



**HAL**  
open science

**SUR LE MODULE DE BERTRANDIAS–PAYAN  
DANS UNE  $p$ -EXTENSION – NOYAU DE  
CAPITULATION**

Georges Gras

► **To cite this version:**

Georges Gras. SUR LE MODULE DE BERTRANDIAS–PAYAN DANS UNE  $p$ -EXTENSION – NOYAU DE CAPITULATION. 2015. hal-01216984

**HAL Id: hal-01216984**

**<https://hal.science/hal-01216984>**

Preprint submitted on 18 Oct 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SUR LE MODULE DE BERTRANDIAS–PAYAN DANS UNE $p$ -EXTENSION – NOYAU DE CAPITULATION

GEORGES GRAS

ABSTRACT. For a number field  $K$  and a prime number  $p$  we denote by  $BP_K$  the compositum of the cyclic  $p$ -extensions of  $K$  embeddable in a cyclic  $p$ -extension of arbitrary large degree. Then  $BP_K$  is  $p$ -ramified and is a finite extension of the compositum  $\tilde{K}$  of the  $\mathbb{Z}_p$ -extensions of  $K$ . We study the transfer map  $j_{L/K}$  (as a capitulation map of ideal classes) for the Bertrandias–Payan module  $\mathcal{BP}_K := \text{Gal}(BP_K/\tilde{K})$  in a  $p$ -extension  $L/K$  (assuming the Leopoldt conjecture). In the cyclic case of degree  $p$ ,  $j_{L/K}$  is injective except if  $L/K$  is kummerian,  $p$ -ramified, non globally cyclotomic but locally cyclotomic at  $p$  (Theorem 3.1). We then intend to characterize the condition  $|\mathcal{BP}_K|$  divides  $|\mathcal{BP}_L^G|$  ( $G = \text{Gal}(L/K)$ ). So we study  $\mathcal{BP}_L^G$  when  $j_{L/K}$  is not injective and show that it depends on the classical arithmetical properties of the Galois group (over  $\tilde{K}$ ) of the maximal Abelian  $p$ -ramified pro- $p$ -extension of  $K$ . We give complete proofs in an elementary way using ideal approach of global class field theory.

18 Octobre 2015

Ce texte résulte d’un travail en collaboration avec Jean–François Jaulent (Bordeaux) et Thong Nguyen Quang Do (Besançon). L’originalité de la démarche étant que trois techniques sont proposées (une par auteur) pour aborder le même sujet. Ceci nous a semblé nécessaire dans la mesure où toutes sont issues de la théorie du corps de classes, mais ont été formalisées différemment (tant au plan des notions que des notations) selon les grands axes naturels du corps de classes (classes d’idéaux et d’idéles, corps de classes global  $p$ -adique et logarithmique, cohomologie Galoisienne et théorie d’Iwasawa). Ainsi le lecteur est-il invité à comparer ces méthodologies qui, sauf erreur, ont le même potentiel de résultats, mais avec des avantages et inconvénients différents selon le but recherché (allant du plus concret et numérique au plus abstrait), cette multiplicité étant souvent à l’origine de difficultés éditoriales (voir un historique au § 1.2).

Je remercie mes deux partenaires pour les nombreux échanges constructifs que nous avons eus.

## 1. GÉNÉRALITÉS SUR LE MODULE DE BERTRANDIAS–PAYAN

**1.1. Le schéma de la  $p$ -ramification Abélienne.** Soit  $p$  un nombre premier. Pour un corps  $k$  quelconque on désigne par  $\mu(k)$  le groupe des racines  $p$ -ièmes de l’unité de  $k$ . Par la commodité que confère un livre, on se réfère le plus souvent à [Gr1] (non exclusif).

On considère le schéma ci-après ([Gr1], III.2.6.1, Fig. 2.2), au sens ordinaire de la notion de classes d’idéaux, dans lequel  $\tilde{K}$  est le composé des  $\mathbb{Z}_p$ -extensions du corps de nombres  $K$ ,  $H_K$  le  $p$ -corps de classes de Hilbert de  $K$ ,  $H_K^{\text{Pf}}$  la pro- $p$ -extension Abélienne  $p$ -ramifiée (i.e., non ramifiée en dehors de  $p$ ) maximale de  $K$ .

On désigne par  $U_K := \bigoplus_{v|p} U_v$  le  $\mathbb{Z}_p$ -module des unités locales  $p$ -principales<sup>1</sup> pour  $K$ , où chaque  $U_v$  est le groupe des unités  $v$ -principales du complété  $K_v$  de  $K$  en  $v|p$ , par

---

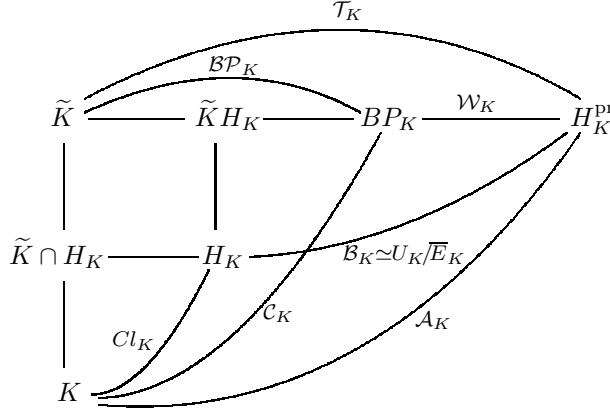
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11R04 ; Secondary 11R11, 11R16 .

*Key words and phrases.* class field theory;  $p$ -ramification; Bertrandias–Payan module; capitulation of ideal classes; transfert map.

<sup>1</sup>D’une manière générale, dans un groupe de nombres les éléments  $p$ -principaux sont ceux dont l’image résiduelle est égale à 1 en toute place  $v|p$ .

$W_K = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(U_K) = \bigoplus_{v|p} \mu(K_v)$ , et par  $\overline{E}_K$  l'adhérence dans  $U_K$  du groupe des unités globales ( $p$ -principales)  $E_K$  de  $K$ .

On pose  $\mathcal{W}_K = W_K/\mu(K) \subseteq \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(U_K/\overline{E}_K) \subseteq \mathcal{T}_K$  (inclusions valables sous la conjecture de Leopoldt pour  $K$  et  $p$  : [Gr1], Lemme III.4.2.4) :



**1.2. Historique de la  $p$ -ramification.** Les  $p$ -groupes de torsion  $\mathcal{T}$  jouent un rôle capital dans toutes les questions de type *Théorie du Corps de Classes* et plus précisément *Théorie de la  $p$ -Ramification Abélienne*, et ont été longuement étudiés, sous la conjecture de Leopoldt, selon la chronologie approximative suivante :

[Kub] (1957), [Mi] (1978), [Gr2] (1982), [Gr3] (1983), [Ja1] (1983), [Ja2] (1984), [Gr4] (1985), [Gr5] (1986), [Ng1] (1986), [MoNg1] (1987), [He] (1988), [Ja3] (1990), [Th] (1993), [Ja4] (1998), [Seo1] (2011), [Seo2] (2013), [Seo3] (2013), [Gr6] (2014), [MoNg2] (2015), [Gr7] (2015), [Seo4] (2015), [Seo5] (2015), [Seo6] (2015).

Les sujets essentiels développés dans ce cadre sont les suivants :

(i) détermination du radical initial dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions lorsque  $\mu(K) \neq 1$ , à savoir, trouver les nombres  $\alpha \in K^\times$  tels que  $K(\sqrt[p]{\alpha}) \subset \tilde{K}$  ([CK], [Gr4], [He], [MoNg2], [Th], [JaM1], [Seo1], [Seo2]),

(ii) étude des notions de  $p$ -rationalité et  $p$ -régularité, la  $p$ -rationalité de  $K$  étant la nullité de  $\mathcal{T}_K$  sous la conjecture de Leopoldt, et la  $p$ -régularité celle du  $p$ -Sylow  $R_2(K)$  du noyau (dans  $K_2(K)$ ) des symboles réguliers ([Gr1], [Gr5], [GrJ],[Ja4], [JaNg], [Mo], [MoNg1]), ainsi que des cas particuliers de ces notions, notamment pour  $p = 2$  (J-F. Jaulent, F. Soriano–Gafiuk, O. Sauzet).

(iii) généralisations de la notion de  $p$ -tours de corps de classes et structure du groupe de Galois de la pro- $p$ -extension maximale d'un corps de nombres ([JaS], [JaM1], [JaM2], [Mai1] [Mai2], [Seo6]),

(iv) obtention de résultats numériques sur le radical initial, le groupe  $\mathcal{T}_K$ , et sur la structure de  $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$  où  $K^{\text{ab}}$  est la pro- $p$ -extension Abélienne maximale de  $K$  ([Cha], [He], [PV], [Th], [AS], [Gr6]),

(v) analyse d'aspects conjecturaux lorsque  $p \rightarrow \infty$  (e.g. [Gr7] conjecturant la  $p$ -rationalité de tout corps de nombres pour  $p$  assez grand). Récemment, la notion de  $p$ -rationalité a acquis une importance nouvelle dans le cadre des représentations Galoisienne en direction d'autres conjectures (e.g. [Gre]).

Les techniques utilisées étant de nature “classes d'idéaux” ou bien de nature “Diviseurs”, aux sens généralisés des infinitésimaux développés au début par G. Gras et J-F. Jaulent et leurs élèves, ou encore de nature “Cohomologie Galoisienne et Théorie d'Iwasawa” développée par T. Nguyen Quang Do et ses élèves, puis repris plus récemment au moyen d'autres points de vue de type cohomologique, comme par exemple par Seo,

souvent indépendamment des travaux précédents, lesquels ont été pour la plupart regroupés en détail dans [Gr1] (2003) et notamment dans l’Edition Springer 2005 corrigée et augmentée.

Dans [Ja6] et [Ng2], ainsi que dans l’article présent, on trouvera des compléments et mises au point à ce sujet au moyen de l’étude du module de Bertrandias–Payan (cf. § 1.3) qui se prête bien à l’utilisation de ces techniques, les trois auteurs ayant le projet de publier un document explicatif en anglais sur ces trois approches similaires, mais pâtissant jusqu’ici de l’absence de “table de concordance” détaillée et de plusieurs textes publiés en français, ce qui est sans doute à l’origine des difficultés d’analyse et de comparaison des résultats de la littérature et bien souvent de l’ignorance des résultats antérieurs.

**1.3. Le module de Bertrandias–Payan.** On sait que sous la conjecture de Leopoldt pour  $K$  et  $p \neq 2$ ,  $\mathcal{W}_K \subseteq \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(U_K/\overline{E}_K)$  fixe l’extension  $BP_K$  qui est la pro- $p$ -extension maximale de  $K$  composée des  $p$ -extensions cycliques plongeables dans une  $p$ -extension cyclique de  $K$  de degré arbitrairement grand ([Gr1], Corollary III.4.15.8) ; le groupe  $\mathcal{BP}_K := \text{Gal}(BP_K/\widehat{K}) \simeq \mathcal{T}_K/\mathcal{W}_K$ , qui est le groupe de torsion du groupe  $\mathcal{C}_K = \text{Gal}(BP_K/K)$ , est appelé depuis [Ng1] le module de Bertrandias–Payan à la suite de l’article [BP].

Si l’on se réfère à [Ja2], [Ng1], ou à [Gr1], III.4.15.3, 4.15.4,  $BP_K$  est aussi le composé des  $p$ -extensions cycliques de  $K$  localement plongeables (en toute place  $v$  finie) dans une  $\mathbb{Z}_p$ -extension de  $K_v$ .

De nombreux travaux, comme ceux mentionnés dans l’historique précédent, évoquent le rôle de  $\mathcal{BP}$  dans la théorie du corps de classes, aussi nous souhaitons montrer ici que l’on dispose depuis longtemps des techniques permettant d’étudier les propriétés de ce module.

Soit  $S$  un ensemble fini de places de  $K$  contenant l’ensemble  $S_p := \{v, v|p\}$  des  $p$ -places ;  $S$  sera choisi en fonction de l’extension  $L/K$  considérée et en particulier contiendra les places ramifiées dans  $L/K$ . Les résultats dépendront essentiellement de  $S_p$ . Notre ensemble  $S$  jouera un rôle différent de celui utilisé dans [Ja6] et [Ng2].

On pose  $\mathcal{K}_1^\times = K_1^\times \otimes \mathbb{Z}_p$ , où  $K_1^\times$  est le groupe des éléments  $p$ -principaux de  $K^\times$  étrangers à  $S$  puis  $\mathcal{I}_K = I_K \otimes \mathbb{Z}_p$ , où  $I_K$  est le groupe des idéaux de  $K$  étrangers à  $S$ , et  $\mathcal{P}_K = \{(x), x \in \mathcal{K}_1^\times\} = P_K \otimes \mathbb{Z}_p$ , où  $P_K$  est le sous-groupe des idéaux principaux étrangers à  $S$ . On pose  $\mathcal{E}_K = E_K \otimes \mathbb{Z}_p$  (groupe des unités).

Soit  $i_K$  le plongement (surjectif) de  $\mathcal{K}_1^\times$  dans  $U_K = \bigoplus_{v|p} U_v$  et soit  $\mathcal{K}_\infty^\times$  le noyau de  $i_K$  (groupe des infinitésimaux étrangers à  $S$  de Jaulent, [Ja1], [Ja2], [Ja4]). On désigne par  $\mathcal{P}_{K,\infty}$  le groupe des idéaux principaux  $(x_\infty)$ ,  $x_\infty \in \mathcal{K}_\infty^\times$ .

On a alors ([Gr1], Théorème III.2.4) :

$$\mathcal{A}_K := \text{Gal}(H_K^{\text{pt}}/K) \simeq \mathcal{I}_K/\mathcal{P}_{K,\infty}, \mathcal{B}_K := \text{Gal}(H_K^{\text{pt}}/H_K) \simeq \mathcal{P}_K/\mathcal{P}_{K,\infty}, \mathcal{T}_K := \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{A}_K).$$

**Remarque 1.1.** De fait, la théorie du corps de classes définit  $\mathcal{A}_K = \varprojlim_n \text{Gal}(K^{(p^n)}/K) \simeq \varprojlim_n (\mathcal{I}_K/\mathcal{P}_{K,(p^n)})$ , où  $K^{(p^n)}$  est le  $p$ -corps de rayon modulo  $(p^n)$ , où  $\mathcal{P}_{K,(p^n)} := \{(x), x \equiv 1 \pmod{p^n}\}$  ; or  $\bigcap_n \mathcal{P}_{K,(p^n)} = \mathcal{P}_{K,\infty}$  ([Gr1], Proposition III.2.4.1).

Le fait de pouvoir travailler avec des groupes d’idéaux étrangers à  $S$  provient du théorème d’approximation idélique ou simplement du fait que toute classe d’idéaux contient un représentant étranger à  $S$  ([Gr1], Théorème I.4.3.3 et Remarque I.5.1.2). On a alors, avec des notations évidentes au niveau fini :

$$\text{Gal}(K^{(p^n)}/K) \simeq I_{K,S_p}/P_{K,S_p,(p^n)} \simeq I_{K,S}/P_{K,S,(p^n)},$$

où les isomorphismes avec le groupe de Galois sont obtenus via le symbole d’Artin qui est défini pour les idéaux étrangers à  $S_p$ , donc a fortiori étrangers à  $S$ .

On définit les mêmes objets relatifs à toute  $p$ -extension  $L$  de  $K$  en utilisant l'ensemble, noté encore  $S$ , des places de  $L$  au-dessus de  $S$ . Tous les objets ainsi obtenus par tensorisation avec  $\mathbb{Z}_p$  sont des  $\mathbb{Z}_p$ -modules et se comportent comme les objets d'origine en raison de la platitude de  $\mathbb{Z}_p$ .

Nous commencerons par le cas  $L/K$  cyclique qui est en un sens universel et qui permet une plus grande effectivité quant au plan numérique.

On utilisera à plusieurs reprises les lemmes suivants :

**Lemme 1.2.** *Soit  $k$  un corps de nombres vérifiant la conjecture de Leopoldt pour  $p$ . Soit  $\varepsilon \in \mathcal{E}_k := E_k \otimes \mathbb{Z}_p$  telle que, dans  $U_k$ , on ait  $i_k(\varepsilon)^{p^e} = 1$ ,  $e \geq 0$  (i.e.,  $i_k(\varepsilon) \in W_k$ ). Alors  $\varepsilon \in \mu(k) \otimes \mathbb{Z}_p = \mu(k)$  et  $\varepsilon^{p^e} = 1$ . Il en résulte  $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(U_k/i_k(E_k)) = W_k/i_k(\mu(k))$ .*

*Démonstration.* Caractérisation très classique utilisant l'injectivité de  $i_k$  sur  $\mathcal{E}_k$  ([Gr1], Théorème III.3.6.2 (vi) et [Ja3], Théorème 12).  $\square$

**Lemme 1.3.** *Soit  $L/K$  cyclique de degré  $p > 2$  et soit  $s$  un générateur de  $G := \text{Gal}(L/K)$ .*

(i) *Si  $\mu(K) = 1$ , alors  $\mu(L) = 1$  et  $H^1(G, \mu(L)) = 0$ .*

(ii) *Si  $\mu(K) = \mu(L)^p \neq 1$  (i.e.,  $L/K$  est cyclotomique globale de degré  $p$ ), alors  $N_{L/K}(\mu(L)) = \mu(K)$  et  $\mu(L)^{1-s} = \langle \zeta_1 \rangle$ , où  $\zeta_1 \in \mu(K)$  est d'ordre  $p$ , d'où  $H^1(G, \mu(L)) = 0$ .*

*Si  $\mu(K) = \mu(L) \neq 1$ ,  $N_{L/K}(\mu(L)) = \mu(K)^p$ ,  $\mu(L)^{1-s} = 1$ , et  $H^1(G, \mu(L)) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .*

(iii) *Si  $\xi_L \in W_L$  vérifie  $\xi_L^{1-s} = i_L(\zeta_L)$ , où  $\zeta_L \in \mu(L)$ , alors  $\zeta_L$  est d'ordre 1 ou  $p$ . On a  $W_L^G = W_K$  et  $W_L^p \subseteq W_K$ .*

*Démonstration.* (i) Si  $\mu(K) = 1$  et si  $L$  contenait  $\zeta_1$  d'ordre  $p$ , on aurait  $K \subset K(\zeta_1) \subseteq L$  où  $K(\zeta_1)/K$  serait de degré égal à un diviseur de  $p-1$  différent de 1 (absurde).

(ii) Ce point est classique (e.g. [Wa]).

(iii) Soit  $\xi_L \in W_L$ . On a  $\xi_L^p \in W_K$  car si  $\xi_w \in \mu(L_w)$  est une composante de  $\xi_L$  telle que  $\xi_w \notin \mu(K_v)$  alors, comme pour le cas global,  $\xi_w^p \in \mu(K_v)$ . Comme  $W_L = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(U_L)$  et que  $U_L^G = U_K$ , il en résulte que  $W_L^G = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(U_K) = W_K$ .  $\square$

## 2. ETUDE DU "TRANSFERT" $j_{L/K} : \mathcal{C}_K \longrightarrow \mathcal{C}_L$

**2.1. Généralités.** On suppose désormais  $p \neq 2$ . On s'intéresse au noyau du transfert  $j_{L/K} : \mathcal{B}\mathcal{P}_K = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{C}_K) \longrightarrow \mathcal{B}\mathcal{P}_L = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{C}_L)$  (notations et définitions du § 1.1), dans une  $p$ -extension  $L/K$ , ultérieurement cyclique de degré  $p$ .

Le transfert  $\mathcal{C}_K \simeq \mathcal{A}_K/\mathcal{W}_K \longrightarrow \mathcal{C}_L \simeq \mathcal{A}_L/\mathcal{W}_L$  a même noyau (sous-groupe fini de  $\mathcal{C}_K$ , donc de torsion). On peut alors travailler sur ce transfert plus simple noté encore  $j_{L/K}$ .

Son noyau est aussi un noyau de capitulation de classes d'idéaux puisque  $\mathcal{A}_K \simeq \mathcal{I}_K/\mathcal{P}_{K,\infty}$  et  $\mathcal{A}_L \simeq \mathcal{I}_L/\mathcal{P}_{L,\infty}$  sont des groupes de classes d'idéaux ; aussi en raison de la méthode utilisée, nous parlerons pour  $j_{L/K}$  de *morphisme de capitulation* et pour  $\text{Ker}(j_{L/K})$  de *noyau de capitulation*, comme dans [Ja6], [Ng2].

Faisons un rappel sur le morphisme général de capitulation  $\mathcal{A}_K \longrightarrow \mathcal{A}_L$  en  $p$ -ramification Abélienne ([Gr1], Théorème IV.2.1) :

**Lemme 2.1.** *Dans une extension  $L/K$  quelconque de corps de nombres, le morphisme de capitulation  $\mathcal{A}_K \rightarrow \mathcal{A}_L$  est injectif sous la conjecture de Leopoldt pour  $p$  et la clôture galoisienne de  $L$  sur  $K$ . Il en résulte l'injectivité de  $\mathcal{T}_K = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{A}_K) \longrightarrow \mathcal{T}_L = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{A}_L)$ .*

De fait, la première preuve de ce résultat a été donnée en 1982 dans [Gr2], Théorème I.1, développée dans [Gr3], puis redonnée dans d'autres cadres techniques, comme dans [Gr1], [Ja1], [Ja2], [Ng1], et constitue une propriété classique, caractéristique de la conjecture de Leopoldt, qui pourrait simplifier considérablement l'approche de [Seo3], [Seo4], [Seo6].

**2.2. Identification de  $\mathcal{W}_K$  comme groupe de classes d'idéaux.** On a la suite exacte  $1 \rightarrow \mathcal{K}_\infty^\times \mathcal{E}_K / \mathcal{E}_K \longrightarrow \mathcal{K}_1^\times / \mathcal{E}_K \xrightarrow{i_K} U_K / \overline{E}_K \rightarrow 1$ , où  $\overline{E}_K = i_K(\mathcal{E}_K)$  est l'adhérence de  $E_K$  dans  $U_K$ , et les isomorphismes :

$$U_K / \overline{E}_K \simeq \mathcal{K}_1^\times / \mathcal{K}_\infty^\times \mathcal{E}_K \simeq \mathcal{P}_K / \mathcal{P}_{K,\infty} \simeq \mathcal{B}_K = \text{Gal}(H_K^{\text{pt}} / H_K).$$

L'isomorphisme  $U_K / \overline{E}_K \longrightarrow \mathcal{P}_K / \mathcal{P}_{K,\infty}$  est donc ainsi défini : à partir de  $u \in U_K$  on prend  $x \in \mathcal{K}_1^\times$  d'image  $u$  par  $i_K$  ( $x$  est défini modulo  $\mathcal{K}_\infty^\times$ ) et on considère la classe de l'idéal principal  $(x)$  modulo  $\mathcal{P}_{K,\infty}$ , qui ne dépend pas du choix de  $x$ . La surjectivité est évidente, et si  $u$  conduit à  $(x) = (x_\infty) \in \mathcal{P}_{K,\infty}$ , on a  $x = x_\infty \varepsilon_K$ ,  $\varepsilon_K \in \mathcal{E}_K$ , d'où  $i_K(x) = u = i_K(\varepsilon_K) \in \overline{E}_K$ .

On suppose que la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour toute extension  $L$  de  $K$  considérée :

**Lemme 2.2.** (i) *L'image de  $\mathcal{W}_K = W_K / i_K(\mu(K))$ , dans  $\mathcal{P}_K / \mathcal{P}_{K,\infty}$ , est formée des classes modulo  $\mathcal{P}_{K,\infty}$  des idéaux de  $\mathcal{P}_K$  de la forme  $(x)$ , où  $i_K(x) = \xi_K \in W_K$ , ce que l'on peut résumer par l'isomorphisme  $\mathcal{W}_K \simeq \{(x), x \in \mathcal{K}_1^\times, i_K(x) \in W_K\} \cdot \mathcal{P}_{K,\infty} / \mathcal{P}_{K,\infty}$ .*

(ii) *Le morphisme de capitulation  $j_{L/K}$  est l'extension des "classes d'idéaux" :*

$$\mathcal{I}_K / \{(x), x \in \mathcal{K}_1^\times, i_K(x) \in W_K\} \cdot \mathcal{P}_{K,\infty} \longrightarrow \mathcal{I}_L / \{(y), y \in \mathcal{L}_1^\times, i_L(y) \in W_L\} \cdot \mathcal{P}_{L,\infty}.$$

*Démonstration.* Le point (i) résulte de la définition ci-dessus de  $U_K / \overline{E}_K \longrightarrow \mathcal{P}_K / \mathcal{P}_{K,\infty}$  appliquée au sous-groupe de torsion  $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(U_K / \overline{E}_K) = \mathcal{W}_K$  (Lemme 1.2).

Il en résulte que  $\mathcal{C}_K \simeq \mathcal{A}_K / \mathcal{W}_K \simeq \mathcal{I}_K / \{(x), x \in \mathcal{K}_1^\times, i_K(x) \in W_K\} \cdot \mathcal{P}_{K,\infty}$ , d'où facilement le point (ii) du lemme. On rappelle que  $\mathcal{I}_K$  et  $\mathcal{I}_L$  sont formés d'idéaux étrangers à  $S$  ( $S$  contenant  $S_p$  et les places ramifiées dans  $L/K$ ).  $\square$

**2.3. Caractérisation du noyau de capitulation (cas cyclique de degré  $p$ ).** Soit  $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}_K$  tel que par extension,  $(\mathfrak{a})_L = (y)(y_\infty)$  où  $y \in \mathcal{L}_1^\times$ ,  $y_\infty \in \mathcal{L}_\infty^\times$ , avec  $i_L(y) = \xi_L \in W_L$  et  $i_L(y_\infty) = 1$  (Lemme 2.2 (ii)).

A partir de  $(\mathfrak{a})_L = (y \cdot y_\infty)$ , la norme  $N_{L/K}$  conduit en idéaux à la relation  $\mathfrak{a}^p = (N_{L/K}(y \cdot y_\infty))$  ; posons  $N_{L/K}(y) = x \in \mathcal{K}_1^\times$  et  $N_{L/K}(y_\infty) = x_\infty \in \mathcal{K}_\infty^\times$ , ce qui donne dans  $L$  la relation  $y^p \cdot y_\infty^p = x \cdot x_\infty \cdot \varepsilon_L$ ,  $\varepsilon_L \in \mathcal{E}_L$ . Mais  $i_L(y^p) = i_L(x) \cdot i_L(\varepsilon_L)$ , ou encore  $i_L(y^p) = N_{L/K}(i_L(y)) \cdot i_L(\varepsilon_L)$  qui s'écrit par hypothèse  $\xi_L^p = N_{L/K}(\xi_L) \cdot i_L(\varepsilon_L)$  ; donc (Lemme 1.3, preuve de (iii)), on a  $\xi_L^p \in W_K$  et  $i_L(\varepsilon_L) \in W_K$ , et d'après le Lemme 1.3 on a  $\varepsilon_L = \zeta_K \in \mu(K)$ .

On a donc en posant  $\alpha := x \cdot x_\infty \cdot \zeta_K \in \mathcal{K}_1^\times$ , la relation  $\alpha = (y \cdot y_\infty)^p$  que l'on interprète de la façon suivante :

(i) Cas  $y \cdot y_\infty = x' \in \mathcal{K}_1^\times$ . On a  $i_L(y) = i_L(x') = \xi_L \in W_L \cap U_L^G$ , donc  $i_L(y) = \xi_K \in W_K$  et  $y$  est de la forme  $y = x'' \cdot y'_\infty$  avec  $i_K(x'') = \xi_K$ , d'où  $x' = y \cdot y_\infty = x'' \cdot y'_\infty$  ; donc  $y'_\infty = x''_\infty \in \mathcal{K}_\infty^\times$  et il vient  $(\mathfrak{a})_L = (x'' \cdot x''_\infty)_L$  qui se redescend en  $\mathfrak{a} = (x'' \cdot x''_\infty)$  ; or  $i_L(x'') = \xi_K \in W_K$ , d'où la trivialité de la classe de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathcal{C}_K$  (Lemme 2.2 (i)).

(ii) Cas  $y \cdot y_\infty \notin \mathcal{K}_1^\times$ . On est nécessairement dans un cas kummerien où  $L = K(\sqrt[p]{\alpha})$  et  $\mu(K) \neq 1$  puisque  $(y \cdot y_\infty)^p = \alpha \in \mathcal{K}_1^\times$  (de fait on prend pour  $\alpha$  un représentant de  $x \cdot x_\infty \cdot \zeta_K$ , modulo  $\mathcal{K}_1^{\times p}$ , dans  $K_1^\times$ , afin de donner un sens à l'extension kummerienne  $L$ ). Comme  $\alpha$  est par définition étranger à  $S$ , et que la ramification modérée se lit sur l'idéal  $(\alpha)$ , il en résulte que  $L/K$  est  $p$ -ramifiée.

On déduit de ce qui précède qu'en dehors du cas (ii), il ne peut y avoir capitulation non triviale et on a donc obtenu le résultat partiel suivant remarqué dans [Seo6]

**Théorème 2.3.** *Soit  $L/K$  une  $p$ -extension. Sous la conjecture de Leopoldt pour  $L$  et  $p > 2$ , et si  $\mu(K) = 1$ , le morphisme de capitulation  $j_{L/K} : \mathcal{B}\mathcal{P}_K \longrightarrow \mathcal{B}\mathcal{P}_L$  est injectif.*

*Démonstration.* Comme  $L/K$  est une  $p$ -extension, on est ramené au cas cyclique ci-dessus en remarquant que les hypothèses se transmettent à tout corps  $k$  compris entre  $K$  et  $L$  ( $\mu(k) = 1$  et conjecture de Leopoldt).  $\square$

Une condition nécessaire pour  $\text{Ker}(j_{L/K}) \neq 1$  est donc  $\mu(K) \neq 1$  et  $L/K$   $p$ -ramifiée.

Poursuivons l'étude du noyau de capitulation avec la seule hypothèse  $L/K$   $p$ -ramifiée et par conséquent  $S = S_p$  (l'hypothèse kummerienne n'est pas nécessaire pour l'instant car on la retrouvera dans le calcul du noyau). On revient à  $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}_K$  tel que par extension,  $(\mathfrak{a})_L = (y \cdot y_\infty)$  où  $y \in \mathcal{L}_1^\times$ ,  $y_\infty \in \mathcal{L}_\infty^\times$ , avec  $i_L(y) = \xi_L \in W_L$  et  $i_L(y_\infty) = 1$ .

Soit  $s$  un générateur de  $G := \text{Gal}(L/K)$ . Il vient alors  $(\mathfrak{a})_L^{1-s} = (1) = (y^{1-s})(y_\infty^{1-s})$ , d'où  $y^{1-s}y_\infty^{1-s} = \zeta_K$  où  $\zeta_K \in \mu(K)$  est d'ordre 1 ou  $p$  puisque  $(y \cdot y_\infty)^p = \alpha \in \mathcal{K}_1^\times$ .

Réciproquement, si  $\xi_L \in W_L$  est telle que  $\xi_L^{1-s} = i_L(\zeta_K)$ , en prenant  $y \in \mathcal{L}_1^\times$  tel que  $i_L(y) = \xi_L$ , il vient  $i_L(\zeta_K) = i_L(y)^{1-s}$ , d'où  $\zeta_K = y^{1-s}y'_\infty$ ,  $y'_\infty \in \mathcal{L}_\infty^\times$ ; on a  $N_{L/K}(y'_\infty) = N_{L/K}(\zeta_K) = 1$  d'après ce qui précède; le Théorème 90 de Hilbert–Speiser–Noether dans  $\mathcal{L}_\infty^\times$  ([Gr1], preuve du Lemme IV.3.1), implique  $y'_\infty = y_\infty^{1-s}$ ,  $y_\infty \in \mathcal{L}_\infty^\times$ , et on obtient une relation de la forme  $\zeta_K = y^{1-s}y_\infty^{1-s}$  ce qui conduit à  $(y y_\infty) \in \mathcal{I}_L^G = (\mathcal{I}_K)_L$  car il n'y a pas de ramification en dehors de  $p$ . L'idéal  $(y y_\infty)$  de  $L$  est l'étendu d'un idéal  $\mathfrak{a}$  de  $K$  étranger à  $p$  dont la classe est dans le noyau de  $j_{L/K}$ . On a donc à ce stade :

$$\text{Ker}(j_{L/K}) = \{ \mathfrak{a} \in \mathcal{I}_K, (\mathfrak{a})_L = (y)(y_\infty), i_L(y) = \xi_L \ \& \ \xi_L^{1-s} \in i_L(\mu(K)) \} \cdot \mathcal{P}_{K,\infty} \\ / \{ (x), x \in \mathcal{K}_1^\times, i_K(x) \in W_K \} \cdot \mathcal{P}_{K,\infty},$$

qu'il reste à identifier.

Soit  $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}_K$  que  $(\mathfrak{a})_L = (y)(y_\infty)$ ,  $i_L(y) = \xi_L \in W_L$ ,  $\xi_L^{1-s} = i_L(\zeta_K)$ ; si  $\mathfrak{a} = (x x_\infty)$  avec  $i_K(x) = \xi_K \in W_K$  et  $i_K(x_\infty) = 1$ , il vient  $i_L(y) = i_L(x)i_L(\varepsilon_L)$ ,  $\varepsilon_L \in \mathcal{E}_L$ , soit  $\xi_L = \xi_K i_L(\varepsilon_L)$ ; donc  $i_L(\varepsilon_L)$  est de la forme  $i_L(\zeta_L)$ ,  $\zeta_L \in \mu(L)$ , d'où  $\xi_L \in W_K i_L(\mu(L))$ .

Réciproquement, si  $\xi_L = \xi_K i_L(\zeta_L) \in W_K i_L(\mu(L))$  (qui implique  $\xi_L^{1-s} = i_L(\zeta_K)$ ), on a  $i_L(y) = i_L(x)i_L(\zeta_L)$  pour  $x \in \mathcal{K}_1^\times$ , d'où, en idéaux,  $(y) = (x)_L(y'_\infty)$  et  $(\mathfrak{a})_L = (x)_L(y''_\infty)$ , où  $(y''_\infty) \in \mathcal{P}_{L,\infty}^G = \mathcal{P}_{K,\infty}$ , d'où  $\mathfrak{a} = (x)(x_\infty)$  avec  $i_K(x) \in W_K$ .

La classe de  $\mathfrak{a}$  dans le noyau de  $j_{L/K}$  est nulle si et seulement si dans l'écriture  $(\mathfrak{a})_L = (y)(y_\infty)$ , on a  $i_L(y) \in W_K i_L(\mu(L))$ . On a donc obtenu une description du noyau de capitulation dans le cas  $L/K$  cyclique  $p$ -ramifiée de degré  $p$  (analogue du Théorème 2.1 de [Ng2] et Proposition 8 de [Ja6]) :

**Lemme 2.4.** *On a  $\text{Ker}(j_{L/K}) \simeq \{ \xi_L \in W_L, \xi_L^{1-s} \in i_L(\mu(K)) \} / W_K i_L(\mu(L))$ . Si de plus  $\mu(K) = 1$ , on a  $i_L(\mu(L)) = 1$  et  $\{ \xi_L \in W_L, \xi_L^{1-s} = 1 \} = W_K$ .*

*Démonstration.* Il suffit de considérer l'application qui à  $\mathfrak{a}$ , dont la classe est dans noyau de capitulation, associe  $\xi_L$  (qui est définie modulo  $\mu(L)$ ).  $\square$

Si  $\mu(K) = 1$ , le lemme redonne le Théorème 2.3 sur la nullité du noyau de capitulation.

**2.4. Etude du noyau de capitulation dans le cas kummerien.** On suppose désormais que  $\zeta_1$  d'ordre  $p$  est dans  $K$ . On a, à partir du Lemme 2.4, la suite exacte :

$$1 \rightarrow \text{Ker}(j_{L/K}) \rightarrow W_L / W_K i_L(\mu(L)) \xrightarrow{1-s} W_L^{1-s} / W_L^{1-s} \cap i_L(\mu(K)) \rightarrow 1,$$

qui conduit, puisque  $W_L^{1-s} \simeq W_L / W_K$  et  $W_K i_L(\mu(L)) / W_K \simeq \mu(L) / \mu(K)$  à :

**Lemme 2.5.** *Dans le cas kummerien  $p$ -ramifié cyclique de degré  $p$ , et sous la conjecture de Leopoldt pour  $L$  et  $p$ , on a  $|\text{Ker}(j_{L/K})| = |W_L^{1-s} \cap i_L(\mu(K))| \times \frac{|\mu(K)|}{|\mu(L)|}$ , où  $|W_L^{1-s} \cap i_L(\mu(K))|$  est d'ordre 1 ou  $p$ .*

*Si  $\mu(K) = \mu(L) \neq 1$ , on a  $|\text{Ker}(j_{L/K})| = |W_L^{1-s} \cap i_L(\mu(K))|$ .*

*Si  $\mu(K) = \mu(L)^p \neq 1$  (i.e.  $L/K$  est cyclotomique globale),  $j_{L/K}$  est injectif.*

*Démonstration.* En effet, d'après le Lemme 1.3 on a  $W_L^{1-s} \cap i_L(\mu(K)) \subseteq \langle i_L(\zeta_1) \rangle$  qui est d'ordre 1 ou  $p$ . Ainsi il y a injectivité de  $j_{L/K}$  si et seulement si  $L/K$  est cyclotomique globale ou bien si  $\mu(K) = \mu(L) \neq 1$  et  $i_L(\zeta_1) \notin W_L^{1-s}$ .  $\square$

Ceci peut se caractériser de la façon concrète suivante :

**Théorème 2.6.** *Soit  $L/K$  une extension cyclique,  $p$ -ramifiée, de degré  $p > 2$ , vérifiant la conjecture de Leopoldt pour  $p$ .*

*Lorsque  $\mu(K) = \mu(L) \neq 1$  (i.e.,  $L/K$  kummerienne non globalement cyclotomique), le morphisme de capitulation  $j_{L/K} : \mathcal{BP}_K \rightarrow \mathcal{BP}_L$  est injectif si et seulement si il existe  $v_0 \mid p$  dans  $K$ , non décomposée dans  $L$ , telle que  $\mu(L_{w_0}) = \mu(K_{v_0})$  pour l'unique  $w_0 \mid v_0$  (i.e.,  $L/K$  est, en  $v_0$ , localement de degré  $p$  et non localement cyclotomique).<sup>2</sup>*

*Démonstration.* Ecrivons  $W_L = \bigoplus_{v \mid p} W_{L,v}$  en un sens évident. On a alors trois cas selon que  $v$  est décomposée dans  $L/K$  ou non, puis que  $L_w/K_v$  est localement cyclotomique ou non ; on calcule alors  $H^1(G, W_{L,v})$  (ou  $H^2(G, W_{L,v})$  plus facile) pour obtenir  $|W_{L,v}^{1-s}|$  :

(i) Cas décomposé, i.e.,  $W_{L,v} = \bigoplus_{w \mid v} \mu(K_w)$  : on a  $H^1(G, W_{L,v}) = 0$  (Lemme de Shapiro), d'où  $W_{L,v}^{1-s} = {}_N W_{L,v}$  qui contient l'image de  $\langle \zeta_1 \rangle$ .

(ii) Cas non décomposé et  $\mu(L_w)^p = \mu(K_v)$  : on a  $H^1(G, W_{L,v}) = 0$  et  $W_{L,v}^{1-s} = \langle i_v(\zeta_1) \rangle$ .

(iii) Cas non décomposé et  $\mu(L_w) = \mu(K_v)$  : on a  $H^1(G, W_{L,v}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et  $|W_{L,v}^{1-s}| = 1$ .

Le théorème en résulte puisque la condition contraire  $i_L(\zeta_1) \in W_L^{1-s}$  est équivalente à la non nullité de tous les  $W_{L,v}^{1-s}$ . Seul (iii) conduit à  $|W_L^{1-s} \cap i_L(\mu(K))| = 1$ .  $\square$

### 3. INTERPRÉTATION VIA UN RADICAL KUMMERIEN

On suppose que  $\mu(K) \neq 1$  et on pose  $L = K(\sqrt[p]{\alpha})$ ,  $\alpha \in K^\times$  ; on suppose que  $L/K$  est  $p$ -ramifiée et vérifie la conjecture de Leopoldt pour  $p$ . On a  $(\alpha) = \mathfrak{a}_0^p \mathfrak{a}_p$ , où  $\mathfrak{a}_0$  est un idéal de  $K$  étranger à  $p$  et où  $\mathfrak{a}_p$  est un produit d'idéaux premiers au-dessus de  $p$  à une puissance  $< p$ . On pose  $(\sqrt[p]{\alpha})^{1-s} = \zeta_1$  d'ordre  $p$ .

On suppose, dans cette étude, que  $L/K$  n'est pas (globalement) cyclotomique (on est dans le cas  $\mu(L) = \mu(K) \neq 1$ ). D'après le Théorème 2.6,  $j_{L/K}$  est *non injectif* si et seulement si pour toute place  $v \mid p$ , non décomposée dans  $L/K$ ,  $\mu(K_v) = \mu(L_w)^p$  pour l'unique place  $w$  de  $L$  au-dessus de  $v$ . Dans ce cas, il existe donc  $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}_K$ , étranger à  $p$ , dont la classe est dans le noyau de  $j_{L/K}$  et est *non triviale* ; on a  $(\mathfrak{a})_L = (y y_\infty)$ , avec  $i_L(y) = \xi_L$ ,  $i_L(y_\infty) = 1$ , et (par analogie avec les calculs du § 2.3) :

$$i_L(y)^{1-s} = \xi_L^{1-s} = i_L(\sqrt[p]{\alpha})^{1-s} = i_L(\zeta_1).$$

Soit  $v \mid p$  fixée non décomposée (le cas décomposé équivaut au fait que  $\alpha$  est puissance  $p$ -ième locale en  $v$ ) ; on a, avec des notations évidentes,  $i_w(y) = \xi_w$  et  $i_w(y)^{1-s} = \xi_w^{1-s} = i_w(\zeta_1)$  et par conséquent on peut prendre  $\xi_w$  comme radical local, autrement dit,  $L_w = K_v(\sqrt[p]{\xi_w})$  où  $\xi_w^p = \xi_w$  et il en résulte, par "unicité" d'un radical, que  $\mathfrak{a}_p = 1$ . D'où  $(\alpha) = \mathfrak{a}_0^p$ , ce qui s'écrit, dans  $L$ ,  $(\sqrt[p]{\alpha}) = (\mathfrak{a}_0)_L$ .

On a  $i_L(y) = i_L(\sqrt[p]{\alpha}) a$ ,  $a \in \mathcal{K}_1^\times$ ,  $a$  étranger à  $p$ . Quitte à modifier  $\alpha$  modulo  $\mathcal{K}_1^{\times p}$  et  $\mathfrak{a}_0$  en conséquence, on peut supposer que  $i_L(y) = i_L(\sqrt[p]{\alpha}) = \xi_L$  avec  $\xi_L^{1-s} = i_L(\zeta_1)$ , auquel cas  $(\mathfrak{a})_L = (\mathfrak{a}_0)_L (y_\infty)$ . Comme l'idéal  $(y_\infty)$  est invariant par  $G$ , il est de la forme  $(x_\infty)$ ,  $x_\infty \in \mathcal{K}_\infty^\times$  ([Gr1], Lemme IV.3.1). On a alors la relation  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \pmod{\mathcal{P}_{K,\infty}}$ .

On peut donc énoncer le résultat suivant (analogue aux formulations données par [Ja6] et [Ng2]), où l'on rappelle que pour un corps  $k$ ,  $\mu(k)$  est le  $p$ -groupe des racines de l'unité de  $k$ , que  $\tilde{k}$  est le composé des  $\mathbb{Z}_p$ -extensions de  $k$ , que  $U_k$  est le  $\mathbb{Z}_p$ -module d'unités locales principales en  $p$  de  $k$  et que  $W_k = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(U_K)$  ; on désigne par  $BP_k$  la pro- $p$ -extension Abélienne maximale de  $k$  composée des  $p$ -extensions cycliques plongeables dans une  $p$ -extension cyclique de  $k$  de degré arbitrairement grand ; on pose  $\mathcal{BP}_k := \text{Gal}(BP_k/\tilde{k})$  :

<sup>2</sup>Il résulte de ceci que " $L/K$   $p$ -ramifiée & localement cyclotomique en  $p$ " est équivalente à " $L/K$  partout localement cyclotomique" puisque  $L_w/K_v$  est, pour  $v \nmid p$ , le relèvement  $v$ -adique de l'extension résiduelle  $F_w/F_v$ , qui est cyclotomique (que  $v$  soit décomposée ou inerte). Dans [Ja6] et [Ng2] c'est le vocabulaire adopté systématiquement.



**Théorème 3.1.** *Soit  $L/K$  une extension cyclique de corps de nombres, de degré premier  $p > 2$ . On suppose que  $L$  vérifie la conjecture de Leopoldt pour  $p$ .*

*Alors le morphisme de capitulation  $j_{L/K} : \mathcal{BP}_K \rightarrow \mathcal{BP}_L$  est injectif sauf si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i)  $\mu(L) = \mu(K) \neq 1$ ,  $L = K(\sqrt[p]{\alpha})$ ,  $\alpha \in K^\times$  et  $(\alpha) = \mathfrak{a}_0^p$ , où  $\mathfrak{a}_0$  est un idéal de  $K$  étranger à  $p$  (i.e.,  $L/K$  est kummerienne, non globalement cyclotomique, et  $p$ -ramifiée (i.e., non ramifiée en dehors de  $p$ )) ;

(ii) l'image diagonale de  $\alpha$  dans  $U_K$  est égale à  $\xi_K u_K^p$ ,  $\xi_K \in W_K$ ,  $u_K \in U_K$ , avec  $\xi_K \in W_L^p$  (i.e.,  $L/K$  est localement cyclotomique en toute place  $v \mid p$ ).

**English version.** *Let  $L/K$  be a cyclic extension of number fields, of prime degree  $p > 2$ . We suppose that  $L$  satisfies the Leopoldt conjecture for  $p$ .*

*Then the morphism of capitulation  $j_{L/K} : \mathcal{BP}_K \rightarrow \mathcal{BP}_L$  is injective except if the two following conditions are satisfied :*

(i)  $\mu(L) = \mu(K) \neq 1$ ,  $L = K(\sqrt[p]{\alpha})$ ,  $\alpha \in K^\times$  and  $(\alpha) = \mathfrak{a}_0^p$ , where  $\mathfrak{a}_0$  is a prime to  $p$  ideal of  $K$  (i.e.,  $L/K$  is kummerian, non globally cyclotomic, and  $p$ -ramified (i.e., unramified outside  $p$ )) ;

(ii) the diagonal image of  $\alpha$  into  $U_K$  is equal to  $\xi_K u_K^p$ ,  $\xi_K \in W_K$ ,  $u_K \in U_K$ , with  $\xi_K \in W_L^p$  (i.e.,  $L/K$  is locally cyclotomic at each place  $v \mid p$ ).

On pourrait alors obtenir le résultat plus général de Jaulent ([Ja6], Corollaire 11) :

**Théorème 3.2.** *Dans une  $p$ -extension  $L/K$  de corps de nombres, contenant les racines  $p$ -ièmes de l'unité, et satisfaisant à la conjecture de Leopoldt pour le nombre premier  $p > 2$ , le sous-groupe  $\text{Ker}(j_{L/K})$  des éléments de  $\mathcal{BP}_K$  qui capitulent dans  $\mathcal{BP}_L$  est d'ordre  $\min\{|\mu(K)|, [L \cap K^{1c} : K(\mu(L))]\}$ , où  $K^{1c}$  est la pro- $p$ -extension localement cyclotomique maximale de  $K$ .*

#### 4. EXEMPLES NUMÉRIQUES

On prend pour  $K$  un corps biquadratique contenant le corps  $\mathbb{Q}(j)$  des racines cubiques de l'unité et on considère  $p = 3$  (voir des exemples analogues dans [Ja6], § 3) :

(i) Soient  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-23}, j)$  et l'unité  $\alpha = j^{\frac{25+3\sqrt{69}}{2}}$ . On considère  $L = K(\sqrt[3]{\alpha})$  ; on a bien  $\mu(L) = \mu(K) \neq 1$ . Comme 3 est décomposé dans  $K$  en deux idéaux premiers  $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ , les deux complétés de  $K$  sont égaux à  $\mathbb{Q}_3(j)$ .

On a  $\alpha \cdot j^{-1} = \frac{25+3\sqrt{69}}{2} \equiv -1 \pmod{(\mathfrak{pp}')^3}$ , ce qui montre que les deux complétés de  $L$  sont égaux à  $\mathbb{Q}_3(\omega)$ , où  $\omega$  est une racine de l'unité d'ordre 9 ; on est dans le cas  $\mu(K_v) = \mu(L_w)^p$  pour toute place  $v \mid p$ , et les conditions du Théorème 3.1 sont donc satisfaites puisque  $i_K(\alpha) = i_K(j) \cdot i_K(-1 + \frac{3\sqrt{69}}{2}) = \xi_K \cdot u_K^3$ , avec  $\xi_K = (j, j) = (\omega, \omega)^3$ , le nombre  $-1 + \frac{3\sqrt{69}}{2}$  étant un cube dans  $U_K$  ; donc  $j_{L/K}$  est non injectif.

(ii) On se place à nouveau dans  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-23}, j)$  et on considère l'unité  $\alpha = \frac{25+3\sqrt{69}}{2}$  et  $L = K(\sqrt[3]{\alpha})$ . Comme  $\alpha$  est localement un cube,  $L/K$  est décomposée en 3 et on est dans le cas  $\mu(K_v) = \mu(L_w)$ . Donc  $j_{L/K}$  est injectif.

#### 5. POINTS FIXES DU MODULE DE BERTRANDIAS-PAYAN

Dans cette section,  $L/K$  est une  $p$ -extension quelconque de corps de nombres, de groupe de Galois  $G$ , que l'on supposera cyclique de degré  $p$  à partir du § 5.2. On omet le plus souvent les plongements diagonaux  $i_K$  et  $i_L$ . Ici il n'y a aucune hypothèse sur la ramification dans  $L/K$ .

On a la suite exacte qui définit  $\mathcal{BP}_L$  à partir de  $\mathcal{T}_L = \text{Gal}(H_L^{\text{pr}}/\tilde{L})$  :

$$1 \rightarrow W_L/\mu(L) \rightarrow \mathcal{T}_L \rightarrow \mathcal{BP}_L \rightarrow 1,$$

où  $W_L = \bigoplus_{v \mid p} W_{L,v}$ , avec  $W_{L,v} = \bigoplus_{w \mid v} \mu(L_w)$  pour toute place  $v \mid p$  de  $K$ .

On a de même la suite exacte  $1 \rightarrow W_K/\mu(K) \rightarrow \mathcal{T}_K \rightarrow \mathcal{BP}_K \rightarrow 1$ .

**5.1. Suites exactes fondamentales.** On suppose que  $L$  vérifie la conjecture de Leopoldt pour  $p$ , ce qui implique que  $\mathcal{T}_L^G$  contient un sous-groupe isomorphe à  $\mathcal{T}_K$  (injectivité du morphisme de capitulation  $\mathcal{T}_K \rightarrow \mathcal{T}_L$ , Lemme 2.1). On a la suite exacte :

$$1 \rightarrow (W_L/\mu(L))^G \rightarrow \mathcal{T}_L^G \rightarrow \mathcal{BP}_L^G \xrightarrow{\theta} \mathrm{H}^1(G, W_L/\mu(L)), \quad (1)$$

et à partir de  $1 \rightarrow \mu(L) \rightarrow W_L \rightarrow W_L/\mu(L) \rightarrow 1$ , on a la suite exacte :

$$1 \rightarrow W_K/\mu(K) \rightarrow (W_L/\mu(L))^G \xrightarrow{\psi} \mathrm{H}^1(G, \mu(L)) \xrightarrow{\nu} \mathrm{H}^1(G, W_L), \quad (2)$$

avec  $\mathrm{H}^1(G, W_L) = \bigoplus_{v|p} \mathrm{H}^1(G, W_{L,v})$ .

Dans le cas  $G$  cyclique d'ordre  $p$  (engendré par  $s$ ) on aura les suites exactes :

$$1 \rightarrow (W_L/\mu(L))^G \rightarrow \mathcal{T}_L^G \rightarrow \mathcal{BP}_L^G \xrightarrow{\theta} {}_N(W_L/\mu(L))/(W_L/\mu(L))^{1-s}, \quad (1')$$

$$1 \rightarrow W_K/\mu(K) \rightarrow (W_L/\mu(L))^G \xrightarrow{\psi} {}_N\mu(L)/\mu(L)^{1-s} \xrightarrow{\nu} \bigoplus_{v|p} {}_N W_{L,v}/W_{L,v}^{1-s}. \quad (2')$$

**Remarque 5.1.** Dans le cas  $G$  cyclique d'ordre  $p$ , les noyaux de la “norme”  $N = N_G$  sont ceux de la norme algébrique (ici  $N_G = 1 + s + \dots + s^{p-1}$ ). Or on peut utiliser, par commodité des calculs, la norme arithmétique  $N_{L/K}$  à condition que pour les objets  $X_L$  et  $X_K$ , l'application naturelle  $i_{L/K} : X_K \rightarrow X_L$  soit injective puisque  $i_{L/K} \circ N_{L/K} = N_G$ . C'est le cas ici pour les objets du type  $\mu(k)$ ,  $W_k$ ,  $\mathcal{W}_k = W_k/\mu(k)$ ,  $\mathcal{T}_k$ , mais non nécessairement pour  $\mathcal{BP}_k$ .

On souhaite voir, comme dans [Seo3], [Seo4], [Seo6], dans quels cas on a  $|\mathcal{BP}_L| \geq |\mathcal{BP}_K|$  par le fait que par exemple  $|\mathcal{BP}_L^G| \geq |\mathcal{BP}_K|$ . D'après (1) et (2) il vient :

$$|\mathcal{BP}_L^G| = \frac{|\mathcal{T}_L^G| \cdot |\mathrm{Im}(\theta)|}{|(W_L/\mu(L))^G|} = \frac{|\mathcal{T}_L^G| \cdot |\mathrm{Im}(\theta)|}{|W_K/\mu(K)| \cdot |\mathrm{Im}(\psi)|} = \frac{|\mathcal{T}_L^G|}{|\mathcal{T}_K|} \cdot |\mathcal{BP}_K| \cdot \frac{|\mathrm{Im}(\theta)|}{|\mathrm{Im}(\psi)|}. \quad (3)$$

On obtient donc, en utilisant la formule des points fixes ([Gr1], Théorème IV.3.3) :

**Théorème 5.2.** *Soit  $L/K$  une  $p$ -extension vérifiant la conjecture de Leopoldt pour  $p$ . On a la formule suivante (où le premier facteur est entier) :*

$$|\mathcal{BP}_L^G| = \frac{\prod_{\mathfrak{q} \nmid p} e_{\mathfrak{q}}}{\left( \sum_{\mathfrak{q} \nmid p} \frac{1}{e_{\mathfrak{q}}} \mathbb{Z}_p \mathrm{Log}_K(\mathfrak{q}) + \mathbb{Z}_p \mathrm{Log}_K(I_K) : \mathbb{Z}_p \mathrm{Log}_K(I_K) \right)} \cdot |\mathcal{BP}_K| \cdot \frac{|\mathrm{Im}(\theta)|}{|\mathrm{Im}(\psi)|},$$

où  $e_{\mathfrak{q}}$  est l'indice de ramification de  $\mathfrak{q}$  dans  $L/K$ , et  $\mathrm{Log}_K : I_K \rightarrow \bigoplus_{v|p} K_v/\mathbb{Q}_p \log_K(E_K)$ , la fonction logarithme définie dans [Gr1], III.2.2 (voir aussi le § 5.3).

**Corollaire 5.3.** *On peut trouver une infinité d'extensions  $L/K$  telles que  $\mathcal{BP}_L^G$  soit non trivial et même telles que  $|\mathcal{BP}_L^G| = \prod_{\mathfrak{q} \nmid p} e_{\mathfrak{q}} \cdot |\mathcal{BP}_K| \cdot \frac{|\mathrm{Im}(\theta)|}{|\mathrm{Im}(\psi)|}$ .*

**Corollaire 5.4.** *Lorsque l'extension  $L/K$  est  $p$ -primitivement ramifiée ([Gr1], IV.3, § (b), Définition 3.4), ce qui est (sous la conjecture de Leopoldt pour  $L$  et  $p$ ) équivalent à  $(\sum_{\mathfrak{q} \nmid p} \frac{1}{e_{\mathfrak{q}}} \mathbb{Z}_p \mathrm{Log}_K(\mathfrak{q}) + \mathbb{Z}_p \mathrm{Log}_K(I_K) : \mathbb{Z}_p \mathrm{Log}_K(I_K)) = \prod_{\mathfrak{q} \nmid p} e_{\mathfrak{q}}$ , on a  $|\mathcal{BP}_L^G| \geq |\mathcal{BP}_K|$  si et seulement si  $|\mathrm{Im}(\theta)| \geq |\mathrm{Im}(\psi)|$ .*

**5.2. Caractérisation du cas  $|\mathrm{Im}(\psi)| = p$  pour  $L/K$  cyclique de degré  $p$ .** Pour un cadre plus général voir [Ng2], § 3 et [Ja6]. On écarte le cas trivial  $\mathrm{H}^1(G, \mu(L)) = 0$  où  $|\mathrm{Im}(\psi)| = 1$  et  $|\mathcal{BP}_L^G| = |\mathcal{BP}_K| \cdot |\mathrm{Im}(\theta)|$ . On suppose donc que  $\mu(K) = \mu(L) \neq 1$  (i.e.,  $\mathrm{H}^1(G, \mu(L)) = \langle \zeta_1 \rangle$ ).

On a  $|\mathrm{Im}(\psi)| = p$  si et seulement si  $\nu = 0$  dans (2') ; or l'image de  $\zeta_1$  par  $\nu$  est la classe de l'image diagonale de  $\zeta_1 \pmod{W_L^{1-s}}$ . Cette classe est alors nulle si et seulement si  $\zeta_1 \in W_{L,v}^{1-s}$  pour tout  $v|p$  donc si et seulement si  $j_{L/K}$  est *non injectif* (Lemme 2.5). D'après le Théorème 3.1 et puisque  $\mu(L) = \mu(K) \neq 1$ ,  $j_{L/K}$  est non injectif si et seulement si  $L/K$  est  $p$ -ramifiée et si pour toute place  $v|p$ , non décomposée dans  $L$ , on a  $\mu(K_v) = \mu(L_v)^p$ .

En résumé, on a obtenu la condition nécessaire et suffisante suivante :

**Proposition 5.5.** *Soit  $L/K$  cyclique de degré  $p$  vérifiant la conjecture de Leopoldt pour  $p$ . On a  $|\mathrm{Im}(\psi)| = p$  si et seulement si  $\mu(K) = \mu(L) \neq 1$ ,  $L/K$  est  $p$ -ramifiée, et si pour toute place  $v|p$ , non décomposée dans  $L$ , on a  $\mu(K_v) = \mu(L_w)^p$ .*

**Corollaire 5.6.** *On suppose que l'extension  $L/K$  est  $p$ -primitivement ramifiée. Alors si  $L/K$  est ramifiée en au moins une place modérée ou s'il existe  $v_0|p$  non décomposée telle que  $\mu(K_{v_0}) = \mu(L_{w_0})$ , alors on a  $|\mathrm{Im}(\psi)| = 1$  et  $|\mathcal{BP}_L^G| = |\mathcal{BP}_K| |\mathrm{Im}(\theta)|$ . C'est aussi trivialement le cas si  $L/K$  est cyclotomique globale.*

Si  $|\mathrm{Im}(\psi)| = p$ , il suffit d'avoir  $|\mathrm{Im}(\theta)| \geq p$  pour que l'inégalité  $|\mathcal{BP}_L^G| \geq |\mathcal{BP}_K|$  soit vérifié ; or  $\mathrm{Im}(\theta)$  dépend non trivialement du noyau de  $\rho : H^1(G, W_L/\mu(L)) \rightarrow H^1(G, \mathcal{T}_L)$ .

**5.3. Calcul du noyau de  $\rho : {}_N(W_L/\mu(L))/(W_L/\mu(L))^{1-s} \rightarrow {}_N\mathcal{T}_L/\mathcal{T}_L^{1-s}$ .** On reprend la suite exacte (1') en la prolongeant comme suit :

$$1 \rightarrow (W_L/\mu(L))^G \rightarrow \mathcal{T}_L^G \simeq \mathcal{T}_K \rightarrow \mathcal{BP}_L^G \xrightarrow{\theta} {}_N(W_L/\mu(L))/(W_L/\mu(L))^{1-s} \xrightarrow{\rho} H^1(G, \mathcal{T}_L) = {}_N\mathcal{T}_L/\mathcal{T}_L^{1-s}.$$

On est donc dans le cadre suivant pour  $L/K$  cyclique  $p$ -ramifiée (Théorème 3.1) :

- (i)  $\mu(K) = \mu(L) \neq 1$  ( $L/K$  non globalement cyclotomique),
- (ii) pour toute place  $v|p$  non décomposée, on a  $\mu(K_v) = \mu(L_w)^p$  ( $L/K$  localement cyclotomique en  $p$ ).

**Lemme 5.7.** *Sous les hypothèses précédentes, on a  $H^1(G, W_L/\mu(L)) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Un générateur de ce groupe est donné par l'image d'un  $\xi_{L,0} \in W_L$  tel que  $N_{L/K}(\xi_{L,0}) = \zeta_{L,0}$ , où  $\zeta_{L,0}$  est un générateur de  $\mu(K)$ .*

*Démonstration.* La suite exacte  $1 \rightarrow \mu(L) \rightarrow W_L \rightarrow W_L/\mu(L) \rightarrow 1$  conduit à :

$$H^1(G, W_L) \rightarrow H^1(G, W_L/\mu(L)) \xrightarrow{\nu} H^2(G, \mu(L)) \rightarrow H^2(G, W_L).$$

Or  $H^1(G, W_L) = \bigoplus_{v|p} H^1(G, W_{L,v}) = 0$  car c'est vrai dans le cas décomposé (lemme de Shapiro) et dans le cas non décomposé car  $\mu(K_v) = \mu(L_w)^p$  (preuve du Théorème 2.6). Ensuite,  $H^2(G, W_L) = 0$  puisque  $W_L$  est fini. D'où  $H^1(G, W_L/\mu(L)) \simeq H^2(G, \mu(L)) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Comme  $H^2(G, W_L) = 0$ , l'existence de  $\xi_{L,0}$  est immédiate et son image dans le groupe  $H^1(G, W_L/\mu(L))$  est d'ordre  $p$ .  $\square$

A  $\xi_{L,0} \in W_L$  (telle que  $N_{L/K}(\xi_{L,0}) = i_K(\zeta_{K,0})$ ),  $\rho$  associe l'élément  $\tau_{L,0} \in {}_N\mathcal{T}_L/\mathcal{T}_L^{1-s}$  ainsi défini : on a  $\xi_{L,0} = i_L(y)$ ,  $y \in \mathcal{L}_1^\times$  avec  $N_{L/K}(y) = \zeta_{K,0} x_\infty$ ,  $x_\infty \in \mathcal{K}_\infty^\times$  ; alors l'image de  $\tau_{L,0}$  dans  $\mathcal{I}_L/\mathcal{P}_{L,\infty}$  est celle de l'idéal  $(y)$ . On aura nullité de  $\rho$  si et seulement si  $\tau_{L,0} = \tau'_{L,0}$  pour un  $\tau'_{L,0} \in \mathcal{T}_L$ .

Il semble que tous les cas se rencontrent ; pour cela il faut pouvoir étudier les groupes de torsion  $\mathcal{T}_k$  de façon effective (pour un corps de nombres  $k$ ), ce qui est possible en utilisant le logarithme  $\mathrm{Log}$  introduit dans [Gr1], III.2.2, et qui conduit à la suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathcal{T}_k \rightarrow \mathcal{A}_k \simeq \mathcal{I}_k/\mathcal{P}_{k,\infty} \xrightarrow{\mathrm{Log}_k} \mathrm{Log}_k(\mathcal{I}_k) = \mathbb{Z}_p \mathrm{Log}_k(I_k) \rightarrow 0,$$

où l'on rappelle que  $(\log_k)$  étant le logarithme  $p$ -adique d'Iwasawa usuel) :

$$\mathrm{Log}_k : \mathcal{I}_k/\mathcal{P}_{k,\infty} \rightarrow \left( \bigoplus_{v|p} k_v \right) / \mathbb{Q}_p \mathrm{log}_k(E_k),$$

est défini pour tout idéal  $\mathfrak{a}$  de  $k$  étranger à  $p$  par :

$$\mathrm{Log}_k(\mathfrak{a}) := \frac{1}{m} \mathrm{log}_k(a) \pmod{\mathbb{Q}_p \mathrm{log}_k(E_k)},$$

où  $m$  est n'importe quel entier tel que  $\mathfrak{a}^m$  est un idéal principal  $(a)$ .

On a  $\rho = 0$  s'il existe un idéal  $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}_L$  tel que  $\mathrm{Log}_L(\mathfrak{b}) = 0$  et tel que  $(y) = \mathfrak{b}^{1-s} (y_\infty)$ .

En pratique  $\mathrm{Log}_L(\mathcal{P}_L)$  est canonique comme image de  $\mathrm{log}_L(U_L)$  dans le  $\mathbb{Q}_p$ -espace  $(\bigoplus_{w|p} L_w) / \mathbb{Q}_p \mathrm{log}_L(E_L)$ , et le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $\mathrm{Log}_L(\mathcal{I}_L)$  est connu numériquement dès que

le groupe des classes l'est (au moyen d'idéaux générateurs  $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r$  modulo le groupe des idéaux principaux de  $L$ ), à savoir :

$$\mathrm{Log}_L(\mathcal{I}_L) = \langle \mathrm{Log}_L(\mathfrak{b}_1), \dots, \mathrm{Log}_L(\mathfrak{b}_r) \rangle_{\mathbb{Z}_p} + \mathrm{Log}_L(U_L).$$

Tout ceci dépend donc largement du groupe des unités de  $L$ . Il paraît clair, en raison des valeurs des  $\mathrm{Log}_L(\mathfrak{b}_i)$  et de  $\mathrm{Log}_L((y))$  que, numériquement, tout type d'exemple est possible comme le montre l'expérience de ces calculs logarithmiques d'idéaux pour lesquels il suffit de calculer modulo une puissance de  $p$  convenable.

Comme le quotient de Herbrand de  $\mathcal{T}_L$  est nul on a  $|\mathcal{N}\mathcal{T}_L/\mathcal{T}_L^{1-s}| = \frac{|\mathcal{T}_K|}{|\mathcal{N}_{L/K}(\mathcal{T}_L)|}$ . Or la norme de  $\mathcal{T}_L$  dans  $L/K$  correspond, par la loi de réciprocité d'Artin, à la restriction  $\mathcal{T}_L \rightarrow \mathcal{T}_K$  des automorphismes, et une condition suffisante pour que  $\rho$  soit nulle est que cette norme soit surjective. D'où le résultat suivant (sous la conjecture de Leopoldt) :

**Théorème 5.8.** *Soit  $L/K$  une extension cyclique de degré  $p$ , kummerienne,  $p$ -ramifiée, et non cyclotomique (i.e.,  $\mu(K) = \mu(L) \neq 1$ ). On suppose que pour toute place  $v|p$ , non décomposée dans  $L/K$ , on a  $\mu(L_w)^p = \mu(K_v)$  (cf. Théorème 3.1).*

*Alors une condition suffisante pour que  $|\mathcal{BP}_L^G| \geq |\mathcal{BP}_K|$  (i.e.,  $|\mathrm{Im}(\theta)| \geq |\mathrm{Im}(\psi)| = p$ ) est que  $L \subset \tilde{K}$  et que  $H_K^{\mathrm{pr}}/\tilde{K}$  et  $\tilde{L}/\tilde{K}$  soient linéairement disjointes sur  $\tilde{K}$ .*

La seconde condition peut se vérifier comme suit : soit  $F$  une extension de  $K$  telle que  $\tilde{K}F = H_K^{\mathrm{pr}}$  ; alors  $FL/L$  et  $\tilde{L}/L$  doivent être linéairement disjointes sur  $L$ .

## 6. CONCLUSION

Le cas trivial où  $\mu(K) = 1$  (Théorème 2.3) permet de construire les  $p$ -tours définies par Seo dans [Seo6], lesquelles sont infinies dans le cas où  $\mathcal{BP}_K \neq 1$  (sous la conjecture de Leopoldt pour  $p$  et toute  $p$ -extension de  $K$ ), mais dans les autres cas se pose le problème de la propagation des hypothèses faites au premier étage.

Le Théorème 5.8 montre des liens avec le plongement kummerien dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions (cf. § 1.2 (i)), dont on connaît l'effectivité numérique.

Lorsque le  $p$ -groupe des classes de  $K$  est trivial (ou bien lorsque  $H_K \subset \tilde{K}$ ) on a :

$$\mathcal{BP}_K \simeq \mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\log_K(U_K)/\mathbb{Z}_p \log_K(E_K)),$$

qui dépend simplement des propriétés congruentielles du groupe des unités de  $K$  et grosso modo du régulateur  $p$ -adique normalisé de  $K$  ([Gr7], Définition 2.3) ; dans cet article nous avons conjecturé, pour tout  $p$  assez grand, la  $p$ -rationalité d'un corps de nombres  $K$  (voir les propriétés de cette notion dans [Gr1], [Gr5], [GrJ],[Ja4], [JaNg], [Mo], [MoNg1]) ; ceci entraînerait la nullité de  $\mathcal{BP}_K$  pour tout  $p$  assez grand.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AS] Angelakis, A. and Stevenhagen, P., *Absolute abelian Galois groups of imaginary quadratic fields*, In: proceedings volume of ANTS-X, UC San Diego 2012, E. Howe and K. Kedlaya (eds), OBS 1 (2013). <http://msp.org/obs/2013/1-1/obs-v1-n1-p02-p.pdf>
- [BP] Bertrandias, F. et Payan, J.-J.,  $\Gamma$ -extensions et invariants cyclotomiques, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4, 5 (1972), 517–548. [http://archive.numdam.org/ARCHIVE/ASENS/ASENS\\_1972\\_4\\_5\\_4/ASENS\\_1972\\_4\\_5\\_4\\_517\\_0/ASENS\\_1972\\_4\\_5\\_4\\_517\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/ARCHIVE/ASENS/ASENS_1972_4_5_4/ASENS_1972_4_5_4_517_0/ASENS_1972_4_5_4_517_0.pdf)
- [CK] Carroll, J.E. and Kisilevsky, H., *Initial layers of  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions of complex quadratic fields*, Compositio Math. 32 (1976), 157–168. [http://archive.numdam.org/ARCHIVE/CM/CM\\_1976\\_32\\_2/CM\\_1976\\_32\\_2\\_157\\_0/CM\\_1976\\_32\\_2\\_157\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/ARCHIVE/CM/CM_1976_32_2/CM_1976_32_2_157_0/CM_1976_32_2_157_0.pdf)
- [Cha] Charifi, A., *Groupes de torsion attachés aux extensions Abéliennes  $p$ -ramifiées maximales (cas des corps totalement réels et des corps quadratiques imaginaires)*, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Mathématiques, Université de Franche-Comté (1982), 50 pp.
- [Gr1] Gras, G., *Class Field Theory: from theory to practice*, SMM, Springer-Verlag 2003; second corrected printing 2005. Private version 2016: [http://www.dropbox.com/sh/64q8ezazl6b4z7d/AABhBL3Fvnf\\_YNTHV0GzhR8ma?dl=0](http://www.dropbox.com/sh/64q8ezazl6b4z7d/AABhBL3Fvnf_YNTHV0GzhR8ma?dl=0)

- [Gr2] Gras, G., *Groupe de Galois de la  $p$ -extension abélienne  $p$ -ramifiée maximale d'un corps de nombres*, J. reine angew. Math. 333 (1982), 86–132. <https://www.researchgate.net/publication/243110955>
- [Gr3] Gras, G., *Logarithme  $p$ -adique et groupes de Galois*, J. reine angew. Math. 343 (1983), 63–80. <https://www.researchgate.net/publication/238881752>
- [Gr4] Gras, G., *Plongements kummeriens dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, Compositio Math., 55 (1985), 383–396. [http://archive.numdam.org/ARCHIVE/CM/CM\\_1985\\_\\_55\\_3/CM\\_1985\\_\\_55\\_3\\_383\\_0/CM\\_1985\\_\\_55\\_3\\_383\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/ARCHIVE/CM/CM_1985__55_3/CM_1985__55_3_383_0/CM_1985__55_3_383_0.pdf)
- [Gr5] Gras, G., *Remarks on  $K_2$  of number fields*, Jour. Number Theory 23 (1986), 322–335. <https://www.researchgate.net/publication/243002782>
- [Gr6] Gras, G., *On the structure of the Galois group of the Abelian closure of a number field* Journal de théorie des nombres de Bordeaux, 26 no. 3 (2014), 635–654. <https://www.researchgate.net/publication/261795084>
- [Gr7] Gras, G., *Les  $\theta$ -régulateurs locaux d'un nombre algébrique – Conjectures  $p$ -adiques*, Canadian Journal of Mathematics, to appear (2015). <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2015-026-3>
- [Gre] Greenberg, R., *Galois representations with open image*, Annales de Mathématiques du Québec, special volume in honor of Glenn Stevens (to appear). <https://www.math.washington.edu/~greenber/GalRep.pdf>
- [GrJ] Gras, G. et Jaulent, J-F., *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. 202 (1989), 343–365. <https://www.researchgate.net/publication/264964269>
- [He] Hemard, D., *Modules Galoisien de torsion et plongements dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, Journal of Number Theory, 30, 3 (1988), 357–374. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022314X8890008X>
- [Ja1] Jaulent, J-F., *L'arithmétique des  $\ell$ -extensions* (Thèse d'Etat, Université de Franche-Comté, Besançon), Publ. Math. Fac. Sci. Besançon (Théorie des Nombres), Années 1984/86. <http://pmb.univ-fcomte.fr/1986.html>
- [Ja2] Jaulent, J-F.,  *$S$ -classes infinitésimales d'un corps de nombres algébriques*, Ann. Sci. Inst. Fourier 34 (1984), 1–27. [http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AIF/AIF\\_1984\\_\\_34\\_2/AIF\\_1984\\_\\_34\\_2\\_1\\_0/AIF\\_1984\\_\\_34\\_2\\_1\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AIF/AIF_1984__34_2/AIF_1984__34_2_1_0/AIF_1984__34_2_1_0.pdf)
- [Ja3] Jaulent, J-F., *La Théorie de Kummer et le  $K_2$  des corps de nombres*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 2 (1990), 377–411. <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~jjaulent/Articles/Kummer.pdf>  
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~jjaulent/Articles/THCDC.pdf>
- [Ja4] Jaulent, J-F., *Théorie  $\ell$ -adique globale du corps de classes*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 10, 2 (1998), 355–397.
- [Ja5] Jaulent, J-F., *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, arXiv:1509.02743v1 (2015). <http://arxiv.org/pdf/1509.02743.pdf>
- [Ja6] Jaulent, J-F., *Sur la capitulation pour le module de Bertrandias-Payan*, preprint (2015). <http://arxiv.org/pdf/1510.03569.pdf>
- [JaM1] Jaulent, J-F. et Maire, C., *A propos de la tour localement cyclotomique d'un corps de nombres*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 70 (2000), 239–250; <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~jjaulent/Articles/Tours2.ps>
- [JaM2] Jaulent, J-F. et Maire, C., *Radical hilbertien et tour localement cyclotomique*, Jap. J. Math., New Ser. 28, 2 (2002), 203–213. [https://www.jstage.jst.go.jp/article/math1924/28/2/28\\_2\\_203/\\_pdf](https://www.jstage.jst.go.jp/article/math1924/28/2/28_2_203/_pdf)
- [JaNg] Jaulent, J-F. et Nguyen Quang Do, T., *Corps  $p$ -rationnels, corps  $p$ -réguliers et ramification restreinte*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 5 (1993), 343–363. <https://www.researchgate.net/publication/236865222>
- [JaS] Jaulent, J-F. et Soriano, F., *Sur les tours localement cyclotomiques*, Archiv. Math. (1999), 132–140. <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~jjaulent/Articles/Tours1.ps>
- [Kub] Kubota, T., *Galois group of the maximal abelian extension of an algebraic number field*, Nagoya Math. J. 12 (1957), 177–189. [https://projecteuclid.org/download/pdf\\_1/euclid.nmj/1118799938](https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.nmj/1118799938)
- [Mai1] Maire, Ch., *Sur la dimension cohomologique des pro- $p$ -extensions des corps de nombres*, J. Th. des Nombres de Bordeaux 17, fasc. 2 (2005), 575–606. <http://www.emis.de/journals/JTNB/2005-2/article10.pdf>
- [Mai2] Maire, Ch., *Sur la structure Galoisienne de certaines pro- $p$ -extensions de corps de nombres*, Mathematische Zeitschrift 267 (2011), 887–913. <http://link.springer.com/article/10.1007/s00209-009-0652-2>
- [Mi] Miki, H., *On the maximal Abelian  $\ell$ -extension of a finite algebraic number field with given ramification*, Nagoya Math. J. 70 (1978), 183–202.
- [Mo] Movahhedi, A., *Sur les  $p$ -extensions des corps  $p$ -rationnels*, Math. Nachr. 149 (1990), 163–176. <https://www.researchgate.net/publication/265450200>

- [MoNg1] Movahhedi, A. et Nguyen Quang Do, T., *Sur l'arithmétique des corps de nombres  $p$ -rationnels*, Sémin. Théorie des Nombres, Paris (1987/89), Progress in Math. 81, Birkhäuser (1990), 155–200. <https://www.researchgate.net/publication/236865321>
- [MoNg2] Movahhedi, A., and Nguyen Quang Do, T., *On universal norms and the first layers of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions of a number field*, Math. Annalen, 362 (2015), 817–838. <https://www.researchgate.net/publication/265596237>
- [Ng1] Nguyen Quang Do, T., *Sur la  $\mathbb{Z}_p$ -torsion de certains modules Galoisien*s, Ann. Inst. Fourier 36 (1986), 27–46. <https://www.researchgate.net/publication/236862549>
- [Ng2] Nguyen Quang Do, T., *Descente Galoisienne et capitulation entre modules de Bertrandias-Payan* (preprint, 2015).
- [PV] Pitoun, F. and Varescon, F., *Computing the torsion of the  $p$ -ramified module of a number field*, Math. Comp., published electronically (2014), 84 (2015), 371–383. <http://www.ams.org/journals/mcom/2015-84-291/S0025-5718-2014-02838-X/S0025-5718-2014-02838-X.pdf>
- [Seo1] Seo, S. *On first layers of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions II*, Acta Arith. 150 (2011), no. 4, 385–397. <http://journals.impan.pl/cgi-bin/doi?aa150-4-4>
- [Seo2] Seo, S. *On first layers of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, Journal of Number Theory 133 (2013) 4010–4023. [http://web.yonsei.ac.kr/sgseo/15.%20On%20first\\_numberTh.pdf](http://web.yonsei.ac.kr/sgseo/15.%20On%20first_numberTh.pdf)
- [Seo3] Seo, S. *On the Tate module of a number field* (ASARC). [http://asarc.kaist.ac.kr/bbs/view.php?board\\_id=preprint&no=108&category=&pagenum=&search=subject&key\\_word=Tate%20module](http://asarc.kaist.ac.kr/bbs/view.php?board_id=preprint&no=108&category=&pagenum=&search=subject&key_word=Tate%20module)
- [Seo4] Seo, S. *On the universal norm group of the global units and the  $p$ -units* (preprint, 2014). <http://web.yonsei.ac.kr/sgseo/N3.pdf>
- [Seo5] Seo, S. *On the conjectures of Gross and Leopoldt* (ASARC). [https://asarc.kaist.ac.kr/bbs/view.php?board\\_id=preprint&no=107&category=&pagenum=&search=content&key\\_word=Seo](https://asarc.kaist.ac.kr/bbs/view.php?board_id=preprint&no=107&category=&pagenum=&search=content&key_word=Seo)
- [Seo6] Seo, S. *On torsion towers of the maximal finitely-ramified Abelian  $p$ -extensions* (preprint, private communication, 2015).
- [Th] Thomas H., *Etage initial d'une  $\mathbb{Z}_p$ -extension* Manuscripta Mathematica 81, 1 (1993), 413–435 <https://www.researchgate.net/publication/225658029>
- [Wa] Washington, L.C., *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Math. 83, Springer enlarged second edition 1997.

VILLA LA GARDETTE, CHEMIN CHÂTEAU GAGNIÈRE, F-38520 LE BOURG D'OISANS.

*E-mail address:* [g.mn.gras@wanadoo.fr](mailto:g.mn.gras@wanadoo.fr) *url:* [http://www.researchgate.net/profile/Georges\\_Gras](http://www.researchgate.net/profile/Georges_Gras)