HAL
open science

Une situation pour mieux s'organiser quand on compte

Olivier Rivière

To cite this version:

Olivier Rivière. Une situation pour mieux s'organiser quand on compte. Bessot, Annie; Margolinas, Claire; Le Van Tien. Des mathématiques à l'école maternelle, Ecole Normale Supérieure Centrale d'Ho Chi Minh-ville, pp.99-111, 2015. hal-01221899

HAL Id: hal-01221899

https://hal.science/hal-01221899v1

Submitted on 28 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Une situation pour mieux s'organiser quand on compte

Olivier Rivière, laboratoire ACTé, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

olivier.riviere@univ-bpclermont.fr

L'objectif de cet atelier est de présenter une situation qui a été construite pour travailler à remédier à certaines difficultés quand on dénombre une collection d'objets.

Qu'est-ce que l'énumération

Dans la continuité du travail pionnier de Guy Brousseau (1984) nous nous appuyons sur Joël Briand (1993; 1999) qui identifie l'énumération comme une connaissance permettant de contrôler une situation de comptage. Pour dénombrer par comptage une collection de ronds dessiné sur une feuille, il convient d'organiser la mise en correspondance terme à terme de deux collections : d'un côté, la collection des ronds qui sont dessinés sur la feuille et de l'autre la collection des mots-nombres de la comptine numérique.

Dans l'extrait de film que nous observons en atelier, le sujet connait la comptine et n'a pas de difficulté dans la mise en œuvre du processus d'association des éléments des deux collections. Sa difficulté réside dans l'oubli d'un des éléments de la collection des ronds dessinés.

Voici l'algorithme tel qu'il est décrit par Briand (1993).

1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.

2- Choisir un premier élément de la collection.

3- Énoncer le premier mot nombre (un).

4- Déterminer un successeur dans l'ensemble des éléments non déjà choisis.

5- Attribuer un mot-nombre (successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).

6- Conserver la mémoire des choix précédents.

7- Recommencer 3 et 4 en les synchronisant.

8- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.

9- Énoncer le dernier mot nombre.

Cet algorithme se présente sous la forme d'une série d'instructions qui doivent être réalisées pas à pas et qui donnent une description du processus de production du cardinal de l'ensemble.

Briand identifie dans cet algorithme ce qui relève de la connaissance de la comptine numérique. Cette connaissance intervient dans les étapes 3, 5 et 9.

Si on élimine de l'algorithme de comptage ces trois étapes liées à la connaissance de la comptine, il reste une activité qui ne dépend pas du nombre :

1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.

2- Choisir un premier élément de la collection.

4- Déterminer un successeur dans l'ensemble des éléments non déjà choisis.

6- Conserver la mémoire des choix précédents.

7- Recommencer 3 et 4 en les synchronisant.

8- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.

Cette activité est nécessaire au comptage, et l'extrait de film étudié permet d'observer une manifestation de sa non-réalisation de cette activité.

Enumérer une collection, c'est donc traiter une fois et une seule chaque élément de cette collection. Pour que cette contrainte (une fois et une seule) soit réalisée, il va falloir que l'élève s'organise.

Les sucres : une situation d'énumération

Se pose alors la question de la production d'une situation dans laquelle interviendrait l'énumération sans pour autant que n'interviennent les aspects numériques. Une situation dans laquelle seule l'énumération interviendrait de manière isolée n'existe pas. Il y a toujours une action minimale à réaliser sur les éléments de la collection. Dans le cas de la situation développée par Briand (1999), cette action consiste à insérer une allumette dans une boite.

Nous allons vous présenter maintenant la situation que nous avons développée pour travailler sur l'énumération ainsi que le processus que nous avons mis en œuvre pour produire cette situation (Margolinas, Wozniak, & Rivière, 2015, sous presse).

Notre objectif est de produire une situation d'énumération d'une collection d'objets. Nous conservons l'idée d'une collection de ronds dessinés sur une feuille.

Le traitement des éléments de cette collection ne doit pas être de nature numérique. Ce traitement doit consister en la mise en œuvre d'une action qui ne nécessite pas de connaissance particulière. Dans le cas du comptage, le traitement consistait à associer un rond avec un élément de la collection des mots nombres. Pour notre situation, nous décidons de placer un objet (un sucre dans la situation filmée) sur chaque rond. Le traitement d'un rond consistera à enlever le sucre qui est posé sur ce rond. Traiter la collection des ronds consiste donc ici à enlever tous les sucres posés sur des ronds. Si, à la fin du traitement, tous les sucres sont enlevés, cela signifiera bien que tous les ronds ont été traités, et donc que la collection des ronds a bien été énumérée.

Revenons maintenant sur une caractéristique de l'énumération que nous n'avons pas encore intégrée à notre processus de conception. Chaque élément de la collection des ronds doit être traité une fois et une seule. Dans la situation de dénombrement des ronds, le comptage se

déroulait sans que le sujet ne dispose par exemple d'un stylo, stylo qui aurait pu lui permettre de barrer les ronds qu'il avait déjà comptés. L'objectif est de produire une situation avec des caractéristiques identiques du point de vue de l'énumération. Il ne faut donc pas que le sujet puisse discriminer visuellement les éléments qu'il a déjà traités de ceux qu'il n'a pas encore traités; ou en tout cas pas pendant l'énumération. Nous décidons donc de cacher chaque rond (et donc chaque sucre) en le recouvrant par un petit chapeau.
Le traitement va donc consister à lever le chapeau, enlever le sucre qui est posé sur le rond et remettre le chapeau sur le rond. De cette manière, on ne pourra pas voir plus d'un rond à la fois.

La situation se présente donc de la manière suivante : sur une *feuille* est disposée une collection de chapeaux. Sous chaque chapeau il y a un sucre et sous chaque sucre il y a un rond dessiné sur une feuille.

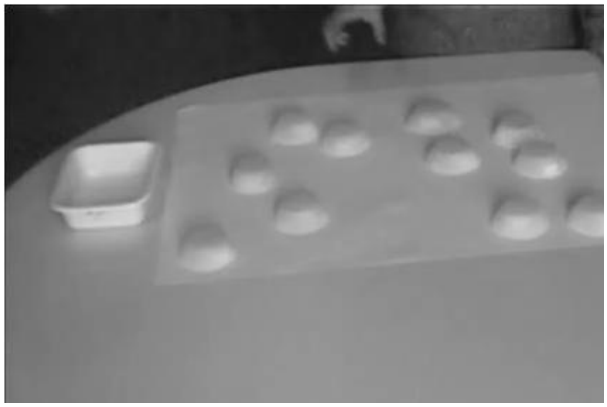

Figure 1 : la situation des sucres

Pour gagner il faut ramasser tous les sucres dans les contraintes qui viennent d'être fixées. Donc, il ne faut pas oublier de sucre sous un chapeau et il ne faut pas essayer d'enlever un sucre sous un chapeau qui n'en a déjà plus.

La partie est gagnée si :

- On dit « j'ai fini » après avoir ramassé tous les sucres.

La partie est perdue si :

- A la fin de la partie : On dit « j'ai fini » et on constate qu'il reste au moins un sucre sous un des chapeaux
- Dans le cours de la partie : On soulève un chapeau et il n'y a pas de sucre sous ce chapeau

Cette situation a été expérimentée auprès de 44 élèves de l'école primaire (de 3 à 11 ans), sur trois supports différents de ronds dessinés sur une feuille. Sur ces 44 élèves, 17 étaient des élèves de maternelle (de 3 à 6 ans).

L'atelier est l'occasion d'observer la procédure mise en œuvre par un élève de maternelle.

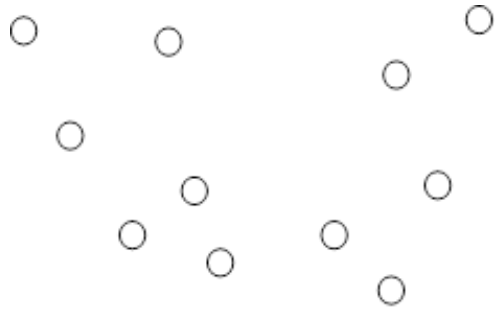

Figure 2 : disposition de la collection des points proposée à l'élève observé

Description et analyse de la procédure mise en œuvre par l'élève observé

L'atelier s'appuie sur le visionnage d'un clip vidéo qui rend compte par l'image de la nature des gestes mis en œuvre par l'élève. Il s'agit dans le cadre de ce texte de rendre compte par l'écrit de ce qui est perçu par un observateur.

La description suivante va essayer de rendre compte de la suite des actions réalisées par l'élève observé en donnant la suite ordonnée des chapeaux qui sont soulevés par cet élève.

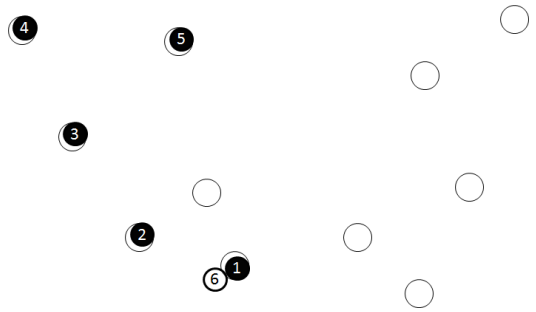

Figure 3 : description du premier essai de l'élève observé

Dans ce premier essai, l'élève semble s'être appuyé sur la configuration spatiale pour partitionner sa collection en deux ensembles disjoints, puisqu'à aucun moment de son travail il ne cherchera à explorer la sous-collection de 4 éléments qui apparait à sa droite. Pour explorer la sous-collection qui apparait à sa gauche, il met en œuvre une stratégie « bord » qui consiste à organiser le balayage des éléments de la collection en choisissant systématiquement les éléments les plus près des bords de la feuille. Il se trompe en soulevant de nouveau l'élément qu'il avait traité en premier. Cette stratégie trouve en général ses limites sur le repérage des éléments intérieurs. Ici, c'est l'absence de mémorisation de l'origine du traitement qui a engendré l'erreur.

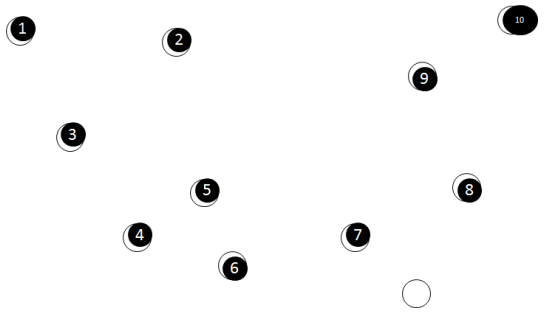

Figure 4 : description du second essai de l'élève observé

Lors de ce second essai, l'élève ne réussit toujours pas à énumérer la collection des ronds. Pour autant, les raisons de son échec sont sensiblement différentes. Dans le premier essai, il échouait car un élément de la collection avait été traité deux fois. Cette fois-ci, il échoue car il reste un élément de la collection qui ne sera pas traité.

Nous pouvons observer que sa stratégie change. Il règle le problème du choix de son origine de balayage en modifiant son premier élément. Lors de son premier essai, il a en fait choisi l'élément qui était le plus proche de la main qui saisit les chapeaux. L'échec au premier essai lui a permis de transformer cette décision d'opportunité. Son nouveau premier élément va être le chapeau qui figure dans un coin de la feuille, en haut à gauche. L'appui sur le partitionnement de la collection en deux sous-collections va être conservé. La stratégie de balayage de la première sous-collection va consister à parcourir cette collection de bas en haut, tout en continuant de s'appuyer sur des décisions d'opportunités liées à la configuration spatiale. Le choix des deux premiers éléments saisis laisse penser à la mise en œuvre d'une stratégie de structuration par ligne que le choix du quatrième élément ne conforte pas. Le choix de ce quatrième élément relève clairement des décisions d'opportunité que nous avons évoquées et qui semblent être une régularité dans le fonctionnement de cet élève. La première sous-collection est cette fois-ci bien énumérée, ce qui témoigne d'une amélioration de la stratégie mis en œuvre par cet élève. Pour le traitement de la seconde sous-collection, l'élève observé oublie un élément dans un ensemble de cinq, celui qui est le plus proche de lui. C'est vraisemblablement lié au choix du premier élément de cette seconde sous-collection qui se trouve être spatialement le plus proche du dernier élément de la première sous-collection.

Les sucres : résultats d'une recherche

Les résultats de ce travail sont en cours d'exploitation. Nous présentons ici seulement les pistes que nous nous proposons de développer.

Du côté des élèves

Tous les élèves qui ont échoué au premier essai ont accepté de faire un second essai. Tous n'ont certes pas réussi à ce second essai, mais tous ces seconds essais ont été l'occasion de modifications. Comme pour l'élève observé sur lequel nous nous sommes appuyés, nous observons une transformation de la manière dont ces élèves s'organisent pour énumérer la collection des ronds.

Du côté de la situation

L'observation des élèves nous permet de mieux comprendre les stratégies qui peuvent être mises en œuvre pour résoudre ce problème et de mieux identifier certaines variables de cette situation. Ainsi, nous avons identifié des stratégies qui reposent sur des cheminements de proche en proche, le repérage de constellations, la structuration en paquets et l'appui sur les chemins parallèles (par exemple en ligne ou en colonne).

Ce faisant, nous comprenons également mieux les caractéristiques de notre situation. Cela nous permet de pouvoir la décrire en termes de collections et de relations qui unissent ces différentes collections. La description du processus de conception de la situation permet de mieux comprendre la fonction de chacun des collections en jeu dans la situation.

Du côté de l'énumération

La répétition du travail sur ces situations nous a permis de mieux de comprendre ce qu'est l'énumération. Nous nous sommes affranchis de la limitation initiale qui était la nôtre de ne pas pouvoir penser l'énumération sans référence au champ numérique.

Nous avons maintenant développé notre capacité à reconnaitre l'énumération dans des situations très différentes, mathématiques ou non.

Bibliographie

Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections.* Université de Bordeaux I, Bordeaux. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00494623

Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 41-76. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00494924

Brousseau, G. (1984). L'enseignement de l'énumération. *International Congress on Mathematical Education*. from http://guy-brousseau.com/2297/lenseignement-de-lenumeration-1984/

Margolinas, C., Wozniak, F., & Rivière, O. (2015, sous presse). Situations d'énumération et organisation des collections. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.