

Capacité du canal linéaire déterministe à interférences avec voies de retour bruitées

Victor QUINTERO^{1,2}, Samir M. PERLAZA¹, Jean-Marie GORCE^{1*}

¹CITI Laboratory INRIA, INSA de Lyon
Domaine Scientifique de la Doua, Batiment Claude Chappe, 6 avenue des Arts, 69621 Villeurbanne, France

²Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
victor.quintero-florez@inria.fr, samir.perlaza@inria.fr
jean-marie.gorce@insa-lyon.fr

Résumé – Cet article présente la caractérisation de la région de capacité du canal linéaire déterministe à interférences avec voies de retour dégradées entre chaque paire émetteur-récepteur. L’apport de ce travail porte sur l’ajout de voies de retour bruitées et sur l’étude de scénarios asymétriques. Nous étudions quelques scénarios types et montrons que dans certains cas, l’utilisation d’une seule des voies de retour permet d’obtenir le même gain qu’avec les deux voies. Ce gain par rapport au canal sans voie de retour est mis en évidence par l’amélioration des taux de transmission individuels et de leur somme. D’autres scénarios montrent qu’une seule voie de retour améliore le taux individuel d’un des deux couples émetteur-récepteur seulement. Il existe enfin d’autres scénarios pour lesquels les voies de retour n’apportent aucun gain ni pour les taux individuels ni pour leur somme. Dans ces scénarios, cela montre que les régions de capacité avec et sans voie de retour sont identiques.

Abstract – In this article, the capacity region of the two-user linear deterministic (LD) interference channel with noisy output feedback (IC-NOF) is fully characterized. This result allows the identification of several asymmetric scenarios in which implementing channel-output feedback in only one of the transmitter-receiver pairs is as beneficial as implementing it in both links, in terms of achievable individual rate and sum-rate improvements w.r.t. the case without feedback. In other scenarios, the use of channel-output feedback in any of the transmitter-receiver pairs benefits only one of the two pairs in terms of achievable individual rate improvements or simply, it turns out to be useless, i.e., the capacity regions with and without feedback turn out to be identical even in the full absence of noise in the feedback links.

1 Introduction

Plusieurs travaux ont montré que l’existence de voies de retour sans erreur associées aux couples émetteur-récepteur (E-R) du canal interférent (IC) permettait d’augmenter significativement la région de capacité du canal IC. Ce canal avec retour sans erreur est noté POF-IC (perfect output feedback interference channel) [1] [2] [3]. La même observation a été faite également avec un plus grand nombre de paires E-R. En général, quand un émetteur observe le rendement du canal à son propre récepteur, il obtient une version bruitée du signal constitué de la somme des signaux entrant provenant de tous les émetteurs. Cependant, une telle observation reçue avec un délai limité et sans erreur donne une information partielle sur les informations transmises par les autres émetteurs dans le réseau. C’est l’utilisation de cette information partielle obtenue par voie de retour comme information adjacente qui permet d’augmenter les performances. Mais le gain potentiel de ce retour n’est pas bien connu dans le cas où les voies de retour sont détériorées par un bruit additif. La région de capacité du LD-IC avec voie de retour bruitée (NOF pour noisy output feedback) est connue

seulement dans le cas d’un modèle de canal symétrique, voir par exemple [5].

Dans cet article, la région de la capacité du LD-IC-NOF à deux utilisateurs est entièrement caractérisée. Ce résultat permet l’identification exacte des régimes asymétriques où la région de capacité du LD-IC est améliorée grâce aux voies de retour bruitées. Nous identifions également les régimes pour lesquels les voies de retour sont inutiles.

Pour des raisons de place, la preuve du ‘converse’ n’est pas présentée ici mais est disponible dans [6]. Au contraire, nous présentons ici une approche de codage permettant d’établir une borne atteignable optimale pour le LD-IC-NOF. Ce schéma de codage est réalisé à l’aide d’un message divisé en trois parties, avec codage par superposition et décodage à rebours comme suggérés dans la littérature.

2 Canal linéaire déterministe à interférences avec voies de retour dégradées

Considérons le canal linéaire IC à deux utilisateurs avec feedback bruité (noté LD-IC-NOF) avec pour paramètres \vec{n}_{11} , \vec{n}_{22} , n_{12} , n_{21} , \overleftarrow{n}_{11} et \overleftarrow{n}_{22} et représenté à la figure 1. Soient \vec{n}_{ii} , $i \in \{1, 2\}$, un entier non-négatif représentant le rapport signal à bruit (RSB) au récepteur i et n_{ij} , $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$,

*This research was supported in part by the European Commission under Marie Skłodowska-Curie Individual Fellowship No. 659316 and in part by Universidad del Cauca, Popayán, Colombia and the Administrative Department of Science, Technology and Innovation of Colombia (Colciencias), fellowship number 617-2013.

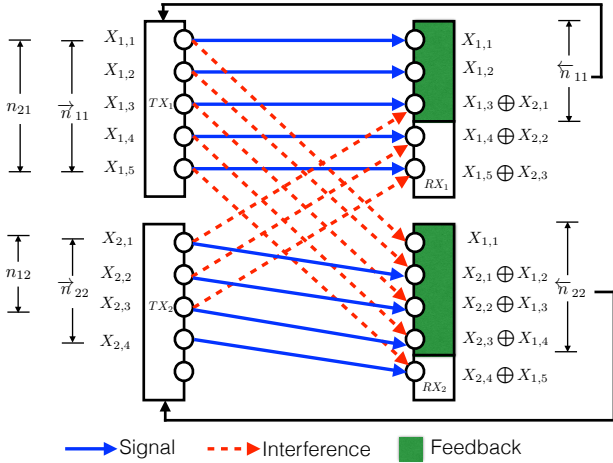


FIGURE 1 – canal linéaire déterministe à interférences avec rétroalimntation dégradée (LD-IC-NOF) pour deux utilisateurs.

un entier non-négatif représentant le rapport interférence à bruit (INR) au récepteur i pour l'interférence issue de l'émetteur j ; et \overleftarrow{n}_{ii} , $i \in \{1, 2\}$, un entier non négatif représentant le SNR à l'émetteur i reçu du récepteur i par la voie de retour. On note $\mathbf{X}_i^{(n)} = (X_{i,1}, \dots, X_{i,q})^\top$ le vecteur binaire de longueur q présent au temps symbole n à l'entrée du canal i , avec $q = \max(\overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22}, n_{12}, n_{21})$ et $n \in \{1, \dots, N\}$, où N est la longueur de bloc. Le signal reçu au récepteur i est noté $\mathbf{Y}_i^{(n)} = (Y_{i,1}, \dots, Y_{i,q})^\top$. Les entrées sorties de ce canal sont liées par les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\mathbf{Y}}_i^{(n)} = \mathbf{S}^{q-\overleftarrow{n}_{ii}} \mathbf{X}_i^{(n)} + \mathbf{S}^{q-n_{ij}} \mathbf{X}_j^{(n)}, \quad (1)$$

Le signal de la voie de retour disponible à l'émetteur i à la fin de l'utilisation du canal n est :

$$\overleftarrow{\mathbf{Y}}_i^{(n)} = \mathbf{S}^{(q-\overleftarrow{n}_{ii})+d} \overrightarrow{\mathbf{Y}}_i^{(n-d)}, \quad (2)$$

où d est un délai que l'on supposera limité. Noter que les additions et les multiplications sont en binaire, et que \mathbf{S} est une matrice $q \times q$ à décalage. L'émetteur i envoie M_i bits d'information $b_{i,1}, \dots, b_{i,M_i}$ avec le mot code $(\mathbf{X}_i^{(1)}, \dots, \mathbf{X}_i^{(N)})$. La fonction d'encodage à l'émetteur i peut être modélisée comme un ensemble d'applications déterministes $f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(N)}$, avec $f_i^{(1)} : \{0, 1\}^{M_i} \rightarrow \{0, 1\}^q$ et $\forall t \in \{2, \dots, N\}$, $f_i^{(t)} : \{0, 1\}^{M_i} \times \{0, 1\}^{q(n-1)} \rightarrow \{0, 1\}^q$, de telle sorte que

$$\mathbf{X}_i^{(1)} = f_i^{(1)}(b_{i,1}, \dots, b_{i,M_i}) \text{ and } \forall t \in \{2, \dots, N\}, \quad (3)$$

$$\mathbf{X}_i^{(t)} = f_i^{(t)}(b_{i,1}, \dots, b_{i,M_i}, \overleftarrow{\mathbf{Y}}_i^{(1)}, \dots, \overleftarrow{\mathbf{Y}}_i^{(t-1)}). \quad (4)$$

À la fin du bloc, le récepteur i utilise la séquence $\mathbf{Y}_i^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}_i^{(N)}$ pour générer les estimations $\hat{b}_{i,1}, \dots, \hat{b}_{i,M_i}$. La probabilité moyenne de l'erreur binaire au récepteur i notée p_i , est donnée par :

$$p_i = \frac{1}{M_i} \sum_{\ell=1}^{M_i} \mathbb{1}_{\{\hat{b}_{i,\ell} \neq b_{i,\ell}\}}. \quad (5)$$

Une paire de débits $(R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+^2$ est dite atteignable s'il satisfait la définition suivante.

Définition 1 (Débits réalisables) Une paire de débits $(R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+^2$ est réalisable si il existe au moins une paire de dictionnaires de codes \mathcal{X}_1^N et \mathcal{X}_2^N contenant des mots code de longueur N , avec les fonctions correspondantes de codage $f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(N)}$ et $f_2^{(1)}, \dots, f_2^{(N)}$ de telle sorte que la probabilité moyenne de l'erreur binaire peut être rendu arbitrairement petite lorsque N tendent vers l'infini.

La section suivante détermine la région de toutes les paires de débits (R_1, R_2) atteignables pour le LD-IC-NOF en fonction des paramètres \overleftarrow{n}_{11} , \overleftarrow{n}_{22} , n_{12} , n_{21} , \overleftarrow{n}_{11} et \overleftarrow{n}_{22} .

3 Résultats principaux

On note $\mathcal{C}(\overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22}, n_{12}, n_{21}, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22})$ la région de capacité du LD-IC-NOF avec les paramètres \overleftarrow{n}_{11} , \overleftarrow{n}_{22} , n_{12} , n_{21} , \overleftarrow{n}_{11} and \overleftarrow{n}_{22} .

Le théorème 1 donné en haut de la page suivante caractérise complètement la région de capacité $\mathcal{C}(\overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22}, n_{12}, n_{21}, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22})$.

3.1 Preuve du théorème 1

La preuve d'atteignabilité est décrite formellement dans le rapport technique INRIA 456 [1]. Il faut noter que la preuve ne repose pas sur des hypothèses spécifiques du canal linéaire et est donc extensible à d'autres canaux IC-NOF, comme le canal gaussien. Cependant, cet article se limite à l'étude du modèle linéaire et à l'interprétation des résultats obtenus sous plusieurs conditions.

3.2 Discussion

Cette section propose 5 scénarios particuliers qui illustrent comment les voies de retour permettent d'augmenter la région des débits atteignables dans certains cas et sont inutiles dans d'autres cas. Les métriques suivantes sont utilisées : (a) gain sur les débits individuels Δ_1 et Δ_2 et (b) gain sur la somme des débits Σ . Dans tous les cas, les performances sont mesurées relativement au cas sans voie de retour.

Pour décrire formellement les métriques Δ_1 , Δ_2 et Σ , considérons un LD-IC-NOF de paramètres \overleftarrow{n}_{11} , \overleftarrow{n}_{22} , n_{12} , n_{21} , \overleftarrow{n}_{11} et \overleftarrow{n}_{22} . Le gain maximum $\Delta_i(\overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22}, n_{12}, n_{21}, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22})$ par voie de retour est :

$$\Delta_i(\overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22}, n_{12}, n_{21}, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22}) = \max_{R_j > 0} \sup_{(R_i, R_j) \in \mathcal{C}_1} R_i - \sup_{(R_i^\dagger, R_j) \in \mathcal{C}_2} R_i^\dagger, \quad (12)$$

et le gain pour la somme des débits est :

$$\Sigma(\overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22}, n_{12}, n_{21}, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22}) = \sup_{(R_1, R_2) \in \mathcal{C}_1} R_1 + R_2 - \sup_{(R_1^\dagger, R_2^\dagger) \in \mathcal{C}_2} R_1^\dagger + R_2^\dagger, \quad (13)$$

Théorème 1 La région de capacité $\mathcal{C}(\vec{n}_{11}, \vec{n}_{22}, n_{12}, n_{21}, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22})$ du LD-IC-NOF à deux utilisateurs est l'ensemble de paires de débits non négatives (R_1, R_2) qui satisfont $\forall i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$:

$$R_i \leq \min(\max(\vec{n}_{ii}, n_{ji}), \max(\vec{n}_{ii}, n_{ij})), \quad (6)$$

$$R_i \leq \min(\max(\vec{n}_{ii}, n_{ji}), \max(\vec{n}_{ii}, \overleftarrow{n}_{jj} - (\vec{n}_{jj} - n_{ji})^+)), \quad (7)$$

$$R_1 + R_2 \leq \min(\max(\vec{n}_{11}, n_{12}) + (\vec{n}_{22} - n_{12})^+, \max(\vec{n}_{22}, n_{21}) + (\vec{n}_{11} - n_{21})^+), \quad (8)$$

$$R_1 + R_2 \leq \max((\vec{n}_{11} - n_{12})^+, n_{21}) + \max((\vec{n}_{22} - n_{21})^+, n_{12}) \quad (9)$$

$$+ \left((\min(\overleftarrow{n}_{11}, \max(\vec{n}_{11}, n_{12})) - (\vec{n}_{11} - n_{12})^+)^+ - (n_{12} - \vec{n}_{11})^+ - \min(\vec{n}_{11}, n_{21}) + \min((\vec{n}_{11} - n_{12})^+, n_{21}) \right)^+ \quad (10)$$

$$+ \left((\min(\overleftarrow{n}_{22}, \max(\vec{n}_{22}, n_{21})) - (\vec{n}_{22} - n_{21})^+)^+ - (n_{21} - \vec{n}_{22})^+ - \min(\vec{n}_{22}, n_{12}) + \min((\vec{n}_{22} - n_{21})^+, n_{12}) \right)^+ \quad (11)$$

$$2R_i + R_j \leq \max(\vec{n}_{jj}, n_{ji}) + \max(\vec{n}_{ii}, n_{ij}) + (\vec{n}_{ii} - n_{ji})^+ - \min((\vec{n}_{jj} - n_{ji})^+, n_{ij}) \quad (10)$$

$$+ \left((\min(\overleftarrow{n}_{jj}, \max(\vec{n}_{jj}, n_{ji})) - (\vec{n}_{jj} - n_{ji})^+)^+ - (n_{ji} - \vec{n}_{jj})^+ - \min(\vec{n}_{jj}, n_{ij}) + \min((\vec{n}_{jj} - n_{ji})^+, n_{ij}) \right)^+ \quad (11)$$

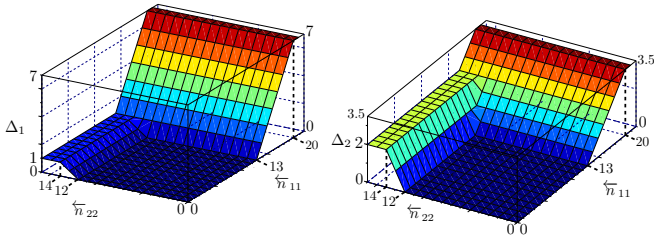


FIGURE 2 – Gain maximal simultané des deux débits individuels de l'exemple 1

où $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\vec{n}_{11}, \vec{n}_{22}, n_{12}, n_{21}, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22})$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\vec{n}_{11}, \vec{n}_{22}, n_{12}, n_{21}, 0, 0)$ sont les régions de capacité avec et sans voie de retour respectivement.

3.2.1 Exemple 1 : où une seule voie de retour peut permettre d'améliorer les deux débits individuels

Considérons le cas dont les paires E-R 1 et 2 sont respectivement en régime faiblement ou modérément interférent avec $\vec{n}_{11} = 20$, $\vec{n}_{22} = 15$, $n_{12} = 12$, $n_{21} = 13$. La figure 2 montre les valeurs de $\Delta_i(20, 15, 12, 13, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22})$ pour les deux paires en fonction de \overleftarrow{n}_{11} et \overleftarrow{n}_{22} . Il est montré que l'augmentation de \overleftarrow{n}_{11} , au-delà d'une certaine limite \overleftarrow{n}_{11}^* , permet l'amélioration simultanée des deux débits individuels. Notons que, dans le cas d'une voie de retour parfaite de la sortie du canal, i.e., $\overleftarrow{n}_{11} = \max(\vec{n}_{11}, n_{12})$, le gain est maximal simultanément sur les deux paires E-R. D'autre part, l'augmentation de \overleftarrow{n}_{22} , au-delà d'une certaine limite \overleftarrow{n}_{22}^* , permet l'amélioration simultanée des deux débits individuels, mais sans atteindre le maximum même pour une voie de retour sans erreur.

Notons également que les voies de retour ne peuvent améliorer la somme des débits.

3.2.2 Exemple 2 : où une seule voie de retour permet l'amélioration maximale d'un débit individuel et de la somme des débits

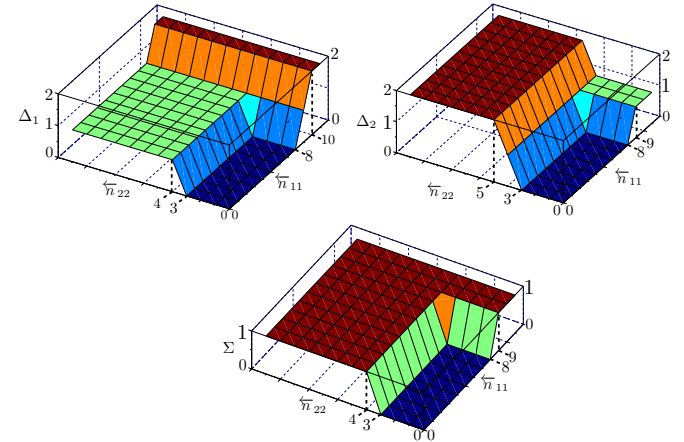


FIGURE 3 – Gain maximal d'un débit individuel et de la somme des débits pour l'exemple 2.

Considérons le cas où les paires sont en régime d'interférence respectivement très faible et modéré, avec $\vec{n}_{11} = 10$, $\vec{n}_{22} = 10$, $n_{12} = 3$, $n_{21} = 8$. La figure 3 montre $\Delta_i(10, 10, 3, 8, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22})$ en fonction de \overleftarrow{n}_{11} et \overleftarrow{n}_{22} . On observe que : (a) Pour tout $i \in \{1, 2\}$, l'augmentation de \overleftarrow{n}_{ii} , au-delà d'une certaine limite \overleftarrow{n}_{ii}^* , permet l'amélioration simultanée des deux débits individuels. Cependant, Le gain maximal n'est atteignable que pour R_i . D'autre part, l'augmentation de \overleftarrow{n}_{11} ou \overleftarrow{n}_{22} , au-delà d'une certaine limite \overleftarrow{n}_{11}^* et \overleftarrow{n}_{22}^* , permet l'amélioration maximale du débit somme (voir Fig. 3).

3.2.3 Exemple 3 : où au moins une voie de retour n'a aucun effet sur la région de capacité

Considérons le cas où les deux paires E-R sont en régime à interférence faible, avec $\vec{n}_{11} = 10$, $\vec{n}_{22} = 20$, $n_{12} = 6$,

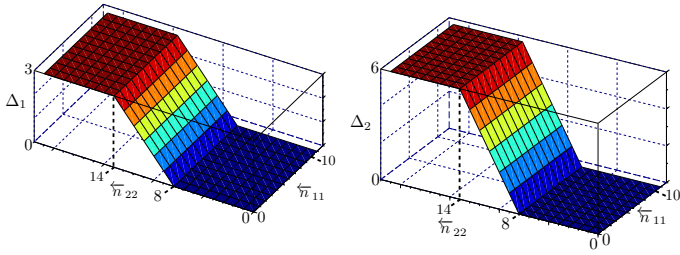


FIGURE 4 – Gain maximal d'un débit individuel dans l'exemple 3

$n_{21} = 12$. La Fig. 4 représente $\Delta_i(10, 20, 6, 12, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22})$ en fonction de \overleftarrow{n}_{11} et \overleftarrow{n}_{22} .

On observe que l'augmentation de \overleftarrow{n}_{11} n'augmente pas la région de capacité, indépendamment de la valeur de \overleftarrow{n}_{22} . Par contre, l'augmentation de \overleftarrow{n}_{22} au-delà d'une certaine limite \overleftarrow{n}_{22}^* , permet de gagner sur les deux débits individuels. Finalement, aucun des paramètres \overleftarrow{n}_{11} ou \overleftarrow{n}_{22} n'augmente la somme des débits.

3.2.4 Exemple 4 : où la voie de retour i augmente le débit R_j

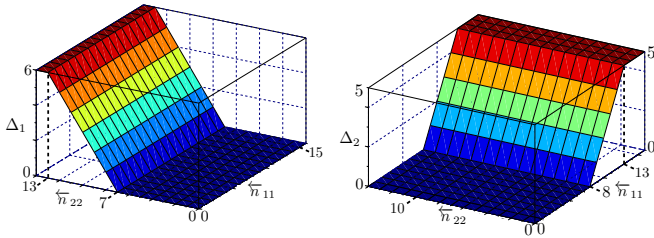


FIGURE 5 – Gain du débit individuel pour l'exemple 4

On considère le cas où les paires E-R sont simultanément en régime d'interférence fort, avec $\overrightarrow{n}_{11} = 7$, $\overrightarrow{n}_{22} = 8$, $n_{12} = 15$, $n_{21} = 13$. La Figure 5 montre $\Delta_i(7, 8, 15, 13, \overleftarrow{n}_{11}, \overleftarrow{n}_{22})$ en fonction de \overleftarrow{n}_{11} et \overleftarrow{n}_{22} . On observe qu'en augmentant \overleftarrow{n}_{ii} , au-delà d'une certaine limite \overleftarrow{n}_{ii}^* , on améliore exclusivement R_j . Par contre, \overleftarrow{n}_{11} et \overleftarrow{n}_{22} ne permettent pas d'augmenter le débit somme. Ces observations sont en phase avec l'interprétation que la voie de retour ne peut être qu'une technique altruiste pour les autres paires. En effet la liaison mettant en place une voie de retour offre un canal alternatif d'information pour l'autre liaison.

3.2.5 Exemple 5 : où aucune des voies de retour n'a d'effet sur la région de capacité

Considérons le cas des paires E-R respectivement en régime d'interférence forte et très faible, avec $\overrightarrow{n}_{11} = 10$, $\overrightarrow{n}_{22} = 9$, $n_{12} = 2$, $n_{21} = 15$. On observe que les régions de capacité avec et sans voie de retour sont identiques.

4 Conclusions

Dans cet article, la région de capacité du canal linéaire déterministe à interférences avec voie de retour dégradée a été caractérisée.

A partir d'exemples particuliers asymétriques, nous avons montré que même en présence de bruit, les voies de retour permettent dans certains cas de gagner en débits individuels et parfois également en somme des débits. Cependant, il existe des situations où aucun gain n'est à espérer des voies de retour.

L'analyse de ce canal en régime asymétrique a été rendue possible grâce à l'établissement de la région de capacité associée et dont les preuves sont détaillées dans [1]. Cet article permet d'en montrer l'intérêt et d'exploiter ce résultat.

Références

- [1] C. Suh, C. et D. N. C. Tse. *Feedback Capacity of the Gaussian Interference Channel to Within 2 Bits*. IEEE Transactions on Information Theory, 2011.
- [2] A. Vahid, C. Suh, et A. S. Avestimehr. *Interference Channels With Rate-Limited Feedback*. IEEE Transactions on Information Theory, 2012.
- [3] S. Yang, et D. Tuninetti. *Interference Channel With Generalized Feedback (a.k.a. With Source Cooperation) : Part I : Achievable Region*. IEEE Transactions on Information Theory, 2011.
- [4] S. Mohajer, R. Tandon, et H. V. Poor. *On the Feedback Capacity of the Fully Connected-User Interference Channel*. IEEE Transactions on Information Theory, 2013.
- [5] S-Q. Le, R. Tandon, M. Motani, et H. V. Poor. *Approximate Capacity Region for the Symmetric Gaussian Interference Channel with Noisy Feedback*. (Submitted to) IEEE Transactions on Information Theory, 2012.
- [6] V. Quintero, S. M. Perlaza, et J-M. Gorce. *Noisy Channel-Output Feedback Capacity of the Linear Deterministic Interference Channel*. INRIA Grenoble - Rhône-Alpes, 2015.
- [7] D. Tuninetti. *On Interference Channel with Generalized Feedback (IFC-GF)*. Proc. of International Symposium on Information Theory (ISIT), 2007.
- [8] S. M. Perlaza, R. Tandon, H. V. Poor, et Z. Han. *Perfect Output Feedback in the Two-User Decentralized Interference Channel*. (To appear in) IEEE Transactions on Information Theory, 2013.
- [9] S. M. Perlaza, R. Tandon, et H. V. Poor. *Symmetric Decentralized Interference Channels with Noisy Feedback*. Proc. of International Symposium on Information Theory (ISIT), 2014.
- [10] T. M. Cover, et J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience, 1991.