



**HAL**  
open science

## Sur la capitulation pour le module de Bertrandias-Payan

Jean-François Jaulent

► **To cite this version:**

Jean-François Jaulent. Sur la capitulation pour le module de Bertrandias-Payan. 2015. hal-01214814v2

**HAL Id: hal-01214814**

**<https://hal.science/hal-01214814v2>**

Preprint submitted on 26 Oct 2015 (v2), last revised 27 Apr 2016 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur la capitulation pour le module de Bertrandias-Payan

Jean-François JAULENT

**Résumé.** Nous déterminons l'ordre du sous-groupe de capitulation pour le module de Bertrandias-Payan dans une  $\ell$ -extension arbitraire de corps de nombres qui satisfait la conjecture de Leopoldt. Nous relierons en particulier la question de sa trivialisaton au problème des tours localement cyclotomiques.

**Abstract.** We compute the capitulation kernel for the module of Bertrandias-Payan in an arbitrary  $\ell$ -extension of number fields which satisfies the Leopoldt conjecture. As a consequence we relate the existence of extensions with trivial such module to the classical problem of locally cyclotomic towers.

## Introduction

Le compositum  $K^{bp}$  des  $\ell$ -extensions cycliques d'un corps de nombres  $K$  qui sont localement plongeables dans une  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension de ce corps a été introduit par Bertrandias et Payan dans [1] dans le but d'exhiber une condition suffisante de la conjecture de Leopoldt. Le sous-groupe de  $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion de son groupe de Galois  $\text{Gal}(K^{bp}/K)$ , appelé par Nguyen Quang Do *module de Bertrandias-Payan*, mesure l'obstruction à ce qu'une pro- $\ell$ -extension abélienne de  $K$  soit *globalement* plongeable dans un produit de  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions dès lors qu'elle l'est *localement*.

Il est naturel de se demander ce que devient cette obstruction lorsqu'on grossit le corps de base, plus précisément lorsqu'on remplace  $K$  par une  $\ell$ -extension  $L$ .

C'est précisément ce problème que nous traitons ici.

Nous adoptons dans cette étude le point de vue infinitésimal introduit dans [7] : toute  $\ell$ -extension  $\mathbb{Z}_\ell$ -plongeable étant  $\ell$ -ramifiée (i.e. non ramifiée en dehors des places divisant  $\ell$ ), l'extension  $K^{bp}/K$  est contenu dans la pro- $\ell$ -extension abélienne  $\ell$ -ramifiée maximale  $M/K$ . Et son groupe de Galois est donc un quotient de celui  $\mathcal{X}_K$  de  $M/K$ . Or ce dernier s'interprète comme le quotient du  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre  $\mathcal{D}'_K$  construit sur les idéaux premiers de  $K$  qui ne divisent pas  $\ell$  par le sous-groupe des diviseurs principaux engendrés par les éléments d'image locale triviale aux places divisant  $\ell$ , et que nous appelons pour cela *infinitésimaux*.

De façon semblable, le groupe  $\text{Gal}(K^{bp}/K)$  s'écrit comme le quotient  $\mathcal{C}'_K = \mathcal{D}'_K/P_K^{bp}$  de  $\mathcal{D}'_K$  par le sous-groupe des diviseurs principaux engendrés par les éléments dont une puissance est infinitésimale, et que nous appelons par conséquent *pseudo-infinitésimaux*.

Dans ce contexte, le noyau du morphisme d'extension  $\mathcal{C}'_K \rightarrow \mathcal{C}'_L$  est formé par les classes des diviseurs de  $K$  qui se principalisent dans  $L$ ; et il s'analyse donc comme une *capitulation*. Le résultat principal de cette étude (Th. 9 infra) consiste à le déterminer avec précision.

**Nota.** Quoique personnel, ce travail a été mené en étroite concertation avec G. Gras et T. Nguyen Quang Do. Une synthèse présentant les différents points de vue et résultats suivra prochainement.

## Convention

Dans tout ce qui suit  $\ell$  désigne un nombre premier impair,  $K$  un corps de nombres arbitraire et  $L$  une  $\ell$ -extension de  $K$  de groupe de Galois  $G = \text{Gal}(L/K)$ .

## 1. Bref rappel sur les classes infinitésimales

Le groupe de Galois  $\mathcal{X}_K = \text{Gal}(M/K)$  de la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale  $M$  d'un corps de nombres  $K$  est interprété par la théorie du corps de classes comme groupe des *classes infinitésimales* de  $K$  (cf. [7]), i.e. comme le quotient

$$\mathcal{C}_K^\infty = \mathcal{D}'_K / \mathcal{P}_K^\infty$$

du  $\mathbb{Z}_\ell$ -module  $\mathcal{D}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Id}'_K$  construit sur les diviseurs étrangers à  $\ell$  par le sous-module des diviseurs principaux engendrés par les éléments infinitésimaux : le *sous-groupe infinitésimal* est le noyau  $\mathcal{R}_K^\infty$  du morphisme de semi-localisation  $s_\ell : \mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \rightarrow \mathcal{R}_{K_\ell} = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{l}}}$ , où  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{l}}} = \varprojlim K^\times / K^{\times \ell^n}$  désigne le compactifié  $\ell$ -adique du groupe multiplicatif du complété de  $K$  en la place  $\mathfrak{l}$ .

Le groupe d'unités correspondant à  $\mathcal{C}_K^\infty$ , autrement dit le noyau de l'épimorphisme  $\mathcal{R}_K^\infty \rightarrow \mathcal{P}_K^\infty$  est le groupe  $\mathcal{E}_K^\infty$  des *unités infinitésimales* de  $K$  ; sous la conjecture de Leopoldt (pour  $\ell$  et pour  $K$ ), il est trivial (cf. e.g. [12]).

Sous cette même conjecture, il suit de là qu'il n'y a pas de capitulation infinitésimale dans une  $\ell$ -extension  $L/K$  de corps de nombres de groupe  $G$ , autrement dit que le morphisme naturel  $i_{L/K}^\infty : \mathcal{C}_K^\infty \rightarrow \mathcal{C}_L^\infty$  induit par l'extension des idéaux est toujours injectif. En effet, la suite exacte des classes infinitésimales ambiges s'écrit (cf. [7], Th. 2) :

$$1 \rightarrow \text{Cap}_{L/K}^\infty \rightarrow \mathcal{P}_L^{\infty G} / \mathcal{P}_K^\infty \rightarrow \mathcal{D}'_L^G / \mathcal{D}'_K \rightarrow \mathcal{C}_L^{\infty G} / j_{L/K}(\mathcal{C}_K^\infty) \rightarrow H^1(G, \mathcal{P}_L^\infty) \rightarrow 1$$

Or, sous la conjecture de Leopoldt (pour  $\ell$  et pour  $L$ ), on a  $\mathcal{P}_L^\infty = \mathcal{R}_L^\infty$  (par  $\mathcal{E}_L^\infty = 1$ ), donc  $\mathcal{P}_L^{\infty G} = \mathcal{R}_L^{\infty G} = \mathcal{R}_K^\infty = \mathcal{P}_K^\infty$ , i.e.  $\mathcal{P}_L^{\infty G} / \mathcal{P}_K^\infty = 1$  et, par suite :  $\text{Ker } i_{L/K}^\infty = \text{Cap}_{L/K}^\infty = 1$ . Ainsi :

**Théorème 1.** *Dans une  $\ell$ -extension  $L/K$  de corps de nombres, le morphisme d'extension entre classes infinitésimales  $\mathcal{C}_K^\infty \rightarrow \mathcal{C}_L^\infty$  est injectif sous la conjecture de Leopoldt pour  $\ell$  dans  $L$ . En particulier, le sous-module de torsion  $\mathcal{T}_K^\infty$  de  $\mathcal{C}_K^\infty$  s'identifie à un sous-module du sous-module des points fixes  $\mathcal{T}_L^{\infty G}$  de celui de  $\mathcal{C}_L^\infty$ .*

Ce résultat, aujourd'hui classique, a été prouvé initialement dans [3] (Th. I.1), puis redonné dans divers contextes, notamment par [7], [9], [19]. Une preuve figure également dans la monographie de Gras ([2], Th. IV.2.1. Aucun de ces résultats cependant n'est mentionné dans [23, 24].

**Nota.** Par montée et descente, on voit qu'une classe  $a$  qui capitule dans une extension  $L/K$  de corps de nombres vérifie banalement  $a^{[L:K]} = 1$ . La capitulation peut donc s'étudier indifféremment sur le module  $\mathcal{X}_K$  ou sur son sous-module de  $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion.

Avant d'aller plus loin et d'introduire le module de Bertrandias-Payan, donnons un résultat qui nous sera utile et qui est en quelque sorte la version infinitésimale du Théorème 90 de Hilbert :

**Lemme 2.** *Dans une  $\ell$ -extension de corps de nombres  $L/K$ , on a toujours :  $H^1(G, \mathcal{R}_L^\infty) = 1$*

*Preuve.* Partons de la suite exacte courte qui définit le sous-groupe infinitésimal :

$$1 \rightarrow \mathcal{R}_L^\infty \rightarrow \mathcal{R}_L \rightarrow \mathcal{R}_{L_\ell} = \prod_{\mathfrak{s}|\ell} \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{s}}} \rightarrow 1.$$

Prenant les points fixes par  $G$ , nous obtenons la suite exacte longue :

$$1 \rightarrow \mathcal{R}_K^\infty \rightarrow \mathcal{R}_K \rightarrow \mathcal{R}_{K_\ell} \rightarrow H^1(G, \mathcal{R}_L^\infty) \rightarrow H^1(G, \mathcal{R}_L) = 1,$$

où le groupe de cohomologie à droite est trivial (c'est le Théorème 90) ; ce qui donne le résultat.

## 2. Module de Bertrandias-Payan et classes pseudo-infinitésimales

Le groupe de Galois  $\text{Gal}(K^{bp}/K)$  du compositum  $K^{bp}$  des  $\ell$ -extensions cycliques d'un corps de nombres  $K$  qui sont *localement*  $\mathbb{Z}_\ell$ -plongeables (ainsi noté parce qu'il été introduit par Bertrandias et Payan dans [1]) est décrit par la théorie  $\ell$ -adique du corps de classes comme le quotient

$$\text{Gal}(K^{bp}/K) \simeq \mathcal{J}_K / \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{K_{\mathfrak{p}}} \mathcal{R}_K$$

du  $\ell$ -adifié  $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{res}} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$  du groupe des idèles de  $K$  par le sous-module engendré par les  $\ell$ -groupes locaux  $\mu_{K_{\mathfrak{p}}}$  de racines de l'unité et le sous-groupe  $\mathcal{R}_K$  des idèles principaux (cf. [9] ou [12]). Pour le regarder comme groupe de classes de diviseurs, il suffit d'écrire  $\mathcal{J}_K$  comme le produit  $\mathcal{J}'_K \mathcal{R}_K$ , où  $\mathcal{J}'_K$  est le produit  $\prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell}^{\text{res}} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$  (en vertu du théorème d'approximation simultanée) et d'observer que le quotient  $\mathcal{J}'_K / \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mu_{K_{\mathfrak{p}}}$  s'identifie canoniquement au  $\ell$ -groupe  $\mathcal{D}'_K$ . Il vient ainsi :

**Proposition & Définition 3.** *Le groupe de Galois  $\text{Gal}(K^{bp}/K)$  du compositum des  $\ell$ -extensions cycliques d'un corps de nombres  $K$  qui sont localement  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -plongeables s'identifie au quotient*

$$\mathcal{C}_K^{bp} = \mathcal{D}'_K / \mathcal{P}_K^{bp}$$

du  $\ell$ -groupe  $\mathcal{D}'_K$  des diviseurs de  $K$  étrangers à  $\ell$  par le sous-groupe  $\mathcal{P}_K^{bp}$  des diviseurs principaux engendrés par les éléments pseudo-infinitésimaux, c'est à dire les éléments de  $\mathcal{R}_K$  qui sont localement des racines de l'unité aux places au-dessus de  $\ell$ .

Nous disons que  $\mathcal{C}_K^{bp}$  est le  $\ell$ -groupe des classes pseudo-infinitésimales du corps  $K$  et que son sous-module de  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -torsion  $\mathcal{T}_K^{bp}$  est le module de Bertrandias-Payan attaché à  $K$ .

Le sous-groupe des principaux pseudo-infinitésimaux est ainsi donné par la suite exacte courte :

$$1 \rightarrow \mathcal{R}_K^{\infty} \rightarrow \mathcal{R}_K^{bp} \rightarrow \mu_{K_{\ell}} = \prod_{i|\ell} \mu_{K_i} \rightarrow 1.$$

Et le groupe d'unités  $\mathcal{E}_K^{bp}$  correspondant à  $\mathcal{C}_K^{bp}$  est donc le sous-groupe  $\mu_K^{loc}$  des éléments de  $\mathcal{R}_K$  qui sont localement partout des racines de l'unité ; sous la conjecture de Leopoldt (pour  $\ell$  et pour  $K$ ), c'est tout simplement le  $\ell$ -groupe  $\mu_K$  des racines globales de l'unité dans  $K$  (cf. [12]).

Dans ce contexte, la suite exacte des classes ambiges prend donc la forme :

**Proposition 4.** *Avec les notations ci-dessus, le sous groupe de capitulation du groupe des classes pseudo-infinitésimales dans une  $\ell$ -extension de corps de nombres est donné par la suite exacte :*

$$1 \rightarrow \text{Cap}_{L/K}^{bp} \rightarrow \mathcal{P}_L^{bpG} / \mathcal{P}_K^{bp} \rightarrow \mathcal{D}'_L^G / \mathcal{D}'_K \rightarrow \mathcal{C}_L^{bpG} / j_{L/K}(\mathcal{C}_K^{bp}) \rightarrow H^1(G, \mathcal{P}_L^{bp}) \rightarrow 1.$$

Il suit en particulier :  $|\text{Cap}_{L/K}^{bp}| \leq (\mathcal{P}_L^{bpG} : \mathcal{P}_K^{bp})$ , avec égalité en cas de  $\ell$ -ramification.

Ce résultat fournit directement une majoration simple de la capitulation pseudo-infinitésimale : partant de la suite exacte courte qui définit le sous-module principal pseudo-infinitésimal

$$1 \rightarrow \mu_L^{loc} \rightarrow \mathcal{R}_L^{bp} \rightarrow \mathcal{P}_L^{bp} \rightarrow 1,$$

prenant la cohomologie et comparant la suite obtenue à celle pour  $K$ , on obtient par le serpent :

$$1 \rightarrow \mathcal{P}_L^{bpG} / \mathcal{P}_K^{bp} \rightarrow H^1(G, \mu_L^{loc}) \rightarrow H^1(G, \mathcal{R}_L^{bp}) \rightarrow \dots$$

En fin de compte, on a donc les deux inégalités (et l'égalité à droite, sous la conjecture de Leopoldt dans  $L$ ) :

$$|\text{Cap}_{L/K}^{bp}| \leq (\mathcal{P}_L^{bpG} : \mathcal{P}_K^{bp}) \leq |H^1(G, \mu_L^{loc})| = |H^1(G, \mu_L)|.$$

En particulier (voir aussi [5], Th. 2.3 et [20] §2) :

**Théorème 5.** *Sous la conjecture de Leopoldt il ne peut y avoir de capitulation pour les classes pseudo-infinitésimales dans une  $\ell$ -extension  $L/K$  de corps de nombres si le corps de base  $K$  ne contient pas les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité ; ni, s'il les contient, lorsque  $L$  est un étage fini de sa  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique.*

*Preuve.* Si  $K$  ne contient pas les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité, le corps  $L$  ne les contient pas non plus ; et, s'il les contient et que  $L$  est contenue dans la  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique  $K^c$  de  $K$ , le groupe  $\mu_L$  est cohomologiquement trivial. Dans les deux cas il suit :  $H^1(G, \mu_L) = 1$  donc  $\text{Cap}_{L/K}^{bp} = 1$ .

**Scolie 6.** *Si l'extension  $L/K$  est cyclique, le sous-groupe de capitulation  $\text{Cap}_{L/K}^{bp}$  l'est aussi.*

*Preuve.* Sous la conjecture de Leopoldt, il s'identifie, en effet, à un sous-groupe du groupe quotient  $\mathcal{P}_L^{bpG} / \mathcal{P}_K^{bp}$ , qui est lui-même un sous-groupe du groupe cyclique  $H^1(G, \mu_L)$ .

### 3. Capitulation pseudo-infinitésimale et ramification logarithmique

Rappelons qu'une  $\ell$ -extension de corps de nombres  $L/K$  est dite *logarithmiquement non ramifiée* lorsqu'elle est *localement cyclotomique*, i.e. lorsque pour toute place  $\mathfrak{l}$  de  $K$  et chaque place  $\mathfrak{L}$  de  $L$  au-dessus de  $\mathfrak{l}$ , l'extension locale  $L_{\mathfrak{L}}/K_{\mathfrak{l}}$  est contenue dans la  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique locale  $K_{\mathfrak{l}}^c/K_{\mathfrak{l}}$  (cf. [11] ou [12]).

- Aux places modérées (i.e. étrangères à  $\ell$ ), la  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique  $K_{\mathfrak{l}}^c/K_{\mathfrak{l}}$  coïncidant avec la  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension non ramifiée  $K_{\mathfrak{l}}^{nr}/K_{\mathfrak{l}}$ , la non-ramification logarithmique coïncide avec la non-ramification au sens habituel. Une  $\ell$ -extension logarithmiquement non ramifiée est donc, en particulier, non ramifiée (au sens habituel) en dehors de  $\ell$ , i.e.  $\ell$ -ramifiée.
- Aux places sauvages (i.e. divisant  $\ell$ ), en revanche, la notion de  $\ell$ -extension logarithmiquement non ramifiée diffère substantiellement de celle de  $\ell$ -extension non-ramifiée.

Ce point rappelé, revenons à notre problème et considérons une  $\ell$ -extension arbitraire  $L/K$ . Nous pouvons supposer  $\mu_K \neq 1$  et  $L \neq K[\mu_L]$  sans quoi il ne peut y avoir de capitulation pseudo-infinitésimale en vertu du Théorème 5 ci-dessus.

Notons alors  $K' = K[\mu_L]$  et observons que le morphisme d'extension de  $\mathcal{C}_K^{bp}$  dans  $\mathcal{C}_{K'}^{bp}$  est injectif. Considérons un diviseur  $\mathfrak{a}_K$ , d'ordre  $\ell$  dans  $\mathcal{C}_K^{bp}$ , qui se principalise dans  $\mathcal{C}_L^{bp}$ , ce que nous écrivons  $\mathfrak{a}_L = (\alpha_L)$  dans  $\mathcal{D}'_L$ . Il suit :  $(\alpha_L^{\ell}) = \mathfrak{a}_L^{\ell} = (\alpha_K)$ , toujours dans  $\mathcal{D}'_L$ , pour un certain  $\alpha_K$  dans  $\mathcal{R}_K^{bp}$ . Ainsi  $\alpha_L^{\ell}/\alpha_K$  est une unité pseudo-infinitésimale de  $L$ , i.e. (sous la conjecture de Leopoldt) une racine de l'unité  $\zeta_{K'} \in \mu_{K'} = \mu_L$ . Il vient alors  $\alpha_L^{\ell} = \alpha_K \zeta_{K'}$  et  $\mathfrak{a}_K$ , qui est toujours d'ordre  $\ell$  dans  $\mathcal{C}_{K'}^{bp}$ , se principalise dans la sous-extension kummérienne  $L' = K'[\sqrt[\ell]{\alpha_K \zeta_{K'}}]$  de  $L$ , laquelle est logarithmiquement non-ramifiée sur  $K'$  donc sur  $K$ , puisque l'élément  $\alpha_K \zeta_{K'}$  est localement une racine de l'unité aux places au-dessus de  $\ell$  et une puissance  $\ell$ -ième d'idéal aux places étrangères à  $\ell$ . Itérant ce procédé, nous obtenons :

**Proposition 7.** *Soient  $K$  un corps de nombres contenant les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité et  $L$  une  $\ell$ -extension de  $K$ , puis  $L'$  le compositum des sous-extensions de  $L$  qui sont logarithmiquement non-ramifiées sur  $K$  (en d'autres termes la plus grande sous-extension de  $L$  qui est localement cyclotomique sur  $K$ ). Sous la conjecture de Leopoldt, la capitulation pseudo-infinitésimale dans  $L/K$  se lit dans  $L'/K$  :*

$$Cap_{L/K}^{bp} = Cap_{L'/K}^{bp}.$$

Ce point acquis, ce n'est donc pas restreindre la généralité que de supposer l'extension  $L/K$  non-ramifiée aux places au-dessus de  $\ell$  ; auquel cas la trivialité du quotient  $\mathcal{D}'_L^G/\mathcal{D}'_K$  donne l'égalité  $Cap_{L/K}^{bp} = \mathcal{P}_L^{bp G}/\mathcal{P}_K^{bp}$  et la capitulation pseudo-infinitésimale s'interprète ainsi comme le noyau du morphisme entre groupes de cohomologie :  $H^1(G, \mu_L^{loc}) \rightarrow H^1(G, \mathcal{R}_L^{bp})$ .

Pour calculer le groupe de droite, partons de la suite exacte qui définit  $\mathcal{R}_L^{bp}$  :

$$1 \rightarrow \mathcal{R}_L^{\infty} \rightarrow \mathcal{R}_L^{bp} \rightarrow \mu_{L_{\ell}} = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mu_{L_{\mathfrak{l}}} \rightarrow 1.$$

Prenant la cohomologie et comparant la suite obtenue avec celle écrite pour  $\mathcal{R}_K^{bp}$ , nous obtenons :

$$1 \rightarrow H^1(G, \mathcal{R}_L^{\infty}) \rightarrow H^1(G, \mathcal{R}_L^{bp}) \rightarrow H^1(G, \mu_{L_{\ell}}) \rightarrow H^2(G, \mathcal{R}_L^{\infty}).$$

Et le groupe à gauche  $H^1(G, \mathcal{R}_L^{\infty})$  est trivial, comme expliqué dans la section 1.

Il suit de là que l'on a  $H^1(G, \mathcal{R}_L^{bp}) = 1$ , sous la condition *suffisante*  $H^1(G, \mu_{L_{\ell}}) = 1$ , laquelle est automatiquement vérifiée dès lors que l'extension  $L/K$  considérée est *localement cyclotomique*, c'est à dire, suivant la terminologie introduite dans [11], *logarithmiquement non ramifiée*.

Il vient ainsi, sous la conjecture de Leopoldt, qui assure l'égalité  $\mu_L^{loc} = \mu_L$  :

**Proposition 8.** *Soit  $L/K$  une  $\ell$ -extension de corps de nombres logarithmiquement non ramifiée et vérifiant la conjecture de Leopoldt. La capitulation pour le module de Bertrandias-Payan est alors donnée par l'isomorphisme :*

$$Cap_{L/K}^{bp} \simeq H^1(G, \mu_L).$$

#### 4. Détermination de la capitulation pseudo-infinitésimale

Récapitulant les propositions précédentes, nous obtenons la description complète de  $Cap_{L/K}^{bp}$  :

**Théorème 9.** *Soient  $L/K$  une  $\ell$ -extension arbitraire de corps de nombres vérifiant la conjecture de Leopoldt,  $L'/K$  sa plus grande sous-extension qui est localement cyclotomique et  $G' = \text{Gal}(L'/K)$  son groupe de Galois. La capitulation dans  $L/K$  pour le module de Bertandias-Payan est alors donnée par l'isomorphisme :*

$$Cap_{L/K}^{bp} \simeq H^1(G', \mu_L).$$

**Scolie 10.** *Lorsque la  $\ell$ -extension  $L/K$  est linéairement disjointe de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $K^c/K$ , la capitulation pour le module de Bertandias-Payan est donnée par l'isomorphisme :*

$$Cap_{L/K}^{bp} \simeq \text{Hom}(G', \mu_K).$$

*Preuve.* L'hypothèse de disjonction linéaire se traduit, en effet, par l'égalité :  $\mu_L = \mu_K$ .

**Corollaire 11.** *Soient  $K$  un corps de nombres contenant les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité,  $K^{lc}$  sa pro- $\ell$ -extension abélienne localement cyclotomique maximale et  $K^c$  sa sous-extension globalement cyclotomique. Soient  $L$  une  $\ell$ -extension cyclique de  $K$  vérifiant la conjecture de Leopoldt (pour le premier  $\ell$ ),  $L' = K^{lc} \cap L$  et  $K' = K^c \cap L$ . L'ordre de la capitulation pseudo-infinitésimale est alors le minimum de l'ordre du  $\ell$ -groupe de racines  $\mu_K$  et du degré de l'extension  $L'/K'$  :*

$$|Cap_{L/K}^{bp}| = \min \{|\mu_K|, [L' : K']\}.$$

*Preuve.* Observons d'abord que nous avons par construction  $K' = K[\mu_L]$  donc  $\mu_{K'} = \mu_{L'} = \mu_L$ . Le groupe quotient  $G' = \text{Gal}(L'/K)$  étant cyclique, le premier groupe de cohomologie de  $G'$  relatif à  $\mu_L$  s'écrit comme quotient

$$H^1(G', \mu_L) \simeq {}_N\mu_L / \mu_L^{I_{G'}}$$

du noyau de la norme  ${}_N\mu_L = \{\zeta \in \mu_L \mid N_{L'/K}(\zeta) = 1\}$  par l'image de l'augmentation  $\mu_L^{I_{G'}}$ . Le dénominateur  $\mu_L^{I_{G'}} = \{\zeta \in \mu_L \mid N_{K'/K}(\zeta) = 1\} \simeq \mu_{K'}/\mu_K$  est formé des racines  $[K' : K]$ -ièmes de l'unité ; et le numérateur est sa pré-image dans  $\mu_L$  par l'application  $\zeta \mapsto N_{L'/K'}(\zeta) = \zeta^{[L':K']}$ . Le premier est ainsi d'ordre  $(\mu_L : \mu_K) = [K' : K]$  ; le second, d'ordre  $\min \{|\mu_L|, [L' : K']\}$ .

**Exemple 12.** *Soient  $K$  un corps de nombres contenant les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité et  $L$  une extension cyclique de degré  $\ell$  sur  $K$  vérifiant la conjecture de Leopoldt (pour le premier  $\ell$ ). Alors :*

- (i) *Si  $L/K$  est cyclotomique (i.e. contenue dans  $K^c/K$ ), la capitulation  $Cap_{L/K}^{bp}$  est triviale.*
- (ii) *Si  $L/K$  est localement cyclotomique mais non globalement, on a :  $|Cap_{L/K}^{bp}| = \ell$*
- (iii) *Si  $L/K$  n'est pas localement cyclotomique, la capitulation  $Cap_{L/K}^{bp}$  est triviale.*

**Illustrations numériques** (suggérées par [5] et basées sur les tables de Thomas (cf. [25])).

Prenons  $\ell = 3$ , pour  $K$  un corps biquadratique  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}, \sqrt{-3}]$  contenant les racines cubiques de l'unité et pour  $L$  l'extension cyclique de degré 3 engendrée sur  $K$  par une racine cubique de l'unité fondamentale  $\varepsilon$  du sous-corps réel de  $K$ .

- (i) Pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{473}, \sqrt{-3}]$  ou  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{785}, \sqrt{-3}]$  et  $L = K[\sqrt[3]{\varepsilon}]$ , l'extension  $L/K$  est le premier étage de la  $\mathbb{Z}_3$ -tour cyclotomique ; il vient donc :  $Cap_{L/K}^{bp} = 1$ .
- (ii) Pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{63}, \sqrt{-3}]$  ou  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{69}, \sqrt{-3}]$  et  $L = K[\sqrt[3]{\varepsilon}]$ ,  $L/K$  est logarithmiquement non ramifiée, mais n'est pas (globalement) cyclotomique ; il suit :  $|Cap_{L/K}^{bp}| = 3$ .

**Remarques.** Lorsque  $K$  contient les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité, on sait par [10], Cor. A.2 ou [12], §3.3 que la trivialité du sous-groupe de  $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion  $\mathcal{T}_K^{bp}$  du module de Bertandias-Payan  $\mathcal{C}_K^{bp}$  équivaut à celle du  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\tilde{\mathcal{C}}_K \simeq \text{Gal}(K^{lc}/K^c)$ .

Dans chacun des exemples ci-dessus pour lesquels il n'y a pas de capitulation, le groupe de classes logarithmiques du sous-corps réel est d'ordre 3, ce qui assure la non-trivialité de  $\mathcal{T}_K^{bp}$ .

Pour plus de détails sur le radical initial des  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions, on pourra comparer [4], [6], [10], [17] et [18], [25] avec [21] et [22], qui ne connaissent aucun des précédents.

## 5. Application aux tours localement cyclotomiques

Il est naturel de se demander si un corps de nombres donné  $K$ , dont le module de Bertrandias-Payan  $\mathcal{T}_K^{bp}$  est non trivial, possède ou non une  $\ell$ -extension  $L$  avec  $\mathcal{T}_L^{bp} = 1$ .

Lorsque  $K$  ne contient pas les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité, le Théorème 5 répond à la question :

**Théorème 13.** *Si  $K$  est un corps de nombres pour lequel on a  $\mu_K = 1$  mais  $\mathcal{T}_K^{bp} \neq 1$ , toutes ses  $\ell$ -extensions  $L$  vérifient les deux mêmes propriétés :  $\mu_L = 1$  mais  $\mathcal{T}_L^{bp} \neq 1$ .*

*Preuve.* D'après le Théorème 5, en effet, le morphisme d'extension  $i_{L/K}^{bp} : \mathcal{T}_K^{bp} \rightarrow \mathcal{T}_L^{bp}$  est injectif.

Regardons maintenant le cas où  $K$  contient les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité. Il vient alors :

**Lemme 14.** *S'il existe une  $\ell$ -extension  $L/K$  avec  $\mathcal{T}_L^{bp} = 1$ , alors sa sous-extension localement cyclotomique (i.e. logarithmiquement non ramifiée) maximale  $L'/K$  vérifie aussi  $\mathcal{T}_{L'}^{bp} = 1$ .*

*Preuve.* D'après la Proposition 7, en effet, le morphisme d'extension  $i_{L/L'}^{bp} : \mathcal{T}_{L'}^{bp} \rightarrow \mathcal{T}_L^{bp}$  est injectif, puisque  $L/L'$  ne contient par construction aucune sous-extension logarithmiquement non ramifiée.

Il suit de là que la question de la trivialisaton du module de Bertrandias-Payan peut s'appréhender dans les tours localement cyclotomiques et qu'elle se ramène donc à l'étude de la trivialisaton du  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques par  $\ell$ -extension logarithmiquement non ramifiée, déjà conduite dans une série d'articles : [13], [14], [15]. Il vient ainsi :

**Théorème 15.** *Soit  $K$  un corps de nombres contenant les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité. Sous la conjecture Leopoldt et de Gross-Kuz'min, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe une  $\ell$ -extension  $L/K$  qui admet un module de Bertrandias-Payan trivial :  $\mathcal{T}_L^{bp} = 1$ .*
- (ii) *Il existe une  $\ell$ -extension localement cyclotomique  $L/K$  qui vérifie :  $\mathcal{T}_L^{bp} = 1$ .*
- (iii)  *$K$  a une  $\ell$ -extension localement cyclotomique  $L$  logarithmiquement principale :  $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$ .*
- (iv) *La  $\ell$ -tour localement cyclotomique de  $K$  est finie.*

*Preuve.* Rappelons qu'il est associé dans [13] à chaque corps de nombres  $K$  une  $\ell$ -tour localement cyclotomique  $K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots \subset K_\infty$  obtenue en prenant pour premier étage  $K_1$  le compositum des sous-extensions  $K'/K$  de la pro- $\ell$ -extension abélienne localement cyclotomique maximale  $K^{lc}/K$ , qui sont linéairement disjointes de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $K^c/K$  et pour lesquelles on a  $K^{lc} = K'K^c$ ; puis en itérant le procédé à partir de  $K_1$  et ainsi de suite (cf. [13] §3). Et il est montré (cf. [13], Th. 4) que cette tour est finie si et seulement si le corps  $K$  possède une  $\ell$ -extension localement cyclotomique  $L$  logarithmiquement principale; ce qui établit l'équivalence de (iii) et de (iv). Celle de (ii) et (iii) résulte des théorèmes de dualité cités plus haut ([10], Cor. A.2 et [12], §3.3), qui assurent que les groupes  $\tilde{\mathcal{C}}_L$  et  $\mathcal{T}_L^{bp}$  ont même rang dès lors que le corps  $L$  contient les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité. Enfin l'équivalence de (i) et (ii) est donnée par le Lemme.

### Remarques.

- (i) Comme expliqué dans e.g. [8], [9], [12] ou [16], en présence des racines  $\ell$ -ièmes de l'unité la trivialisaton du  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques entraîne la validité des conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min (dite aussi conjecture de Gross généralisée). Il est donc facile de reformuler le Théorème indépendamment de ces conjectures.
- (ii) Il peut arriver que la tour localement cyclotomique  $K_\infty/K$  soit finie comme infinie. Des critères d'infinitude, basés sur le théorème de Golod et Šafarevič, sont donnés dans [13] et [14]. Inversement quelques conséquences de la finitude sont présentées dans [15].
- (iii) Sur le problème général de la capitulation pour le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques, voir [16].

## RÉFÉRENCES

- [1] F. BERTRANDIAS ET J.-J. PAYAN,  $\Gamma$ -extensions et invariants cyclotomiques, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **4** (1972), 517–548.
- [2] G. GRAS, *Class Field Theory : from theory to practice*, SMM, Springer-Verlag 2005.
- [3] G. GRAS, *Groupe de Galois de la  $p$ -extension abélienne  $p$ -ramifiée maximale d'un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **333** (1982), 86–132.
- [4] G. GRAS, *Plongements kummeriens dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, Compositio Math. **55** (1985), 383–396.
- [5] G. GRAS, *Sur le module de Bertrandias–Payan dans une  $p$ -extension galoisienne : noyau de capitulation*, prépublication (2015).
- [6] D. HEMARD, *Modules Galoisien de torsion et plongements dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, J. Number Th. **30** (1988), 357–374.
- [7] J.-F. JAULENT,  *$\mathcal{S}$ -classes infinitésimales d'un corps de nombres algébriques*, Ann. Sci. Inst. Fourier **34** (1984), 1–27.
- [8] J.-F. JAULENT, *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*, Actes des Journées Arithmétiques de Besançon, Astérisque **147-148** (1987), 107–120.
- [9] J.-F. JAULENT, *L'arithmétique des  $l$ -extensions* (Thèse d'Etat, Université de Franche-Comté, Besançon), Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Années 1984/86. <http://pmb.univ-fcomte.fr/1986.html>
- [10] J.-F. JAULENT, *La Théorie de Kummer et le  $K_2$  des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **2** (1990), 377–411.
- [11] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.
- [12] J.-F. JAULENT, *Théorie  $l$ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [13] J.-F. JAULENT & F. SORIANO-GAFIUK, *Sur les tours localement cyclotomiques de corps de nombres*, Archiv der Math. **73** (1999), 132–140.
- [14] J.-F. JAULENT & C. MAIRE, *À propos de la tour localement cyclotomique d'un corps de nombres*, Abh. Math. Sem. Hamburg **70** (2000), 239–250.
- [15] J.-F. JAULENT & C. MAIRE, *Radical hilbertien et tour localement cyclotomique*, Japan J. Math. **28** (2002), 203–213.
- [16] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques et capitulation*, Functiones et Approximatio (à paraître); arXiv :1204.3202v5 (2012)
- [17] J.-F. JAULENT, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, arXiv :1509.02743 (2015).
- [18] A. MOVAHHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, *On universal norms and the first layers of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions of a number field*, Math. Annalen **362** (2015), 817–838.
- [19] T. NGUYEN QUANG DO, *Sur la  $\mathbb{Z}_p$ -torsion de certains modules Galoisien*, Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 27–46.
- [20] T. NGUYEN QUANG DO, *Descente galoisienne et capitulation entre modules de Bertrandias–Payan*, prépublication (2015).
- [21] S. SEO, *On first layers of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, J.Number Th. **133** (2013) 4010–4023.
- [22] S. SEO, *On first layers of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions II*, Acta Arith. **150** (2011), no. 4, 385–397.
- [23] S. SEO, *On the Tate module of a number field, II*, prépublication (2015).  
<http://web.yonsei.ac.kr/sgseo/TGa.pdf>
- [24] S. SEO, *On the universal norm group of the global units and the  $p$ -units*, prépublication (2015).  
<http://web.yonsei.ac.kr/sgseo/N3.pdf>
- [25] H. THOMAS, *Étage initial d'une  $\mathbb{Z}_p$ -extension* Manuscripta Mathematica **81**, 1 (1993), 413–435.

Jean-François JAULENT  
 Institut de Mathématiques de Bordeaux  
 Université de BORDEAUX & CNRS  
 351, cours de la libération  
 F-33405 TALENCE Cedex  
 courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux1.fr