



HAL
open science

Méthode de Réduction d'Ordre et Simulations Aerothermiques

Jean-Baptiste Wahl, Christophe Prud'Homme, Yannick Hoarau

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Wahl, Christophe Prud'Homme, Yannick Hoarau. Méthode de Réduction d'Ordre et Simulations Aerothermiques. Journée doctorale , Oct 2015, Strasbourg, France. hal-01217935

HAL Id: hal-01217935

<https://hal.science/hal-01217935>

Submitted on 20 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Projet ANR CHORUS : La modélisation au service de l'industrie

Motivation : développer l'utilisation de modèles numériques durant les phases de design et de conception.

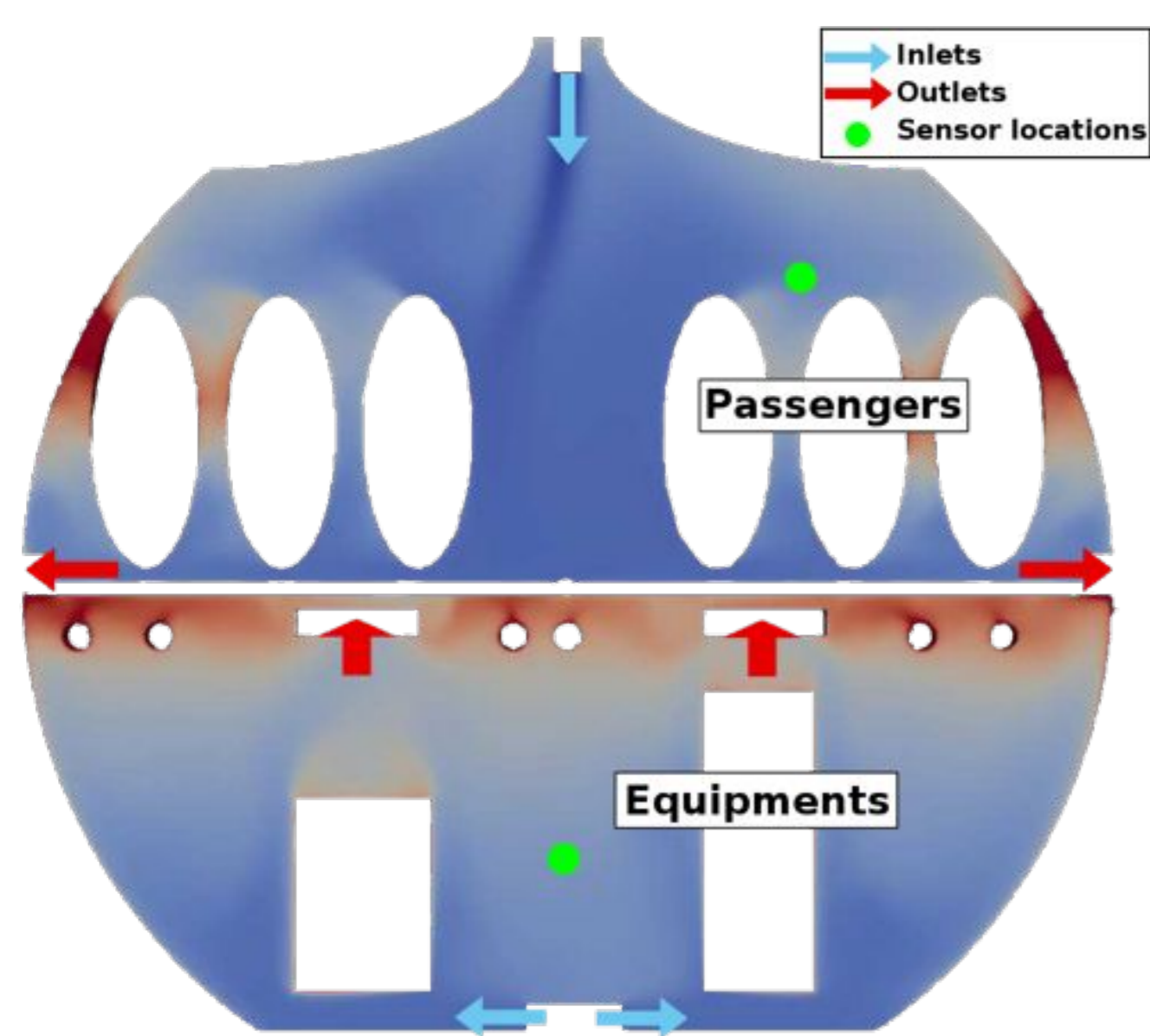
Principaux axes du projets :

- Traitement méthodologique des problèmes de gestion des incertitudes dans un contexte multi-disciplinaire,
- Développement de nouveaux modèles mathématiques et des algorithmes pour faire face aux problèmes de scalabilité (analyse de l'incertitude goal-oriented, techniques de réduction)
- Accessibilité à des algorithmes avancés interoperables liés aux capacités HPC pour une large communauté hors CHORUS dans un environnement open source reconnu

Difficultés :

- Application des méthodes numériques à des cas industriels complexes (recours au HPC)
- Développement de modèles réduits performants et certifiés
- Application à des modèles multi-physiques

Cas-test d'Airbus : simulation aerothermique dans une cabine d'avion



Objectifs : Application de la méthode des bases réduites certifiées à une simulation aerothermique dans une baie avionique

Modèle :

- Couplage Navier-Stokes/Thermique
- Fluide newtonien incompressible
- Approximation de Boussinesq
- Écoulements turbulents

Défis Scientifiques

- Modélisation de la turbulence
- Stabilisation numérique de régimes à convection dominante
- Couplage des conditions limites avec un ECS (Environment Control System)
- Modèle réduit : prédiction de l'erreur

Modèle mathématiques

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = g\beta(T - T_0)\mathbf{e}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T - k\Delta T = 0 \\ \text{+ Conditions limites} \\ \text{+ Initialisation} \end{cases} \quad (1)$$

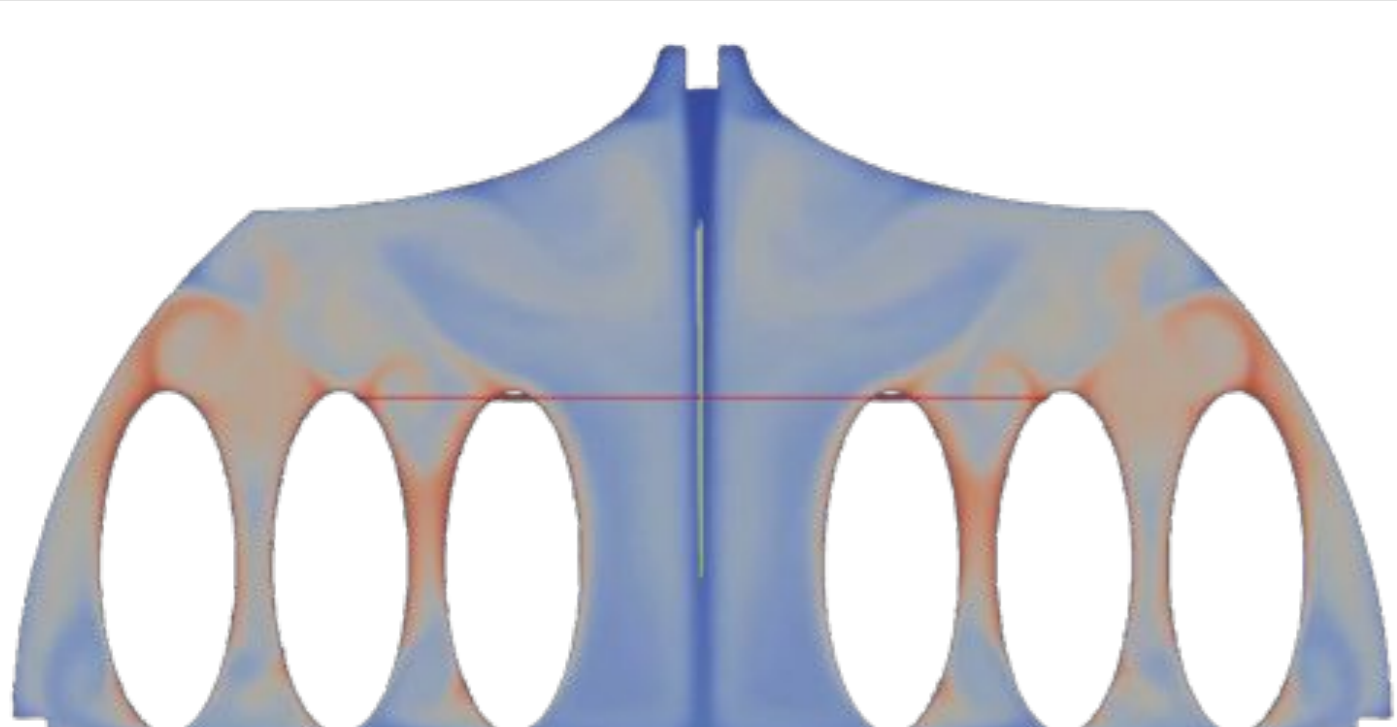
avec :

- ν : viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)
- g : accélération gravitationnelle ($m.s^{-2}$)
- k : diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$)
- β : coefficient d'expansion thermique (K^{-1})
- ρ : densité ($kg.m^{-3}$)

Stratégie Numérique

- **Discrétisation en espace :** éléments finis de Lagrange de type $P^{k+1} \times P^k \times P^{k+1}$ pour vitesse/pression/température.
- **Discrétisation en temps :** algorithme adaptatif, basé sur un schéma implicite de Crank-Nicolson et un schéma explicite Adams Bashforth d'ordre 2[2].
- **Stabilisation :** implémentation des méthodes de Douglas-Wang, GLS et SUPG pour stabiliser les modèles d'écoulement à convection dominante [3]
- **Calcul Parallèle :** décomposition du domaine et répartition sur un nombre arbitraire de processus : jusqu'au millier de processeur et plusieurs millions de degrés de liberté.
- **Solveur Linéaire :** développement de préconditionneurs adaptés au problème. Interface avec la librairie PETSc pour la résolution en parallèle.
- **Implémentation :** utilisation de la librairie Feel++ de résolution d'équations aux dérivées partielles, écrite en C++. <http://www.feelpp.org/>

Résultats numériques : Profile de température



Paramètres de la simulation

- $\delta t = 0.1s$
- $\nu = 10^{-4} m^2.s^{-1}$
- $k = 10^{-4} m^2.s^{-1}$
- $\rho = 1 kg.m^{-3}$

La méthode des bases réduites certifiées (CRB)

Principe de la méthode[4] :

Résolution d'une EDP paramétrisée

$$F(u(\mu); \mu) = 0 \quad (2)$$

et évaluation d'un quantité d'intérêt $I(\mu)$.

Partie Offline : Grande dimension \mathcal{N} , résolution élément finis

- Multiples résolutions : $\forall \mu_i \in$ échantillonnage donné, on évalue $u(\mu_i) = \xi_i$, solution de (2)
- Construction de l'espace réduit : $X_N = \text{span}\{\xi_i | i = 1, \dots, N\}$

Partie Online : inversion d'un system $N \times N$, avec $N \ll \mathcal{N}$

- On recherche la solution dans X_N pour chaque nouveau paramètre μ

$$u_N(\mu) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mu) \xi_i$$

- Approximation de la quantité d'intérêt, $I_N(\mu)$, à partir du modèle réduit
- Évaluation d'une borne supérieur $\Delta_N(\mu)$ pour l'erreur d'approximation,

$$|I(\mu) - I_N(\mu)| \leq \Delta_N(\mu)$$

Intérêt de la méthode :

- Complexité N , du problème réduit, très faible et indépendante de la dimension éléments finis \mathcal{N}
- Une majoration a posteriori de l'erreur d'approximation
- Applications industrielles : analyse d'erreur, quantification d'incertitude, ...

Ingrédients Essentiels

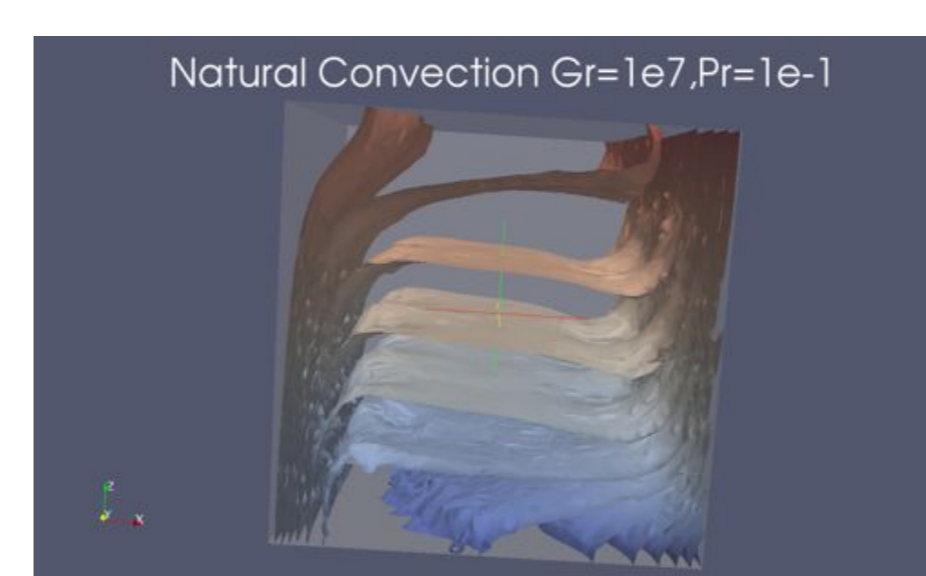
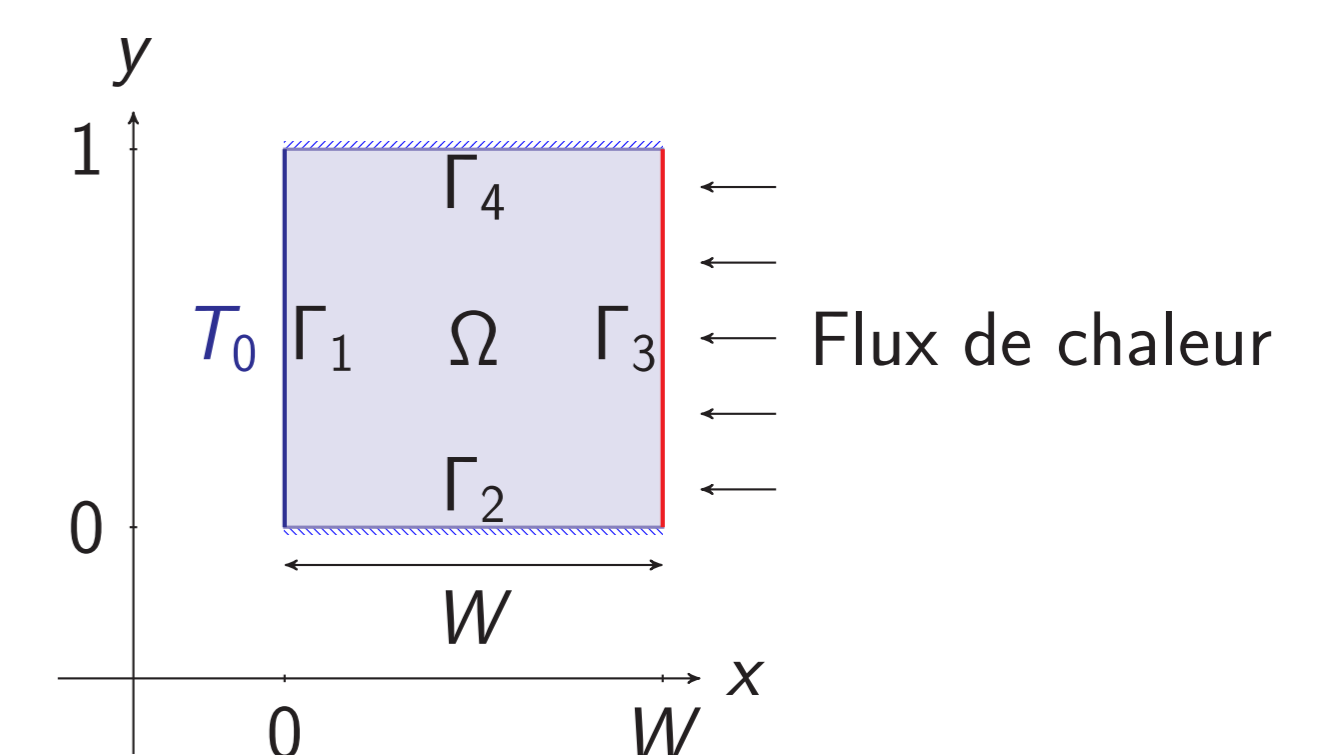
- **Décomposition Affine :** pour un calcul offline/online efficace. Les cas non-affines seront traités grâce à la méthode EIM [1]
- **Un estimateur d'erreur a posteriori $\Delta_N(\mu)$ précis :** pour un choix optimal de paramètre durant la partie offline. Également essentiel pour quantifier l'erreur de la solution réduite.

Avancement : implémentation des estimateurs d'erreur a posteriori

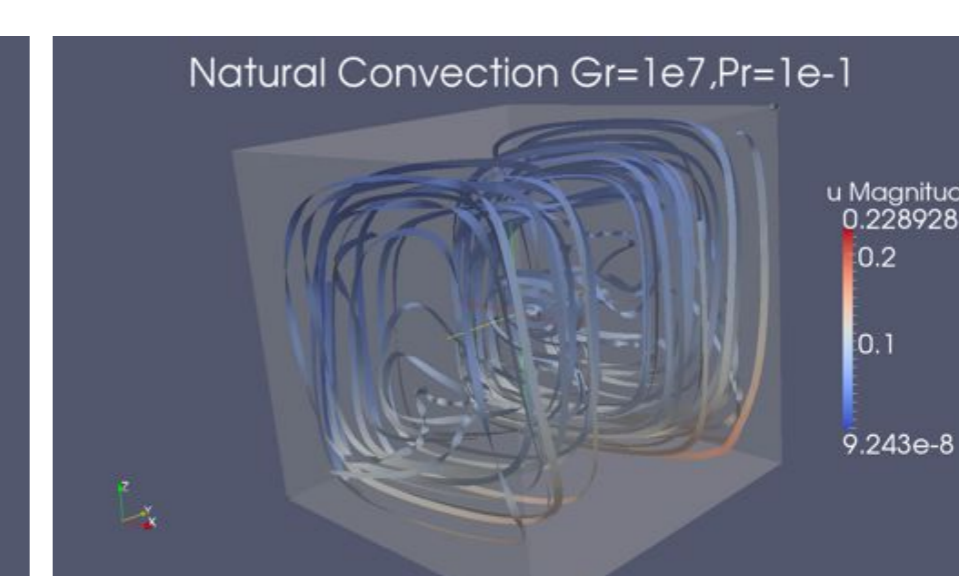
Type de problème	Exemple	Progrès actuel
Coercive	Heat Equation	OK
Inf-Sup (Saddle Point)	Stokes Equation	On Going
Non-Linear	Navier-Stokes	Not Yet
Non-Linear	NS+Heat	Not Yet
Non-Linear (EIM)	Electro-thermal model	On Going

CRB Appliquées au benchmark de la cavité chauffée [5]

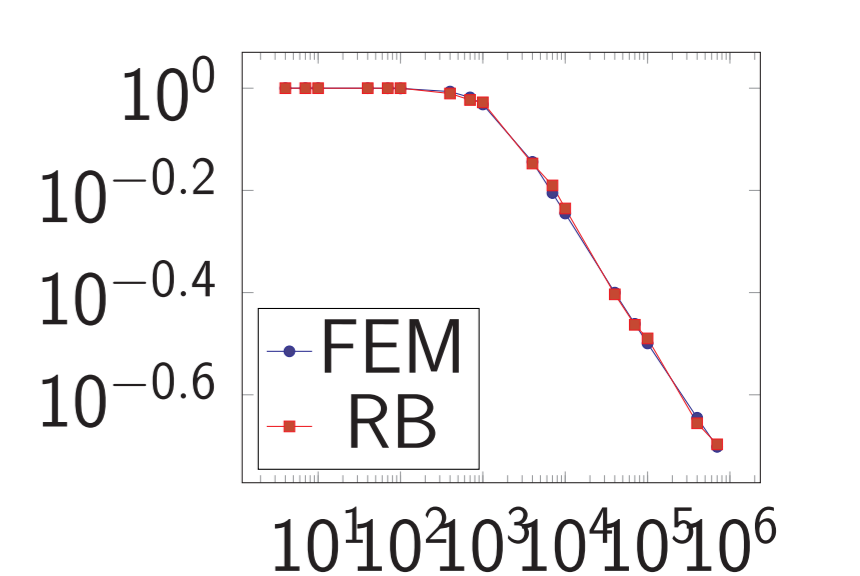
- État stationnaire du système (1)
- 2 paramètres : nombre de Grashof et de Prandtl
- Quantité d'intérêt : température moyenne sur le bord chaud
- Application future : cas-test de la cabine d'avion



(a) Température iso-surfaces



(b) Lignes de courants



(c) T_{av} versus Gr

Résultats CRB 3D, pour $Gr = 1e7, Pr = 0.1$

Perspectives

Aerothermie :

- Implémentation de modèles de turbulence
- Développement du modèle complet 3D (pas de temps adaptatif, stabilisation, turbulence)

Base Réduites :

- Estimateur d'erreur pour les problèmes de type Point-Selle
- Estimateur d'erreur pour les problèmes non-linéaire (Navier-Stokes)
- Application au modèle d'aerothermie complet : quid de la turbulence dans le modèle réduit.

Références

- [1] M. Barrault, Y. Maday, N. C. Nguyen, and A.T. Patera. An empirical interpolation method: application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(9):667-672, 2004.
- [2] DA Kay, PM Gresho, DF Griffiths, and DJ Silvester. Adaptive time-stepping for incompressible flow part ii: Navier-stokes equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2010.
- [3] Sérgio L. Frey Leopoldo P. Franca. Stabilized finite element methods.ii. the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99:209-233, 1992.
- [4] C. Prud'homme, D. V. Rovas, K. Veroy, L. Machiels, Y. Maday, A. T. Patera, and G. Turinici. Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations: Reduced-basis output bound methods. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1):70-80, 2002.
- [5] E. Schenone, S. Veys, and C. Prud'Homme. High Performance Computing for the Reduced Basis Method. Application to Natural Convection. *ESAIM: Proceedings*, pages 255 - 273, December 2013. Cemosis, <http://www.cemosis.fr/>