$ , a un support supercuspidal  $\mathcal{S}_{w_0}(\mathfrak{m})$  qui, par hypothèse sur  $\mathfrak{m}$ , est sans multiplicité. On décompose alors

$$\mathcal{S}_{w_0}(\mathfrak{m}) = \coprod_{\varrho} \mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$$

selon les classes d'équivalence inertielles  $\varrho$  de  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles d'un  $GL_{g(\varrho)}(F_{w_0})$  pour  $1 \leq g(\varrho) \leq d$ . Pour chaque  $\varrho$  on note alors

$$l_1(\varrho) \leq \dots \leq l_{r(\varrho)}(\varrho)$$

de sorte que  $\mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$  puisse s'écrire comme la réunion de  $r(\varrho)$  segments de Zelevinsky non liés

$$[\varrho \nu_i^k, \overline{\rho} \nu^{k+l_i(\varrho)}] = \{\varrho \nu^k, \varrho \nu^{k+1}, \dots, \varrho \nu^{k+l_i(\varrho)}\}.$$

**Proposition.** — *Il existe un idéal premier  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  tel que*

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0} \simeq \times_{\varrho} \Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho)$$

où pour tout  $\varrho$ , il existe des représentations irréductibles cuspidales  $\pi_1(\varrho), \dots, \pi_{r(\varrho)}(\varrho)$  de  $GL_{g(\varrho)}(F_v)$  telles que

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0} \simeq \text{St}_{l_1(\varrho)}(\pi_1(\varrho)) \times \dots \times \text{St}_{l_{r(\varrho)}(\varrho)}(\pi_{r(\varrho)}(\varrho)).$$

On exploite alors la description entière du faisceau pervers des cycles évanescents, donnée dans [6] et faisant intervenir les réseaux d'induction construits dans [3] pour prouver le lemme d'Ihara sous les hypothèses restrictives précédentes.

Finissons cette introduction par quelques remarques sur ces hypothèses restrictives. On utilise tout d'abord (H1) au §3.1, pour montrer que le réseau de la cohomologie entière de la variété de Shimura localisée en  $\mathfrak{m}$ , s'écrit comme un produit tensoriel d'un réseau automorphe par un réseau galoisien. La contrainte (H2) intervient pour s'assurer que la partie localisée de la cohomologie considérée est sans torsion, d'après [4]. Enfin (H3) est utilisée pour contrôler la combinatoire pour

- d'une part montrer, théorème 2.2.4, que les localisés en  $\mathfrak{m}$  de la cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor sont sans torsion et
- d'autre part, proposition 3.2.1, faire la diminution du niveau à l'aide du contrôle des sous-espaces irréductibles d'une induite, cf. le lemme 3.2.3.

Clairement ces hypothèses ne sont pas optimales et il devrait être possible, avec la même stratégie, d'en relâcher les contraintes.

## 1. Géométrie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor

**1.1. Données de Shimura.** — On fixe un nombre premier  $l$  relatif aux coefficients dont on prend la cohomologie. Par la suite les différents nombres premiers qui interviendront, seront toujours supposés être distincts de  $l$ .

Soit  $F = F^+E$  un corps CM avec  $E/\mathbb{Q}$  quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel  $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$  et tel que  $l$  est non ramifié dans  $E$ . Pour  $v$  une place de  $F$ , on notera  $F_v$  le complété du localisé de  $F$  en  $v$ ,  $\mathcal{O}_v$  son anneau des entiers de  $F_v$ ,  $\varpi_v$  une uniformisante et  $q_v$  le cardinal du corps résiduel  $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$ .

**1.1.1. Notation.** — On note  $\nu$  le caractère de  $F_v^\times$  défini par  $\alpha \mapsto q_v^{-\text{val}(\alpha)}$ .

Soit  $B$  une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  telle qu'en toute place  $x$  de  $F$ ,  $B_x$  est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose  $B$  munie d'une involution de seconde espèce  $*$  telle que  $*|_F$  est la conjugaison complexe  $c$ . Pour  $\beta \in B^{*-1}$ , on note  $\sharp_\beta$  l'involution  $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$  et  $G/\mathbb{Q}$  le groupe de similitudes, noté  $G_\tau$  dans [11], défini pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec  $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$ . Si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  décomposée  $x = yy^c$  dans  $E$  alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où, en identifiant les places de  $F^+$  au dessus de  $x$  avec les places de  $F$  au dessus de  $y$ ,  $x = \prod_i z_i$  dans  $F^+$ .

Dans [11], les auteurs justifient l'existence d'un  $G$  comme ci-dessus tel qu'en outre :

— si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  qui n'est pas décomposée dans  $E$  alors  $G(\mathbb{Q}_x)$  est quasi-déployé ;

— les invariants de  $G(\mathbb{R})$  sont  $(1, d - 1)$  pour le plongement  $\tau$  et  $(0, d)$  pour les autres.

On fixe à présent un nombre premier  $p = uu^c$  décomposé dans  $E$  tel qu'il existe une place  $v$  de  $F$  au dessus de  $u$  telle que

$$(B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v).$$

On note abusivement

$$G(\mathbb{A}^{\infty, v}) = G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{\substack{w|p \\ w \neq v}} (B_w^{op})^\times.$$

*Remarque* : par rapport aux notations de l'introduction, la place  $v$  sera, selon les cas, soit  $v_0$ ,  $v_1$  ou  $w_0$ .

Pour tout sous-groupe compact  $U^p$  de  $G(\mathbb{A}^{\infty, p})$  et  $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ , on pose

$$U^v(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=2}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times).$$

**1.1.2. Notation.** — Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits »<sup>(1)</sup> de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , de la forme  $U^v(m)K_v$ . Pour un tel  $I \in \mathcal{I}$ , on note

$$X_I \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v$$

la variété de Shimura de [11] dite de Kottwitz-Harris-Taylor associée à  $G$ .

*Remarque* :  $X_I$  est un schéma projectif sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_v$  tel que  $(X_I)_{I \in \mathcal{I}}$  forme un système projectif dont les morphismes de transition sont finis et plats. Quand  $m_1 = m'_1$  alors  $X_{U^p(m)} \longrightarrow X_{U^p(m')}$  est étale. Ce système projectif est par ailleurs muni d'une action de  $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$  telle que l'action d'un élément  $w_v$  du groupe de Weil  $W_v$  de  $F_v$  est donnée par celle de  $-\text{deg}(w_v) \in \mathbb{Z}$ , où  $\text{deg} = \text{val} \circ \text{Art}^{-1}$  où  $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$  est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

**1.1.3. Notations.** — (cf. [1] §1.3) Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note :

- $X_{I, s_v}$  (resp.  $X_{I, \bar{s}_v} := X_{I, s_v} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$ ) la fibre spéciale (resp. géométrique) de  $X_I$  en  $v$  et  $X_{I, \eta_v}$  (resp.  $X_{I, \bar{\eta}_v}$ ) la fibre générique (resp. géométrique).
- Pour tout  $1 \leq h \leq d$ ,  $X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}$  (resp.  $X_{I, \bar{s}_v}^{< h}$ ) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur  $h$ , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang  $\geq h$  (resp. égal à  $h$ ).

1. tel qu'il existe une place  $x$  pour laquelle la projection de  $U^v$  sur  $G(\mathbb{Q}_x)$  ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [11] bas de la page 90

*Remarque :* pour tout  $1 \leq h \leq d$ , la strate de Newton de hauteur  $h$  est de pure dimension  $d-h$ . La strate ouverte est en outre « géométriquement induite » au sens où il existe un système projectif  $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, 1}^{\leq h}$  de sous-schémas fermés de  $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v}^{\leq h}$  muni d'une action par correspondance de  $P_{h,d}(F_v)$  tel que

$$X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v}^{\leq h} = X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, 1}^{\leq h} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

**1.1.4. Notations.** — Nous utiliserons les notations suivantes :

$$i^h : X_{\mathcal{L}, \bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{L}, \bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\mathcal{L}, \bar{s}}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{L}, \bar{s}}^{\leq h}$$

ainsi que  $j^{\leq h} = i^h j^{\geq h}$ .

**1.2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor.** — Pour  $g$  un diviseur de  $d = sg$  et  $\pi_v$  une  $\mathbb{Q}_l$ -représentation cuspidale irréductible de  $GL_g(F_v)$ , l'induite parabolique

$$\pi_v \left\{ \frac{1-s}{2} \right\} \times \pi_v \left\{ \frac{3-s}{2} \right\} \times \cdots \times \pi_v \left\{ \frac{s-3}{2} \right\} \times \pi_v \left\{ \frac{s-1}{2} \right\}$$

possède

- un unique quotient irréductible noté  $St_s(\pi_v)$ ; c'est une représentation de Steinberg généralisée.
- une unique sous-représentation irréductible notée  $Speh_s(\pi_v)$ ; c'est une représentation de Speh généralisée.

*Remarques :*

- si  $\pi_v$  est un caractère  $\chi_v$  de  $F_v^\times$  alors  $Speh_s(\chi_v)$  est le caractère de  $GL_d(F_v)$  donné par  $\chi_v \circ \det$ .
- Une représentation irréductible de  $GL_d(F_v)$  sera dite *essentiellement de carré intégrable* si elle est de la forme  $St_s(\pi_v)$  pour un diviseur  $g$  de  $d = sg$  et  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$ .

La correspondance de Jacquet-Langlands locale est une bijection entre les classes d'équivalences des représentations irréductibles essentiellement de carré intégrables de  $GL_d(F_v)$  et les représentations irréductibles du groupe des inversibles  $D_{v,d}^\times$  de l'algèbre à division centrale  $D_{v,d}$  sur  $F_v$  d'invariant  $\frac{1}{d}$ .

**1.2.1. Notation.** — On note  $\pi_v[s]_D$  la représentation irréductible de  $D_{v,d}^\times$  associée à  $St_s(\pi_v)$  par la correspondance de Jacquet-Langlands locale.

Rappelons que dans [11], les auteurs, via les variétés d'Igusa de première et seconde espèce, associent à toute représentation  $\rho_v$  de  $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ , où  $\mathcal{D}_{v,h}$  est l'ordre maximal de  $D_{v,h}$ , un système local  $\mathcal{F}(\rho_v)_1$  sur  $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, 1}^{\leq h}$  dont on note  $\mathcal{F}(\rho_v)$  la version « induite » sur  $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v}^{\leq h}$ . D'après [1] §1.4.2, le système local  $\mathcal{F}(\rho_v)_1$  est muni d'une action par correspondances de

$$G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times P_{h,d}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times \mathbb{Z}$$



qui d'après [11] p.136, se factorise par  $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{F_v, h}^\times$  via

$$(g^{\infty, p}, g_{p,0}, c, g_v, g_{v_i}, k) \mapsto (g^{p, \infty}, g_{p,0} q^{k-v(\det g_v^c)}, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta). \quad (1.2.2)$$

où

- $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) := G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D_{F_v, h}^\times$ ,
- $g_v = \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix}$  et
- $\delta \in D_{v, h}^\times$  est tel que  $v(\text{rn}(\delta)) = k + v(\det g_v^c)$ .

*Remarque* : on prendra l'habitude d'identifier  $D_{v, h}^\times/\mathcal{D}_{v, h}^\times$  avec  $\mathbb{Z}$  via la norme réduite.

**1.2.3. Notations.** — Pour  $\pi_v$  une  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et  $t \geq 1$ , on note  $\mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, t)$  le  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -système local sur  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\text{--}tg}$  associé à  $\pi_v[t]_D$ . Si  $\Gamma$  est un réseau stable de  $\pi_v[t]_D$ , on notera  $\mathcal{F}_\Gamma(\pi_v, t)$  le  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -système local associé et dans le cas où l'on ne souhaite pas mentionner le réseau considéré, on écrira simplement  $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ . En ce qui concerne les faisceaux pervers, on note

$$HT_\Gamma(\pi_v, t) := \mathcal{F}_\Gamma(\pi_v, t)[d - tg]$$

et pour  $\Pi$  une représentation de  $GL_{tg}(F_v)$ ,

$$HT_\Gamma(\pi_v, t, \Pi)$$

désignera le faisceau pervers  $HT_\Gamma(\pi_v, t) \otimes \Pi$  où l'action du facteur  $GL_{tg}(F_v)$  du Levi de  $P_{tg, d}(F_v)$  agit diagonalement sur  $HT_\Gamma(\pi_v, t)$  et sur  $\Pi$ . À nouveau les versions sans  $\Gamma$  signifient que l'on ne s'intéresse pas au réseau stable considéré. On utilisera aussi les notations  $HT_{\Gamma, 1}(\pi_v, t)$ ,  $HT_{\Gamma, 1}(\pi_v, t, \chi)$  pour les versions non induites.

*Remarque* : dans [1], on notait simplement  $HT(\pi_v, \Pi)$  pour  $HT(\pi_v, t, \Pi)$ . Avec ces notations on a  $HT(\pi_v, t) = HT(\pi_v, t, \mathbb{1}_{tg})$  où  $\mathbb{1}_{tg}$  désigne la représentation triviale de  $GL_{tg}(F_v)$ .

**1.2.4. Notation.** — Pour  $\pi_v$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_v)$  et  $1 \leq t \leq s := \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ , le  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau pervers d'Harris Taylor  $\mathcal{P}(\pi_v, t)$  (resp.  $\mathfrak{P}(\pi_v, t)$ ) est, cf. [1] définition 2.1.3,

$$j_{!*}^{\text{--}tg} HT(\pi_v, t, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \quad \text{resp.} \quad j_{!*}^{\text{--}tg} \mathcal{F}(\pi_v)[d - tg] \otimes \text{St}_t(\pi_v) \otimes \mathcal{L}(\pi_v)$$

où

- $\tau_v$  est un sous-quotient irréductible quelconque de  $(\pi_v[t]_D)_{|\mathcal{D}_{v, tg}^\times}$  où  $\mathcal{D}_{v, tg}$  est l'ordre maximal de  $D_{v, tg}$  ;
- $\mathcal{L}^\vee$  désigne la correspondance de Langlands locale.

*Remarque* : d'après la remarque 2.1.4 de [1],  $\mathcal{P}(\pi_v, t)$  ne dépend pas du choix du sous-quotient irréductible  $\tau_v$  choisi.

**1.2.5. Lemme.** — Avec les notations précédentes, si  $\rho \otimes \sigma$  est un sous- $GL_d(F_v) \times W_v$ -quotient irréductible de  $H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}, \mathcal{P}(\pi_v, t) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l)$  alors

- $\sigma$  est un constituant irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\mathcal{L}(\pi_v \otimes \chi_v)$ , où  $\chi_v$  est un caractère non ramifié de  $F_v$ , et
- $\rho$  est un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  d'une induite de la forme  $\text{St}_t(\pi_v \otimes \chi_v) \times \psi_v$  où  $\psi_v$  est une représentation irréductible entière de  $GL_{d-tg}(F_v)$ .

*Démonstration.* — Le résultat découle, cf. la formule donnée en (1.2.2), de la description des actions.  $\square$

**1.3. Faisceau pervers des cycles évanescents.** — Rappelons que pour  $X$  un  $\mathbb{F}_p$ -schéma et  $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l, \bar{\mathbb{Z}}_l, \bar{\mathbb{F}}_l$ , la  $t$ -structure usuelle sur la catégorie dérivée  $D_c^b(X, \Lambda)$  est définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où  $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$ . On note alors  ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$  le cœur de cette  $t$ -structure et  ${}^p\mathcal{H}^i$  les foncteurs cohomologiques associés.

Pour  $\Lambda$  un corps, cette  $t$ -structure est autoduale pour la dualité de Verdier. Pour  $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$ , on peut munir la catégorie abélienne  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -linéaire  ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$  d'une théorie de torsion  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  où  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{F}$ ) est la sous-catégorie pleine des objets de torsion  $T$  (resp. libres  $F$ ), i.e. tels que  $l^N 1_T$  est nul pour  $N$  assez grand (resp.  $l \cdot 1_F$  est un monomorphisme). Soit alors

$$\begin{aligned} {}^+\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) : {}^p h^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) : {}^p h^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

la  $t$ -structure duale de cœur  ${}^+\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$  muni de sa théorie de torsion  $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$  « duale » de celle de  ${}^p\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$ .

**1.3.1. Définition.** — (cf. [5] §1.3) Soit  $\mathcal{F}(X, \Lambda) := {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) \cap {}^+{}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$  la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » sur  $X$  à coefficients dans  $\Lambda$ .

Pour tout  $I \in \mathcal{I}$ , le complexe  $\Psi_{I, v, \Lambda} := R\Psi_{\eta_{v, I}}(\Lambda)[d-1](\frac{d-1}{2})$  sur  $X_{I, \bar{s}_v}$  est alors un objet de  $\mathcal{F}(X_{I, \bar{s}_v}, \Lambda)$ , i.e. un faisceau pervers libre dit des cycles évanescents. Pour  $I$  variant dans  $\mathcal{I}$ , on obtient, au sens de la définition 1.3.6 de [1], un  $W_v$ -faisceau pervers de Hecke noté  $\Psi_{\mathcal{I}, v, \Lambda}$  ou plus simplement  $\Psi_{\mathcal{I}, v}$  dans le cas où  $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$ .

Rappelons, cf. [1] §2.4, que la restriction  $(\Psi_{\mathcal{I}, v, \Lambda})|_{X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\leq h}}$  du faisceau pervers des cycles évanescents à la strate  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\leq h}$ , est munie d'une action de

$$(D_{v, h}^{\times})^0 := \text{Ker}\left(\text{val} \circ \text{rn} : D_{v, h}^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}\right)$$

et de  $\varpi_v^{\mathbb{Z}}$  que l'on voit plongé dans  $F_v^{\times} \subset D_{v, h}^{\times}$ .

**1.3.2. Proposition.** — (cf. [11] proposition IV.2.2 et le §2.4 de [1])

On a un isomorphisme<sup>(2)</sup>  $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h,d}(F_v) \times W_v$ -équivariant

$$\mathrm{ind}_{(D_{v,h}^{\times})^0 \varpi_v^z}^{D_{v,h}^{\times}} (\mathcal{H}^{h-d-i} \Psi_{\mathcal{I}, v, \bar{\mathbb{Z}}_l})|_{X=\bar{h}}^{\mathcal{I}, \bar{s}, \bar{1}_h} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l, \bar{1}_h} (\mathcal{U}_{F_v, \bar{\tau}}^{h-1-i}),$$

où  $\mathcal{U}_{F_v, \bar{\tau}}$  est défini la cohomologie de la tour de Lubin-Tate de rang  $h$ , i.e. l'espace des déformations par quasi-isogénies du  $\mathcal{O}_v$ -module formel de hauteur  $h$  sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ .

Pour  $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$ , on considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & \nearrow \mathrm{can}_{!, L} & & \searrow \mathrm{can}_{*, L} & \\ {}^{p^+} j_{!, j^*} L & \dashrightarrow & {}^p j_{!, *} j^* L & \xrightarrow{+} & {}^{p^+} j_{!, j^*} L \xrightarrow{+} {}^p j_{*, j^*} L \end{array}$$

où la ligne du bas est la factorisation canonique de  ${}^{p^+} j_{!, j^*} L \longrightarrow {}^p j_{*, j^*} L$  et les flèches  $\mathrm{can}_{!, L}$  et  $\mathrm{can}_{*, L}$  données par adjonction. Rappelons que les flèches aux extrémités (resp. du milieu) de la ligne du bas, sont strictes (resp. est un bimorphisme), i.e. la flèche canonique de la coimage vers l'image est un isomorphisme (resp. la flèche est un monomorphisme et un épimorphisme).

Si  $X$  est en outre muni d'une stratification  $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \dots \supset X^{\geq d}\}$ , en utilisant des notations similaires à celles de 1.1.4, on définit dans [5], une filtration dite de stratification de  $L$

$$0 = \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^0(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^1(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^2(L) \cdots \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^{d-1}(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^d(L) = L,$$

où pour  $1 \leq r \leq d-1$ , on pose  $\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^r(L) := \mathrm{Im}_{\mathcal{F}} \left( j_{!, 1 \leq r, *} L \longrightarrow L \right)$ . Par construction tous les gradués sont libres. Dans [5] proposition 2.3.3, on construit par ailleurs, de façon fonctorielle, la filtration  $\mathfrak{S}$ -exhaustive de stratification de tout objet  $L$  de  $\mathcal{F}(X, \Lambda)$

$$0 = \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S}, !}^{-2e-1}(L) \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S}, !}^{-2e-1+1}(L) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S}, !}^0(L) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S}, !}^{2e-1-1}(L) = L,$$

dont tous les gradués sont, après tensorisation par  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ , des extensions intermédiaires de systèmes locaux.

**1.4. Structures entières.** — Dans ce paragraphe nous allons rappeler quelques uns des résultats de [6] concernant la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}}$ . La première étape consiste à le décomposer selon ses  $\varrho$ -type au sens suivant.

**1.4.1. Proposition.** — (cf. [6] proposition 3.2.2) Il existe une décomposition

$$\Psi_{\mathcal{I}, v} \simeq \bigoplus_{1 \leq g \leq d} \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Scusp}_v(g)} \Psi_{\mathcal{I}, \varrho}$$

2. Noter le décalage  $[d-1]$  dans la définition de  $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$ .

où

- $\text{Scusp}_v(g)$  l'ensemble des classes d'équivalences des  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductibles supercuspidales de  $GL_g(F_v)$  ;
- $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$  est un faisceau pervers de type  $\varrho$  au sens où tous les constituants irréductibles de  $\Psi_{\mathcal{I},\varrho} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$  sont des extensions intermédiaires de systèmes locaux  $HT(\pi_v, t, \Pi)$  avec  $\pi_v[t] \in \mathcal{C}_{\bar{\tau}}$  où

Rappelons les notions introduites dans cet énoncé.

- une représentation irréductible  $\pi$  de  $GL_n(K)$  est dite *cuspidale* (resp. *supercuspidale*) si elle n'est pas un sous-quotient (resp. un quotient) d'une induite parabolique propre. Sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , ces deux notions coïncident et d'après [13] III.5.10, la réduction modulo  $l$  d'une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière est irréductible cuspidale, mais pas nécessairement supercuspidale, la fin de ce paragraphe.
- Pour  $\pi$  irréductible cuspidale et pour  $s \geq 1$ , la réduction modulo  $l$  de  $\text{Speh}_s(\pi)$  est irréductible, cf. [9] §2.2.3. Si la réduction modulo  $l$ , notée  $\varrho$ , de  $\pi$  est supercuspidale alors la réduction modulo  $l$  de  $\text{Speh}_s(\pi)$  est notée  $\text{Speh}_s(\varrho)$  et appelée une représentation superspeh.
- D'après [9] 3.1.4, on a une bijection

$$\left\{ \overline{\mathbb{F}}_l - \text{représentations superspeh de } GL_d(F_v) \right\} \simeq \left\{ \overline{\mathbb{F}}_l - \text{représentations irréductibles de } D_{v,d}^\times \right\} \quad (1.4.1)$$

compatible à la réduction modulo  $l$  au sens suivant :

- soit  $\varrho$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de  $GL_g(F_v)$  avec  $d = sg$  ;
- soit  $\pi$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -relèvement de  $\varrho$ .

Alors la réduction modulo  $l$  de  $\pi[s]_D$  est irréductible et correspond via la bijection ci-dessus à la superspeh  $\text{Speh}_s(\varrho)$ .

- Une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation de  $D_{v,d}^\times$  est dite de type  $\varrho$  si tous ses constituants irréductibles sont, via la bijection précédente, image d'une superSpeh associée à  $\varrho$ .
- Pour  $\bar{\tau}$  une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{v,d}^\times$ ,

$$\mathcal{C}_{\bar{\tau}} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{v,d}^\times)$$

désigne la sous catégorie formée des objets dont tous les  $\mathbb{Z}_l^{nr} \mathcal{D}_{v,d}^\times$ -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de  $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{v,d}^\times}$ .

*Remarque :*  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$  est facteur direct dans  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{v,d}^\times)$  de sorte que toute  $\mathbb{Z}_l^{nr}$ -représentation  $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}}$  de  $D_{v,d}^\times$  se décompose en une somme directe

$$V_{\mathbb{Z}_l^{nr}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau}} V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$$

où  $\bar{\tau}$  décrit les  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $D_{v,d}^\times$  et où  $V_{\mathbb{Z}_l^{\times r}, \bar{\tau}}$  est un objet de  $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ .

Un des résultats clefs de [4] concernant la filtration de stratification  $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^\bullet(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$  est le fait que les morphismes d'adjonction

$$j_!^{j=r} j^{=r,*} \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I},v}) \longrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I},v})$$

sont surjectifs dans  ${}^p\mathcal{C}$ .

Pour décrire plus précisément les  $\text{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I},v})$ , commençons par quelques rappels sur la réduction modulo  $l$  d'une représentation de Steinberg  $\text{St}_s(\pi)$ , pour  $\pi$  irréductible cuspidale dont la réduction modulo  $l$ , notée  $\varrho$ , est supercuspidale. Cette réduction n'est en général, pas irréductible mais contient toujours une unique représentation irréductible non dégénérée notée  $\text{St}_s(\varrho)$ . Si  $\epsilon(\varrho)$  est le cardinal de la droite de Zelevinsky de  $\varrho$ , on note suivant [14] p.51,

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho), & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1; \\ l, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors  $\text{St}_s(\varrho)$  est cuspidale si et seulement si  $s = 1$  ou  $m(\varrho)l^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$  : on le note alors

$$\varrho_k := \text{St}_{m(\varrho)l^k}(\varrho), \quad k \in \mathbb{N}$$

et  $\varrho_{-1} := \varrho$ . La description complète de la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_s(\pi)$  est donnée dans [3]. Dans [3], on construit des réseaux stables des  $\text{St}_s(\pi)$  dits réseaux d'induction. Parmi ceux-ci, il en existe un noté

$$RI_-(\pi, s)$$

dont la réduction modulo  $l$  admet comme unique sous-espace irréductible  $\text{St}_s(\varrho)$ , qui est donc générique.

Une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  représentation  $\pi$  irréductible entière et cuspidale dont la réduction modulo  $l$  est isomorphe à  $\varrho_k$  est dite de  $\varrho$ -type  $k$ . On note

$$\text{Scusp}_k(\varrho)$$

l'ensemble des classes d'équivalences de ces représentations de  $GL_{g_k}(F_v)$  avec donc

$$g_{-1}(\varrho) = g \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq s(\varrho), \quad g_i(\varrho) = m(\varrho)l^i g,$$

où on a noté  $s(\varrho)$  la plus grande puissance de  $l$  divisant  $\frac{d}{m(\varrho)g}$  et

D'après [9] proposition 2.3.2, pour une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation  $\tau$  de  $D_{v,d}^\times$  de type  $\varrho$  et  $\tau' \in \mathcal{C}_{\bar{\tau}}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière, il existe un unique entier  $-1 \leq i \leq s(\varrho)$ , ainsi qu'une représentation irréductible cuspidale  $\pi_i \text{Scusp}_i(\varrho)$  tels que  $\tau' \simeq \pi_i \left[ \frac{d}{g_i(\varrho)} \right]_D$ . Un tel  $\tau'$  est alors dit de  $\bar{\tau}$ -type  $i$ .

Revenons à présent à la description des  $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ . Par construction il est à support dans  $X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}^{\geq r}$  nul si  $g$  ne divise par  $r$  et sinon

$$\mathrm{ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,tg}^\times} \left( j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \right) := \bigoplus_{\substack{i=-1 \\ t_i g_i(\varrho)=tg}}^{s(\varrho)} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_{t_i}(\pi_v)) \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left( -\frac{t_i-1}{2} \right).$$

Considérons alors la  $\varrho$ -filtration naïve de

$$\mathrm{Fil}_{\varrho,s(\varrho),\overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_{\varrho,-1,\overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) = j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$$

où

$$\mathrm{ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,tg}^\times} \left( \mathrm{Fil}_{\varrho,k,\overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) \right) := \bigoplus_{\substack{i=k \\ t_i g_i(\varrho)=tg}}^{s(\varrho)} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\varrho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_{t_i}(\pi_v)) \otimes \mathcal{L}(\pi_v) \left( -\frac{t_i-1}{2} \right).$$

ainsi que la filtration associée de  $j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$

$$\mathrm{Fil}_{\varrho,k}(\Psi, tg) := \mathrm{Fil}_{\varrho,k,\overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) \cap \mathrm{ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,tg}^\times} \left( j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \right).$$

Pour  $k = -1, \dots, s(\varrho)$ , les gradués  $\mathrm{gr}_{\varrho,k}(\Psi, tg)$  associés sont alors sans torsion et de  $\varrho$ -type  $k$ . On filtre à nouveau chacun de ces gradués en séparant, sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , les différents  $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_k(\varrho)$  et on note

$$(0) = \mathrm{Fil}_{\varrho,\pi_v}^0(\Psi, tg) \subset \mathrm{Fil}_{\varrho,\pi_v}^1(\Psi, tg) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_{\varrho,\pi_v}^r(\Psi, tg) = j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$$

la filtration ainsi obtenue. On considère alors la filtration de  $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$  construite comme suit :

— on prend l'image de

$$j_!^{=tg} \mathrm{Fil}_{\varrho,\pi_v}^1(\Psi, tg) \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$$

et on note  $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})^1$  le quotient libre ;

— comme  $j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})^1 \simeq \left( j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \right) / \mathrm{Fil}_{\varrho,\pi_v}^1(\Psi, tg)$ , on prend l'image de

$$j_!^{=tg} \left( \mathrm{Fil}_{\varrho,\pi_v}^2(\Psi, tg) / \mathrm{Fil}_{\varrho,\pi_v}^1(\Psi, tg) \right) \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})^1$$

et ainsi de suite.

— On filtre enfin chacune des images considérées à l'aide d'une filtration de stratification exhaustive.

D'après [1], les gradués obtenus sont, sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  et en utilisant les notations de 1.2.4, de la forme  $\mathfrak{P}(\pi_v, t) \left( \frac{1-s+2k}{2} \right)$  pour  $k = 0, \dots, s-1$ . La filtration construite ci-avant vérifie les propriétés suivantes :

— si deux gradués ne diffèrent, sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , que par leur poids, alors celui de plus petit poids possède un indice plus petit que l'autre ;

- Étant donné un gradué de poids minimal parmi tous les autres gradués qui lui sont, sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , isomorphes au poids près, les gradués d'indice strictement plus petit sont
  - soit tous à supports dans une strate de dimension strictement plus petite,
  - soit à support dans la même strate et de  $\bar{\tau}$ -type inférieur ou égal.
- Dans le cas de même support et de  $\bar{\tau}$ -type égal, on peut modifier la filtration précédente pour échanger l'ordre des deux gradués considérés.
- Enfin tant que  $\lfloor \frac{d}{g} \rfloor + 1 \leq m(\varrho)$ , pour tout  $\pi_v$  de type  $\varrho$ , il n'y a à isomorphisme près qu'une notion d'extension intermédiaire, i.e. avec les notations de [4],  ${}^p j_{l*}^{=tg} HT(\pi_v, t) \simeq {}^{p+} j_{l*}^{=tg} HT(\pi_v, t)$ .

*Remarque :* dans la suite les hypothèses faites sur l'idéal  $\mathfrak{m}$  feront que les systèmes locaux d'Harris-Taylor considérés, vérifieront tous la condition du dernier tiret ci-avant.

## 2. Cohomologie entière

### 2.1. Localisation en un idéal non pseudo-Eisenstein. —

**2.1.1. Notations.** — Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note

- $\text{Spl}(I)$  l'ensemble des places  $w$  de  $F$  telles que
  - $w$  ne divise pas le niveau  $I$  et
  - $p_w := w|_{\mathbb{Q}}$  est décomposé dans  $F$  et distinct de  $l$ , avec

$$G(\mathbb{Q}_{p_w}) \simeq \mathbb{Q}_{p_w}^\times \times GL_d(F_w) \times \prod_{i=2}^r (B_{w_i}^{op})^\times,$$

où  $p_w = w \cdot \prod_{i=2}^r w_i$  dans  $F^+$ .

- Pour  $i = 0, \dots, d$ , on pose

$$T_{w,i} := \text{diag}(\overbrace{p_w, \dots, p_w}^i, \overbrace{1, \dots, 1}^{d-i}) \times 1 \in GL_d(\mathbb{Q}_{p_w}) \times \mathbb{Z},$$

et on note

$$\mathbb{T}_I := \overline{\mathbb{Z}}_l[T_{w,i} : w \in \text{Spl}(I) \text{ et } i = 1, \dots, d],$$

l'algèbre de Hecke associée à  $\text{Spl}(I)$ .

- Pour tout  $w \in \text{Spl}(I)$ , on note

$$S_{\mathfrak{m}}(w) = \left\{ \frac{\overline{T_{w,i}}}{\overline{T_{w,i-1}}} \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m}, i = 1, \dots, d \right\}$$

le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo  $l$  en  $w$  associé à  $\mathfrak{m}$ , i.e. on garde en mémoire la multiplicité des paramètres.

On dit d'un idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}}$  de  $\mathbb{T}_I$  qu'il est cohomologique s'il existe une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation automorphe cohomologique  $\Pi$  de  $G(\mathbb{A})$  possédant des vecteurs non nuls fixes sous  $I$  et telle que pour tout  $w \in \text{Spl}(I)$ , les paramètres de Satake de  $\Pi_{p_w}$  sont donnés par

les images des  $T_w^{(i)} \in K_{\tilde{\mathfrak{m}}} := (\mathbb{T}_I \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l) / \tilde{\mathfrak{m}}$ , où  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_l$ . Un tel  $\Pi$  n'est pas nécessairement unique mais définit une unique classe d'équivalence proche au sens de [12] que l'on notera  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ . On note

$$\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, \overline{\mathbb{Q}}_l} : \text{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{Q}}_l)$$

la représentation galoisienne associée à un tel  $\Pi$  d'après [11] et [12], laquelle est, d'après le théorème de Cebotarev, définie à isomorphisme sur  $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ , i.e.  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, \overline{\mathbb{Q}}_l} \simeq \rho_{\tilde{\mathfrak{m}}} \otimes_{K_{\tilde{\mathfrak{m}}}} \overline{\mathbb{Q}}_l$ .

Étant donné un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{T}_I$ , pour tout idéal premier minimal  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ , la réduction modulo  $\varpi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$  de  $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ , bien définie à semi-simplification près, ne dépend que de  $\mathfrak{m}$ , on note  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}} : G_F \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{F}}_l)$  son extension des scalaires à  $\overline{\mathbb{F}}_l$  : ses paramètres de Satake modulo  $l$  en  $w \in \text{Spl}(I)$  sont donnés par le multi-ensemble  $S_{\mathfrak{m}}(w)$ .

Dans la suite, on fixe un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{T}_I$  qui vérifie une des conditions (1) et (2) suivantes.

- (1) Il existe  $w_1 \in \text{Spl}(I)$  tel que  $S_{\mathfrak{m}}(w_1)$  ne contient aucun sous-multi-ensemble de la forme  $\{\alpha, q_{w_1}\alpha\}$  où  $q_{w_1}$  est le cardinal du corps résiduel en  $w_1$  ;
- (2) On a  $l \geq d + 2$  et  $\mathfrak{m}$  vérifie l'un des deux conditions suivantes :
  - soit  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est induit d'un caractère de  $G_K$  pour  $K/F$  une extension galoisienne cyclique ;
  - soit  $l \geq d$  et  $SL_n(k) \subset \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}(G_F) \subset \overline{\mathbb{F}}_l^\times GL_n(k)$  pour un sous-corps  $k \subset \overline{\mathbb{F}}_l$ .

**2.1.2. Théorème.** — (cf. [7]) Pour  $\mathfrak{m}$  comme ci-dessus, les localisés  $H^i(X_{I, \bar{\eta}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}}$ , en l'idéal  $\mathfrak{m}$  des groupes de cohomologie  $X_I$ , sont sans torsion.

**2.2. Représentations elliptiques et cohomologie.** — Rappelons que  $X_I$  étant propre, pour tout place  $w$  de  $F$ , on a un isomorphisme

$$H^{d-1+i}(X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}_v}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \simeq H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}, \Psi_{\mathcal{I}, v})$$

qui est  $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$  équivariant. En utilisant la filtration de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, v}$ , on a une suite spectrale qui à partir des groupes de cohomologie des  $\mathfrak{P}(\pi_v, t)$  calcule la cohomologie de  $X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}_v}$ . Sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ , l'étude de cette suite spectrale est menée dans [2] et après localisation par  $\mathfrak{m}$ , comme les

$$H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}, \mathfrak{P}(\pi_v, t))_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$$

sont concentrés en degré 0, cette suite spectrale dégénère clairement en  $E_1$ . Le but de ce paragraphe est de reprendre cette étude sur  $\overline{\mathbb{F}}_l$  et de montrer qu'à nouveau les

$$H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}, \mathfrak{P}(\pi_v, t))_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$$

sont concentrés en degré 0, autrement dit qu'il n'y a pas de torsion dans les  $H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}, \mathfrak{P}(\pi_v, t))_{\mathfrak{m}}$ .

Pour ce faire, rappelons les notations du §1.2 de [2]. Pour tout  $t \geq 0$ , on note

$$\Gamma^t := \left\{ (a_1, \dots, a_r, \epsilon_1, \dots, \epsilon_r) \in \mathbb{N}^r \times \{\pm\}^r : r \geq 1, \sum_{i=1}^r a_i = t \right\}.$$



Un élément de  $\Gamma^t$  sera noté sous la forme  $(\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r)$  où pour tout  $i$  la flèche au dessus de  $a_i$  est  $\overleftarrow{a}_i$  (resp.  $\overrightarrow{a}_i$ ) si  $\epsilon_i = -$  (resp.  $\epsilon_i = +$ ). On considère alors sur  $\Gamma^t$  la relation d'équivalence induite par les identifications suivantes :

$$(\dots, \overleftarrow{a}, \overleftarrow{b}, \dots) = (\dots, \overleftarrow{a+b}, \dots), \quad (\dots, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \dots) = (\dots, \overrightarrow{a+b}, \dots),$$

et  $(\dots, \overleftarrow{0}, \dots) = (\dots, \overrightarrow{0}, \dots)$ . On notera  $\overline{\Gamma}^t$  l'ensemble quotient dont les éléments seront notés  $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]$ .

*Remarque* : pour  $t > 0$ , dans toute classe  $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_k] \in \overline{\Gamma}^t$ , il existe un unique élément, dit réduit, de  $(a_1, \dots, a_r, \epsilon_1, \dots, \epsilon_r) \in \Gamma^t$  tel que

- pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on ait  $a_i > 0$ ;
- pour tout  $1 \leq i < r$ ,  $\epsilon_i \epsilon_{i+1} = -$ .

**2.2.1. Définition.** — À tout représentant réduit  $(a_1, \dots, a_r, \epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$  d'une classe de  $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_k] \in \overline{\Gamma}^t$ , on associe

$$\mathcal{S}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_k])$$

comme le sous-ensemble des permutations  $\sigma$  de  $\{0, \dots, t-1\}$  telles que pour tout  $1 \leq i \leq r$  avec  $\epsilon_i = +$  (resp.  $\epsilon_i = -$ ) et pour tout  $a_1 + \dots + a_{i-1} \leq k < k' \leq a_1 + \dots + a_i$  alors  $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k')$  (resp.  $\sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k')$ ). Dans le cas où sous les mêmes conditions, on demande inversement  $\sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k')$  (resp.  $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k')$ ), l'ensemble obtenu sera noté  $\mathcal{S}^{op}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_k])$ .

**2.2.2. Proposition.** — (cf. [15] §2) Soit  $g$  un diviseur de  $d = sg$  et  $\pi$  une représentation cuspidale irréductible de  $GL_g(F_w)$ . Il existe une bijection

$$[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r] \in \overline{\Gamma}^{s-1} \mapsto [\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi$$

dans l'ensemble des sous-quotients irréductibles de l'induite

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \dots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

caractérisée par la propriété suivante

$$J_{P_{g,2g,\dots,sg}}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r])} \pi\left\{\frac{1-s}{2} + \sigma(0)\right\} \otimes \dots \otimes \pi\left\{\frac{1-s}{2} + \sigma(s-1)\right\},$$

ou encore par

$$J_{P_{g,2g,\dots,sg}}^{op}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^{op}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r])} \pi\left\{\frac{1-s}{2} + \sigma(0)\right\} \otimes \dots \otimes \pi\left\{\frac{1-s}{2} + \sigma(s-1)\right\}.$$

*Remarque* : avec ces notations  $\text{St}_s(\pi)$  (resp.  $\text{Speh}_s(\pi)$ ) est  $[\overleftarrow{s-1}]$  (resp.  $[\overrightarrow{s-1}]$ ).

**2.2.3. Lemme.** — Soit  $\pi$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $GL_g(F_w)$  dont le cardinal de la droite de Zelevinsky de sa réduction modulo  $l$  est supérieur ou égal à  $s$ . Dans ces conditions, pour tout  $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r] \in \overline{\Gamma}^{s-1}$ , les sous-quotients irréductibles la réduction modulo  $l$  des  $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r]_\pi$  pour  $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r]$  décrivant  $\overline{\Gamma}^{s-1}$  sont disjoints deux à deux.

*Démonstration.* — Par hypothèse sur  $\pi$ , toutes les représentations considérées ont le même support cuspidal et ont donc tous une image non nulle par  $J_{P_{g,2g,\dots,sg}}$ . Le résultat découle alors directement

- de la commutation des foncteurs de Jacquet avec la réduction modulo  $l$  et
- du fait que les  $r_l(\pi)\{\frac{1-s}{2} + k\}$  sont distincts deux à deux pour  $0 \leq k < s$  de sorte que l'image par  $J_{P_{g,2g,\dots,sg}}$  de  $\pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \dots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$  est sans multiplicité. □

**2.2.4. Théorème.** — Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $\mathbb{T}_S$  tel que pour tout  $i$ , le  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module  $H^i(X_{U,\vec{\eta}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}}$  est sans torsion. On suppose en outre que (H3) l'image de  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m},w_0}$  dans son groupe de Grothendieck est sans multiplicités. Alors pour tout  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local d'Harris-Taylor  $HT(\pi_{w_0}, t)$ , la torsion de  $H^i(X_{U,\vec{s}_{w_0}}, {}^p j_{!*}^{=tg} HT(\pi_{w_0}, t))_{\mathfrak{m}}$  est nulle pour tout  $i$ .

*Démonstration.* — Notons  $\text{Scusp}_{w_0}(\mathfrak{m})$  l'ensemble des classes d'équivalences inertielles des  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles supercuspidales du support supercuspidal de la réduction modulo  $l$  de la composante locale en  $w_0$  d'une représentation  $\Pi \in \Pi_{\mathfrak{m}}$  de la classe d'équivalence proche associée à  $\mathfrak{m}$ . La suite spectrale des cycles évanescents se localise en  $\mathfrak{m}$  :

$$H^i(X_{U,\vec{\eta}_{w_0}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}} \simeq H^i(X_{U,\vec{s}_{w_0}}, \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}(\mathfrak{m})} \Psi_{\mathcal{I},\varrho})_{\mathfrak{m}}.$$

En particulier, on en déduit que pour tout  $\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}(\mathfrak{m})$  le localisé en  $\mathfrak{m}$  de la cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$  est concentrée en degré médian et sans torsion.

Soit alors  $\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}(\mathfrak{m})$ . La filtration de stratification exhaustive de  $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$  raffinée par celle de son  $\varrho$ -type comme au §1.4, permet de calculer, via une suite spectrale, la cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$  localisée en  $\mathfrak{m}$  à l'aide de celle des faisceaux pervers d'Harris-Taylor  $\mathcal{P}(\pi_{w_0}, t)$  pour  $\pi_{w_0}$  irréductible cuspidale dont la réduction modulo  $l$  a pour support supercuspidal un segment de Zelevinsky associé à  $\varrho$ . La stratégie consiste à montrer que si le localisé en  $\mathfrak{m}$  de la cohomologie de ces faisceaux pervers d'Harris-Taylor avait de la torsion alors il en serait de même pour  $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$  ce qui n'est pas vues nos hypothèses.

Considérons alors  $t$  minimal tel qu'il existe  $i \neq 0$  pour lequel

$$H^i(X_{\mathcal{I},\vec{s}_{w_0}}, \mathcal{P}(\pi_{w_0}, t)(\frac{1-t+2k}{2}))_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$$

pour  $0 \leq k < t$ , est non nul. Notons que les hypothèses sur  $\mathfrak{m}$ , imposent, d'après [6] que le dual de Verdier  $D(\mathcal{P}(\pi_{w_0}, t))$  est isomorphe à  $\mathcal{P}(\pi_{w_0}^\vee, t)$ , i.e. les  $p$  et  $p+$ -extensions intermédiaires sont les mêmes. On peut donc choisir un tel  $i_0 < 0$  minimal.

D'après le lemme 1.2.5, un  $GL_d(F_{w_0}) \times W_{w_0}$  constituant irréductible d'un de ces groupes de cohomologie est à prendre parmi ceux de la réduction modulo  $l$  de

$$\left( [\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_{i-1}, \overleftarrow{\Gamma}, \overleftarrow{t-1}, \overleftarrow{\Gamma}, \overrightarrow{a}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi \times \Upsilon_{w_0} \right) \otimes \mathcal{L}(\pi\{\frac{\delta}{2}\})$$

où

- le  $\overleftarrow{\Gamma}$  avant (resp. après) le  $\overleftarrow{t-1}$  est autorisé sous ses deux formes  $\overleftarrow{\Gamma}$  et  $\overrightarrow{\Gamma}$  si  $\sum_{j=1}^{i-1} a_j$  (resp.  $\sum_{j=i+1}^r a_j$ ) est strictement positive : on notera en passant  $a_i = t + 1$
- la réduction modulo  $l$  de  $\pi$  est de la forme  $\varrho\{\frac{\delta_0}{2}\}$ ,
- $\Upsilon_{w_0}$  est une  $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière dont la réduction modulo  $l$  a un support supercuspidal ne contenant aucun tordu de  $\varrho$ ,
- si on note  $\left\{ \pi\{\frac{\alpha}{2}\}, \pi\{\frac{\alpha}{2} + 1\}, \dots, \pi\{\frac{\alpha}{2} + t - 1\} \right\}$  le support supercuspidal associé à la flèche  $\overleftarrow{t-1}$  dans  $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overleftarrow{t-1}, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi$  alors  $\pi\{\frac{\delta}{2}\}$  appartient à cet ensemble.

*Remarque :* dans le dernier tiret ci-avant, l'indice  $k$  du décalage  $\pi\{\frac{\delta}{2} + k\}$  correspond aux faisceaux pervers  $\mathcal{P}(\pi_{w_0}, t)(\frac{1-s}{2} + k)$  dont on considère la cohomologie.

Considérons alors un  $\overline{\mathbb{F}}_l[GL_d(F_{w_0}) \times W_{w_0}]$ -module irréductible  $(\tau \times \psi_{w_0}) \otimes \mathcal{L}(\pi\{\frac{\delta}{2}\})$  avec  $\delta$  comme ci-dessus, où :

- $\psi_{w_0}$  est un sous-quotient irréductible quelconque de la réduction modulo  $l$  de  $\Upsilon_{w_0}$ ,
- $\tau$  est un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de

$$[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_{i-1}, \overrightarrow{\Gamma}, \overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{\Gamma}, \overrightarrow{a}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi$$

le caractérisant, d'après le lemme précédent, parmi tous les autres constituants irréductibles de la réduction modulo  $l$  d'un  $[\overleftarrow{a}'_1, \dots, \overrightarrow{a}'_{r'}]_\pi$  avec  $\sum_{j=1}^{r'} a'_j = \sum_{j=1}^r a_j$ .

Montrons que ce constituant irréductible est alors un sous-quotient de  $H^{i_0}(X_{\mathcal{L}, \bar{s}_{w_0}}, \Psi_{\mathcal{L}, \varrho})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$ , ce qui sera contradictoire et clôturera la preuve. D'après la remarque précédente on peut supposer que  $\delta = \alpha$  et que donc ce constituant est donnée par le  $H^{i_0}$  de  $\mathcal{P}(\pi_{w_0}, t)(\frac{1-t}{2})$  : notons  $\text{Fil}^{k-1} \subset \text{Fil}^k \subset \Psi_{\mathcal{L}, \varrho}$  les indices de la filtration exhaustive de stratification considérée plus haut, tels que  $\text{gr}^k = \text{Fil}^k / \text{Fil}^{k-1} \simeq \mathcal{P}(\pi_{w_0}, t)(\frac{1-t}{2})$ . Par construction de la filtration et notamment en modifiant l'ordre dans le raffinement par le  $\varrho$ -type, on peut supposer que les faisceaux pervers d'Harris-Taylor dans  $\text{Fil}^{k-1}$  sont de la forme  $\mathcal{P}(\pi'_{w_0}, t')$  avec  $t' > t$ . Comme précédemment  $H^{i_0+1}(X_{\mathcal{L}, \bar{s}_{w_0}}, \text{Fil}^{k-1})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$  est filtré par des sous-quotients irréductibles de la réduction modulo  $l$  de

$$\left( [\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_{i-1}, \overleftarrow{\Gamma}, \overleftarrow{t'-1}, \overleftarrow{\Gamma}, \overrightarrow{a}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{a}_r]_{\pi'} \times \psi_{w_0} \right) \otimes \mathcal{L}(\pi'\{\frac{\delta'}{2}\})$$

avec  $t' > t$  et où  $\pi' \left\{ \frac{\delta'}{2} \right\}$  est une des cuspidales du support cuspidal du  $\overleftarrow{t'} - 1$  dans l'écriture ci-dessus. On remarque alors que la contrainte  $t' > t$  ne nous permet jamais de retrouver le  $\tau$  de la réduction modulo  $l$  de  $[\overleftarrow{a_1}, \dots, \overleftarrow{a_{i-1}}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{t'} - 1, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{a_{i+1}}, \dots, \overleftarrow{a_r}]_\pi$ .

En ce qui concerne les  $H^{i_0-1}(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{v_0}}, \Psi_{\mathcal{I}, \varrho} / \text{Fil}^k)_m \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l$ , on raisonne de même :

- pour les constituants  $\mathcal{P}(\pi'_{w_0}, t')$  avec  $t' > t$ ,
- ceux pour  $t' \leq t$  étant nuls par minimalité de  $t$  et de  $i$ .

□

**2.3. Du lemme d'Ihara à la cohomologie.** — Étant donné un  $\Lambda$ -faisceau de Hecke à support dans les points supersinguliers, ses groupes de cohomologie  $H^i$  sont nuls pour tout  $i \neq 0$ . En ce qui concerne son  $H^0$ , rappelons que  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{v_0}}^{\bar{=}d}$  peut s'écrire comme une réunion disjointe

$$X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{v_0}}^{\bar{=}d} = \coprod_{i \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)} X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{v_0}, i}^{\bar{=}d}$$

indexée par  $\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)$  de schéma de dimension 0. Pour chaque  $i \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)$ , un faisceau de Hecke  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}, i}$  sur  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{v_0}, i}^{\bar{=}d}$  a sa fibre en une tour  $z_i$  de points supersinguliers munie d'une action de  $\overline{G}(\mathbb{Q}) \times GL_d(F_{v_0})^0$  où  $GL_d(F_{v_0})^0$  est le noyau de la valuation du déterminant de sorte que, cf. [1] proposition 5.1.1, en tant que  $G(\mathbb{A}^\infty) \simeq \overline{G}(\mathbb{A}^{\infty, v_0}) \times GL_d(F_{v_0})$ -module, on a

$$H^0(\bar{X}_{\mathcal{I}, \bar{s}_{v_0}, i}^{\bar{=}d}, \mathcal{F}_{\mathcal{I}, i}) \simeq \text{ind}_{\overline{G}(\mathbb{Q})}^{\overline{G}(\mathbb{A}^{\infty, v_0}) \times \mathbb{Z}} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}, i}$$

avec  $\delta \in \overline{G}(\mathbb{Q}) \mapsto (\delta^{\infty, v_0}, \text{val} \circ \text{rn}(\delta_{v_0})) \in \overline{G}(\mathbb{A}^{\infty, v_0}) \times \mathbb{Z}$  et où l'action de  $g_{v_0} \in GL_d(F_{v_0})$  est donnée par celle de  $(g_0^{-\text{val} \det g_{v_0}} g_{v_0}, \text{val} \det g_{v_0}) \in GL_d(F_{v_0})^0 \times \mathbb{Z}$  où  $g_0 \in GL_d(F_{v_0})$  est un élément fixé tel que  $\text{val} \det g_0 = 1$ . En outre, cf. [1] corollaire 5.1.2, si  $z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}, i}$  est munie d'une action du noyau  $(D_{v_0, d}^\times)^0$  de la valuation de la norme réduite qui est compatible à l'action de  $\overline{G}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow D_{v_0, d}^\times$ , alors en tant que  $G(\mathbb{A}^\infty)$ -module, on a

$$H^0(\bar{X}_{\mathcal{I}, \bar{s}_{v_0}, i}^{\bar{=}d}, \mathcal{F}_{\mathcal{I}, i}) \simeq \mathcal{C}^\infty(\overline{G}(\mathbb{Q}) \backslash \overline{G}(\mathbb{A}^\infty), \Lambda) \otimes_{D_{v_0, d}^\times} \text{ind}_{(D_{v_0, d}^\times)^0}^{D_{v_0, d}^\times} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}, i} \quad (2.3.1)$$

**2.3.2. Lemme.** — Soit  $\bar{\pi}$  une sous- $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $\mathcal{C}^\infty(\overline{G}(\mathbb{Q}) \backslash \overline{G}(\mathbb{A}) / U^{v_0}, \bar{\mathbb{F}}_l)$  et soit  $\pi_{v_0}$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F_{v_0})$  pour  $g$  divisant  $d = sg$ , telle que  $\bar{\pi}_{v_0}$  est la réduction modulo  $l$  de  $\pi_{v_0}[s]_D$ . Alors  $\bar{\pi}^{v_0}$  est une sous-représentation de la réduction modulo  $l$  de  $H^0(X_{U^{v_0}, \bar{s}_{v_0}}, HT(\pi_{v_0}^\vee, s))$ .

*Démonstration.* — On a  $\bar{\pi} \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{G}(\mathbb{Q}) \backslash \overline{G}(\mathbb{A}) / U^{v_0}, \bar{\mathbb{F}}_l)$  et donc  $\bar{\pi}^{v_0} \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{G}(\mathbb{Q}) \backslash \overline{G}(\mathbb{A}) / U^{v_0}, \bar{\mathbb{F}}_l) \otimes \bar{\pi}_{v_0}^\vee$ . Par ailleurs comme  $HT(\pi_{v_0}^\vee, s)$  est supporté aux points supersinguliers, son  $H^0$  est sans torsion et

$$H^0(X_{U^{v_0}, \bar{s}_{v_0}}, HT(\pi_{v_0}^\vee, s)) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l \simeq H^0\left(X_{U^{v_0}, \bar{s}_{v_0}}, HT(\pi_{v_0}^\vee, s) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l\right).$$

Le résultat découle alors directement de la formule (2.3.1).

□

**2.3.3. Proposition.** — Soient

- $U$  un niveau fini et  $S$  un ensemble fini de places contenant les places  $w$  de  $F$  telles que  $U_w$  n'est pas maximal ;
- $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $\mathbb{T}_S$  tel qu'il existe  $w_1 \in \text{Spl}^S$  tel que  $S_{\mathfrak{m}}(w_1)$  ne contient aucun sous-multi-ensemble de la forme  $\{\alpha, q_{w_1}\alpha\}$  ;
- $\bar{\pi}$  une sous- $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $\mathcal{C}^\infty(\overline{G}(\mathbb{Q}) \backslash \overline{G}(\mathbb{A})/U^v, \overline{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$ .

Alors  $\bar{\pi}^{\infty, v}$  est une sous- $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de  $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_0}}, \overline{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$ .

*Démonstration.* — Dans [4], nous avons montré que les faisceaux de cohomologie de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  étaient sans torsion. De la description de ceux-ci, on en déduit alors que s'il existe  $i$  tel que  $H^i(X_{U, \bar{s}_{v_0}}, \Psi_{\mathcal{I}, \rho})_{\mathfrak{m}}$  est non nul alors nécessairement  $\rho$  est associé à  $\bar{\pi}$  via (1.4.1).

Fixons alors une représentation irréductible cuspidale  $\pi_{v_0}$  de  $GL_g(F_v)$  telle que sa réduction modulo  $l$  est supercuspidale et  $\bar{\pi}$  est la réduction modulo  $l$  de  $\pi_{v_0}[s]_D$ . Des propriétés de la filtration de stratification exhaustive raffinée par les  $\varrho$ -type et en utilisant que  $\pi_{v_0}$  est de  $\rho$ -type  $-1$ , on en déduit que  $\mathcal{P}(\pi_{v_0}, s)(\frac{s-1}{2})$  est un sous-faisceau pervers de  $\Psi_{\mathcal{I}, \rho}$ .

Par ailleurs, les hypothèses sur  $\mathfrak{m}$  impliquent que le localisé en  $\mathfrak{m}$  de la cohomologie d'un gradué quelconque de  $\Psi_{\mathcal{I}}$  est sans torsion et concentrée en degré médian de sorte que  $H^0(X_{U, \bar{s}_{v_0}}, \mathcal{P}(\pi_{v_0}, s))$  est un sous-espace de  $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_0}}, \overline{\mathbb{F}}_l)$ . On conclut grâce au lemme précédent. □

### 3. Diminution du niveau : cas supercuspidal

**3.1. Réseaux globaux.** — Par hypothèse, il existe  $v_1 \in \text{Spl}$  telle que  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}, v_1}$  est irréductible de sorte que pour toute représentation irréductible  $\Pi \in \Pi_{\mathfrak{m}}$ , sa composante locale en  $v_1$  est cuspidale et sa réduction modulo  $l$ ,  $\rho$  est supercuspidale. En particulier on a

$$H^{d-1+i}(X_{U, \bar{\eta}_{v_1}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}} \simeq H^i(X_{U, \bar{s}_{v_1}}, \Psi_{\mathcal{I}, \rho}).$$

Comme  $\rho$  est une représentation irréductible supercuspidale,  $\Psi_{\mathcal{I}, \rho}$  est un système local concentré sur  $X_{U, \bar{s}_{v_1}}^{\overline{d}}$  tel que pour tout point supersingulier  $z$

$$\text{ind}_{(D_{v_1, d}^{\times})^0}^{D_{v_1, d}^{\times}} z^* \Psi_{\mathcal{I}, \rho} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_{v_1} \in \text{Scusp}_{-1}(\rho)} \pi_{v_1} \otimes \pi_{v_1}[1]_D \otimes L_d(\pi_{v_1}^{\vee}).$$

**3.1.1. Proposition.** — Soit  $\Pi^{\infty, U} \otimes L_g(\Pi_{v_1}^{\vee})$  une sous-représentation irréductible de  $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_1}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\mathfrak{m}}$ . Alors le réseau

$$H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_1}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}} \cap \left( \Pi^{\infty, U} \otimes L_d(\Pi_{v_1}^{\vee}) \right)$$

est un produit tensoriel  $\Gamma_G \otimes \Gamma_W$  d'un réseau stable  $\Gamma_G$  de  $\Pi^{\infty, U}$  par un réseau stable  $\Gamma_W$  de  $L_d(\Pi_{v_1}^\vee)$ .

*Démonstration.* — On considère le réseau

$$\Gamma_{GDW} := \text{ind}_{(D_{v_1, d}^\times)^0}^{D_{v_1, d}^\times} z^* \Psi_{\mathcal{I}, \rho} \cap \Pi_{v_1} \otimes \Pi_{v_1}[1]_D \otimes L_d(\Pi_{v_1}^\vee)$$

associé à  $\Pi_{v_1}$ . Comme la réduction modulo  $l$  de  $\Pi_{v_1} \otimes \Pi_{v_1}[1]_D \otimes L_d(\Pi_{v_1}^\vee)$  est irréductible, il ne possède, à isomorphisme près, qu'un unique réseau stable qui est donc le produit tensoriel  $\Gamma_G \otimes \Gamma_D \otimes \Gamma_W$  des réseaux stables de respectivement  $\Pi_{v_1}$ ,  $\Pi_{v_1}[1]_D$  et  $L_d(\Pi_{v_1}^\vee)$ . Revenons au calcul de la cohomologie de  $X_U$  via la suite spectrale des cycles évanescents : on a

$$H^{d-1+i}(X_{U, \bar{\eta}_{v_1}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)_m \simeq H^i(X_{U, \bar{s}_{v_1}}, \Psi_{\mathcal{I}, \rho})$$

et d'après (2.3.1)

$$H^0(\bar{X}_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}_{v_1}, i}^d, \Psi_{\mathcal{I}, \rho}) \simeq \mathcal{C}^\infty(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A}^\infty), \Lambda) \otimes_{D_{v_1, d}^\times} \text{ind}_{(D_{v_1, d}^\times)^0}^{D_{v_1, d}^\times} z^* \Psi_{\mathcal{I}, \rho}$$

où le réseau  $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_1}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)_m \cap \left( \Pi^{\infty, U} \otimes L_d(\Pi_{v_1}^\vee) \right)$  est donné par

$$\mathcal{C}^\infty(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A}^\infty), \Lambda) \otimes_{D_{v_1, d}^\times} (\Gamma_G \otimes \Gamma_D \otimes \Gamma_W),$$

d'où le résultat. □

**3.2. Combinatoire.** — Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition de l'introduction sur la diminution du niveau. Rappelons les hypothèses sur les données. Le support supercuspidal  $\mathcal{S}(\mathfrak{m})$  est, par hypothèse, sans multiplicité et on écrit

$$\mathcal{S}(\mathfrak{m}) = \coprod_{\varrho} \mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$$

où  $\varrho$  décrit les classes d'équivalence inertielles des  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles supercuspidales d'un  $GL_{g(\varrho)}(F_{w_0})$  pour  $1 \leq g(\varrho) \leq d$ . Pour chaque  $\varrho$  on note alors

$$l_1(\varrho) \geq \dots \geq l_{r(\varrho)}(\varrho)$$

de sorte que  $\mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$  puisse s'écrire comme la réunion de  $r(\varrho)$  segments de Zelevinsky non liés

$$[\varrho\nu^{k_i}, \varrho\nu^{k_i+l_i(\varrho)}] = \{\varrho\nu^{k_i}, \varrho\nu^{k_i+1}, \dots, \varrho\nu^{k_i+l_i(\varrho)}\}.$$

**3.2.1. Proposition.** — *Il existe un idéal premier  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  tel que*

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0} \simeq \times_{\varrho} \Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho)$$

où pour tout  $\varrho$ , il existe des représentations irréductibles cuspidales  $\pi_1(\varrho), \dots, \pi_{r(\varrho)}(\varrho)$  de  $GL_g(F_v)$  telles que

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho) \simeq \text{St}_{l_1(\varrho)}(\pi_1(\varrho)) \times \dots \times \text{St}_{l_{r(\varrho)}}(\pi_{r(\varrho)}(\varrho)).$$

*Démonstration.* — On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un  $\varrho_0$  pour lequel aucun des idéaux premiers contenus dans  $\mathfrak{m}$  ne vérifie la conclusion de la proposition. Soit alors un idéal premier  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  : le facteur  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho_0)$  est de la forme

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho_0) \simeq \text{St}_{l_1(\varrho_0)}(\pi_1(\varrho_0)) \times \dots \times \text{St}_{l_k(\varrho_0)}(\pi_k(\varrho_0)) \times \text{St}_{l'_1}(\pi'_1(\varrho_0)) \times \dots \times \text{St}_{l'_r}(\pi'_r(\varrho_0)),$$

avec  $l_{k+1}(\varrho_0) > l'_1 \geq \dots \geq l'_r$ . On choisit  $\tilde{\mathfrak{m}}$  de sorte que la partition  $(l_1(\varrho_0) \geq \dots \geq l_k(\varrho_0) \geq l'_1 \geq \dots \geq l'_r)$  ainsi obtenue, soit maximale au sens de l'ordre de Bruhat.

**3.2.2. Lemme.** — Avec les notations précédentes,  $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$  admet un sous- $\bar{\mathbb{F}}_l[GL_d(F_{w_0}) \times G_F]$ -module irréductible de la forme

$$\pi_{w_0} \otimes \mathcal{L}(\varrho_0)(\delta_k + \frac{1 - l_1(\varrho_0)}{2}),$$

où  $\pi_{w_0} = \times_{\varrho} \pi_{w_0, \varrho}$  avec

$$\pi_{w_0, \varrho_0} \simeq \left( \text{St}_{l_1(\varrho_0)}(\varrho_0 \nu^{\delta_1}) \times \dots \times \text{St}_{l_k(\varrho_0)}(\varrho_0 \nu^{\delta_k}) \times \bar{\pi}_1 \times \dots \times \bar{\pi}_t \right),$$

où  $\bar{\pi}_1 \times \dots \times \bar{\pi}_t$  est un sous-quotient irréductible de la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_{l'_1}(\pi'_1(\varrho_0)) \times \dots \times \text{St}_{l'_r}(\pi'_r(\varrho_0))$ .

*Démonstration.* — D'après [2], pour  $\pi_{w_0}$  irréductible cuspidale de type  $\varrho_0$ ,

$$H^i(X_{U, \bar{s}_{w_0}}, HT_{\bar{\mathbb{Q}}_l}(\pi_{w_0}, t))_{\tilde{\mathfrak{m}}'}$$

est nul si

- $t > l_1(\varrho)$  ;
- pour  $t = l_1(\varrho)$  si  $i \neq 0$  ou si  $\pi_{w_0}$  n'est pas dans la droite de Zelevinsky de l'un des  $\pi_k(\varrho_0)$  (resp. de  $\pi'_k(\varrho_0)$ ) avec  $l_k(\varrho_0)$  (resp.  $l'_k$ ) égal à  $l_1(\varrho_0)$ .

Considérons la filtration exhaustive de stratification de  $\Psi_{\mathcal{I}, \varrho_0}$  de [5]. D'après ce que l'on vient de rappeler, cette filtration découpe  $\Psi_{\mathcal{I}, \varrho_0}$

$$P \hookrightarrow P' \hookrightarrow \Psi_{\mathcal{I}, \varrho_0}$$

de sorte que

- $P$  est à support dans  $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}^{>l_1(\varrho_0)g}$  avec  $H^i(X_{U, \bar{s}_{w_0}}, P \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l)_{\tilde{\mathfrak{m}}} = (0)$ , et
- $(P'/P) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_{w_0} \in \mathcal{C}(\varrho_0, l_1(\varrho_0)g)} j_{l_*}^{=l_1(\varrho_0)g} HT(\pi_{w_0}, l_1(\varrho_0), \text{St}_{l_1(\varrho_0)}(\pi_{w_0}))$ .

Le résultat découle alors du fait que d'après le théorème 2.2.4, que les hypothèses sur les  $H^i(X_{U, \bar{s}_{w_0}}, j_{l_*}^{=tg} HT(\pi_{w_0}, t))_{\mathfrak{m}}$  sont sans torsion. □

Il découle du lemme précédent et de la proposition 3.1.1, que  $H^{d-1}(X_{U,\bar{\eta}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_m$  admet un sous espace de la forme  $r_l(\Pi^{\infty, w_0}) \otimes \pi_{w_0} \otimes \bar{\rho}_m$ . Considérons alors une filtration

$$\text{Fil}_0(\bar{\rho}_m) \subset \cdots \subset \text{Fil}_r(\bar{\rho}_m) = \bar{\rho}_m$$

dont les gradués sont irréductibles et donc de la forme  $\varrho\nu^k$ . Par hypothèse, tous les gradués ont des poids distincts modulo  $l$ , ce qui permet de parler du gradué associé à  $\varrho\nu^k$ .

Avec les notations précédentes, pour  $i = 1, \dots, t$ , soit  $\alpha_i$  tel que le support supercuspidal de la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_{l'_i}(\pi'_i(\varrho))$  est celui du segment  $[\varrho\nu^{\alpha_i}, \varrho\nu^{\alpha_i+l'_i-1}]$ . Considérons le gradué  $\text{gr}_k(\bar{\rho}_m)$  associé à  $\varrho\nu^{\alpha_1}$ . On note  $H^{d-1}(X_{U,\bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{m,k-1}$  l'image de  $r_l(\Pi^{\infty, w_0}) \otimes \pi_{w_0} \otimes \text{Fil}_{k-1}(\bar{\rho}_m)$  et  $H^{d-1}(X_{U,\bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{m,/k}$  le quotient  $H^{d-1}(X_{U,\bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_m / H^{d-1}(X_{U,\bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{m,k-1}$ . On a par ailleurs une filtration

$$\text{Fil}^\bullet(H^{d-1}(X_{U,\bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_m)$$

obtenue à partir de la filtration de stratification exhaustive de  $\Psi_{\mathcal{I}, \varrho}$  et dont les gradués sont la réduction modulo  $l$  de la cohomologie d'un réseau stable d'un  $HT(\pi_{w_0}, t, \text{St}_t(\pi_{w_0}))^{(\frac{1-s+2k}{2})}$  pour  $\pi_{w_0}$  de  $\varrho$ -type. Cette filtration induit alors une filtration  $\text{Fil}^\bullet(H^{d-1}(X_{U,\bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{m,/k})$  de  $H^{d-1}(X_{U,\bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{m,/k}$ . Comme par hypothèse,  $\bar{\rho}_m$  est sans multiplicités, ces gradués sont, en tant que  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation de  $W_v$ , isotypiques pour un  $\varrho\nu^\alpha$  avec des  $\alpha$  distincts pour chacun de ces gradués. En particulier l'image de  $\text{gr}_k(\bar{\rho}_m)$  se factorise par un seul de ces gradués et on en déduit que  $\bar{\pi}_1 \times \cdots \times \bar{\pi}_t$  est un sous-espace d'une induite de la forme  $\text{St}_{l'_1}(\varrho\nu^{\alpha_1 + \frac{l'_1-1}{2}}) \times \bar{\pi}$ . Par hypothèse il existe un indice  $i'$  tel que le support supercuspidal de la réduction modulo  $l$  de  $\text{St}_{l'_{i'}}(\pi'_{i'}(\varrho))$  est lié à celui de  $\text{St}_{l'_1}(\pi'_1(\varrho))$  : supposons par exemple qu'il le précède, le raisonnement est similaire dans l'autre cas.

On reprend le calcul précédent pour le gradué  $\text{gr}_{k'}(\bar{\rho}_m)$  associé à  $\varrho\nu^{\alpha_1-1}$ . On obtient alors que  $\bar{\pi}_1 \times \cdots \times \bar{\pi}_t$  est un sous-espace d'une induite de la forme  $\text{St}_{l'_{i'}}(\varrho\nu^{\alpha_{i'} + \frac{l'_{i'}-1}{2}}) \times \bar{\pi}'$ . La contradiction découle alors du lemme suivant qui prouve que  $\text{St}_{l'_1}(\varrho\nu^{\alpha_1 + \frac{l'_1-1}{2}}) \times \bar{\pi}$  et  $\text{St}_{l'_{i'}}(\varrho\nu^{\alpha_{i'} + \frac{l'_{i'}-1}{2}}) \times \bar{\pi}'$  n'ont aucun sous-espace en commun. □

**3.2.3. Lemme.** — Soient  $\varrho$  une  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale dont la droite de Zelevinsky est de cardinal  $\geq s$ , et  $\pi$  dont la réduction modulo  $l$  est isomorphe à  $\varrho$ . Soit  $\rho$  un sous-espace irréductible d'une induite  $[\overleftarrow{t-1}]_{\varrho\{\frac{-\delta}{2}\}} \times \rho'$  où  $\rho'$  est un sous-quotient irréductible quelconque de la réduction modulo  $l$  de  $[\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_r}]_{\pi\{\frac{t-1}{2}\}}$  où

- $\delta = \sum_{i=1}^r a_i$  et
- $s = t + \delta$ .

Alors pour tous  $\psi$  et  $t' \geq 1$ , la représentation  $\rho$  n'est pas un sous-espace d'une induite  $[\overleftarrow{t'-1}]_{\varrho\{\frac{t'-s}{2}+t\}} \times \psi$ .



*Démonstration.* — En prenant un réseau bien choisi de  $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_{\pi\{\frac{t-1}{2}\}}$  de sorte que  $\rho'$  en soit un sous-espace, et en faisant de même pour  $\psi$ , on est ramené à montrer que les réductions modulo  $l$  des deux induites

$$[\overleftarrow{t-1}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_{\pi} \quad \text{et} \quad [\overleftarrow{t'-1}]_{\varrho\{\frac{t'-s}{2}+t\}} \times \overbrace{[\dots]}^{t-1}_{\pi\{\frac{t-s}{2}\}} \times \overbrace{[\dots]}^{s-t-t'-1}_{\pi\{\frac{t+t'-1}{2}\}}$$

n'ont aucun sous-espace en commun. Or vu que

- les  $\varrho\{\frac{1-s}{2} + k\}$  sont distincts deux à deux pour  $0 \leq k < s$ ,
- le foncteur de Jacquet  $J_{P_{g,2g,\dots,sg}}$  commute à la réduction modulo  $l$ ,
- le support cuspidal de tout  $[\overleftarrow{a}'_1, \dots, \overrightarrow{a}'_r]_{\varrho}$  est  $[\varrho\{\frac{1-s}{2}\}, \varrho\{\frac{s-1}{2}\}]$ ,

la réduction modulo  $l$  de l'image de  $[\overleftarrow{t-1}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_{\pi}$  par tout foncteur de Jacquet est sans multiplicité. Ainsi de la réciprocity de Frobenius, on en déduit qu'il contient un unique sous-espace irréductible qui doit donc être un sous-espace de la réduction modulo  $l$  de  $[\overleftarrow{t-1}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_{\pi}$ . En procédant de même avec la deuxième induite, son unique sous-espace irréductible doit être un sous-espace de la réduction modulo  $l$  de  $[\overbrace{[\dots]}^{t-1}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{t'-1}, \overleftarrow{1}, \dots]_{\pi}$ . On constate donc que ce sous-espace cherché devrait être un constituant irréductible de la réduction modulo  $l$  de deux représentations  $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_{\pi}$  distinctes ce qui ne se peut pas d'après le lemme 2.2.3. □

**3.3. Lemme d'Ihara.** — D'après la proposition 3.2.1, il existe un idéal premier  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$  tel que avec les notations de loc. cit,  $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho)$  est une induite irréductible de représentation de Steinberg généralisées  $\text{St}_{l_i(\varrho)}(\pi_i(\varrho))$  dont les supports supercuspidaux des réductions modulo  $l$  ne sont pas liés. Les arguments du lemme 3.2.2 fournissent un sous-espace de  $H^{d-1}(X_{U, \tilde{\eta}_{w_0}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$  obtenu comme la réduction modulo  $l$  d'un réseau stable de  $\Pi^{\infty} \otimes \mathcal{L}(\pi_1(\varrho))(\frac{l_1(\varrho)-1}{2})$  de la forme  $\Gamma^{\infty, w_0} \otimes \Gamma_{w_0} \otimes \Gamma_W$  où

- $\Gamma^{\infty, w_0}$  (resp.  $\Gamma_W$ ) est un réseau stable de  $\Pi^{\infty, w_0}$  (resp. de  $\mathcal{L}(\pi_1(\varrho))(\frac{l_1(\varrho)-1}{2})$ ) et
- $\Gamma_{w_0} \simeq \Gamma_1 \otimes \Gamma^1$  où
  - $\Gamma^1$  est un réseau stable de  $\text{St}_{l_2(\varrho)}(\pi_2(\varrho)) \times \dots \times \text{St}_{l_r(\varrho)}(\pi_r(\varrho))$  et
  - $\Gamma_1$  est le réseau stable de  $\text{St}_{l_1(\varrho)}(\pi_1(\varrho))$  noté  $RI_{-}(\pi_1(\varrho), l_1(\varrho))$ .

*Remarque :* l'hypothèse que  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  soit sans multiplicité n'implique pas nécessairement que la réduction modulo  $l$  des  $\text{St}_{l_i(\varrho)}(\pi_i(\varrho))$  soit irréductible, elle peut éventuellement être de longueur 2 avec un constituant générique et un autre qui ne l'est pas.

D'après la proposition 3.1.1, la cohomologie  $H^{d-1}(X_{U, \tilde{\eta}_{w_0}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}}$  est à la fois sans torsion et ses composantes isotypiques s'écrivent comme des produits tensoriels  $\Gamma_G \otimes \Gamma_W$  de réseaux stables sous les actions respectives de  $G(\mathbb{A}^{\infty})$  et  $W_{w_0}$ . En reprenant les arguments de la fin de la preuve de la proposition 3.2.1 et en utilisant, cf. [6], que les réseaux associés à  $HT(\pi_{w_0}, t)(\frac{t-1}{2})$  sont les  $\Gamma_{-}(\pi_{w_0}, t)$  dont la réduction modulo  $l$  n'admet pas de non générique

comme sous-espace, on en déduit que la réduction modulo  $l$  de  $\Gamma^1$  admet comme unique sous-espace, une générique.

En résumé la filtration exhaustive de stratification raffinée par les  $\varrho$ -type, du faisceau pervers des cycles évanescents, définit une filtration de  $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)_m \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l$  dont les gradués :

- soit sont la réduction modulo  $l$  d'induites irréductibles de réseaux d'inductions  $\Gamma_-(\pi_{w_0}, t)$ ,
- soit sont comme ceux du lemme 3.2.2.

Les premiers n'ont que des génériques comme sous-espace irréductibles et on a vu au paragraphe précédent que les seconds ne peuvent pas être des sous-espaces de la cohomologie globale, d'où le résultat.

### Références

- [1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [3] P. Boyer. Réseaux d'induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate. *Journal of Algebra*, 336, issue 1 :28–52, 2011.
- [4] P. Boyer. La cohomologie des espaces de lubin-tate est libre. *soumis*, 2013.
- [5] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.
- [6] P. Boyer. Faisceaux pervers entiers d'harris-taylor. *preprint*, 2015.
- [7] P. Boyer. Sur la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor. *preprint*, 2015.
- [8] L. Clozel and J. Thorne. Level-raising and symmetric power functoriality, i. *Compositio Mathematica*, 150, No. 5 :729–748, 2014.
- [9] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo  $l$ . *Proc. London Math. Soc.* 104, pages 690–727, 2012.
- [10] M. Emerton and D. Helm. The local langlands correspondence for  $\mathrm{Gl}(n)$  in families. *Ann. Sci. E.N.S. (4)*, 47 :655–722, 2014.
- [11] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [12] R. Taylor and T. Yoshida. Compatibility of local and global Langlands correspondences. *J.A.M.S.*, 20 :467–493, 2007.
- [13] M.-F. Vignéras. *Représentations  $l$ -modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [14] M.-F. Vignéras. Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.

- [15] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. II. On irreducible representations of  $GL(n)$ . *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.

---

BOYER PASCAL • *E-mail* : [boyer@math.univ-paris13.fr](mailto:boyer@math.univ-paris13.fr), Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25