



**HAL**  
open science

# Décomposition de Hodge pour l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres

Aurélien Djament

► **To cite this version:**

Aurélien Djament. Décomposition de Hodge pour l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres. 2016. hal-01214646v2

**HAL Id: hal-01214646**

**<https://hal.science/hal-01214646v2>**

Preprint submitted on 16 Feb 2016 (v2), last revised 23 Apr 2019 (v6)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Décomposition de Hodge pour l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres

Aurélien Djament\*

16 février 2016

## Résumé

On établit une décomposition de l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux contravariants en termes d'homologie des foncteurs. Elle permet des calculs explicites, confirmant en particulier une conjecture de Randal-Williams.

## Abstract

We establish a decomposition of stable homology of automorphism groups of free groups with polynomial contravariant coefficients in term of functor homology. This allows explicit computations, confirming in particular a conjecture by Randal-Williams.

## Introduction

### Présentation des résultats

Le but principal de cet article est d'établir une « décomposition de Hodge » pour certains  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels d'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus. Cette décomposition repose, à partir du cadre formel développé dans [4], sur des considérations d'algèbre homologique dans des catégories de foncteurs, en particulier l'étude fine de certaines extensions de Kan dérivées. La forme du résultat abstrait qu'on obtient et l'argument final de la démonstration, qui emploie la théorie de l'obstruction des complexes de chaînes de Dold [6] et nécessite de travailler à coefficients rationnels (tandis que presque tout le reste de ce travail vaut à coefficients entiers), s'inspirent de la décomposition de Hodge pour l'homologie de Hochschild supérieure de Pirashvili ([24] — voir notamment son *Corollary 2.5*) ; c'est cette analogie qui motive la terminologie utilisée. (Il serait intéressant de savoir construire cette décomposition par des méthodes alternatives plus directes.)

On note  $\mathbf{gr}$  la catégorie usuelle des groupes libres de rang fini, tandis que  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  désigne une catégorie ayant les mêmes objets mais d'autres morphismes (cette catégorie possède des foncteurs covariant et contravariant vers  $\mathbf{gr}$  qui sont

---

\*CNRS, laboratoire de mathématiques Jean Leray, Nantes ; aurelien.djament@univ-nantes.fr

l'identité sur les objets). Pour les détails des définitions, ainsi que la stratégie des démonstrations, on invite le lecteur à se reporter à la section 1 et aux rappels généraux donnés à la fin de cette introduction. La forme la plus générale de notre décomposition de Hodge est la suivante.

**Théorème 1.** *Soient  $F$  un foncteur de la catégorie de groupes libres  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  vers la catégorie  $\mathbb{Q}\text{-Mod}$  des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels et  $n$  un entier naturel. Il existe un isomorphisme naturel*

$$\operatorname{colim}_{r \in \mathbb{N}} H_n(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); F(\mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Tor}_i^{\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})}(\Lambda_{\mathbb{Q}}^j \circ A, F)$$

où  $\Lambda_{\mathbb{Q}}^j : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  désigne la  $j$ -ème puissance extérieure rationalisée et  $A : \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$  le foncteur d'abélianisation.

Ce résultat abstrait ne donne pas directement lieu à des calculs explicites. En ajoutant une hypothèse de *polynomialité*, ou plus généralement d'*analyticité*, sur les coefficients, on peut en tirer le théorème suivant.

**Théorème 2.** *Soient  $F : \mathbf{gr}^{op} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  un foncteur analytique et  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe un isomorphisme naturel*

$$\operatorname{colim}_{r \in \mathbb{N}} H_n(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); F(\mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(F, \Lambda_{\mathbb{Q}}^j \circ \mathbf{a})$$

où  $\mathbf{a} : \mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{Ab}$  désigne le foncteur d'abélianisation.

En utilisant un résultat de stabilité pour l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus dû à Randal-Williams et Wahl ([27], *Theorem 5.4*, reposant sur l'article [11] de Hatcher et Vogtmann qui permet d'établir la stabilité à coefficients constants), on déduit aussitôt de ce théorème le corollaire suivant.

**Corollaire 1.** *Soient  $n, r$  et  $d$  des entiers naturels et  $F : \mathbf{gr}^{op} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  un foncteur polynomial de degré  $d$ . Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_n(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); F(\mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(F, \Lambda_{\mathbb{Q}}^j \circ \mathbf{a})$$

lorsque  $r \geq 2(n+d) + 3$ .

L'énoncé qui suit constitue une variation immédiate du précédent en termes de cohomologie.

**Corollaire 2.** *Soient  $n, r$  et  $d$  des entiers naturels et  $F : \mathbf{gr} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  un foncteur polynomial de degré  $d$ . Il existe un isomorphisme naturel*

$$H^n(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); F(\mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Ext}_i^{\mathbf{gr}}(\Lambda_{\mathbb{Q}}^j \circ \mathbf{a}, F)$$

lorsque  $r \geq 2(n+d) + 3$ .

Grâce aux calculs d'algèbre homologique pour les foncteurs sur la catégorie  $\mathbf{gr}$  effectués par Vespa dans [34], on peut déduire des résultats précédents plusieurs calculs explicites d'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus, notamment :

**Théorème 3.** *Soient  $n$ ,  $r$  et  $d$  des entiers tels que  $r \geq 2(n + d) + 3$  et  $G$  un groupe libre de rang  $r$ . Notons  $H$  la représentation  $G_{ab} \otimes \mathbb{Q}$  de  $G$ . Le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $H^n(\text{Aut}(G); \Lambda^d(H))$  est nul si  $n \neq d$ ; pour  $n = d$ , sa dimension est le nombre de partitions de  $d$ . Le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $H^n(\text{Aut}(G); S^d(H))$  est nul sauf pour  $n = d = 0$  ou  $1$ , auquel cas il est de dimension  $1$ .*

(Ici,  $S^d$  désigne la  $d$ -ème puissance symétrique.)

Ce théorème avait été conjecturé par Randal-Williams ([26], *Corollary 6.4* conditionné aux conjectures B et C de la même prépublication).

### Liens avec des travaux antérieurs

L’approche algébrique utilisée dans le présent article diffère notablement de celle, topologique, envisagée par Randal-Williams dans [26], qui montre que, la stabilité homologique étant admise, le théorème 3 découle d’un énoncé conjectural prédisant l’arrêt à la deuxième page de suites spectrales analogues à des suites spectrales pour l’homologie de groupes de difféotopie, dont l’effondrement à la page 2 est connu. (On notera toutefois que l’un des arguments de notre démonstration consiste à établir l’arrêt à la deuxième page d’une autre suite spectrale, issue d’un contexte algébrique.)

Appliqués au foncteur constant en  $\mathbb{Q}$ , nos résultats indiquent l’annulation de l’homologie réduite stable des groupes d’automorphismes des groupes libres à coefficients rationnels, profond résultat dû à Galatius ([8]). En fait, nous *utilisons* dès le début ce résultat, que les méthodes d’homologie des foncteurs semblent impuissantes à aborder : elles servent à ramener des calculs d’homologie stable à coefficients tordus à l’homologie stable des mêmes groupes à coefficients constants et à des groupes d’homologie des foncteurs — cf. la méthode générale introduite dans la section 1 de [4].

Dans [5], cette méthode générale est déjà appliquée pour obtenir l’annulation de certains groupes d’homologie stable des groupes d’automorphismes des groupes libres à coefficients tordus (annulation dont des cas particuliers avaient été obtenus à l’aide de méthodes topologico-géométriques, par Hatcher et Wahl — cf. [13] et son erratum [14] — et par Randal-Williams au début de [26], à partir de résultats de Hatcher et Vogtmann — cf. [12], et son erratum [10] avec Wahl). L’article [5] traitait de foncteurs polynomiaux *covariants* (pour l’homologie stable des automorphismes des groupes libres; en cohomologie il faut changer la variance), dont le comportement s’avère assez différent des coefficients *contravariants* examinés dans le présent travail. Cette différence, qui contraste avec ce qui advient pour l’homologie stable des groupes linéaires à coefficients tordus, par exemple, est déjà discutée dans [26] et [5] (remarque 7.1). Le point de départ (l’utilisation de la catégorie de groupes libres  $\mathcal{G}$ ) de [5] et du présent article coïncident toutefois.

De plus, [5] démontre déjà le théorème 2 en degré homologique  $n = 1$ , pour les foncteurs se factorisant par l’abélianisation (mais sans hypothèse de rationalité des valeurs des foncteurs). Des cas particuliers ou variantes de ces résultats en degré (co)homologique 1 avaient été obtenus auparavant par Kawazumi (voir la fin de la section 6 de [16]) et Satoh (cf. [28]). L’article [29] de Satoh établit également des cas particuliers en degré (co)homologique 2 de nos résultats. Reposant sur une approche assez explicite, les résultats de Satoh fournissent également certains calculs de (co)homologie instables et sont valides à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}[1/2]$  (pour le degré 2).

Les méthodes d'homologie des foncteurs devraient permettre d'obtenir des résultats généralisant à la fois ceux de [5] et du présent article : le calcul de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels de (co)homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux *bivariants*, c'est-à-dire de  $H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); B(\mathbb{Z}^{*r}, \mathbb{Z}^{*r}))$  (pour  $r$  assez grand, ou l'analogie en cohomologie), où  $B : \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  est un foncteur polynomial. Les classes de cohomologie  $h_p$  introduites par Kawazumi dans [16] (§4) sont de ce type. Dans [30], Satoh détermine, en degré 1, certains de ces groupes de (co)homologie. Nous donnerons à la fin de cet article une conjecture générale pour ces coefficients bivariants (théorème 5.9, conditionné à la conjecture 5.7), qu'on s'attend à démontrer, à partir du théorème 1, en étudiant l'extension de Kan dérivée le long du foncteur canonique  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr}) \rightarrow \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}$ . Cela devrait pouvoir se faire en combinant les méthodes de ce travail et celles de [5].

Signalons enfin que le calcul de la cohomologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients dans des représentations variées figure comme 17<sup>ème</sup> problème dans l'article de survol [20] de Morita.

## Notations et rappels généraux

**Catégories ensemblistes** On note **Ens** la catégorie des ensembles et **ens** la sous-catégorie pleine des ensembles finis, ou plutôt son squelette constitué des ensembles  $\mathbf{n} := \{1, \dots, n\}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On désigne par  $\Omega$  la sous-catégorie de **ens** ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les fonctions *surjectives*. On note également  $\Gamma$  la catégorie ayant les mêmes objets que **ens** et dont les morphismes sont les *applications partiellement définies*. Autrement dit, un morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  est la donnée d'un sous-ensemble de  $X$  noté  $\text{Def}(\varphi)$  et d'une fonction  $\text{Def}(\varphi) \rightarrow Y$ . Cette catégorie est équivalente à la catégorie des ensembles finis *pointés*, les morphismes étant les applications (partout définies) préservant le point de base (une équivalence est donnée par l'adjonction d'un point de base externe à un objet de la catégorie  $\Gamma$ ). On prendra garde que cette convention, classique, pour la catégorie  $\Gamma$  (qui concorde par exemple avec les articles de Pirashvili comme [24]) correspond à la catégorie *opposée* de la catégorie notée  $\Gamma$  par Segal [32].

L'objet  $\mathbf{0} = \emptyset$  est nul dans  $\Gamma$ ; la somme ensembliste induit une somme catégorique sur  $\Gamma$ , notée  $\sqcup$ .

On désigne par  $\Pi$  la sous-catégorie de  $\Gamma$  ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les applications surjectives partiellement définies.

On note enfin **Ens $\bullet$**  la catégorie des ensembles pointés.

**Catégories de foncteurs** Dans tout cet article,  $\mathbb{k}$  désigne un anneau commutatif (au-dessus duquel seront pris les produits tensoriels de base non spécifiée), qui sera le plus souvent un corps ou l'anneau des entiers. Si  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, on note  $\mathcal{C}\text{-Mod}$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers la catégorie  $\mathbb{k}\text{-Mod}$  des  $\mathbb{k}$ -modules à gauche et l'on pose  $\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{C} := \mathcal{C}^{op}\text{-Mod}$ . La catégorie  $\mathcal{C}\text{-Mod}$  est une catégorie abélienne de Grothendieck; pour  $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , on pose  $P_c^{\mathcal{C}} := \mathbb{k}[\mathcal{C}(c, -)]$  (où  $\mathcal{C}(c, d)$  désigne l'ensemble des morphismes de  $c$  vers  $d$  dans  $\mathcal{C}$  et  $\mathbb{k}[-]$  le foncteur de  $\mathbb{k}$ -linéarisation, c'est-à-dire l'adjoint à gauche au foncteur d'oubli de  $\mathbb{k}\text{-Mod}$  dans la catégorie **Ens**). Le foncteur  $P_c^{\mathcal{C}}$  représente l'évaluation en  $c$  de  $\mathcal{C}\text{-Mod}$  vers  $\mathbb{k}\text{-Mod}$  (lemme de Yoneda), il est donc projectif de type fini, et les  $P_c^{\mathcal{C}}$  engendrent  $\mathcal{C}\text{-Mod}$  lorsque  $c$  parcourt

Ob $\mathcal{C}$ . Si  $B$  est un bifoncteur sur  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire un objet de  $(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C})\text{-Mod}$ , on note  $HH_0(\mathcal{C}; B)$  la *cofin* de  $B$ ; les dérivés à gauche du foncteur exact à droite  $HH_0(\mathcal{C}; -) : (\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C})\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$  s'appellent *homologie de Hochschild* de  $\mathcal{C}$  et sont notés  $HH_*(\mathcal{C}; -)$ .

Si  $F$  et  $G$  sont des objets de  $\text{Mod-}\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}\text{-Mod}$  respectivement, on note  $F \boxtimes G \in \text{Ob } (\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C})\text{-Mod}$  leur produit tensoriel extérieur et l'on pose  $F \otimes_{\mathcal{C}} G := HH_0(\mathcal{C}; F \boxtimes G)$ . Le bifoncteur  $- \otimes_{\mathcal{C}} - : (\text{Mod-}\mathcal{C}) \times (\mathcal{C}\text{-Mod}) \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$  est équilibré, en le dérivant à gauche par rapport à l'une ou l'autre des variables, on obtient un foncteur gradué  $\text{Tor}_*^{\mathcal{C}}(-, -)$ . Si  $F$  ou  $G$  prend des valeurs  $\mathbb{k}$ -plates, on dispose d'un isomorphisme canonique  $\text{Tor}_*^{\mathcal{C}}(F, G) \simeq HH_*(\mathcal{C}; F \boxtimes G)$ .

L'*homologie* de  $\mathcal{C}$  à coefficients dans un foncteur  $F \in \text{Ob } \mathcal{C}\text{-Mod}$  est  $H_*(\mathcal{C}; F) := \text{Tor}_*^{\mathcal{C}}(\mathbb{k}, F)$ ; elle s'identifie à l'homologie de Hochschild du bifoncteur obtenu en précomposant  $F$  par le foncteur de projection  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Noter que  $H_0(\mathcal{C}; F)$  n'est autre que la colimite de  $F$ .

Notons  $\Delta$  le squelette usuel de la catégorie des ensembles finis non vides totalement ordonnés et  $\mathbf{S} := \mathbf{Fct}(\Delta^{op}, \mathbf{Ens})$  la catégorie des ensembles simpliciaux. On désignera par  $\mathcal{N}$  le foncteur *nerf* de la catégorie  $\mathbf{Cat}$  des petites catégories vers  $\mathbf{S}$ . Si  $M$  est un  $\mathbb{k}$ -module, qu'on peut voir comme foncteur constant  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$ , l'homologie  $H_*(\mathcal{C}; M)$  est canoniquement isomorphe à l'homologie de l'ensemble simplicial  $\mathcal{N}(\mathcal{C})$  à coefficients dans  $M$ . Si  $G$  est un groupe, vu comme catégorie à un objet,  $\mathcal{N}(G)$  sera noté  $B(G)$ .

Il est classique que toutes les constructions précédentes possèdent des fonctorialités relativement à la petite catégorie de base. Par exemple, si  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un foncteur entre petites catégories, le foncteur de précomposition par  $\varphi$ , noté  $\varphi^* : \mathcal{D}\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{C}\text{-Mod}$ , induit un morphisme naturel  $H_*(\mathcal{C}; \varphi^* F) \rightarrow H_*(\mathcal{D}; F)$  pour  $F \in \text{Ob } \mathcal{D}\text{-Mod}$ .

**Catégories d'éléments, extensions de Kan et suites spectrales de Grothendieck** Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie et  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur, nous noterons  $\mathcal{C}_F$  la *catégorie d'éléments* associée : ses objets sont les couples  $(c, x)$  constitués d'un objet  $c$  de  $\mathcal{C}$  et d'un élément  $x$  de  $F(c)$ , et les morphismes  $(c, x) \rightarrow (d, y)$  sont les morphismes  $f : c \rightarrow d$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $F(f)(x) = y$ . On notera  $o_F : \mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur d'oubli. Le foncteur de précomposition  $o_F^* : \mathcal{C}\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{C}_F\text{-Mod}$  possède un adjoint à gauche *exact*  $\omega_F : \mathcal{C}_F\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{C}\text{-Mod}$  donné sur les objets par

$$\omega_F(X)(c) = \bigoplus_{x \in F(c)} X(c, x).$$

Cette adjonction entre foncteurs exacts induit un isomorphisme naturel en homologie :

$$\text{Tor}_*^{\mathcal{C}}(T, \omega_F(X)) \simeq \text{Tor}_*^{\mathcal{C}_F}(o_F^* T, X)$$

pour  $T \in \text{Ob } \text{Mod-}\mathcal{C}$  et  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}_F\text{-Mod}$  (par abus, on note encore  $o_F$  pour  $o_F^{op} : \mathcal{C}_F^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$ ).

Si  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, la *catégorie des factorisations* de  $\mathcal{C}$  (Quillen [25]) est la catégorie, notée  $\mathbf{F}(\mathcal{C})$ , opposée à la catégorie d'éléments associée au foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ . Si  $B$  est un bifoncteur sur  $\mathcal{C}$ , il existe des isomorphismes naturels  $HH_*(\mathcal{C}; B) \simeq H_*(\mathbf{F}(\mathcal{C}); t^* o_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}}^* B) \simeq \text{Tor}_*^{\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}}(\mathbb{k}[\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}], B)$  (le deuxième est un cas particulier de l'isomorphisme d'adjonction précédent ;  $t$  désigne l'anti-involution de  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$  échangeant les deux facteurs du produit

cartésien). On utilisera également la catégorie  $\mathbf{S}(\mathcal{C})$  ayant les mêmes objets que  $\mathcal{C}$  et telle que  $\mathbf{S}(\mathcal{C})(c, d) := \{(f, g) \in \mathcal{C}(c, d) \times \mathcal{C}(d, c) \mid g \circ f = \text{Id}_c\}$ ; elle est munie d'un foncteur canonique, pleinement fidèle,  $\mathbf{S}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{C})$  qui associe à un objet  $c$  la flèche  $\text{Id}_c$ .

Si  $\xi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un morphisme de  $\mathbf{Cat}$ , nous noterons  $\xi_! : \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{D}$  l'extension de Kan à gauche le long du foncteur  $\xi^{op} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$ . On dispose d'un isomorphisme

$$\xi_!(F) \otimes_{\mathcal{D}} G \simeq F \otimes_{\mathcal{C}} \xi^* G$$

naturel en les objets  $F$  et  $G$  de  $\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}\text{-}\mathbf{Mod}$  respectivement, qui donne lieu à une suite spectrale de Grothendieck

$$E_{i,j}^2 = \text{Tor}_i^{\mathcal{D}}(\mathbf{L}_j(\xi_!)(F), G) \Rightarrow \text{Tor}_{i+j}^{\mathcal{C}}(F, \xi^* G). \quad (1)$$

Les foncteurs dérivés à gauche de  $\xi_!$  peuvent se décrire par les isomorphismes canoniques

$$\mathbf{L}_\bullet(\xi_!)(F)(d) \simeq \text{Tor}_\bullet^{\mathcal{C}}(F, \xi^* P_d^{\mathcal{D}}) \simeq H_\bullet(C_{\xi^* \mathcal{D}(d, -)}^{op}; o_{\xi^* \mathcal{D}(d, -)}^* F) \quad (2)$$

pour  $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$  (le dernier utilisant l'adjonction entre  $o_{\xi^* \mathcal{D}(d, -)}^*$  et  $\omega_{\xi^* \mathcal{D}(d, -)}$ ).

## 1 Stratégie de la démonstration

La démonstration de nos résultats repose sur la considération de différentes catégories de groupes libres et leur comparaison homologique. Commençons par donner des notations qui interviendront dans tout l'article. On note  $\mathbf{Grp}$  la catégorie des groupes et  $\mathbf{gr}$  la sous-catégorie pleine des groupes libres de rang fini, ou plutôt son squelette constitué des groupes  $\mathbb{Z}^{*n}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , où  $*$  désigne le produit libre (c'est-à-dire la somme catégorique de  $\mathbf{Grp}$ ). On désigne par  $\mathcal{G}$ , comme dans [5], la catégorie ayant les mêmes objets que  $\mathbf{gr}$  et dont les morphismes  $G \rightarrow H$  sont les couples  $(u, T)$  constitués d'un monomorphisme de groupes  $u : G \hookrightarrow H$  et d'un sous-groupe  $T$  de  $H$  tels que  $H = u(G) * T$  (ici,  $*$  désigne le produit libre *interne*). La composition  $G \xrightarrow{(u, T)} H \xrightarrow{(v, S)} K$  est le morphisme  $(v \circ u, S * v(T))$ .

La première étape de l'approche de l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres par l'homologie des foncteurs est la suivante.

**Proposition 1.1** ([5], proposition 4.4 et corollaire 4.5). *Soit  $F$  un objet de  $\mathcal{G}\text{-Mod}$ . Il existe un isomorphisme naturel*

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \xrightarrow{\simeq} H_*(\mathcal{G} \times G_\infty; \pi^* F)$$

de  $\mathbb{k}$ -modules gradués, où  $G_\infty$  désigne le groupe  $\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n})$  (vu comme catégorie à un objet) et  $\pi : \mathcal{G} \times G_\infty \rightarrow \mathcal{G}$  le foncteur de projection.

En particulier, si  $\mathbb{k}$  est un corps, on a un isomorphisme naturel

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \simeq H_*(\mathcal{G}; F) \otimes H_*(G_\infty; \mathbb{k}) \simeq H_*(\mathcal{G}; F) \otimes H_*(\mathfrak{S}_\infty; \mathbb{k})$$

(où  $\mathfrak{S}_\infty := \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_n$  désigne le groupe symétrique infini) et donc

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*n}); F(\mathbb{Z}^{*n})) \simeq H_*(\mathcal{G}; F)$$

si  $\mathbb{k}$  est de caractéristique nulle.

Cet énoncé, présent dans [5], est un corollaire de résultats généraux de comparaison d'homologie stable des groupes à coefficients tordus et d'homologie des foncteurs apparaissant dans [4] et de l'identification de l'homologie de  $G_\infty$  à celle de  $\mathfrak{S}_\infty$  (déterminée par Nakaoka dans [21]), due à Galatius [8].

Dans la suite, nous nous attacherons donc à étudier l'homologie de la catégorie  $\mathcal{G}$  à coefficients dans des foncteurs appropriés. La comparaison homologique directe avec la catégorie de groupes libres usuelle  $\mathbf{gr}$  (qui se prête à des calculs explicites), hors des cas traités dans [5], semblant hors de portée, nous utiliserons plusieurs catégories intermédiaires. La catégorie  $\mathbf{S}(\mathbf{gr})$  semble très naturelle à cette fin, si l'on compare la situation à son analogue abélien (étude de l'homologie stable des groupes linéaires à coefficients polynomiaux) — voir la démonstration du théorème de Scorichenko [31] donnée dans [3] (§ 5.2). Néanmoins, c'est plutôt par une variante de la catégorie  $\mathbf{S}(\mathbf{gr})$  que nous transiterons : celle-ci possède trop de morphismes du fait que les monomorphismes scindés entre groupes libres sont beaucoup plus riches qu'entre groupes abéliens libres.

**Notation 1.2.** On désigne par  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  la sous-catégorie de  $\mathbf{S}(\mathbf{gr})$  ayant les mêmes objets et dont les morphismes  $(u, v) : G \rightarrow H$  sont ceux tels qu'existe un sous-groupe  $T$  de  $H$  et un isomorphisme  $H \simeq G * T$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{u} & H & \xrightarrow{v} & G \\ & \searrow & \downarrow \simeq & \swarrow & \\ & & G * T & & \end{array}$$

dont les flèches obliques sont l'inclusion et la projection canoniques.

Remarquer que  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  est l'image du foncteur canonique  $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{gr})$  qui est l'identité sur les objets et associe à un morphisme  $(u, T) : G \rightarrow H$  le couple  $(u, H = u(G) * T \rightarrow u(G) \xrightarrow{\simeq} G)$ . On notera  $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  le foncteur plein et essentiellement surjectif qu'il induit.

Nos résultats ultérieurs nécessitent des hypothèses cruciales de *polynomialité* (ou d'*analyticité* — rappelons qu'un foncteur *analytique* est une colimite de foncteurs polynomiaux). Cette notion classique, qui remonte à Eilenberg-Mac Lane [7] pour des foncteurs entre catégories de modules, est exposée dans le cadre général d'une catégorie source monoïdale symétrique dont l'unité est objet nul dans [9], § 2, par exemple. Dans les cas qu'on considère, la structure monoïdale symétrique sera toujours donnée par le produit libre.

**Théorème 1.3.** *Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie de  $\mathbf{S}(\mathbf{gr})$  contenant  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ . Notons  $\beta$  la restriction à  $\mathcal{C}$  du foncteur canonique  $\mathbf{S}(\mathbf{gr}) \rightarrow \mathbf{gr}^{op}$ . Si  $F$  est un foncteur analytique de  $\mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{gr}$  et  $G$  un foncteur arbitraire de  $\mathbf{gr}\text{-}\mathbf{Mod}$ , alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*F) \rightarrow \mathrm{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(F, G)$$

*est un isomorphisme.*

On donne la démonstration de ce théorème dans la section 2, en s'inspirant du travail [31] de Scorichenko qui permet d'obtenir un résultat similaire dans le contexte des groupes *abéliens* libres.



Ensuite, on compare les catégories  $\mathcal{G}$  et  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  du point de vue homologique : on détermine l'image du foncteur constant par l'extension de Kan dérivée à gauche le long du foncteur  $\gamma^{op} : \mathcal{G}^{op} \rightarrow \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})^{op}$ . Dans le cas abélien, l'analogue du foncteur  $\gamma$  est une équivalence de catégories. Ici, le foncteur  $\gamma$  est plein et essentiellement surjectif; son défaut de fidélité peut être contrôlé. Cela nous conduira à étudier plusieurs catégories auxiliaires.

La suite spectrale générale (1) donne en particulier une suite spectrale

$$E_{i,j}^2 = \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})}(\mathbf{L}_j, F) \Rightarrow H_{i+j}(\mathcal{G}; \gamma^* F) \quad (3)$$

naturelle en  $F \in \mathrm{Ob} \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})\text{-Mod}$ , où  $\mathbf{L}_\bullet(A) := H_\bullet(C(A); \mathbb{k})$ ,  $C(A)$  désignant la catégorie d'éléments  $\mathcal{G}_{\gamma^* \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})(A, -)}$  (cf. (2)). Pour étudier l'homologie de la catégorie  $C(A)$ , nous rencontrerons naturellement les  $A$ -groupes libres, introduits maintenant avec quelques notations.

**Notation 1.4.** Soit  $A$  un groupe. On note  $\mathbf{Grp}_A$  la catégorie des groupes munis d'une action (à gauche) du groupe  $A$ . Si  $G$  est un objet de  $\mathbf{Grp}_A$ ,  $g$  un élément de  $G$  et  $a$  un élément de  $A$ , on notera  ${}^a g$  l'action de  $a$  sur  $g$ .

On note  $\mathcal{L}_A : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}_A$  l'adjoint à gauche au foncteur d'oubli, de sorte que  $\mathcal{L}_A(G)$  est le groupe  $G^{*A}$  avec l'action tautologique de  $A$ . On notera  $\star_{a \in A} {}^a G$  ce produit libre et  ${}^a h$  l'image canonique d'un élément  $h$  de  $G$  dans le facteur correspondant à  $a \in A$  (ce qui est cohérent avec la convention précédente). Un  $A$ -groupe (i.e. un objet de  $\mathbf{Grp}_A$ ) est dit  $A$ -libre (ou simplement *libre*) s'il est isomorphe à  $\mathcal{L}_A(G)$  pour un groupe *libre*  $G$ ; il revient au même de demander qu'il appartienne à l'image essentielle de l'adjoint à gauche au foncteur d'oubli  $\mathbf{Grp}_A \rightarrow \mathbf{Ens}$ .

On note  $\mathbf{gr}_A$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Grp}_A$  dont les objets sont les  $A$ -groupes libres de type fini  $\mathcal{L}_A(\mathbb{Z}^{*n})$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ).

Au paragraphe 3.1, nous établirons un énoncé sur les  $A$ -groupes libres (qui revient essentiellement à donner des générateurs explicites de leur groupe d'automorphismes, analogues à ceux de Nielsen pour les automorphismes des groupes libres) qui nous servira à montrer (§ 3.3) qu'une certaine petite catégorie  $\mathfrak{D}_A(G)$  associée à un  $A$ -groupe libre de type fini  $G$  est contractile. Ce résultat nous permettra de voir que la catégorie  $C(A)$  possède le même type d'homotopie qu'une autre catégorie (que nous introduirons plus tard), beaucoup plus simple à étudier à l'aide de la machinerie de Segal [32] associant un spectre à une catégorie monoïdale symétrique. Sans entrer tout de suite dans les détails, notons que le foncteur  $C : \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$  prend ses valeurs dans la sous-catégorie des petites catégories monoïdales symétriques (la structure monoïdale de  $C(A)$  étant, essentiellement, donnée par la somme amalgamée au-dessus de  $A$ ) connexes, de sorte que l'ensemble simplicial  $\mathcal{N}(C(A))$  possède une structure naturelle d'*espace de lacets infinis*. Dans la section 4, on montrera le théorème suivant.

**Théorème 1.5.** *Soit  $A$  un objet de  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ . L'espace de lacets infinis  $\mathcal{N}(C(A))$  a naturellement le même type d'homotopie que  $\Omega^\infty \Sigma^\infty(B(A))$  (dont la fonctorialité s'entend via le foncteur canonique  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})^{op} \rightarrow \mathbf{gr}$ ).*

En particulier, les foncteurs  $\mathbf{L}_j$  possèdent une description très simple en caractéristique nulle :

**Corollaire 1.6.** *Soit  $A$  un objet de  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ . L'espace de lacets infinis  $\mathcal{N}(C(A))$  a naturellement le même type d'homotopie rationnelle que  $B(A_{ab})$ .*

*Si  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ , on dispose d'un isomorphisme naturel  $L_\bullet(A) \simeq \Lambda^\bullet(A_{ab} \otimes \mathbb{Q})$ .*

Dans le cas général, l'homologie  $H_*(\Omega^\infty \Sigma^\infty(B(A)); \mathbb{k})$  est bien comprise, fonctoriellement en l'homologie de  $A$ , au moins si  $\mathbb{k}$  est un corps (voir par exemple [2], chap. I, §4), mais moins simple à décrire. Plutôt que d'énoncer un résultat complet, technique, nous nous contentons de propriétés qualitatives significatives faciles à exprimer. Dans ce qui suit, on désigne par  $\mathbf{ab}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ab}$  des groupes abéliens libres de rang fini et par  $\mathbf{a} : \mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{ab}$  le foncteur d'abélianisation. On note également  $\mathbf{a}_\mathbb{k} : \mathbf{gr} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$  la composée du foncteur  $\mathbf{gr} \xrightarrow{\mathbf{a}} \mathbf{ab}$  et de  $\mathbf{ab} \xrightarrow{-\otimes \mathbb{k}} \mathbb{k}\text{-Mod}$ .

**Corollaire 1.7.** *Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , le foncteur  $L_n$  est isomorphe à la composée du foncteur canonique  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})^{op} \rightarrow \mathbf{gr}$ , du foncteur d'abélianisation  $\mathbf{gr} \xrightarrow{\mathbf{a}} \mathbf{ab}$  et d'un foncteur  $L_n : \mathbf{ab} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$  polynomial de degré  $n$ . Si  $\mathbb{k}$  est un corps, le foncteur gradué  $L_\bullet$  est exponentiel, c'est-à-dire muni d'isomorphismes naturels  $L_\bullet(U \oplus V) \simeq L_\bullet(U) \otimes L_\bullet(V)$  de  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels gradués vérifiant les conditions de cohérence usuelles.*

En combinant la suite spectrale (3) et le théorème 1.3 à ce résultat, on obtient :

**Théorème 1.8.** *Soit  $F \in \text{Ob Mod-gr}$  un foncteur analytique. Il existe une suite spectrale*

$$E_{i,j}^2 = \text{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(F, \mathbf{a}^* L_j) \Rightarrow H_{i+j}(\mathcal{G}; \iota^* F)$$

*naturelle en  $F$ , où  $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{gr}^{op}$  désigne le foncteur canonique (qui est l'identité sur les objets et se factorise par  $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ ).*

Pour  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ , nous montrerons par un argument de formalité, dans la section 5, que la suite spectrale s'effondre à la page 2 et obtiendrons le théorème 2, que nous utiliserons pour des calculs explicites comme celui donné par le théorème 3.

## 2 Comparaison homologique des catégories $\mathcal{G}$ et $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$

L'outil crucial pour démontrer le théorème de comparaison homologique 1.3 est un critère d'annulation à la Scorichenko [31], analogue à celui utilisé dans [3] pour établir un résultat de comparaison homologique similaire dans un contexte abélien. Pour cela, donnons quelques notations, et plaçons-nous d'abord dans le cadre général d'une catégorie source  $\mathcal{A}$  possédant un objet nul et des coproduits finis (notés  $*$ ). Si  $E$  est un ensemble fini et  $I$  une partie de  $E$ , notons  $t_E$  l'endofoncteur de  $\mathcal{A}\text{-Mod}$  de précomposition par  $a \mapsto a^{*E}$  et  $u_E^I : t_E \rightarrow \text{Id}$  la transformation naturelle donnée par la précomposition par le morphisme naturel  $a^{*E} \rightarrow a$  dont la composante  $a \rightarrow a$  correspondant au facteur étiqueté par  $e \in E$  est l'identité si  $e \in I$  et 0 sinon. Si  $(E, e)$  est un ensemble fini pointé, on définit l'effet croisé  $cr_{(E,e)}$  comme la transformation naturelle

$$cr_{(E,e)} := \sum_{e \in I \subseteq E} (-1)^{\text{Card}(I)-1} u_E^I : t_E \rightarrow \text{Id}.$$

Un foncteur  $F$  de  $\mathcal{A}\text{-Mod}$  est polynomial de degré au plus  $d$  si et seulement si  $cr_{(E,e)}(F) = 0$ , où  $E$  est un ensemble de cardinal  $d + 2$ .

Dans la suite de cette section, on note  $\mathbf{E}(\mathbf{gr})$  la sous-catégorie de  $\mathbf{gr}$  avec les mêmes objets et dont les morphismes sont les épimorphismes isomorphes à un épimorphisme du type  $S * T \rightarrow S$ . Si  $F$  et  $G$  sont des foncteurs définis sur  $\mathbf{gr}$ , on dira qu'une collection de morphismes  $F(a) \rightarrow G(a)$  définis pour  $a \in \text{Ob } \mathbf{gr}$  est *faiblement naturelle* si elle est naturelle relativement aux morphismes de  $\mathbf{E}(\mathbf{gr})$ .

**Proposition 2.1.** *Soient  $T \in \mathbf{gr}\text{-Mod}$ ,  $d \in \mathbb{N}$  et  $(E, e)$  un ensemble pointé de cardinal  $d+2$ . Supposons que la transformation naturelle  $cr_{(E,e)}(T) : t_E(T) \rightarrow T$  est un épimorphisme possédant un scindage faiblement naturel. Alors  $\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(F, T) = 0$  pour tout foncteur  $F$  de  $\mathbf{Mod}\text{-gr}$  polynomial de degré au plus  $d$ .*

*Démonstration.* Par adjonction somme/diagonale, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(X, t_E(Y)) \simeq \text{Tor}_*^{\mathbf{gr}^E}(X \circ *^E, Y \circ *^E)$$

(où  $*^E : \mathbf{gr}^E \rightarrow \mathbf{gr}$  désigne le foncteur de produit libre itéré) d'où l'on déduit que, si  $F$  est polynomial de degré au plus  $d$ , le morphisme naturel  $\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(F, t_E(Y)) \rightarrow \text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(F, Y)$  induit par  $cr_{(E,e)}(Y)$  est nul pour tout  $Y$ .

Notons  $U$  le noyau de l'épimorphisme  $cr_{(E,e)}(T)$ . Ce qui précède montre que la suite exacte longue pour  $\text{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(F, -)$  associée à la suite exacte courte  $0 \rightarrow U \rightarrow t_E(T) \xrightarrow{cr_{(E,e)}(T)} T \rightarrow 0$  se réduit à des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \text{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(F, T) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^{\mathbf{gr}}(F, U) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^{\mathbf{gr}}(F, t_E(T)) \rightarrow 0,$$

ce qui établit déjà la nullité de  $\text{Tor}_0^{\mathbf{gr}}(F, T)$ . Pour démontrer le cas général par récurrence sur le degré homologique, il suffit de prouver que l'effet croisé  $cr_{(E,e)}(U)$  est un épimorphisme faiblement scindé.

Cela découle formellement (raisonner exactement comme dans la proposition 2.5 de [3], due à Scorichenko) des deux observations suivantes :

1. l'automorphisme  $\xi$  du foncteur  $t_E \circ t_E \simeq t_{E \times E}$  donné par l'échange des deux facteurs du produit cartésien  $E \times E$  fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} t_E \circ t_E & \xrightarrow{cr_{(E,e)} t_E} & t_E \\ \xi \downarrow & \nearrow t_E cr_{(E,e)} & \\ t_E \circ t_E & & \end{array}$$

2. les foncteurs  $t_E$  et les transformations naturelles  $u_E^I$ , pour  $I$  partie non vide de  $E$  — et donc  $cr_{(E,e)}$  — sont déjà définis sur  $\mathbf{E}(\mathbf{gr})\text{-Mod}$ . Noter que ce point est non formel (i.e. ne fonctionne pas pour toute catégorie avec un objet nul et des coproduits finis), contrairement aux précédents : il vient de ce que si  $f : H \rightarrow G$  est un morphisme de  $\mathbf{gr}$ , le morphisme  $G * H \rightarrow G$  dont les composantes sont  $\text{Id}_G$  et  $f$  appartient à  $\mathbf{E}(\mathbf{gr})$ . Pour le voir, on choisit une « base »  $\mathcal{B}$  de  $H$  (au sens du produit libre) et l'on note que notre morphisme est la composée de l'automorphisme « triangulaire » de  $G * H$  égal à l'identité sur  $G$  et envoyant  $b \in \mathcal{B}$  sur  $f(b)b$  et de l'épimorphisme canonique  $G * H \rightarrow G$ .

□

*Démonstration du théorème 1.3.* On dispose (cf. (1)) une suite spectrale

$$E_{i,j}^2 = \mathrm{Tor}_i^{\mathbf{gr}}(F, \mathbf{L}_j(\beta_!)(X)) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{i+j}^{\mathcal{C}}(X, \beta^*F)$$

pour tout foncteur  $X : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , où

$$\mathbf{L}_\bullet(\beta_!)(X)(a) = \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathcal{C}}(X, \beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}})$$

(cf. (2)).

Notons  $Y_i = \mathbf{L}_i(\beta_!)(\beta^*G)$  pour  $i > 0$  et  $Y_0$  le noyau de la coïunité  $\beta_!\beta^*G \rightarrow G$ , qui est surjective parce que  $\beta^*$  est fidèle (en effet,  $\beta$  est essentiellement surjectif). Il suffit de démontrer qu'on a  $\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{gr}}(F, Y_i) = 0$  pour  $F$  polynomial (le cas analytique s'en déduit par passage à la colimite). On va le faire en utilisant la proposition 2.1.

Le point crucial est l'existence d'une *functorialité exceptionnelle* sur les foncteurs  $Y_i$ , issue du caractère (fortement) monoïdal du foncteur  $\beta$  (cf. [3], § 2.3). Précisément, si  $a$  et  $b$  sont deux objets de  $\mathbf{gr}$ , on dispose d'un morphisme  $\xi_{a,b} : Y_i(a) \rightarrow Y_i(a * b)$  défini à partir de la composée suivante :

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b\beta^*G, \tau_b\beta^*P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}}) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}})$$

où  $\tau_b$  désigne la translation par  $b$  (i.e. la précomposition par  $- * b$ , qu'on peut considérer à la fois dans  $\mathcal{C}$  et  $\mathbf{gr}$ , ou leurs catégories opposées, et qui commute à  $\beta^*$  en raison du caractère monoïdal de  $\beta$ ), où la première flèche est induite par les morphismes obtenus en appliquant  $\beta^*$  au morphisme  $u : G \rightarrow \tau_b G$  provenant du morphisme  $b \rightarrow 0$  de  $\mathbf{gr}$  et  $v : P_a^{\mathbf{gr}^{op}} \rightarrow \tau_b P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}}$  induit par l'endofoncteur  $- * b$  de  $\mathbf{gr}$  et la deuxième flèche est la flèche induite en homologie par le foncteur  $- * b : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  (pour  $i = 0$ , on constate que ces flèches passent bien au noyau approprié car on peut faire la même construction en considérant  $\mathrm{Tor}^{\mathbf{gr}}$  et en utilisant les mêmes arguments, sans précomposition par  $\beta^*$ ).

On note les propriétés suivantes de ces morphismes  $\xi_{a,b}$ .

1. Soit  $f : b \rightarrow a$  un morphisme de groupes et  $\phi : a * b \rightarrow a$  le morphisme de composantes  $\mathrm{Id}_a$  et  $f$ . Alors la composée

$$c(\phi) : Y_i(a) \xrightarrow{\xi_{a,b}} Y_i(a * b) \xrightarrow{Y_i(\phi)} Y_i(a)$$

est égale à l'identité si  $f = 0$  et à 0 si  $f$  appartient à la catégorie  $\mathbf{E}(\mathbf{gr})$ .

Pour le voir, on forme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) & & & & \\ \downarrow u_* & \searrow (u,v)_* & & & \\ \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b\beta^*G, \beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) & \xrightarrow{v_*} & \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b\beta^*G, \tau_b\beta^*P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}}) & \xrightarrow{\phi_*} & \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b\beta^*G, \tau_b\beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}}) & \xrightarrow{\phi_*} & \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) \end{array}$$

(où les flèches verticales inférieures sont induites par le foncteur  $- * b : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ). La ligne du milieu est induite par la composée  $\beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}} \xrightarrow{v_*} \tau_b\beta^*P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}} \xrightarrow{\phi_*} \tau_b\beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}$ .

Pour  $f = 0$ , celle-ci est induite par la transformation naturelle  $\text{Id} = \tau_0 \rightarrow \tau_b$  (venant de ce que 0 est objet initial de  $\mathcal{C}$ ). Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b \beta^* G, \beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) & \longrightarrow & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b \beta^* G, \tau_b \beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^* G, \beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) \end{array}$$

dont la flèche horizontale (resp. oblique, verticale) est induite par cette transformation naturelle  $\text{Id} \rightarrow \tau_b$  (resp. par la version contravariante de cette transformation naturelle, par le foncteur  $- * b : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ) et le fait que la composée  $\beta^* G \xrightarrow{u_*} \tau_b \beta^* G \rightarrow \beta^* G$  égale l'identité montrent que  $c(\phi)$  est, dans ce cas, l'identité, comme souhaité.

Pour  $f \in \mathbf{E}(\mathbf{gr})$ , la composée  $\beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}} \xrightarrow{v_*} \tau_b \beta^* P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}} \xrightarrow{\phi_*} \tau_b \beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}}$  se factorise par  $\tau_b P_a^{\mathcal{C}}$ . En effet, par hypothèse,  $f$  est du type  $b \simeq a * a' \rightarrow a$ , notons  $h$  le morphisme canonique  $a \hookrightarrow a * a' \simeq b$ . Si  $g$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , on dispose d'une fonction naturelle en  $g$

$$\mathbf{gr}(\beta(g), a) \rightarrow \mathcal{C}(a, g * b) \quad \psi \mapsto (a \xrightarrow{h} b \hookrightarrow g * b, g * b \xrightarrow{(\psi, f)} a)$$

dont la composée avec la fonction  $\mathcal{C}(a, g * b) \rightarrow \mathbf{gr}(\beta(g) * b, a)$  induite par le foncteur  $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{gr}^{op}$  induit, après linéarisation, le morphisme  $\beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}} \xrightarrow{v_*} \tau_b \beta^* P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}} \xrightarrow{\phi_*} \tau_b \beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}}$ . La nullité de  $c(\phi)$  se déduit de cette factorisation, en l'utilisant pour former un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b \beta^* G, \beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) & \longrightarrow & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b \beta^* G, \tau_b P_a^{\mathcal{C}}) & \longrightarrow & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b \beta^* G, \tau_b \beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^* G, P_a^{\mathcal{C}}) & \longrightarrow & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^* G, \beta^* P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) \end{array}$$

et en utilisant que  $P_a^{\mathcal{C}}$  est projectif.

- Le morphisme  $\xi_{a,b}$  est naturel en  $a \in \text{Ob } \mathbf{gr}$  et en  $b \in \text{Ob } \mathbf{E}(\mathbf{gr})$ . La naturalité en  $a$  est immédiate, celle en  $b$  s'obtient comme suit. Soit  $\varphi : b \rightarrow b'$  un morphisme de  $\mathbf{E}(\mathbf{gr})$ . On dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P_a^{\mathbf{gr}^{op}} & \longrightarrow & \tau_b P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{b'} P_{a*b'}^{\mathbf{gr}^{op}} & \longrightarrow & \tau_b P_{a*b'}^{\mathbf{gr}^{op}} \end{array}$$

dont les flèches  $P_a^{\mathbf{gr}^{op}} \rightarrow \tau_b P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}}$  et  $P_{a'}^{\mathbf{gr}^{op}} \rightarrow \tau_{b'} P_{a*b'}^{\mathbf{gr}^{op}}$  sont induites par les endofoncteurs respectifs  $- * b$  et  $- * b'$  de  $\mathbf{gr}$  et les autres flèches sont induites par  $\varphi : b \rightarrow b'$ . Comme  $\varphi$  appartient à  $\mathbf{E}(\mathbf{gr})$ , qui est l'image essentielle du foncteur canonique  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})^{op} \rightarrow \mathbf{gr}$ , ce morphisme est l'image par  $\beta$  d'un morphisme  $\psi : b' \rightarrow b$  de  $\mathcal{C}$ .

Cela permet de former un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) & & \\
& \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
\text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b\beta^*G, \beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) & \longrightarrow & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b\beta^*G, \tau_{b'}\beta^*P_{a*b'}^{\mathbf{gr}^{op}}) & \xrightarrow{\psi^*} & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_{b'}\beta^*G, \tau_{b'}\beta^*P_{a*b'}^{\mathbf{gr}^{op}}) \\
\downarrow & & \downarrow \psi_* & & \downarrow \\
\text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b\beta^*G, \tau_b\beta^*P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}}) & \longrightarrow & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b\beta^*G, \tau_b\beta^*P_{a*b'}^{\mathbf{gr}^{op}}) & \longrightarrow & \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_{a*b'}^{\mathbf{gr}^{op}}) \\
\downarrow & & \nearrow \varphi_* & & \\
\text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}}) & & & & 
\end{array}$$

dans lequel la composée  $\text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) \rightarrow \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_{a*b}^{\mathbf{gr}^{op}})$  est  $\xi_{a,b}$  et  $\text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \beta^*P_a^{\mathbf{gr}^{op}}) \rightarrow \text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(\tau_b\beta^*G, \tau_b\beta^*P_{a*b'}^{\mathbf{gr}^{op}})$  est  $\xi_{a,b'}$ ; le carré de droite est déduit de la transformation naturelle  $- * \psi : - * b' \rightarrow - * b$  entre endofoncteurs de  $\mathcal{C}$  et celui de gauche du carré commutatif ci-dessus, tandis que le triangle en à droite provient de ce que le morphisme canonique  $G \rightarrow \tau_t G$  est fonctoriel en l'objet  $t$  de  $\mathbf{gr}$ . Cela montre la naturalité souhaitée.

Soit  $(E, e)$  un ensemble fini pointé. Le morphisme  $\xi_{a, a^*E \setminus e} : Y_i(a) \rightarrow Y_i(a * a^*E \setminus e) = t_E(Y_i(a))$  est une section de l'effet croisé  $cr_{(E,e)}(Y_i)(a)$  grâce à la première propriété (qui montre que  $u_E^I(Y_i)(a) \circ \xi_{a, a^*E \setminus e}$  est égal à l'identité pour  $I = \{e\}$  et à 0 lorsque  $I \subset E$  contient strictement  $e$ ). La seconde propriété montre que cette section possède la naturalité faible qui permet d'appliquer la proposition 2.1, d'où la conclusion.  $\square$

L'énoncé suivant, que nous utiliserons dans la section 5, constitue une variante du théorème 1.3 qui se démontre exactement de la même manière, ou s'en déduit aisément.

**Corollaire 2.2.** *Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie de  $\mathbf{S}(\mathbf{gr})$  contenant  $\mathbf{S}_e(\mathbf{gr})$ . Notons  $\beta$  la restriction à  $\mathcal{C}$  du foncteur canonique  $\mathbf{S}(\mathbf{gr})^{op} \rightarrow \mathbf{gr}$ . Soient  $F$  et  $G$  deux foncteurs de  $\mathbf{gr}\text{-Mod}$ . On suppose que  $G$  est analytique. Alors le morphisme canonique*

$$\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\text{Mod-}\mathcal{C}}^*(\beta^*F, \beta^*G)$$

*est un isomorphisme.*

### 3 La catégorie contractile $\mathfrak{D}_A(G)$

#### 3.1 Transformations de Nielsen des $A$ -groupes libres

Quelques notions relatives aux  $A$ -groupes ont déjà été introduites en 1.4; nous aurons également besoin des notations suivantes.

**Définition 3.1.** Soient  $A$  un groupe et  $G$  un  $A$ -groupe. On note  $\mathfrak{B}_A(G)$  l'ensemble des sous-groupes  $H$  de  $G$  tels que  $G$  soit le produit libre (interne) des

${}^aH$  pour  $a \in A$  (il revient au même de demander que le morphisme  $\mathcal{L}_A(H) \rightarrow G$  de  $\mathbf{Grp}_A$  adjoint à l'inclusion de groupes  $H \hookrightarrow G$  soit un isomorphisme).

On appelle  $A$ -base (ou simplement *base*) de  $G$  toute partie génératrice libre d'un sous-groupe de  $G$  appartenant à  $\mathfrak{B}_A(G)$ . On note  $\mathcal{B}_A(G)$  l'ensemble de ces bases, qui est donc non vide si et seulement si  $G$  est  $A$ -libre.

On introduit maintenant une généralisation aux  $A$ -groupes des opérations de réduction de Nielsen pour les groupes, que ce dernier utilisa dans [22] pour montrer que le groupe des automorphismes d'un groupe libre de rang fini est engendré par les automorphismes élémentaires usuels (une bonne référence plus récente sur le sujet est [19], chap. I, § 2). Dans le cas où  $A$  est le groupe trivial, tous les résultats de ce paragraphe sont très classiques ; il se peut qu'ils soient bien connus, dans toute leur généralité, des experts de la théorie combinatoire des groupes libres, mais l'auteur n'a trouvé aucune référence à ce sujet.

**Définition 3.2.** Une  $A$ -transformation de Nielsen élémentaire d'une partie  $E$  d'un  $A$ -groupe  $G$  est une opération consistant soit à transformer l'un des éléments de  $E$  en son inverse (et laisser les autres éléments de  $E$  inchangés), soit à transformer l'un des éléments  $h$  de  $E$  en  ${}^ah$ , pour un  $a \in A$ , soit à transformer l'un des éléments de  $E$  en son produit (à gauche ou à droite) par un autre élément de  $E$ .

Une  $A$ -transformation de Nielsen est une suite finie de  $A$ -transformations de Nielsen élémentaires.

Deux parties de  $G$  sont dites *équivalentes à la Nielsen* s'il existe une  $A$ -transformation de Nielsen envoyant l'une sur l'autre.

L'objectif de ce paragraphe consiste à établir le résultat suivant, dont un corollaire immédiat (qui possède un intérêt intrinsèque mais ne sera pas utile dans le présent travail) est la description de générateurs élémentaires explicites du groupe  $\text{Aut}_{\mathbf{Grp}_A}(G)$ , lorsque  $G$  est un  $A$ -groupe libre ( $A$  étant un groupe quelconque) de type fini (i.e. possédant une  $A$ -base finie).

**Théorème 3.3.** Soient  $A$  un groupe et  $G$  un  $A$ -groupe libre de type fini. Toutes les  $A$ -bases de  $G$  sont équivalentes à la Nielsen.

Pour le voir, on adapte la méthode suivie par Hoare [15], elle-même inspirée d'un travail beaucoup plus ancien de Petresco [23] et reposant sur le formalisme des *fonctions longueurs* introduit par Lyndon [18].

Fixons-nous un élément  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$  (où les  $e_i$  sont deux à deux distincts) de  $\mathcal{B}_A(G)$  et considérons la *fonction longueur* associée sur  $G$ , notée  $x \mapsto |x|$  (ou  $|x|_{\mathbf{e}}$  lorsqu'une ambiguïté est possible), c'est-à-dire la fonction longueur sur le groupe libre  $G$  provenant de sa « base » constituée des  ${}^ae_i$  pour  $a \in A$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On note également  $d(x, y) = \frac{1}{2}(|x| + |y| - |xy^{-1}|)$  pour  $(x, y) \in G^2$ . Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes.

- (C0)  $| \cdot |$  et  $d$  prennent leurs valeurs dans les entiers ;
- (A0') pour  $x \in G$  et  $a \in A$ , on a  $|x| < |x \cdot {}^ax|$ , sauf si  $x$  est de la forme  $t \cdot {}^at^{-1}$  pour un  $t \in G$  ;
- (A1)  $|x| \geq 0$  pour tout  $x \in G$ , et  $|x| = 0$  si et seulement si  $x = 1$  ;
- (A2)  $|x^{-1}| = |x|$  ;
- (A2') pour tous  $x \in G$  et  $a \in A$ ,  $|{}^ax| = |x|$  ;
- (A') pour  $x \in G$  et  $a \in A$ , si  $a \neq 1$ , alors  $|x \cdot {}^ax^{-1}| = 2|x|$  (ce qui équivaut à  $d(x, {}^ax) = 0$  compte-tenu de (A2')) ;

- (A3)  $d(x, y) \geq 0$ ;  
(A4)  $d(x, y) < d(x, z)$  implique  $d(y, z) = d(x, y)$  (souvent utilisé sous la forme :  $d(x, y) \geq m$  et  $d(y, z) \geq m$  impliquent  $d(x, z) \geq m$ ) ;  
(A5') Pour  $(x, y) \in G^2$  et  $a \in A$  tels que  $d(x, y) + d({}^ax^{-1}, y^{-1}) \geq |x| = |y|$ , il existe  $(r, s) \in G^2$  tel que  $x = rs$  et  $y = {}^ar.s$

Les propriétés numérotées sans prime ne dépendent pas de l'action de  $A$  et sont établies dans [18]. La propriété (A2') est évidente ; montrons (A0'), (A') et (A5').

(A0') : Écrivons  $x$  sous la forme d'un mot réduit

$$x = {}^{\alpha_1}b_1 \dots {}^{\alpha_r}b_r$$

où  $b_i \in \mathbf{e} \cup \mathbf{e}^{-1}$  et  ${}^{\alpha_i}b_i \cdot {}^{\alpha_{i+1}}b_{i+1} \neq 1$ . Alors  $|x| = r$ , et  $|x \cdot {}^ax| = 2(r - s)$  où  $s$  est le plus grand entier tel que  ${}^{\alpha_{r-i+1}}b_{r-i+1} \cdot {}^{\alpha_i}b_i = 1$  pour  $1 \leq i \leq s$ . On en déduit que  $x$  s'écrit (de façon unique) sous la forme d'un mot réduit  $t.u. {}^at^{-1}$  avec  $|t| = s$ , et  $|u \cdot {}^au| = 2|u|$ . On a  $|x| = 2|t| + |u| < 2|t| + 2|u| = |t.u. {}^au \cdot {}^a^2t^{-1}|$ , sauf si  $u = 1$  i.e.  $x = t. {}^at^{-1}$ .

(A') : dans l'écriture de  $x$  sous forme de mot réduit, la première lettre de  ${}^ax^{-1}$  est égale à  ${}^ay^{-1}$ , où  $y$  est la dernière lettre de  $x$ . Comme  $y \cdot {}^ay^{-1} \neq 1$  (pour  $a \neq 1$ ), il n'y a pas de simplification possible, d'où le résultat.

Une conséquence de (A') est la suivante. Dans ce qui suit, on dit, par analogie avec l'algèbre linéaire, qu'un élément de  $G$  est *unimodulaire* s'il appartient à une  $A$ -base de  $G$ .

**Proposition 3.4.** *Soient  $x \in G$  et  $a \in A$ . Alors l'élément  $x \cdot {}^ax^{-1}$  de  $G$  n'est jamais unimodulaire.*

*Démonstration.* Si  $a = 1$ , c'est évident (l'élément est le neutre). Sinon, par (A'),  $|x \cdot {}^ax^{-1}|_{\mathbf{e}} \neq 1$  pour tout élément  $\mathbf{e}$  de  $\mathcal{B}_A(G)$ , ce qui interdit que  $x$  soit un terme de  $\mathbf{e}$ .  $\square$

(A5') : écrivons  $x = rs$  et  $y = ts$  de sorte que les mots  $rs$ ,  $ts$  et  $rt^{-1}$  soient réduits — ainsi,  $|s| = d(x, y)$ . On a  ${}^ax^{-1} = {}^as^{-1} \cdot {}^ar^{-1}$  et  $y^{-1} = s^{-1}t^{-1}$  ; ces écritures sont réduites et par hypothèse  $d({}^ax^{-1}, y^{-1}) \geq |x| - d(x, y) = |r|$ . Comme  $|r| = |t|$  (car  $|x| = |y|$ ), on en déduit  ${}^ar^{-1} = t^{-1}$  i.e.  $t = {}^ar$ , d'où la conclusion.

Pour démontrer le théorème 3.3, utilisons la terminologie suivante, tirée de [23]. Tout d'abord, si  $E$  est un sous-ensemble de  $G$ , on note  $\bar{E}$  l'ensemble des éléments de  $G$  de la forme  ${}^ax$  ou  ${}^ax^{-1}$  pour un  $x \in E$  et un  $a \in A$ . Un élément  $\mathbf{e}$  de  $\mathcal{B}_A(G)$ , donc une fonction longueur, étant fixé, un sous-ensemble  $E$  de  $G$  est dit *progressif* si pour toute suite finie non vide  $(u_0, \dots, u_n)$  d'éléments de  $\bar{E}$ , on a

$$|u_0.u_1 \dots u_n| \geq |u_1 \dots u_n|$$

dès lors que  $u_{i-1}.u_i \neq 1$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Si c'est le cas, sous la même hypothèse, on a aussi  $|u_0.u_1 \dots u_n| \geq |u_i \dots u_n|$  pour tous entiers  $0 \leq i \leq j \leq n$ .

Disons par ailleurs qu'un sous-ensemble de  $G$  en est une  *$A$ -base partielle* si c'est une partie d'une  $A$ -base. Le théorème 3.3 se déduira aisément de la proposition suivante, qui adapte le *Theorem* de [15].

**Proposition 3.5.** *Soient  $G$  un  $A$ -groupe libre de type fini muni d'une  $A$ -base,  $X$  une  $A$ -base partielle progressive de  $G$ ,  $x'$  un élément de  $G$  tel que  $|x'| \geq |x|$  pour*



tout  $x \in X$  et  $X' := X \cup \{x'\}$ . On suppose également que  $X'$  est encore une  $A$ -base partielle de  $G$ . Si  $X'$  n'est pas progressif, alors il existe une transformation de Nielsen de  $X'$  qui laisse invariant  $X$  et réduit strictement la longueur de  $x'$ .

*Démonstration.* Supposons que  $X'$  n'est pas progressif : il existe alors des éléments  $b_0, \dots, b_n$  de  $\bar{X}'$  tels que  $|b_0 b_1 \dots b_n| < |b_1 \dots b_n|$ . On peut supposer que  $n$  est minimal parmi les entiers pour lesquels existe un tel phénomène. Pour  $0 \leq i \leq n$ , posons  $c_i = b_{i+1} \dots b_n$  (de sorte que  $c_{n-1} = b_n$  et  $c_n = 1$ ). Comme dans la démonstration du *Theorem* de [15], en appliquant son *Lemma*, on voit que  $|c_0| = |c_1| = \dots = |c_{n-1}|$ .

Comme  $X$  est progressif, il existe  $i$  tel que  $b_i$  soit de la forme  ${}^a x'$  ou  ${}^a x'^{-1}$  pour un  $a \in A$ ; soit  $i$  le plus petit tel entier. S'il existe au moins deux tels entiers, nous noterons  $j$  le plus petit strictement supérieur à  $i$ .

On va voir qu'il ne peut pas exister deux tels entiers. Cela permettra de conclure, car l'unicité de l'occurrence de  $x'$  dans le mot  $w = b_0 \dots b_n$  montre qu'il existe une transformation de Nielsen qui laisse invariant  $X$  et transforme  $x'$  en  $w$ , qui est de longueur strictement inférieure à la longueur de  $x$  (car  $|w| < |c_0|$  par hypothèse, et  $|c_0| = |c_{n-1}| = |b_n|$ , or  $b_n$  appartient à  $\bar{X}'$ , donc est de longueur au plus égale à celle de  $x'$ ).

On cherche donc à établir une contradiction, en supposant que  $i$  et  $j$  existent. On va distinguer à cet effet plusieurs cas, en notant qu'on a soit  $b_j = {}^a b_i$  pour un  $a \in A$ , soit  $b_j = {}^a b_i^{-1}$ . Mais on fait tout d'abord quelques remarques préliminaires.

Pour  $1 \leq k \leq n-1$ , on a

$$d(c_{k-1}, c_k) = \frac{1}{2}(|c_{k-1}| + |c_k| - |b_k|) = |c_0| - |b_k|/2 \geq |c_0| - |b_i|/2$$

puisque  $|b_i| = |x'| \geq |b_k|$  pour tout  $k$  par hypothèse. En utilisant (A4), on en déduit

$$d(c_l, c_k) \geq |c_0| - |b_i|/2 \quad \text{pour } 0 \leq l < k \leq n-1. \quad (4)$$

On a également

$$d(c_k^{-1}, b_k) = \frac{1}{2}(|c_k| + |b_k| - |c_{k-1}|) = \frac{1}{2}|b_k| \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n-1. \quad (5)$$

Supposons d'abord  $b_j = {}^a b_i$  ( $a \in A$ ) et  $j \leq n-1$ . Par (5), on a  $d(c_j^{-1}, {}^a b_i) = d(c_j^{-1}, b_j) = \frac{1}{2}|b_j| = \frac{1}{2}|b_i|$  et  $d({}^a c_i^{-1}, {}^a b_i) = d(c_i^{-1}, b_i) = \frac{1}{2}|b_i|$ , d'où par (A4)  $d({}^a c_i^{-1}, c_j^{-1}) \geq \frac{1}{2}|b_i|$ . Utilisant (4) pour  $l = i$  et  $k = j$ , on en déduit

$$d({}^a c_i^{-1}, c_j^{-1}) + d(c_i, c_j) \geq |c_0| = |c_i| = |c_j|.$$

Par (A5'), on en déduit qu'il existe  $r \in G$  tel que  $c_i c_j^{-1} = r \cdot {}^a r^{-1}$ . Or  $c_i c_j^{-1} = b_{i+1} \dots b_j$  est unimodulaire, car  $b_j$  est de la forme  ${}^\alpha x'$  ou  ${}^\alpha x'^{-1}$  avec  $\alpha \in A$ , tandis que  $b_{i+1}, \dots, b_{j-1}$  appartiennent à  $\bar{X}$  (par définition de  $i$  et  $j$ ), de sorte qu'il existe une transformation de Nielsen qui change  $x'$  en  $c_i c_j^{-1}$  et laisse  $X$  invariant; comme par hypothèse  $X'$  est une  $A$ -base partielle de  $G$ , notion préservée par transformation de Nielsen, on voit que  $c_i c_j^{-1}$  appartient à une  $A$ -base partielle, i.e. est unimodulaire, de sorte que la proposition 3.4 fournit une contradiction.

Supposons maintenant  $b_j = {}^a b_i$  ( $a \in A$ ) et  $j = n$ . Comme  $b_n = c_{n-1}$ , par (4) on a  $d(c_i, b_n) \geq |c_0| - |b_i|/2 = |c_{n-1}| - \frac{1}{2}|b_n| = \frac{1}{2}|b_n|$ . Par (5) on a d'autre

part  $d({}^a c_i^{-1}, b_n) = d({}^a c_i^{-1}, a b_i) = d(c_i^{-1}, b_i) = \frac{1}{2}|b_i| = \frac{1}{2}|b_n|$ . Par (A4), on en tire  $d(c_i, {}^a c_i^{-1}) \geq \frac{1}{2}|b_n| = \frac{1}{2}|c_{n-1}| = \frac{1}{2}|c_i|$ . Comme  $d(c_i, {}^a c_i^{-1}) = |c_i| - \frac{1}{2}|c_i \cdot {}^a c_i|$ , il vient  $|c_i \cdot {}^a c_i| \leq |c_i|$  puis, par (A0') que  $c_i$  est de la forme  $t \cdot {}^a t^{-1}$ , donc non unimodulaire (proposition 3.4). Comme  $c_i = c_i c_n^{-1}$ , on en tire une contradiction comme précédemment.

Supposons enfin  $b_j = {}^a b_i^{-1}$  ( $a \in A$ ). On a

$$d(c_{j-1}^{-1}, {}^a b_i) = d(c_{j-1}^{-1}, b_j^{-1}) = \frac{1}{2}(|c_{j-1}| + |b_j| - |c_j|) \geq \frac{1}{2}|b_j| = \frac{1}{2}|b_i|$$

(en effet, si  $j < n$ , alors  $|c_{j-1}| = |c_j|$ , et si  $j = n$ , alors  $|c_n| = 0$ ). On a également  $|b_i c_i| \leq |c_i|$  : pour  $i > 0$ , on a égalité car  $b_i c_i = c_{i-1}$  (et  $i < n$ ); pour  $i = 0$ , on a une inégalité stricte par l'hypothèse initiale. En conséquence, on a

$$d({}^a c_i^{-1}, {}^a b_i) = d(c_i^{-1}, b_i) = \frac{1}{2}(|c_i| + |b_i| - |b_i c_i|) \geq \frac{1}{2}|b_i|.$$

Les deux inégalités qu'on a établies impliquent, par (A4) :  $d({}^a c_i^{-1} c_{j-1}^{-1}) \geq \frac{1}{2}|b_i|$ . Si l'on suppose de plus  $i < j - 1$ , par (4), comme on a  $d(c_i, c_{j-1}) \geq |c_0| - \frac{1}{2}|b_i|$ , il vient

$$d({}^a c_i^{-1}, c_{j-1}^{-1}) + d(c_i, c_{j-1}) \geq |c_0| = |c_i| = |c_{j-1}|.$$

On en déduit une contradiction par le même argument que plus haut.

Reste à exclure le cas  $b_j = {}^a b_i^{-1}$  et  $j = i + 1$ . On a alors forcément  $a \neq 1$ , car sinon on pourrait simplifier  $b_i \cdot b_{i+1} = 1$ , contredisant la minimalité de  $n$ . Par (A'),  $|b_i b_{i+1}| = 2|b_i|$ , donc  $d(b_i b_{i+1}, b_{i+1}) = \frac{1}{2}(2|b_i| + |b_{i+1}| - |b_i|) = |b_i|$ . Par ailleurs, si  $i < n - 1$ , alors  $|b_i b_{i+1} c_{i+1}| \leq |c_{i+1}|$  (inégalité stricte si  $i = 0$ , égalité sinon, car  $|c_{i-1}| = |c_{i+1}|$  pour  $i + 1 < n$ ). Mais  $i = n - 1$  est exclu, car  $|b_i \cdot b_{i+1}| > |b_{i+1}|$ , ce qui contredit l'hypothèse si  $n = 1$  et l'égalité  $|c_{n-1}| = |c_{n-2}|$  si  $n \geq 2$ . De  $|b_i b_{i+1} c_{i+1}| \leq |c_{i+1}|$  on tire  $d(b_i b_{i+1}, c_{i+1}^{-1}) \geq \frac{1}{2}|b_i b_{i+1}| = |b_i|$ . Par (A4) (et l'égalité  $d(b_i b_{i+1}, b_{i+1}) = |b_i|$ ), on en déduit  $|b_i| \leq d(b_{i+1}, c_{i+1}^{-1}) = \frac{1}{2}(|b_{i+1}| + |c_{i+1}| - |b_{i+1} c_{i+1}|) = \frac{1}{2}(|b_i| + |c_{i+1}| - |c_i|) = \frac{1}{2}|b_i|$  puisque  $i + 1 \leq n - 1$ . C'est manifestement absurde ( $b_i \neq 1$ ), d'où la conclusion.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.3.* Soit  $\mathbf{e}$  une  $A$ -base de  $G$ . Appelons *longueur* de  $\mathbf{e}$  la suite ordonnée des longueurs des éléments de  $\mathbf{e}$  (avec ses éventuelles répétitions), classées par ordre croissant. Supposons que  $\mathbf{e}$  n'est équivalente à la Nielsen à aucune  $A$ -base progressive de  $G$ . On peut supposer que, parmi ces bases,  $\mathbf{e}$  est de longueur minimale, pour l'ordre lexicographique sur les suites finies d'entiers naturels. Si  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$  avec  $|e_1| \leq \dots \leq |e_n|$ , notons  $i$  le plus grand entier naturel (éventuellement nul) tel que  $\{e_1, \dots, e_i\}$  soit progressive : on a par hypothèse  $i < n$ . Appliquant la proposition 3.5, on voit que  $\{e_1, \dots, e_{i+1}\}$  est équivalente à la Nielsen à une suite  $\{e_1, \dots, e_i, e'_{i+1}\}$  où  $|e'_{i+1}| < |e_{i+1}|$ ;  $\mathbf{e}$  est alors équivalente à la Nielsen à  $\{e_1, \dots, e_i, e'_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n\}$ , ce qui contredit la minimalité de la longueur de  $\mathbf{e}$ .

Il suffit donc, pour conclure, de voir qu'une base progressive est équivalente à la Nielsen à la base  $\mathbf{b}$  fixée depuis le début sur  $G$  (celle relativement à laquelle on prend la longueur). En effet, pour tout  $i$ ,  $b_i$ , qui est de longueur 1, s'écrit comme un produit  $x_1 \dots x_t$  d'éléments non triviaux de  $\bar{\mathbf{e}}$ , puisque  $\mathbf{e}$  est une  $A$ -base de  $G$ . Mais l'hypothèse de progressivité implique que chaque  $x_j$  est de longueur 1, et aussi les  $x_j x_{j+1}$  (on suppose le mot réduit). Mais  $|x_j| = |x_{j+1}| = |x_j x_{j+1}| = 1$  est impossible, donc  $t = 1$  et  $b_i \in \bar{\mathbf{e}}$  pour tout  $i$ , ce qui montre que notre base  $\mathbf{e}$  est équivalente à  $\mathbf{b}$ .  $\square$

## 3.2 Un critère abstrait de discrétion

Donnons d'abord une notation : si  $E$  est un ensemble préordonné (qu'on voit aussi bien, comme d'habitude, comme une petite catégorie ou un ensemble simplicial via le foncteur nerf, ce qui permet de parler de son type d'homotopie) et  $x$  un élément de  $E$ , on note  $[x, \rightarrow [E$ , ou simplement  $[x, \rightarrow [$ , l'ensemble  $\{t \in E \mid x \leq t\}$ .

On commence par un lemme général, classique et élémentaire.

**Lemme 3.6.** *Soit  $E$  un ensemble préordonné. On suppose que tout élément de  $E$  est supérieur ou égal à un élément minimal et que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *pour tout ensemble fini non vide  $X$  d'éléments minimaux de  $E$ , le sous-ensemble préordonné  $\bigcap_{x \in X} [x, \rightarrow [$  de  $E$  est vide ou contractile ;*
2. *pour tout ensemble fini non vide  $X$  d'éléments minimaux de  $E$ , si les intersections  $[x, \rightarrow [ \cap [y, \rightarrow [$  sont non vides pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $X$ , alors  $\bigcap_{x \in X} [x, \rightarrow [$  est non vide.*

Alors  $E$  a un type d'homotopie discret.

*Démonstration.* L'ensemble des parties  $P$  de  $E$  telles que  $x \in P$  et  $x \leq y$  implique  $y \in P$  est stable par intersection et réunion, il contient les parties de la forme  $[x, \rightarrow [$  et la restriction du foncteur nerf à ces parties de  $E$  commute aux réunions (elle commute aussi, toujours, aux intersections).

Par conséquent, l'hypothèse 1 montre que l'ensemble simplicial  $\mathcal{N}(E)$  a le même type d'homotopie que le nerf du recouvrement de  $E$  par les  $[x, \rightarrow [$  pour  $x$  minimal. La dernière hypothèse implique que chaque composante connexe de ce nerf est contractile, d'où le lemme.  $\square$

Considérons maintenant la situation suivante :  $A$  est un groupe,  $X$  un ensemble muni d'une action (à gauche) de  $A$ . On suppose données deux opérations sur les familles (finies ou non) d'éléments de  $X$  :

1. une opération (partout définie), notée  $\bigwedge$ , compatible à l'action de  $A$ , c'est-à-dire telle que

$$a. \left( \bigwedge_{i \in I} x_i \right) = \bigwedge_{i \in I} a.x_i$$

pour tout  $a \in A$  et toute famille  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $X$ , envoyant une famille réduite à un élément sur cet élément et vérifiant la propriété d'associativité usuelle

$$\bigwedge_{i \in I} x_i = \bigwedge_{J \in \mathcal{J}} \left( \bigwedge_{j \in J} x_j \right)$$

si l'ensemble  $I$  est la réunion disjointe de l'ensemble  $\mathcal{J}$  et de commutativité : si  $\phi : I \rightarrow I$  est une bijection, alors  $\bigwedge_{i \in I} x_{\phi(i)} = \bigwedge_{i \in I} x_i$  ;

2. une opération *partiellement définie*, appelée somme et notée  $\sum$ , compatible à l'action de  $A$  (c'est-à-dire que, si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille d'éléments de  $X$  et  $a$  un élément de  $A$ ,  $\sum_{i \in I} a.x_i$  est défini si et seulement si  $\sum_{i \in I} x_i$  l'est, auquel cas on a  $\sum_{i \in I} a.x_i = a.(\sum_{i \in I} x_i)$ ), associative et commutative (au

même sens que précédemment, avec l'adaptation évidente liée au caractère partiellement défini de l'opération), telle que la somme de la famille réduite à un élément  $x$  soit égale à  $x$ . On note  $0$  la somme de la famille vide. On suppose également que  $x + x$  n'est défini que si  $x = 0$ , et que la somme est *régulière* au sens où  $x + y = x$  entraîne  $y = 0$ .

On suppose que nos deux opérations vérifient les propriétés de compatibilité suivantes.

(P0) si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille d'éléments de  $X$  telle que  $\sum_{i \in I} x_i$  est définie, alors, pour toute famille  $(J_t)_{t \in T}$  de parties de  $I$ , on a

$$\bigwedge_{t \in T} \sum_{j \in J_t} x_j = \sum_{i \in \bigcap_{t \in T} J_t} x_i.$$

(P1) Si  $x$  est un élément de  $X$  et  $(t_i)_{i \in I}$ ,  $(u_j)_{j \in J}$  sont des familles d'éléments de  $X$  telles que  $x = \sum_{i \in I} t_i = \sum_{j \in J} u_j$ , alors il y a équivalence entre :

1.  $x = \sum_{(i,j) \in I \times J} t_i \wedge u_j$ ;
2. pour tout  $i \in I$ ,  $t_i = \sum_{j \in J} t_i \wedge u_j$ ;
3. pour tout  $j \in J$ ,  $u_j = \sum_{i \in I} t_i \wedge u_j$ .

(Noter que 2. ou 3. implique automatiquement 1.)

(P2) Si  $u$ ,  $v$  et  $t_i$  ( $i \in I$ ) sont des éléments de  $X$  tels que  $\sum_{i \in I} t_i$  est définie,  $u = \sum_{i \in I} u \wedge t_i$  et  $v = \sum_{i \in I} v \wedge t_i$ , alors  $u \wedge v = \sum_{i \in I} u \wedge v \wedge t_i$ .

On se fixe un élément  $s$  de  $X$  *invariant par*  $A$  et on note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $\sum_{a \in A} a.x = s$ . On fait enfin l'hypothèse de finitude suivante : si  $\sum_{i \in I} x_i \in \mathcal{B}$ , alors  $x_i = 0$  sauf pour un nombre fini de  $I$ .

**Définition 3.7.** On appelle *catégorie des décompositions* associée aux données précédentes la catégorie, notée  $\mathcal{D}$  dont :

1. les objets sont les familles finies  $(x_1, \dots, x_n)$  (où  $n \in \mathbb{N}$  est quelconque) d'éléments de  $X \setminus \{0\}$  telles que  $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \in \mathcal{B}$ ;
2. les morphismes  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_m)$  sont les couples  $(\varphi; a_1, \dots, a_m)$  constitués d'une fonction surjective  $\varphi : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}$  et d'un élément  $(a_1, \dots, a_m)$  de  $A^m$  tels que

$$x_i = \sum_{\varphi(j)=i} a_j \cdot y_j$$

pour tout  $i \in \mathbf{n}$ ;

3. la composition de

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{(\varphi; a_1, \dots, a_m)} (y_1, \dots, y_m) \xrightarrow{(\psi; b_1, \dots, b_l)} (z_1, \dots, z_l)$$

est le morphisme

$$(\varphi \circ \psi, (a_{\psi(k)} b_k)_{1 \leq k \leq l}) : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_l).$$

On dispose ainsi d'un foncteur canonique  $\mathcal{D}^{op} \rightarrow \Omega$ , qui sur les objets s'obtient par la longueur des familles finies.

**Proposition 3.8.** *Si  $s \neq 0$ , alors la catégorie  $\mathcal{D}$  est un ensemble préordonné dont le type d'homotopie est discret.*

*Démonstration.* On commence par vérifier que  $\mathcal{D}$  est un ensemble préordonné, c'est-à-dire qu'il y a au plus un morphisme entre deux de ses objets. Supposons en effet que  $(\varphi; a_1, \dots, a_m)$  et  $(\varphi'; a'_1, \dots, a'_m)$  sont des éléments de  $\mathcal{D}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m))$ . Par définition de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{B}$ , la somme  $\sum_{\substack{a \in A \\ i \in \mathbf{n}}} a.x_i$  est

définie. Soit  $j \in \mathbf{m}$ ; posons  $i := \varphi(j)$  et  $i' := \varphi'(j)$ . Si  $i \neq i'$  ou  $a_j \neq a'_j$ , la somme  $x_i + a_j a'_j{}^{-1}.x_{i'}$  est définie. Cela implique, puisque  $x_i$  (resp.  $x_{i'}$ ) est la somme de  $a_j.y_j$  (resp.  $a'_j.y_j$ ) et d'autres termes, que  $a_j.y_j + a_j.y_j$ , donc  $y_j + y_j$ , est définie, donc, par hypothèse, que  $y_j = 0$ , ce qui contredit la définition des objets de  $\mathcal{D}$  et établit que  $\varphi'(j) = \varphi(j)$  et  $a_j = a'_j$  pour tout  $j$ .

Avant de terminer la démonstration, on donne un résultat intermédiaire qui nous permettra d'appliquer le lemme 3.6.  $\square$

Dans ce qui suit, on note de la même façon un élément de  $\mathcal{B}$  et l'objet de  $\mathcal{D}$  (qui est donc une famille à un objet) qu'il définit. Noter qu'on obtient ainsi exactement tous les élément *minimaux* de l'ensemble préordonné  $\mathcal{D}$ .

**Lemme 3.9.** *Soit  $\mathfrak{X}$  une partie finie non vide de  $\mathcal{B}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le sous-ensemble  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} [x, \rightarrow [$  de  $\mathcal{D}$  est non vide ;*
2. *pour toute partie non vide  $\mathfrak{X}'$  de  $\mathfrak{X}$ , on a  $s = \sum_{a \in A} \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}'} a(x).x$  ;*
3. *pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $\mathfrak{X}$ , on a  $y = \sum_{a \in A} y \wedge a.x$  ;*

*De plus, lorsqu'elles sont vérifiées, il existe un élément  $T$  de  $\mathcal{D}$  tel que  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} [x, \rightarrow [= [T, \rightarrow [$ .*

*Démonstration.* Supposons 1. vérifié. Il suffit de montrer 2 pour  $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}$ , puisqu'on a a fortiori  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}'} [x, \rightarrow [\neq \emptyset$ , ce qu'on suppose désormais.

Soit  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  un élément de l'intersection  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} [x, \rightarrow [_{\mathcal{D}}$ . Pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ , la relation  $x \leq Y$  signifie qu'il existe des éléments  $\alpha_i(x)$  de  $A$  tels que  $x = \sum_{i \in \mathbf{n}} \alpha_i(x).y_i$ . Comme la somme  $\sum_{(i,a) \in \mathbf{n} \times A} a.y_i$  est définie, l'hypothèse (P0) appliquée aux parties  $J_x^a(Y) := \{(i, a(x)\alpha_i(x)) \mid i \in \mathbf{n}\}$  (notées simplement  $J_x^a$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) de  $\mathbf{n} \times A$ , pour  $x \in \mathfrak{X}$ , où  $a \in A^{\mathfrak{X}}$ , montre que

$$\bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} a(x).x = \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{i \in \mathbf{n}} a(x)\alpha_i(x).y_i = \sum_{(i,c_i) \in \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} J_x^a} c_i.y_i ;$$

$\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} J_x^a$  est constituée des  $(i, c_i)$  pour lesquels la fonction  $\mathfrak{X} \rightarrow A \quad x \mapsto a(x)\alpha_i(x)$  est constante en  $c_i$ . Étant donné un élément  $(i, c_i)$  de  $\mathbf{n} \times A$ , il existe un et un

seul élément  $a$  de  $A^{\mathfrak{X}}$  tel que  $(i, c_i)$  appartienne à  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} J_x^a$ , qui est donné par  $a(x) = c_i \alpha_i(x)^{-1}$ . On en déduit

$$\sum_{a \in A^{\mathfrak{X}}} \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} a(x).x = \sum_{(i,a) \in \mathbf{n} \times A} a.y_i = s,$$

de sorte que 1 implique 2.

Montrons également la dernière assertion : considérons un élément  $T = (t_1, \dots, t_r)$  de longueur  $r$  *minimale* dans  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} [x, \rightarrow[_{\mathcal{D}}$ . Cela implique que  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} J_x^a(T)$  possède au plus un élément — si  $(i, c_i)$  et  $(j, c_j)$  appartiennent à cet ensemble, on a  $\alpha_i = \alpha_j$  (avec les notations précédentes) : si  $i \neq j$ , on peut alors remplacer  $t_i$  et  $t_j$  par  $t_i + t_j$  dans  $T$  pour obtenir une famille  $T'$  de longueur  $n - 1$  qui sera encore supérieure à tous les éléments de  $x$ . Par conséquent, chaque terme  $t_i$  de  $T$  peut s'écrire sous la forme  $\bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} a(x).x$  pour un  $a \in A^{\mathfrak{X}}$ . Si  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  est un élément de  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} [x, \rightarrow[_$ , ce qui précède donne des éléments  $c_j$  de  $A$  et des sous-ensembles  $E_i$ , pour  $i \in \mathbf{r}$ , de  $\mathbf{n}$  tels que  $t_i = \sum_{j \in E_i} c_j.y_j$ . Les  $E_i$  forment nécessairement une partition de  $\mathbf{n}$  : ils sont non vides car  $t_i \neq 0$ , disjoints parce que la somme  $\sum_{(i,a) \in \mathbf{r} \times A} a.t_i$  est définie (utiliser, comme dans le début de la démonstration de la proposition 3.8, le fait que  $x + x$  n'est pas défini pour  $x \neq 0$ ), et ils recouvrent  $\mathbf{r}$  en raison de la relation

$$s = \sum_{(i,a) \in \mathbf{r} \times A} a.t_i = \sum_{(j,a) \in \bigcup_{i \in \mathbf{r}} E_i \times A} a.c_j.y_j = \sum_{(j,b) \in \mathbf{r} \times A} b.y_j$$

et de la régularité de la somme.

Montrons que 2 implique 3 : si l'on applique l'hypothèse 2 à  $\mathfrak{X}' = \{x, y\}$ , on obtient

$$s = \sum_{(a,b) \in A^2} a.x \wedge b.y = \sum_{a \in A} a.x = \sum_{b \in A} b.y,$$

de sorte que l'hypothèse (P1) donne la conclusion.

$3 \Rightarrow 1$  : l'application itérative de la propriété (P2) montre que, sous l'hypothèse 3, si  $n \geq 1$  est un entier,  $(x_0, \dots, x_n)$  une famille d'éléments de  $\mathfrak{X}$  et  $(a_1, \dots, a_n)$  une famille d'éléments de  $A$ , on a

$$a_1.x_1 \wedge \dots \wedge a_n.x_n = \sum_{a_0 \in A} a_0.x_0 \wedge a_1.x_1 \wedge \dots \wedge a_n.x_n.$$

En en déduit également (encore par récurrence sur  $n$ ) que

$$x_0 = \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in A^n} x_0 \wedge a_1.x_1 \wedge \dots \wedge a_n.x_n \quad (6)$$

Fixons-nous un élément  $y$  de  $\mathfrak{X}$  et considérons la famille (ordonnée arbitrairement) des éléments *non nuls* de  $X$  de la forme  $\bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} a(x).x$ , où  $a$  parcourt l'ensemble des fonctions  $\mathfrak{X} \rightarrow A$  telles que  $a(y) = 1$ . La somme de cette famille égale  $y \in \mathcal{B}$  (par (6)), elle est donc finie (à cause de l'hypothèse de finitude

faite juste avant la définition 3.7) et définit un élément  $T$  de  $\mathcal{D}$ . La relation (6) montre également que, pour tout  $t \in \mathfrak{X}$ , on a

$$t = \sum_{\substack{a \in A^{\mathfrak{X}} \\ a(y)=1}} a(t)^{-1} \cdot \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} a(x).x$$

d'où l'on déduit  $x \leq T$  (dans  $\mathcal{D}$ ). Ainsi  $T$  appartient à  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} [x, \rightarrow [$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Fin de la démonstration de la proposition 3.8.* Dans l'ensemble préordonné  $\mathcal{D}$ , tout élément  $(x_1, \dots, x_n)$  est supérieur à l'élément (de longueur 1)  $x_1 + \dots + x_n$ , qui est minimal (en effet, on a supposé  $s \neq 0$ ). La dernière assertion du lemme 3.9 montre que l'intersection d'une famille finie non vide de sous-ensembles de  $\mathcal{D}$  du type  $\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} [x, \rightarrow [$ , où les éléments de  $\mathfrak{X}$  sont *minimaux* dans  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire appartiennent à  $\mathcal{B}$ , est vide ou contractile. L'équivalence  $1 \Leftrightarrow 3$  de ce même lemme montre que la dernière condition du lemme 3.6 est satisfaite, de sorte que celui-ci donne la conclusion recherchée.  $\square$

### 3.3 Conclusion

Soient  $G$  un groupe et  $X$  l'ensemble des sous-groupes de  $G$ . On va appliquer les résultats du paragraphe 3.2 avec pour opération partiellement définie de « somme » le produit libre interne (noté  $\star$ ), l'opération (partout définie)  $\bigwedge$  étant l'intersection. Ces opérations sont bien associatives et commutatives ; le produit libre interne est une opération régulière ( $H * K = H$  implique  $K = \{1\}$ , où  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes de  $G$ ) et le produit libre interne d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  avec lui-même n'est défini que si  $H$  est trivial.

Vérifions les propriétés (P0), (P1) et (P2).

(P0) : soient  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes de  $G$  et  $(J_t)_{t \in T}$  une famille de parties de  $I$ . On a toujours

$$\star_{\substack{i \in \bigcap_{t \in T} J_t}} H_i \subset \bigcap_{t \in T} \star_{j \in J_t} H_j ;$$

l'inclusion inverse est vraie lorsque  $\star_{i \in I} H_i$  est défini, comme on le voit en examinant l'unique écriture réduite dans cette décomposition en produit libre d'un élément du terme de droite.

(P1) : si  $(H_i)_{i \in I}$  et  $(K_j)_{j \in J}$  sont des familles de sous-groupes de  $G$  telles que

$$\star_{i \in I} T_i = \star_{j \in J} U_j = \star_{(i,j) \in I \times J} T_i \cap U_j ,$$

considérons la décomposition réduite dans le produit libre de droite d'un élément de  $H_t$ , pour un  $t \in I$  fixé. Cette décomposition ne fait intervenir que des éléments d'intersections de la forme  $T_t \cap U_j$  car, quitte à regrouper certains termes (les termes consécutifs pour lesquels la valeur de l'indice  $i$  est constante), elle fournit une décomposition de notre élément de  $H_t$  dans le produit libre  $\star_{i \in I} T_i$ , puisque  $T_i \cap U_j \subset T_i$ . On a donc  $T_t = \star_{j \in J} T_t \cap U_j$  comme souhaité.

(P2) : si  $H, K$  et les  $L_i$  sont des sous-groupes de  $G$  tels que  $\star_{i \in I} L_i$  est défini, la relation  $H = \star_{i \in I} H \cap L_i$  signifie exactement que  $H \subset \star_{i \in I} L_i$  et que, dans l'écriture réduite d'un élément de  $H$  dans cette décomposition en produit libre, tous les termes appartiennent à  $H$ . Si l'on fait la même hypothèse pour  $K$ , on voit que, dans l'écriture réduite d'un élément de  $H \cap K$  dans le produit libre  $\star_{i \in I} L_i$ , tous les termes appartiennent à  $H$ , et à  $K$ , donc à  $H \cap K$  comme souhaité.

Supposons maintenant que  $G$  est muni d'une action d'un groupe  $A$  : l'action induite sur l'ensemble  $X$  des sous-groupes de  $G$  est compatible aux opérations d'intersection et de produit libre interne. Si l'on prend pour  $s \in X$  le sous-groupe  $G$  de  $G$ , cet élément est invariant par l'action de  $A$ , et l'ensemble noté  $\mathcal{B}$  dans le paragraphe précédent est exactement l'ensemble  $\mathfrak{B}_A(G)$  introduit dans la définition 3.1. Si  $G$  est de type fini *comme  $A$ -groupe*, tous les éléments de cet ensemble sont de type fini, de sorte qu'un produit libre interne de sous-groupes de  $G$  ne peut lui appartenir que s'ils sont tous triviaux, sauf un nombre fini d'entre eux : l'hypothèse de finitude précédant la définition 3.7 est bien vérifiée.

**Notation 3.10.** Soient  $A$  un groupe et  $G$  un  $A$ -groupe de type fini. On note  $\mathfrak{D}_A(G)$  la catégorie des décompositions (notée  $\mathcal{D}$  au paragraphe 3.2) associée aux données précédentes.

**Théorème 3.11.** Soient  $A$  un groupe et  $G$  un  $A$ -groupe libre de type fini. La catégorie  $\mathfrak{D}_A(G)$  est un ensemble préordonné dont le nerf est contractile.

*Démonstration.* Le cas où  $G$  est le  $A$ -groupe trivial est immédiat, car  $\mathfrak{D}_A(G)$  est alors réduite à la famille vide.

Si  $G$  n'est pas trivial, d'après la proposition 3.8, il suffit de vérifier que  $\mathfrak{D}_A(G)$  est connexe (cette catégorie est non vide puisque  $G$  est  $A$ -libre de type fini). Cela découle du théorème 3.3, car toute transformation de Nielsen entre deux éléments de  $\mathfrak{B}_A(G)$  (dont on choisit des bases pour le produit libre) fournit un chemin entre eux dans  $\mathfrak{D}_A(G)$ . Supposons en effet que deux éléments  $H$  et  $K$  de  $\mathfrak{B}_A(G)$  sont reliés par une transformation de Nielsen *élémentaire* : cela signifie qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $H$ , un indice  $i \in \mathbf{n}$  et un élément  $a$  de  $A$  tels que  $(e_1, \dots, a_{i-1}, {}^a e_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$  soit une base de  $K$  (les transformations de Nielsen élémentaires sur une base de  $H$  autres que l'application d'un élément de  $A$  sur l'un d'entre eux ne changent pas le sous-groupe engendré, on peut donc les négliger). On a alors, dans  $\mathfrak{D}_A(G)$ ,  $H \leq (T, U)$  et  $K \leq (T, U)$ , où  $T$  (resp.  $U$ ) désigne le sous-groupe de  $G$  engendré par les  $e_t$  pour  $t \neq i$  (resp. par  $e_i$ ), d'où le théorème.  $\square$

## 4 Type d'homotopie de la catégorie $\mathcal{C}(A)$

### 4.1 La catégorie $\mathcal{G}_A$ et le foncteur faible $\mathcal{G}_A \rightarrow \mathbf{Cat}$

Le groupe  $A$  étant (provisoirement) fixé, nous avons besoin d'une functorialité de l'association  $G \mapsto \mathfrak{D}_A(G)$ . La catégorie usuelle des  $A$ -groupes libres de rang fini  $\mathbf{gr}_A$  n'est pas adaptée à cela ; nous en modifierons donc les flèches (de façon analogue à celle dont on obtient  $\mathcal{G}$  à partir de  $\mathbf{gr}$ ).

**Notation 4.1.** On désigne par  $\mathcal{G}_A$  la catégorie ayant les mêmes objets que  $\mathbf{gr}_A$  et dont les morphismes  $G \rightarrow H$  sont les couples  $(u, T)$  constitués d'un



monomorphisme de  $A$ -groupes  $u : G \rightarrow H$  et d'un sous-groupe  $T$  de  $H$  (pas nécessairement stable par l'action de  $A$ ) tel que  $H$  soit le produit libre interne de l'image de  $u$  et des  ${}^aT$  pour  $a \in A$ .

La composée  $G \xrightarrow{(u,T)} H \xrightarrow{(v,S)} K$  est le couple constitué du monomorphisme  $v \circ u : G \rightarrow K$  de  $A$ -groupes et du sous-groupe  $S * v(T)$  de  $K$ .

On note d'abord qu'on dispose d'un foncteur  $\mathfrak{B}_A : \mathcal{G}_A \rightarrow \mathbf{Ens}$  dont l'effet sur les morphismes est le suivant. Si  $(u, T) : G \rightarrow H$  est un morphisme de  $\mathcal{G}_A$ ,  $\mathfrak{B}_A(u, T)$  associe à un sous-groupe  $K$  de  $G$  appartenant à  $\mathfrak{B}_A(G)$  le sous-groupe  $u(K) * T$  de  $H$ , qui appartient manifestement à  $\mathfrak{B}_A(H)$ .

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, on rappelle qu'un *foncteur faible* (la terminologie anglaise usuelle — cf. [33], §3 — est *op-lax functor*)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$  consiste en la donnée, pour tout objet  $c$  de  $\mathcal{C}$ , d'une petite catégorie  $F(c)$ , d'un foncteur  $F(\phi) : F(c) \rightarrow F(d)$  pour tout  $\phi \in \mathcal{C}(c, d)$  et de transformations naturelles  $F(\text{Id}_c) \Rightarrow \text{Id}_{F(c)}$  pour tout  $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$  et  $F(\phi \circ \psi) \Rightarrow F(\phi) \circ F(\psi)$  pour tout couple  $(\phi, \psi)$  de flèches composables de  $\mathcal{C}$ , assujettis à vérifier les conditions de cohérence usuelles (qu'on pourra trouver dans [33], 3.1.1).

Montrons comment faire de  $\mathfrak{D}_A : \mathcal{G}_A \rightarrow \mathbf{Cat}$  un foncteur faible. Soit  $(u, T) : G \rightarrow H$  un morphisme de  $\mathcal{G}_A$ . Si  $T$  est le groupe trivial (c'est-à-dire que  $u$ , ou  $(u, T)$ , est un isomorphisme),  $\mathfrak{D}_A(u, T)$  associe à un objet  $(K_1, \dots, K_n)$  de  $\mathfrak{D}_A(G)$  l'objet  $(u(K_1), \dots, u(K_n))$  de  $\mathfrak{D}_A(H)$  et a l'effet évident sur les morphismes (qui restent inchangés). Lorsque  $T$  est non trivial,  $\mathfrak{D}_A(u, T)$  associe à  $(K_1, \dots, K_n) \in \mathfrak{D}_A(G)$  l'objet  $(u(K_1), \dots, u(K_n), T)$  de  $\mathfrak{D}_A(H)$ . Si  $(\varphi; a_1, \dots, a_m) : (K_1, \dots, K_n) \rightarrow (K'_1, \dots, K'_m)$  est un morphisme de  $\mathfrak{D}_A(G)$  (on a donc  $\varphi \in \Omega(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  et  $a_i \in A$  pour tout  $i \in \mathbf{m}$ ),  $\mathfrak{D}_A(u, T)$  lui associe le morphisme  $(\varphi_+; a_1, \dots, a_m, 1) : (u(K_1), \dots, u(K_n), T) \rightarrow (u(K'_1), \dots, u(K'_m), T)$  de  $\mathfrak{D}_A(H)$ , où  $\varphi_+ \in \Omega(\mathbf{m} + 1, \mathbf{n} + 1)$  est la fonction coïncidant avec  $\varphi$  sur  $\mathbf{m}$  et envoyant  $m + 1$  sur  $n + 1$ . Ainsi  $\mathfrak{D}_A$  envoie les identités sur les identités, et l'on a  $\mathfrak{D}_A(v \circ u) \leq \mathfrak{D}_A(v) \circ \mathfrak{D}_A(u)$  lorsque  $u$  et  $v$  sont des flèches composables de  $\mathcal{G}_A$  (avec égalité si et seulement si  $u$  ou  $v$  est un isomorphisme), ce qui suffit à montrer qu'on a bien affaire à un foncteur faible (comme  $\mathfrak{D}_A$  prend ses valeurs dans les ensembles préordonnés, les conditions de cohérence sont automatiques).

## 4.2 Le foncteur $\kappa : \mathbf{C}(A) \rightarrow \mathcal{G}_A$

On rappelle que, lorsque  $A$  est un groupe libre de type fini,  $\mathbf{C}(A)$  désigne la catégorie d'éléments  $\mathcal{G}_{\gamma * \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})(A, -)}$  (cf. section 1).

Soit  $\underline{G} := (G, A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} A)$  un objet de  $\mathbf{C}(A)$ , où  $G$  est un objet de  $\mathcal{G}$  et  $i, p$  sont des morphismes de groupes tels que  $p \circ i = \text{Id}_A$  et qu'il existe un sous-groupe  $T$  de  $G$  et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & A \\ & \searrow & \downarrow \simeq & \nearrow & \\ & & A * T & & \end{array}$$

(où les flèches obliques sont l'inclusion et la projection canoniques). On note  $\kappa(\underline{G})$  le sous-groupe  $\text{Ker } p$  de  $G$ , qu'on munit de l'action de  $A$  donnée par  ${}^a x = i(a).x.i(a)^{-1}$ . Le diagramme commutatif précédent détermine un isomorphisme

$\mathcal{L}_A(T) \simeq \kappa(\underline{G})$  de  $A$ -groupes (mais cet isomorphisme n'est pas canonique), de sorte que  $\kappa(\underline{G})$  est un  $A$ -groupe libre de type fini.

Soit  $(u, T) : \underline{G} := (G, A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} A) \rightarrow \underline{H} := (H, A \xrightarrow{j} H \xrightarrow{q} A)$  un morphisme de  $\mathbf{C}(A)$ . Autrement dit,  $(u, T) : G \rightarrow H$  est un morphisme de  $\mathcal{G}$  tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & G \\ & \searrow j & \downarrow u \\ & & H \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{p} & A \\ \uparrow & & \nearrow q \\ H = u(G) * T & & \end{array}$$

commutent. Le monomorphisme de groupes  $u : G \rightarrow H$  induit un monomorphisme de groupes  $A$ -équivariant  $\bar{u} : \kappa(\underline{G}) \rightarrow \kappa(\underline{H})$ ; de plus,  $\kappa(\underline{H})$  est le produit libre interne de l'image de  $\bar{u}$  et des  ${}^aT = aTa^{-1}$  pour  $a \in A$ . Ainsi,  $(\bar{u}, T)$  définit un morphisme  $\kappa(u, T) : \kappa(\underline{G}) \rightarrow \kappa(\underline{H})$ . On obtient de la sorte un foncteur  $\kappa : \mathbf{C}(A) \rightarrow \mathcal{G}_A$ .

Par conséquent, on dispose d'un foncteur faible  $\kappa^* \mathcal{D}_A : \mathbf{C}(A) \rightarrow \mathbf{Cat}$ .

### 4.3 Constructions de Grothendieck

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$  un foncteur faible. On rappelle que la *construction de Grothendieck*  $\mathcal{C} \int \Phi$  est la catégorie dont les objets sont les couples  $(c, x)$  constitués d'un objet  $c$  de  $\mathcal{C}$  et d'un objet  $x$  de  $\Phi(c)$ , les morphismes  $(c, x) \rightarrow (d, y)$  étant les couples constitués d'un morphisme  $f : c \rightarrow d$  de  $\mathcal{C}$  et d'un morphisme  $u : \Phi(f)(x) \rightarrow y$  de  $\Phi(d)$ , la composition étant définie de la façon usuelle (cf. [33], 3.1.2). Si  $\Psi : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$  est un foncteur faible, on notera  $\Psi \int \mathcal{C}$  la catégorie  $(\mathcal{C}^{op} \int \Psi)^{op}$ .

On définit de manière évidente la catégorie  $\Psi \int \mathcal{C} \int \Phi$ , lorsque  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$  et  $\Psi : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$  sont des foncteurs faibles, catégorie dont les objets sont les triplets  $(c, x, t)$  constitués d'un objet  $c$  de  $\mathcal{C}$ , d'un objet  $x$  de  $\Phi(c)$  et d'un objet  $t$  de  $\Psi(x)$ , qu'on peut voir indifféremment comme  $\Psi(\mathcal{C} \int \Phi)$  (avec l'abus consistant à noter encore  $\Psi$  la composée de ce foncteur avec le foncteur canonique  $\mathcal{C} \int \Phi \rightarrow \mathcal{C}$ ) ou comme  $(\Psi \int \mathcal{C}) \int \Phi$  (avec un abus similaire pour  $\Phi$ ).

Si  $\mathcal{T}$  est une petite catégorie, on dispose d'un foncteur (strict)  $\mathbf{ens}^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$  associant à l'ensemble  $E$  la catégorie  $\mathcal{T}^E$ , avec la functorialité évidente. Si  $\mathcal{T}$  est munie d'un objet  $t$ , on a même un foncteur  $\Gamma^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$  associant à l'ensemble  $E$  la catégorie  $\mathcal{T}^E$  : si  $f : X \rightarrow Y$  est une fonction partiellement définie, le foncteur  $\mathcal{T}^Y \rightarrow \mathcal{T}^X$  envoie  $(c_y)_{y \in Y}$  sur la famille  $(c'_x)_{x \in X}$  où  $c'_x = c_{f(x)}$  si  $x \in \text{Def}(f)$  et  $c'_x = t$  sinon, avec l'effet évident sur les morphismes. On notera  $\eta(\mathcal{T}, t) : \Pi^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$ , ou simplement  $\eta(\mathcal{T})$  si le choix de  $t$  est clair, la restriction à  $\Pi^{op}$  du foncteur précédent. Les cas qui nous intéresseront seront ceux où  $\mathcal{T}$  est un groupe (vue comme catégorie à un objet) ou un ensemble (vu comme catégorie discrète) pointé.

Si  $(\mathcal{C}, +, 0)$  est une petite catégorie monoïdale symétrique, on dispose d'un foncteur faible  $\Gamma \rightarrow \mathbf{Cat}$  associant à un ensemble fini  $X$  la catégorie  $\mathcal{C}^X$  et

à un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de  $\Gamma$  le foncteur  $\mathcal{C}^X \rightarrow \mathcal{C}^Y$  dont la composante  $\mathcal{C}^X \rightarrow \mathcal{C}$  indiquée par  $y \in Y$  est donnée par la composée du foncteur de projection  $\mathcal{C}^X \rightarrow \mathcal{C}^{f^{-1}(y)}$  et du foncteur  $\mathcal{C}^{f^{-1}(y)} \rightarrow \mathcal{C}$  obtenu par la somme (au sens de la structure monoïdale  $+$ ) itérée (c'est la définition 4.1.2 de Thomason [33]). Si  $(\mathcal{C}, +)$  est une catégorie monoïdale symétrique *sans unité*, on dispose d'une variante du foncteur précédent, notée  $\varepsilon(\mathcal{C}, +)$ , définie de la même façon, mais seulement sur  $\Pi$ . Autrement dit, ce foncteur associe  $\mathcal{C}^X$  à  $X$ , et à la surjection partiellement définie  $f : X \rightarrow Y$  le foncteur donné (sur les objets) par

$$(c_x)_{x \in X} \mapsto \left( \sum_{f(x)=y} c_x \right)_{y \in Y}.$$

**Notation 4.2.** Dans ce qui suit,  $gr$  désigne le *groupoïde* sous-jacent à  $\mathbf{gr}$  et  $gr'$  désigne la sous-catégorie pleine de  $gr$  des groupes libres de rang fini strictement positif. Munie du produit libre, c'est donc une catégorie monoïdale symétrique sans unité.

La vérification de la propriété suivante, qui est un jeu formel d'écriture entre produits libres internes et externes, est immédiate.

**Proposition 4.3.** *Soit  $A$  un groupe libre de rang fini. Il existe une équivalence de catégories*

$$C(A) \int \kappa^* \mathfrak{D}_A \simeq \varepsilon(gr', *) \int \Pi^{op} \int \eta(A).$$

Plus précisément, les deux foncteurs définis ci-après sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre.

- Le foncteur  $C(A) \int \kappa^* \mathfrak{D}_A \rightarrow \varepsilon(gr', *) \int \Pi^{op} \int \eta(A)$  associe à un objet  $(\underline{G}, H_1, \dots, H_r)$  l'objet  $(\mathbf{r}, H_1, \dots, H_r)$ ;
- si  $(u, T) : \underline{G} \rightarrow \underline{G}'$  est un morphisme de  $C(A)$  et

$$(\varphi; a_1, \dots, a_s) : (H_1, \dots, H_r, T) \rightarrow (K_1, \dots, K_s) \quad (\text{pour } T \neq \{1\})$$

$$\text{ou} \quad (\varphi; a_1, \dots, a_s) : (H_1, \dots, H_r) \rightarrow (K_1, \dots, K_s) \quad (\text{pour } T = \{1\})$$

un morphisme de  $\mathfrak{D}_A(\kappa(\underline{G}'))$ , où  $\varphi : \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{1}$  (ou  $\varphi : \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{r}$  si  $T = \{1\}$ ) est un morphisme de  $\Omega$  et les  $a_j$  sont des éléments de  $A$ , de sorte que  $u(H_i) = \star_{\varphi(j)=i} a_j K_j$ , et  $T = \star_{\varphi(j)=r+1} a_j K_j$  si  $T \neq \{1\}$ , le morphisme

$(\mathbf{s}, K_1, \dots, K_s) \rightarrow (\mathbf{r}, H_1, \dots, H_r)$  associé de  $\varepsilon(gr', *) \int \Pi^{op} \int \eta(A)$  est donné par le morphisme  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{r}$  de  $\Pi$  défini sur le complémentaire de la préimage de  $r + 1$  par  $\varphi$  et coïncidant dessus avec  $\varphi$  (pour  $T \neq \{1\}$ ; c'est simplement  $\varphi$  si  $T = \{1\}$ ), la famille  $(a_j)_{1 \leq j \leq s}$  d'éléments de  $A$  et la collection d'isomorphismes

$$H_i \simeq u(H_i) = \star_{\varphi(j)=i} a_j K_j \simeq \star_{\varphi(j)=i} K_j$$

(le premier produit libre est interne, le second externe) et, si  $T \neq \{1\}$ ,

$$T = \star_{\varphi(j)=r+1} a_j K_j \simeq \star_{\varphi(j)=r+1} K_j ;$$

- le foncteur  $\varepsilon(\text{gr}', *) \int \Pi^{\text{op}} \int \eta(A) \rightarrow C(A) \int \kappa^* \mathcal{D}_A$  associe à un objet  $(H_1, \dots, H_n)$  (où les  $H_i$  sont des groupes libres de rangs finis non nuls) l'objet  $\underline{G} = (G, A \rightarrow A * G \rightarrow A)$  (avec les morphismes canoniques) de  $C(A)$ , où  $G$  est le produit libre des  $H_i$ , muni de la famille de sous-groupes  $(H_1, \dots, H_n)$  (qui appartient à  $\mathcal{D}_A(\kappa(\underline{G})) \simeq \mathcal{D}_A(\mathcal{L}_A(G))$ );
- à un morphisme  $(\varphi; a_1, \dots, a_m; \psi_1, \dots, \psi_n) : (H_1, \dots, H_n) \rightarrow (K_1, \dots, K_m)$  de  $\varepsilon(\text{gr}', *) \int \Pi^{\text{op}} \int \eta(A)$ , où  $\varphi : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}$  est un morphisme de  $\Pi$ , les  $a_j$  sont des éléments de  $A$  et les  $\psi_i$  des isomorphismes de groupes  $H_i \simeq \star_{\varphi(j)=i} K_j$ , on associe le morphisme

$$\left( \star_{i \in \mathbf{n}} H_i, A \rightarrow A * \star_{i \in \mathbf{n}} H_i \rightarrow A, (H_i) \right) \rightarrow \left( \star_{j \in \mathbf{m}} K_j, A \rightarrow A * \star_{j \in \mathbf{m}} K_j \rightarrow A, (K_j) \right)$$

de  $C(A) \int \kappa^* \mathcal{D}_A$  donné par le monomorphisme de groupes

$$A * \star_{i \in \mathbf{n}} H_i \simeq A * \star_{i \in \mathbf{n}} \star_{\varphi(j)=i} K_j \simeq A * \star_{j \in \text{Def}(\varphi)} K_j \simeq A * \star_{j \in \text{Def}(\varphi)} a_j K_j \hookrightarrow A * \star_{j \in \mathbf{m}} K_j$$

(le premier isomorphisme est induit par les  $\psi_i$ , le second par la structure monoïdale symétrique du produit libre, le troisième par la conjugaison partielle sur les  $K_j$  par les  $a_j$ ), le sous-groupe  $\star_{j \in \mathbf{m} \setminus \text{Def}(\varphi)} a_j K_j$  de

$$A * \star_{j \in \mathbf{m}} K_j, \text{ et le morphisme de } \mathcal{D}_A(\kappa(\star_{j \in \mathbf{m}} K_j, A \rightarrow A * \star_{j \in \mathbf{m}} K_j \rightarrow A)) \simeq \mathcal{D}_A(\mathcal{L}_A(\star_{j \in \mathbf{m}} K_j)) \text{ dont le morphisme de } \Omega \text{ sous-jacent est } \varphi \text{ si cette fonction est partout définie, et sinon la fonction surjective partout définie}$$

$f : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n} + 1$  associée (égale à  $\varphi$  sur  $\text{Def}(\varphi)$  et à  $n + 1$  ailleurs), et donnée par les éléments  $a_j$  de  $A$ . (C'est licite parce que  $H_i \subset A * \star_{t \in \mathbf{n}} H_t$

est envoyé par notre morphisme de groupes sur le sous-groupe  $\star_{f(j)=i} a_j K_j$

de  $A * \star_{j \in \mathbf{m}} K_j$  et que  $\star_{j \in \mathbf{m} \setminus \text{Def}(\varphi)} a_j K_j$  (lorsqu'il est non trivial) est égal à

$$\star_{f(j)=n+1} a_j K_j.$$

#### 4.4 L'espace de lacets infinis $\mathcal{N}(C(A))$

Pour démontrer le théorème 1.5, on utilise la construction classique de Segal [32], en suivant également la présentation de Bousfield-Friedlander [1]. Rappelons ces constructions (attention, nos notations ne concordent pas exactement avec celles des références précédentes). Un  $\Gamma$ -espace est un foncteur  $F$  de  $\Gamma$  vers la catégorie  $\mathbf{Fct}(\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ens}_\bullet)$  des ensembles simpliciaux pointés qui préserve les objets nuls; il est dit *spécial* si l'application canonique  $F(X \sqcup Y) \rightarrow F(X) \times F(Y)$  est une équivalence faible pour tous ensembles finis  $X$  et  $Y$ . Un  $\Gamma$ -espace  $F$  détermine un spectre connectif  $Sp(F)$  (en fait, la catégorie des  $\Gamma$ -espaces peut être prise comme modèle des spectres connectifs) de façon fonctorielle.

Un  $\Gamma$ -espace  $F$  se prolonge en un foncteur  $\bar{F} : \mathbf{Ens}_\bullet \rightarrow \mathbf{Fct}(\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ens}_\bullet)$  par extension de Kan à gauche le long du foncteur canonique (d'adjonction d'un point de base externe)  $\Gamma \rightarrow \mathbf{Ens}_\bullet$ , puis en un endofoncteur de  $\mathbf{Fct}(\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ens}_\bullet)$  en considérant

$$\mathbf{Fct}(\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ens}_\bullet) \xrightarrow{\mathbf{Fct}(\Delta^{\text{op}}, \bar{F})} \mathbf{Fct}(\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Fct}(\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ens}_\bullet)) \simeq \mathbf{Fct}(\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ens}_\bullet)$$

puis en précomposant par la diagonale  $\Delta^{op} \rightarrow \Delta^{op} \times \Delta^{op}$ . Ce prolongement sera encore noté  $\bar{F}$  ; il est muni d'applications structurales canoniques  $X \wedge \bar{F}(Y) \rightarrow \bar{F}(X \wedge Y)$  et le spectre  $Sp(F)$  peut se voir (avec le modèle classique des spectres) comme la suite  $(\bar{F}(\mathbb{S}^n))_n$  (où  $\mathbb{S}^n$  désigne un modèle simplicial pointé de la sphère de dimension  $n$ ) munie des morphismes déduits d'icelles. Pour tout ensemble simplicial pointé  $X$ , on dispose d'un morphisme canonique de spectres  $Sp(F) \wedge X \rightarrow \Sigma^\infty(\bar{F}(X))$  qui est une équivalence faible (cf. [1], *Lemma 4.1*).

Soit  $(\mathcal{C}, +, 0)$  une catégorie monoïdale symétrique ; comme nous n'aurons besoin que des isomorphismes dans cette catégorie, nous supposons d'emblée que c'est un groupoïde. Nous noterons  $\mathcal{C}'$  la sous-catégorie pleine des objets non isomorphes à l'unité  $0$  (ce qui concorde avec les notations employées précédemment,  $gr$  et  $gr'$ , pour les groupes libres).

Soit  $X$  un ensemble pointé : on a défini au paragraphe précédent un foncteur  $\eta(X) : \Pi^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$  (dont les valeurs  $\eta(X)(E) = X^E$  sont discrètes) ; on remarque que  $X \mapsto \eta(X)$  définit même un foncteur  $\mathbf{Ens}_\bullet \rightarrow \mathbf{Fct}(\Pi^{op}, \mathbf{Cat})$ , avec un effet évident sur les morphismes.

On définit un foncteur  $\mathfrak{C}(\mathcal{C}, -) : \mathbf{Ens}_\bullet \rightarrow \mathbf{Cat}$  par

$$\mathfrak{C}(\mathcal{C}, X) := \varepsilon(\mathcal{C}', +) \int \Pi^{op} \int \eta(X)$$

sur les objets, l'effet sur les morphismes provenant de la functorialité de  $\eta$ .

Soit  $X$  un ensemble pointé  $X$ , notons  $x_0$  son point de base et posons  $X_- := X \setminus \{x_0\}$ . On dispose d'un foncteur  $F_X : \mathcal{C}^{X_-} \rightarrow \mathfrak{C}(\mathcal{C}, X)$  associant à une famille  $(c_x)_{x \in X_-}$  d'objets de  $\mathcal{C}$  la famille finie  $(c_x, x)_{x \in E}$ , où  $E$  est l'ensemble des  $x$  tels que  $c_x$  ne soit pas isomorphe à  $0$  (avec l'effet évident sur les morphismes — on rappelle que  $\mathcal{C}$  ne contient que des isomorphismes). On dispose également d'un foncteur  $G_X : \mathfrak{C}(\mathcal{C}, X) \rightarrow \mathcal{C}^{X_-}$  associant à une famille finie  $(c_t, a_t)_{t \in E}$  de  $\text{Ob } \mathcal{C}' \times X$  l'objet  $\left( \sum_{a_t=x} c_t \right)_{x \in X_-}$  de  $\mathcal{C}^{X_-}$  (avec encore un effet clair sur les morphismes). On vérifie aussitôt que  $G_X$  est adjoint à gauche à  $F_X$ . En particulier,  $F_X$  et  $G_X$  induisent des équivalences d'homotopie mutuellement quasi-inverses entre les ensembles simpliciaux  $\mathcal{N}(\mathcal{C}^{X_-})$  et  $\mathcal{N}(\mathfrak{C}(\mathcal{C}, X))$ . De plus, ces foncteurs respectent les points de base canoniques de ces catégories (la famille constante en l'objet unité  $0$  dans  $\mathcal{C}^{X_-}$ , et la famille vide dans  $\mathfrak{C}(\mathcal{C}, X)$ ), de sorte qu'il s'agit d'équivalences d'homotopie d'ensembles simpliciaux *pointés*. En fait, le foncteur  $G_X : \mathfrak{C}(\mathcal{C}, X) \rightarrow \mathcal{C}^{X_-}$  est *monoïdal* (au sens fort), où la catégorie source est munie de la structure monoïdale symétrique donnée par la concaténation des objets et la catégorie but de la structure monoïdale symétrique produit induite par celle de  $\mathcal{C}$ . De surcroît, si  $Y$  est un autre ensemble pointé (on notera de même  $Y_-$  le complémentaire du point de base de  $Y$ ), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{X_- \sqcup Y_-} = \mathcal{C}^{(X \vee Y)_-} & \xrightarrow{F_{X \vee Y}} & \mathfrak{C}(\mathcal{C}, X \vee Y) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^{X_-} \times \mathcal{C}^{Y_-} & \xrightarrow{F_X \times F_Y} & \mathfrak{C}(\mathcal{C}, X) \times \mathfrak{C}(\mathcal{C}, Y) \end{array}$$

(dont les flèches verticales sont les foncteurs canoniques ;  $\vee$  désigne la somme catégorie de  $\mathbf{Ens}_\bullet$ ) commute à isomorphisme près. On en déduit que le  $\Gamma$ -espace obtenu en composant le foncteur canonique  $\Gamma \rightarrow \mathbf{Ens}_\bullet$ , le foncteur  $\mathfrak{C}(\mathcal{C}, -) :$

**Ens.**  $\rightarrow$  **Cat** et le foncteur nerf (dont on a vu qu'il se factorisait naturellement par les ensembles simpliciaux *pointés*) est spécial et a le même type d'homotopie que le  $\Gamma$ -espace associé à la petite catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{C}, +, 0)$  par la machinerie de Segal [32] (§ 2 ; voir aussi [33], § 4), que nous noterons  $\sigma(\mathcal{C}, +, 0)$ , ou simplement  $\sigma(\mathcal{C})$ .

Si  $\mathcal{T}$  est une petite catégorie quelconque munie d'un objet  $t$ , l'ensemble simplicial pointé  $\mathcal{N}(\varepsilon(\mathcal{C}', +) \int \Pi^{op} \int \eta(\mathcal{T}, t))$  a naturellement le même type d'homotopie que  $\overline{\sigma(\mathcal{C})}(\mathcal{N}(\mathcal{T}))$ . En effet, lorsque  $\mathcal{T}$  est discrète, il s'agit d'une reformulation de l'observation précédente sur l'équivalence homotopique entre le  $\Gamma$ -espace  $\sigma(\mathcal{C})$  et celui construit à partir de  $\mathfrak{C}(\mathcal{C}, -)$  ; le cas général s'en déduit par des arguments formels (utiliser [33], § 1, par exemple). Si de plus  $\mathcal{T}$  est connexe, on en déduit par le *Theorem 4.4* de [1] que  $\mathcal{N}(\varepsilon(\mathcal{C}', +) \int \Pi^{op} \int \eta(\mathcal{T}, t))$  a le même type d'homotopie que  $\Omega^\infty(Sp(\sigma(\mathcal{C})) \wedge \mathcal{N}(\mathcal{T}))$  (et ce fonctoriellement en  $(\mathcal{T}, t)$ ).

Si  $A$  est un groupe libre de rang fini, on a donc une suite d'équivalences d'homotopie

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(C(A)) &\simeq \mathcal{N}\left(C(A) \int \kappa^* \mathfrak{D}_A\right) \simeq \mathcal{N}\left(\varepsilon(gr', *) \int \Pi^{op} \int \eta(A)\right) \simeq \dots \\ &\Omega^\infty(Sp(\sigma(gr)) \wedge B(A)) \simeq \Omega^\infty \Sigma^\infty(B(A)). \end{aligned}$$

La première équivalence découle du théorème 3.11 et du *Theorem 3.3* de [33], la deuxième de la proposition 4.3, la troisième des rappels précédents sur les  $\Gamma$ -espaces et la dernière du théorème de Galatius [8] montrant que le foncteur monoïdal canonique  $\Sigma \rightarrow gr$  (où  $\Sigma$  désigne le groupoïde sous-jacent à la catégorie monoïdale symétrique **ens**) induit une équivalence  $Sp(\sigma(\Sigma)) \rightarrow Sp(\sigma(gr))$ , le spectre source étant, classiquement (cf. [32], proposition 3.5), équivalent au spectre des sphères.

*Remarque 4.4.* Toutes les équivalences précédentes sont des équivalences d'espaces de lacets infinis. En effet, la catégorie  $C(A)$  est munie d'une structure monoïdale symétrique donnée par la somme (ou produit libre) amalgamée au-dessus de  $A$ . Cette structure se relève à  $C(A) \int \kappa^* \mathfrak{D}_A$  (en utilisant la concaténation des suites de groupes libres), ce qui fait du foncteur canonique  $C(A) \int \kappa^* \mathfrak{D}_A \rightarrow C(A)$  un foncteur monoïdal (au sens fort), de sorte que l'équivalence d'homotopie qu'il induit entre les nerfs de ces catégories est une équivalence d'espaces de lacets infinis. Il en est de même pour les autres équivalences d'homotopie ci-dessus : cela provient, pour la seconde, de ce que l'équivalence de catégories de la proposition 4.3 est monoïdale (où  $\varepsilon(gr', *) \int \Pi^{op} \int \eta(A)$  est munie de la structure monoïdale donnée par la concaténation des suites de groupes libres) et pour les autres, c'est une conséquence formelle du travail de Segal [32].

En revanche, si  $A \rightarrow B$  est un morphisme de  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ , le foncteur  $C(B) \rightarrow C(A)$  qu'il induit n'est pas monoïdal, de sorte qu'il n'est pas clair *a priori* que l'application  $\mathcal{N}(C(B)) \rightarrow \mathcal{N}(C(A))$  est un morphisme d'espaces de lacets infinis.

Nous n'avons pas pour autant tout-à-fait achevé la démonstration du théorème 1.5, car il reste à déterminer la fonctorialité en  $A$  (objet de  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ ). Il est clair, en suivant les fonctorialités dans tout ce qui précède, que l'équivalence d'homotopie obtenue est fonctorielle relativement aux *isomorphismes* de groupes libres de rang fini, mais nettement moins, *a priori*, que la fonctorialité relativement aux autres morphismes de  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  est celle qu'on attend.

## 4.5 Structure monoïdale du foncteur $C : \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$

Soient  $A$  et  $B$  deux objets de  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ . Le produit libre induit un foncteur  $C(A) \times C(B) \rightarrow C(A * B)$  naturel en  $A$  et  $B$  et vérifiant les conditions de cohérence monoïdales usuelles. De plus, la composée de ce foncteur avec le foncteur  $C(A * B) \rightarrow C(A) \times C(B)$  induit par les morphismes canoniques  $A \rightarrow A * B$  et  $B \rightarrow A * B$  de  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  est homotope à l'identité. En effet, il existe une transformation naturelle de l'identité de  $C(A) \times C(B)$  vers cette composée, donnée sur l'objet  $(\underline{G}, \underline{H})$ , où  $\underline{G} = (G, A \rightarrow G \rightarrow A)$  et  $\underline{H} = (H, B \rightarrow H \rightarrow B)$ , par les morphismes canoniques  $G \rightarrow G * H$  et  $H \rightarrow G * H$  de  $\mathcal{G}$ .

Considérons à présent le diagramme suivant de la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux pointés, dont on note, classiquement,  $Q$  l'endofoncteur  $\Omega^\infty \Sigma^\infty$ ,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N}C(A) \times \mathcal{N}C(B) & \longrightarrow & \mathcal{N}C(A * B) & \longrightarrow & \mathcal{N}C(A) \times \mathcal{N}C(B) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ QB(A) \times QB(B) & \xrightarrow{\simeq} & QB(A * B) & \xrightarrow{\simeq} & QB(A) \times QB(B) \end{array} \quad (7)$$

où les isomorphismes verticaux sont ceux construits au paragraphe précédent, les flèches horizontales inférieures sont les isomorphismes canoniques et les flèches horizontales supérieures sont obtenues en appliquant le foncteur  $\mathcal{N}$  (qui commute aux produits) aux foncteurs qu'on vient de discuter entre  $C(A) \times C(B)$  et  $C(A * B)$ .

Les composées horizontales supérieure et inférieure de ce diagramme sont les identités. De plus, le carré de gauche est commutatif, car :

- la structure monoïdale  $C(A) \times C(B) \rightarrow C(A * B)$  sur  $C$  se relève (en utilisant toujours la concaténation des suites de groupes libres) en une structure monoïdale  $C(A) \int \kappa^* \mathcal{D}_A \times C(B) \int \kappa^* \mathcal{D}_B \rightarrow C(A * B) \int \kappa^* \mathcal{D}_{A * B}$ , de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C(A) \int \kappa^* \mathcal{D}_A \times C(B) \int \kappa^* \mathcal{D}_B & \longrightarrow & C(A * B) \int \kappa^* \mathcal{D}_{A * B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(A) \times C(B) & \longrightarrow & C(A * B) \end{array}$$

(dont les flèches verticales sont les foncteurs canoniques) commute à isomorphisme canonique près ;

- on peut également former un diagramme commutatif (à isomorphisme canonique près)

$$\begin{array}{ccc} C(A) \int \kappa^* \mathcal{D}_A \times C(B) \int \kappa^* \mathcal{D}_B & \longrightarrow & C(A * B) \int \kappa^* \mathcal{D}_{A * B} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \left( \varepsilon(gr', *) \int \Pi^{op} \int \eta(A) \right) \times \left( \varepsilon(gr', *) \int \Pi^{op} \int \eta(B) \right) & \longrightarrow & \varepsilon(gr', *) \int \Pi^{op} \int \eta(A * B) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les équivalences de la proposition 4.3 et la structure monoïdale donnée par la flèche horizontale inférieure est toujours donnée par la concaténation des suites de groupes libres ;

— les équivalences d'homotopie

$$\mathcal{N}\left(\varepsilon(gr', *) \int \Pi^{op} \int \eta(A)\right) \simeq \overline{\sigma(gr)}(\eta(A)) \simeq QB(A)$$

sont monoïdales en  $A$ , car  $\sigma(gr)$  est un  $\Gamma$ -espace spécial.

Par conséquent, le carré de droite du diagramme (7) commute également. Cela signifie que l'équivalence d'homotopie du théorème 1.5 est naturelle relativement aux morphismes canoniques  $A \rightarrow A * B$  de  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ . Comme la catégorie  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  est engendrée par ces morphismes et les isomorphismes (relativement auxquels on a déjà observé la naturalité de notre équivalence), cela termine la démonstration du théorème 1.5.

## 5 Conclusion

### Formalité rationnelle

Les calculs de Vespa [34] montrent que l'on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-}\mathbf{Mod}}^{m-n+1}(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^n, \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^m) = 0$$

pour tous entiers  $0 \leq n < m$  (c'est en fait vrai sans restriction sur  $n$  et  $m$ , et même en remplaçant les puissances extérieures par les puissances tensorielles). Par les corollaires 1.6 et 2.2, on en déduit

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})}^{m-n+1}(\mathbf{L}_n, \mathbf{L}_m) = 0$$

pour  $n < m$ , lorsque  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ . La théorie de l'obstruction pour les complexes de chaînes, due à Dold [6] (voir aussi [24], proposition 1.6), permet alors de déduire les théorèmes 1 et 2 du corollaire 1.6 et du théorème 1.3.

*Remarque 5.1.* Ce raisonnement de formalité est très analogue à celui utilisé par Pirashvili dans [24] (*Theorem 2.7*) dans  $\Gamma\text{-}\mathbf{Mod}$ , qui donne une approche de la décomposition de Hodge pour l'homologie de Hochschild des  $\mathbb{Q}$ -algèbres commutatives par l'homologie des foncteurs.

### Calculs

Si  $F$  est un foncteur polynomial de degré  $d$  de  $\mathbf{gr}\text{-}\mathbf{Mod}$ , notons  $H_{st}^n(F)$  le  $n$ -ème espace vectoriel de cohomologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus par  $F$ , c'est-à-dire, dans le cas des coefficients rationnels,

$$H^n(\mathrm{Aut}(G); F(G)) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-}\mathbf{Mod}}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j, F)$$

(corollaire 2) où  $G$  est un groupe libre de rang  $r \geq 2(n+d)+3$ .

Dans [34], Vespa montre que la dimension du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-}\mathbf{Mod}}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j, \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^d)$$

égale le nombre de partitions de  $d$  en exactement  $j$  parts si  $i = d - j$  et zéro sinon. Le même travail montre également que

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-}\mathbf{Mod}}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j, \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* S^d)$$



est nul pour  $d > 1$ . Par conséquent, le corollaire 2 entraîne le théorème 3.

On a en fait davantage : [34] détermine les groupes d'extensions précédents à partir des groupes  $\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^{\otimes j}, \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^{\otimes d})$  (avec les actions des groupes symétriques), de sorte qu'on a également le résultat suivant.

**Corollaire 5.2.** *Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , l'épimorphisme canonique  $\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^{\otimes d} \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^d$  de  $\mathbf{gr}\text{-Mod}$  induit un isomorphisme  $H_{st}^*(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^{\otimes d}) \xrightarrow{\cong} H_{st}^*(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^d)$  de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels gradués.*

### Structures multiplicatives

Travaillons avec la cohomologie stable  $H_{st}^*$  d'un foncteur polynomial de  $\mathbf{gr}\text{-Mod}$  (des résultats analogues vaudraient en homologie pour un foncteur analytique de  $\mathbf{Mod}\text{-gr}$ ) et plaçons-nous d'emblée, par commodité, dans le cas où  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ . On dispose, comme pour toute cohomologie de groupes, d'un morphisme naturel monoïdal  $H_{st}^*(F) \otimes H_{st}^*(G) \rightarrow H_{st}^*(F \otimes G)$  de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels gradués. En utilisant les morphismes de groupes canoniques  $\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*i}) \times \text{Aut}(\mathbb{Z}^{*j}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^{*(i+j)})$ , on obtient également un morphisme naturel comonoïdal  $H_{st}^*(F \otimes G) \rightarrow H_{st}^*(F) \otimes H_{st}^*(G)$  de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels gradués.

Par conséquent, si le foncteur  $F \in \text{Ob } \mathbf{gr}\text{-Mod}$  est muni d'une structure d'algèbre (resp. de cogèbre, de bigèbre, d'algèbre de Hopf), il en est de même pour  $H_{st}^*(F)$ .

On peut lire ces structures multiplicatives dans l'isomorphisme naturel du corollaire 2. Précisément, grâce à la structure d'algèbre de Hopf graduée du foncteur puissance extérieure, on obtient des morphismes naturels

$$\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^r, F) \otimes \text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^j(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^s, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^{i+j}(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^{r+s}, F \otimes G)$$

(utiliser le produit externe sur les Ext et le coproduit  $\Lambda^{r+s} \rightarrow \Lambda^r \otimes \Lambda^s$ ) et

$$\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^n(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^{r+s}, F \otimes G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^n(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^r \otimes \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^s, F \otimes G) \simeq \dots$$

$$\text{Ext}_{(\mathbf{gr} \times \mathbf{gr})\text{-Mod}}^n(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^r \boxtimes \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^s, (F \otimes G) \circ *) \rightarrow \text{Ext}_{(\mathbf{gr} \times \mathbf{gr})\text{-Mod}}^n(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^r \boxtimes \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^s, F \boxtimes G)$$

$$\simeq \bigoplus_{i+j=n} \text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^r, F) \otimes \text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^j(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^s, G)$$

où le premier morphisme est induit par le produit  $\Lambda^r \otimes \Lambda^s \rightarrow \Lambda^{r+s}$ , le second est l'isomorphisme d'adjonction induit par précomposition par l'adjonction entre produit libre  $\mathbf{gr} \times \mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{gr}$  (à gauche) et diagonale (à droite), le troisième est induit par l'épimorphisme canonique  $(F \otimes G) \circ * \twoheadrightarrow F \boxtimes G$  et le dernier isomorphisme provient de la formule de Künneth (qui s'applique ici sous sa forme la plus simple car les produits tensoriels sont pris sur un corps et les foncteurs  $\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^t$  possèdent une résolution projective de type fini).

**Proposition 5.3.** *L'isomorphisme du corollaire 2 est compatible aux structures monoïdales et comonoïdales explicitées ci-avant.*

*Démonstration.* C'est une conséquence formelle de ce que les foncteurs  $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$  et  $\beta : \mathbf{S}_c(\mathbf{gr}) \rightarrow \mathbf{gr}^{op}$  sont monoïdaux et de ce que l'équivalence d'homotopie du théorème 1.5 est également compatible aux structures monoïdales (ce qui résulte de la discussion du paragraphe 4.5).  $\square$

En conséquence, si le foncteur polynomial  $F \in \text{Ob } \mathbf{gr}\text{-Mod}$  est muni d'une structure d'algèbre (resp. de cogèbre, de bigèbre, d'algèbre de Hopf), la structure d'algèbre (resp. de cogèbre, de bigèbre, d'algèbre de Hopf) induite sur  $H_{st}^*(F)$  se lit dans l'isomorphisme du corollaire 2.

À partir des résultats de [34] sur les produits, on peut ainsi préciser le théorème 3.

**Corollaire 5.4.** *La cohomologie rationnelle stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients dans le foncteur gradué algèbre extérieure est une algèbre symétrique sur des générateurs  $\xi_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en bidegré  $(n, n)$ .*

*Remarque 5.5.* Dans [16], Kawazumi introduit des classes de cohomologie  $\bar{h}_p \in H_{st}^p(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^p)$ ; il montre dans [17] qu'elles sont algébriquement indépendantes dans l'algèbre bigraduée  $H_{st}^*(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^\bullet)$  (c'est même vrai en restreignant la cohomologie des groupes d'automorphismes des groupes libres aux groupes de tresses). Cela fournit une deuxième démonstration du résultat précédent, à partir du théorème 3 mais sans utiliser la proposition 5.3. De fait, le théorème 3 implique que les classes  $\bar{h}_p$  engendrent l'algèbre  $H_{st}^*(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^\bullet)$ .

On peut montrer que, via l'isomorphisme du corollaire 2, la classe  $\bar{h}_p$  correspond à un générateur de  $\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^{p-1}(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^p) \simeq \mathbb{Q}$  (cf. [34]).

*Remarque 5.6.* La proposition 5.3 donne également une description concrète de l'injection canonique  $\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j, F) \rightarrow H_{st}^{i+j}(F)$ . Soit  $h$  la classe canonique de  $H_{st}^1(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}})$  — celle-ci peut se construire directement (cf. [16] par exemple). Notons  $\theta_j$  l'image de  $h^{\otimes j}$  par le morphisme

$$H_{st}^1(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}})^{\otimes j} \rightarrow H_{st}^j(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^{\otimes j}) \rightarrow H_{st}^j(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j)$$

composé du produit externe et du morphisme (qui est un isomorphisme par le corollaire 5.2) induit par  $\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^{\otimes j} \rightarrow \mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j$ .

Si  $F$  est un foncteur polynomial de  $\mathbf{gr}\text{-Mod}$  et  $G$  un groupe libre de rang fini assez grand, notre morphisme canonique  $\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j, F) \rightarrow H_{st}^{i+j}(F)$  est la composée

$$\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j, F) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Q}[\text{Aut}(G)]}^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j(G), F(G)) \rightarrow H^{i+j}(\text{Aut}(G); F(G))$$

de l'application induite par l'évaluation en  $G$  et du produit de composition (pour les extensions entre représentations de  $\text{Aut}(G)$ ) par  $\theta_j$ .

## Compléments

Les théorèmes 1 et 2 (et leurs corollaires) nécessitent un peu moins que des valeurs dans les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels : l'isomorphisme naturel  $H_i(\Omega^\infty \Sigma^\infty(\mathbb{B}(A))) \simeq \Lambda^i(A_{ab})$ , où  $A$  est un groupe libre, et le calcul de  $\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^*(\mathfrak{a}^* \Lambda^i, \mathfrak{a}^* \Lambda^j)$  à partir de  $\text{Ext}_{\mathbf{gr}\text{-Mod}}^*(\mathfrak{a}^{\otimes i}, \mathfrak{a}^{\otimes j})$  (qui est calculé sur les entiers dans [34]), valent dès que l'algèbre des groupes symétriques  $\mathfrak{S}_n$  est semi-simple pour  $n \leq \max(i, j)$ . Par conséquent, jusqu'en degré homologique  $n$ , les théorèmes 1 et 2 (ainsi que, par exemple, le théorème 3) sont valides pour des foncteurs  $F$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]\text{-Mod}$ . Par exemple, on retrouve, en degré 1, la proposition 7.2 de [5] dans toute sa généralité, et, en degré 2, l'annulation de  $H_{st}^2(\mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}[1/2])$  démontrée par Satoh dans [29]. Avec davantage de travail, on peut manifestement obtenir des

renseignements plus précis sur la torsion dans groupes abéliens  $H_{st}^n(F)$  (pour  $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$  et  $F \in \text{Ob } \mathbf{gr}\text{-Mod}$  polynomial).

Nous terminons cet article en donnant les conséquences d’une conjecture qui devrait s’établir en combinant les méthodes utilisées pour démontrer le théorème 5.7 et celles employées dans [5].

**Conjecture 5.7.** *Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie de  $\mathbf{S}(\mathbf{gr})$  contenant  $\mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ . Notons  $\beta$  (resp.  $\lambda$ ) la restriction à  $\mathcal{C}$  du foncteur canonique  $\mathbf{S}(\mathbf{gr}) \rightarrow \mathbf{gr}^{op}$  (resp.  $\mathbf{S}(\mathbf{gr}) \rightarrow \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}$ ). Si  $B : \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$  est un bifoncteur analytique prenant des valeurs  $\mathbb{k}$ -plates et  $G : \mathbf{gr} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$  un foncteur arbitraire, alors on dispose d’un isomorphisme canonique*

$$\text{Tor}_*^{\mathcal{C}}(\beta^*G, \lambda^*B) \simeq HH_*(\mathbf{gr}; \pi^*G \otimes B)$$

où  $\pi : \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{gr}$  désigne le foncteur de projection.

Le corollaire 1.7 et la suite spectrale (3) impliquent :

**Théorème 5.8** (Conditionnellement à la conjecture 5.7). *Supposons la conjecture 5.7 vérifiée. Soit  $B : \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Mod}$  un bifoncteur analytique prenant des valeurs  $\mathbb{k}$ -plates. Il existe une suite spectrale*

$$E_{i,j}^2 = HH_i(\mathbf{gr}; \pi^* \mathbf{a}^* L_j \otimes B) \Rightarrow H_{i+j}(\mathcal{G}; \zeta^* B)$$

naturelle en  $F$ , où  $\zeta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr}$  désigne le foncteur canonique (qui est la diagonale sur les objets et se factorise par  $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}_c(\mathbf{gr})$ ) et  $\pi : \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \rightarrow \mathbf{gr}$  le foncteur de projection.

En caractéristique nulle, à partir du théorème 1, on obtient même le résultat suivant.

**Théorème 5.9** (Conditionnellement à la conjecture 5.7). *Supposons la conjecture 5.7 vérifiée. Soit  $B : \mathbf{gr}^{op} \times \mathbf{gr} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  un bifoncteur analytique. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un isomorphisme*

$$\text{colim}_{r \in \mathbb{N}} H_n(\text{Aut}(\mathbb{Z}^{*r}); B(\mathbb{Z}^{*r}, \mathbb{Z}^{*r})) \simeq \bigoplus_{i+j=n} HH_i(\mathbf{gr}; \pi^* \mathbf{a}_{\mathbb{Q}}^* \Lambda^j \otimes B)$$

naturel en  $B$ .

Comme le théorème 2, ce résultat peut donner lieu à des calculs explicites.

**Remerciements** L’auteur remercie les collègues suivants pour des discussions ou encouragements utiles à la réalisation de ce travail : Christine Vespa, Camille Horbez, Nariya Kawazumi, Teimuraz Pirashvili, Lionel Schwartz.

## Références

- [1] A. K. Bousfield and E. M. Friedlander. Homotopy theory of  $\Gamma$ -spaces, spectra, and bisimplicial sets. In *Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977)*, II, volume 658 of *Lecture Notes in Math.*, pages 80–130. Springer, Berlin, 1978.

- [2] Frederick R. Cohen, Thomas J. Lada, and J. Peter May. *The homology of iterated loop spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 533. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [3] Aurélien Djament. Sur l’homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.
- [4] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l’homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.
- [5] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l’homologie des groupes d’automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux. *Comment. Math. Helv.*, 90(1) :33–58, 2015.
- [6] Albrecht Dold. Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe. *Math. Ann.*, 140 :278–298, 1960.
- [7] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups  $H(\Pi, n)$ . II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.
- [8] Søren Galatius. Stable homology of automorphism groups of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 173(2) :705–768, 2011.
- [9] Manfred Hartl, Teimuraz Pirashvili, and Christine Vespa. Polynomial functors from algebras over a set-operad and nonlinear Mackey functors. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (6) :1461–1554, 2015.
- [10] Allan Hatcher, Karen Vogtmann, and Natalie Wahl. Erratum to : “Homology stability for outer automorphism groups of free groups [Algebr. Geom. Topol. 4 (2004), 1253–1272 (electronic)] by Hatcher and Vogtmann. *Algebr. Geom. Topol.*, 6 :573–579 (electronic), 2006.
- [11] Allen Hatcher and Karen Vogtmann. Cerf theory for graphs. *J. London Math. Soc. (2)*, 58(3) :633–655, 1998.
- [12] Allen Hatcher and Karen Vogtmann. Homology stability for outer automorphism groups of free groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 4 :1253–1272, 2004.
- [13] Allen Hatcher and Nathalie Wahl. Stabilization for the automorphisms of free groups with boundaries. *Geom. Topol.*, 9 :1295–1336 (electronic), 2005.
- [14] Allen Hatcher and Nathalie Wahl. Erratum to : “Stabilization for the automorphisms of free groups with boundaries” [Geom. Topol. 9 (2005), 1295–1336 ; 2174267]. *Geom. Topol.*, 12(2) :639–641, 2008.
- [15] A. H. M. Hoare. On length functions and Nielsen methods in free groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 14(1) :188–192, 1976.
- [16] Nariya Kawazumi. Cohomological aspects of magnus expansions. arXiv : math.GT/0505497, 2006.
- [17] Nariya Kawazumi. Twisted Morita-Mumford classes on braid groups. In *Groups, homotopy and configuration spaces*, volume 13 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 293–306. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008.
- [18] Roger C. Lyndon. Length functions in groups. *Math. Scand.*, 12 :209–234, 1963.
- [19] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.

- [20] Shigeyuki Morita. Cohomological structure of the mapping class group and beyond. In *Problems on mapping class groups and related topics*, volume 74 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 329–354. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [21] Minoru Nakaoka. Homology of the infinite symmetric group. *Ann. of Math. (2)*, 73 :229–257, 1961.
- [22] J. Nielsen. Über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation. *Math. Ann.*, 79(3) :269–272, 1918.
- [23] Julian Petresco. Sur les groupes libres. *Bull. Sci. Math. (2)*, 80 :6–32, 1956.
- [24] Teimuraz Pirashvili. Hodge decomposition for higher order Hochschild homology. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(2) :151–179, 2000.
- [25] Daniel Quillen. Higher algebraic  $K$ -theory. I. In *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.
- [26] Oscar Randal-Williams. The stable cohomology of automorphisms of free groups with coefficients in the homology representation. arXiv : math.AT/1012.1433, 2010.
- [27] Oscar Randal-Williams and Nathalie Wahl. Homological stability for automorphism groups. arXiv :1409.3541, 2015.
- [28] Takao Satoh. Twisted first homology groups of the automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 204(2) :334–348, 2006.
- [29] Takao Satoh. Twisted second homology groups of the automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 211(2) :547–565, 2007.
- [30] Takao Satoh. First cohomologies and the Johnson homomorphisms of the automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 217(1) :137–152, 2013.
- [31] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring*. PhD thesis, Evanston, 2000.
- [32] Graeme Segal. Categories and cohomology theories. *Topology*, 13 :293–312, 1974.
- [33] R. W. Thomason. Homotopy colimits in the category of small categories. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 85(1) :91–109, 1979.
- [34] Christine Vespa. Extensions between functors from groups. arXiv :1511.03098, 2015.