



SUR QUELQUES PROCEDES DE QUANTIFICATION. APPLICATIONS AUX JETS ET AUX SECTIONS DES FIBRES HILBERTIENS

Jean Louis Jonot

► To cite this version:

Jean Louis Jonot. SUR QUELQUES PROCEDES DE QUANTIFICATION. APPLICATIONS AUX JETS ET AUX SECTIONS DES FIBRES HILBERTIENS. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. hal-01214215

HAL Id: hal-01214215

<https://hal.science/hal-01214215>

Submitted on 10 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SUR QUELQUES PROCÉDÉS DE QUANTIFICATION. APPLICATIONS AUX JETS ET AUX SECTIONS DES FIBRÉS HILBERTIENS

JEAN LOUIS JONOT

ABSTRACT. Les théories mathématiques sont des outils puissants pour l'analyse des phénomènes physiques. On se propose d'utiliser les idées des méthodes physiques pour décrire certains aspects des mathématiques. Dans cet article, l'espace des jets, l'espace des morphismes de fibrés de Banach ainsi que les sections des fibrés hilbertiens et les ondes de l'univers sont décrits par des procédés de quantification.

En mathématique, développer en série entière une C^∞ -application revient à faire une quantification dans un fibré de Fock-Banach. Si on se fixe une mesure de Lebesgue λ sur une variété, on peut quantifier les sections d'un fibré hilbertien. Par exemple, en complexifiant le fibré des $(2, 0)$ -tenseurs et en fixant une observable sur l'espace de hilbert obtenu, on peut quantifier toutes les λ pseudo-métriques en identifiant ces pseudo-métriques, de façon canonique, à un élément des espaces de Fock associés à la structure hilbertienne.

1. LE PRINCIPE DE QUANTIFICATION ET LES p -SOMMES INFINIES DE WHITNEY

Une suite de fibrés $\{\zeta_n\}$, de même base X , est une suite compatible si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x pour lequel U est un ouvert de trivialisatation des fibrés ζ_n pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$. Sous l'hypothèse de compatibilité et si les fibrés ζ_n sont des fibrés de Banach de fibre $\mathcal{B}_n$, on peut définir le fibré produit, de fibre

$$\prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n.$$

Ce fibré n'est pas un fibré de Banach. On considère le sous fibré de fibre

$$\left\{ u = (u_n) \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n, \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|_{\mathcal{B}_n}^p < +\infty \right\},$$

ce fibré n'est pas, en général, un fibré de Banach pour la norme

$$\|u\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|_{\mathcal{B}_n}^p} \text{ si } p \geq 1.$$

On note, $l^p(\mathcal{B})$ le complété pour la norme $\|u\|_p$ de

$$\left\{ u = (u_n) \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n, \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|_{\mathcal{B}_n}^p < +\infty \right\}$$

Date: 10 octobre 2015.

Key words and phrases. Espace de Fock-Banach, Espace de Bose-Fermi-Fock, Jets.

et $l^p(\zeta)$ le fibré de Banach de fibre $l^p(\mathcal{B})$, défini par les fibres $E_x(l^p(\zeta))$ complétés de

$$\left\{ u(x) = (u_n(x)) \in \prod_{n=0}^{\infty} E_x(\zeta_n), \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n(x)\|_{n,x}^p < +\infty \right\}, x \in X$$

où

$$\|\cdot\|_{n,x}$$

désigne la norme de $E_x(\zeta_n)$ induite par $\mathcal{B}_n$. Ce fibré est le fibré des p -sommations de Whitney infinie complète des fibrés $\{\zeta_n\}$. Le sous-fibré de fibre

$$\oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n = \{u = (u_n) : u_n \in \mathcal{B}_n \text{ et } \text{card}\{n : u_n \neq o_{\mathcal{B}_n}\} < +\infty\}$$

est la somme de Whitney des fibrés $\{\zeta_n\}$, cette somme ne forme pas un fibré de Banach mais forme un sous-fibré dense dans toutes les p -sommations de Whitney infinie complète des fibrés $\{\zeta_n\}$. Si $p = 2$, on dira simplement somme de Whitney complète, les fibrés ζ_n sont des fibrés hilbertiens de fibre $\mathcal{H}_n$ et la somme de Whitney infinie complète de ces fibrés, est un fibré hilbertien pour le produit hermitien [1]

$$\langle u | v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n | v_n \rangle_{\mathcal{H}_n}.$$

Remark 1. Toute suite de sous-fibrés d'une suite de fibrés compatibles est compatible.

Si tous les $\mathcal{B}_n$ sont égaux à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $l^p(\mathcal{B})$ s'identifie aux espaces $l^p(\mathbb{R})$ ou $l^p(\mathbb{C})$.

Definition 1. Une p -quantification ou une quantification d'ordre $p \geq 1$ d'un sous-espace $Y \subset X$ est la donnée d'une suite de sections locales $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$ définies sur Y telles que

$$\sigma_n \in \Gamma(\zeta_n) \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \|\sigma_n(y)\|_{n,y}^p < +\infty,$$

pour tout $y \in Y$.

Remark 2. Le voisinage ouvert U_n , où est définie la section σ_n , contient Y et dépend de n . Si

$$\cap_{n=1}^{\infty} U_n$$

est un voisinage ouvert de Y , on dit que la p -quantification est stable. Dans ce qui suit, les p -quantifications sont supposées stables, sauf mention contraire.

2. LES ESPACES DE FOCK DES FIBRÉS D'ÉTAT

Soit $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ un fibré d'état de l'univers Ω [3], on note $\otimes^n \zeta$, le produit tensoriel d'ordre n de ζ si ζ est de dimension finie et si ζ est de dimension infinie $\otimes^n \zeta$ est le complété du produit tensoriel de n -exemplaires de ζ . Le fibré trivial de fibre $\mathbb{C}$ est noté

$$\otimes^0 \zeta = (\Omega \times \mathbb{C}, \pi_1, \Omega, \mathbb{C}),$$

$\mathcal{S}_n(\zeta)$ est le symétrisé de $\otimes^n \zeta$ et $\mathcal{A}_n(\zeta)$ l'antisymétrisé de $\otimes^n \zeta$. L'espace de Bose-Fock de ζ est la somme de Whitney infinie et complète des symétrisés $\mathcal{S}_n(\zeta)$, c'est-à-dire, chaque fibre de

$$\mathcal{F}_+(\zeta) = (\cup_{\omega \in \Omega} \mathcal{F}_+(\zeta)(\omega), \pi, \Omega, \mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

en $\omega \in \Omega$ est définie par,

$$\mathcal{F}_+(\zeta)(\omega) = \left\{ u = \left\{ u^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} : u^{(n)} \in \mathcal{S}_n(E_\omega(\zeta)), \sum_{n=0}^{\infty} \|u^{(n)}\|_\omega^2 < +\infty \right\}.$$

L'espace $\mathcal{S}_n(E_\omega(\zeta))$ est le symétrisé d'ordre n de la fibre $E_\omega(\zeta)$ muni du produit hermitien induit par le produit hermitien de $E_\omega(\zeta)$, noté $\langle \bullet | \bullet \rangle_\omega$, et l'espace de Fermi-Fock est la somme de Whitney infinie et complète des antisymétrisés $\mathcal{A}_n(\zeta)$ sur chaque fibre

$$\mathcal{F}_-(\zeta) = (\cup_{\omega \in \Omega} \mathcal{F}_-(\zeta)(\omega), \pi, \Omega, \mathcal{F}_-(\mathcal{H})),$$

la fibre en ω est

$$\mathcal{F}_-(\zeta)(\omega) = \left\{ v = \left\{ v^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} : v^{(n)} \in \mathcal{A}_n(E_\omega(\zeta)), \|v\|_\omega^p = \sum_{n=0}^{\infty} \|v^{(n)}\|_\omega^2 < +\infty \right\}.$$

Sur $E_\omega(\otimes^n \zeta)$, $n \geq 1$, on définit le produit scalaire hermitien

$$\langle u | v \rangle_\omega = \prod_{j=1}^n \langle u_j^{(n)} | v_j^{(n)} \rangle$$

si

$$u^{(n)} = \otimes_{j=1}^n u_j^{(n)} \text{ et } v^{(n)} = \otimes_{j=1}^n v_j^{(n)}$$

et sur $E_\omega(\otimes^0 \zeta) = \mathbb{C}$,

$$\langle u^{(0)}, v^{(0)} \rangle_\omega = u^{(0)} \overline{v^{(0)}}.$$

Remark 3. Dans le cas d'un fibré ζ de dimension infinie $\otimes^n \zeta$, on note encore $\otimes^n \zeta$ le complété de l'espace préhilbertien $\otimes^n \zeta$ muni du produit scalaire $\langle u | v \rangle$.

Lemma 1. Les espaces de Bose-Fock et de Fermi-Fock ont une structure de fibré hermitien sur Ω munis du produit hermitien

$$\langle u | v \rangle.$$

Proof. La suite

$$\zeta_n = \otimes^n \zeta$$

est compatible, ainsi que les sous fibrés

$$\mathcal{S}_n(\zeta) \text{ et } \mathcal{A}_n(\zeta)$$

et les fibres sont, respectivement, les espaces de Bose-Fock et de Fermi-Fock de $\mathcal{H}$, notés

$$\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \text{ et } \mathcal{F}_-(\mathcal{H})$$

qui sont des espaces de Hilbert. $\square$

L'espace de Fock d'une paire de fibrés (ζ, ξ) est défini par le produit tensoriel des fibrés $\mathcal{F}_+(\zeta)$ et $\mathcal{F}_-(\xi)$

$$\mathcal{F}(\zeta, \xi) = \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{F}_-(\xi),$$

c'est le fibré de Fock associé à la paire (ζ, ξ) des fibrés d'état de l'univers Ω . Si on prend n sections $s_1, \dots, s_n$, le symétrisé s'écrit

$$\mathcal{S}_n(s_1 \otimes \dots \otimes s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} s_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes s_{\sigma(n)}$$

et l'antisymétrisé s'écrit

$$\mathcal{A}_n(s_1 \otimes \cdots \otimes s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} \varepsilon(\sigma) s_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes s_{\sigma(n)}.$$

Remark 4. Si $\dim(\zeta) < \infty$, le fibré $\otimes^n \zeta$ a pour fibre $\otimes^n \mathcal{H}$ et chaque fibre est donnée par

$$E_\omega(\otimes^n \zeta) = \otimes^n E_\omega(\zeta).$$

Une p -quantification de Bose le long du fibrés des états ζ est la donnée d'une suite de sections $\{\sigma_n^+\}$ telle que

$$\sigma_n^+ \in \Gamma(\mathcal{S}_n(\zeta)), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|\sigma_n^+(\omega)\|_\omega^2 < +\infty$$

et par analogie, une p -quantification de Fermi le long du fibrés des états ζ est la donnée d'une suite de sections $\{\sigma_n^-\}$ telle que

$$\sigma_n^- \in \Gamma(\mathcal{A}_n(\zeta)), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|\sigma_n^-(\omega)\|_\omega^2 < +\infty,$$

la p -quantification de Fock est définie par la suite $\{\sigma_n^+ \otimes \sigma_n^-\}$.

3. LES ESPACES DE FOCK-BANACH

On étend la notion de fibré de Fock à une paire (ζ, ς) de fibrés de Banach ou Hilbertien de fibre respective $\mathcal{B}_\zeta$ et $\mathcal{B}_\varsigma$. Le fibré de Bose-Banach de la paire (ζ, ς) est défini par les fibres $\mathcal{B}_+^p(\zeta, \varsigma)(x, y)$ qui sont les complétés de

$$\left\{ L = \{L^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} : L^{(n)} \in \text{Sym } \mathcal{L}_n(E_x(\zeta), E_y(\varsigma)), \quad \|L\|_{x,y}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|L^{(n)}\|_{x,y}^p < +\infty \right\},$$

pour la norme

$$\|L\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{\infty} \|L^{(n)}\|^p}, \quad p \geq 1$$

avec

$$\|L\|_{x,y} = \sup \left\{ |L(u_1, \dots, u_n)|_{E_y(\varsigma)} : |u_j|_{E_x(\zeta)} \leq 1, j = 1, \dots, n \right\}, \text{ si}$$

$$L \in \mathcal{L}_n(E_x(\zeta), E_y(\varsigma))$$

et

$$\mathcal{L}_n(E_x(\zeta), E_y(\varsigma))$$

est l'ensemble des applications n -linéaires continues de $E_x(\zeta)^n$ dans $E_y(\varsigma)$,

$$\text{Sym } \mathcal{L}_n(E_x(\zeta), E_y(\varsigma))$$

est le sous-ensemble des applications n -linéaires continues de $E_x(\zeta)^n$ dans $E_y(\varsigma)$ qui sont symétriques. On note

$$\mathcal{B}_+^p(\zeta, \varsigma) = (\cup_{(x,y)} \mathcal{B}_+^p(\zeta, \varsigma)(x, y), \pi, X \times Y).$$

Par analogie, le fibré de Fermi-Banach a pour fibre $\mathcal{B}_-^p(\zeta, \varsigma)(x, y)$ complété de

$$\left\{ L = \{L^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} : L^{(n)} \in \text{Asym } \mathcal{L}_n(E_x(\zeta), E_y(\varsigma)), \quad \|L\|_{x,y}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|L^{(n)}\|_{x,y}^p < \infty \right\}, \quad p \geq 1$$

où

$$\text{Asym } \mathcal{L}_n(E_x(\zeta), E_y(\varsigma))$$

est l'ensemble des applications n -linéaires continues de $E_x(\zeta)^n$ dans $E_y(\varsigma)$ qui sont antisymétriques. On note

$$\mathcal{B}_-^p(\zeta, \varsigma),$$

le fibré associé, la valeur de π sur chaque fibre $\mathcal{B}_\pm^p(\zeta, \varsigma)(x, y)$ est (x, y) . Le fibré de Fock-Banach s'écrit

$$\mathcal{B}^p(\zeta, \varsigma) = \mathcal{B}_+^p(\zeta, \varsigma) \otimes \mathcal{B}_-^p(\zeta, \varsigma),$$

ces fibrés sont des fibrés de Banach, pour la norme

$$\|\cdot\|_{x,y}.$$

Theorem 1. $\mathcal{B}_\pm(\zeta, \varsigma)$ sont des fibrés de Banach si $p \geq 1$.

Proof. La suite $\{\mathcal{L}_n(\zeta, \varsigma)\}$ est une suite compatible de fibrés de Banach car ς est un fibré de Banach et la fibre $\mathcal{B}$ est le complété de

$$\left\{ L = (L_n) : L_n \in \mathcal{L}_n(\mathcal{B}_\zeta, \mathcal{B}_\varsigma), \|L\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|L_n\|^p < +\infty \right\}.$$

□

Pour $Y = \mathbb{C}$, $\dim(\zeta) < +\infty$ et $p = 2$,

$$\begin{aligned} \text{Sym } \mathcal{L}_n(E_x(\zeta), E_z(\varsigma)) &= \text{Sym } \mathcal{L}_n(E_x(\zeta), \{z\} \times \mathbb{C}) \\ &= \{z\} \times \text{Sym } \mathcal{L}_n(E_x(\zeta), \mathbb{C}) \\ &\approx \{z\} \times \text{Sym } \otimes^n E_x(\zeta^*) \\ &= \{z\} \times \mathcal{S}_n(E_x(\zeta^*)), z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

où ς est le fibré trivial

$$\varsigma = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, pr_1, \mathbb{C}).$$

On note

$$\mathcal{B}_+^2(\zeta) = \mathcal{B}_+^2(\zeta, \varsigma)$$

si ς est le fibré trivial. On définit l'application

$$\theta : \mathcal{B}_+^2(\zeta) \rightarrow \mathcal{F}_+(\zeta^*), \theta\left(\left\{L^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) = \left(\left\{l^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}\right),$$

où

$$l^{(n)}(x)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = L^{(n)}(x)(v_1, \dots, v_n) \text{ si } L^{(n)}(z, x) = \left(z, L^{(n)}(x)\right), n \geq 1$$

et

$$l^{(0)}(x) = z.$$

Pour $n \geq 1$, l'application $l^{(n)}(x) \in (\otimes^n E_x(\zeta))^*$ s'identifie à $\otimes^n E_x(\zeta)^*$ par l'isomorphisme canonique

$$\otimes^n E_x(\zeta)^* \rightarrow (\otimes^n E_x(\zeta))^*$$

$$\alpha_1(x) \otimes \cdots \otimes \alpha_n(x)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \prod_{j=1}^n \alpha_j(x)(v_j), v_j \in E_x(\zeta),$$

puisque la dimension du fibré ζ est finie et l'égalité

$$\otimes^n E_x(\zeta)^* = \otimes^n E_x(\zeta^*)$$

permet d'identifier $l^{(n)}(x)$ à un élément de $\otimes^n E_x(\zeta^*)$. L'application n -linéaire $L^{(n)}(x) \in \text{Sym } \mathcal{L}_n(E_x(\zeta), \mathbb{C})$ si et seulement si $l^{(n)} \in \text{Sym } \otimes^n E_x(\zeta^*)$. On peut procéder de façon identique pour $\mathcal{B}_-^2(\zeta)$, $\mathcal{F}_-(\zeta^*)$ et $\mathcal{B}^2(\zeta)$, $\mathcal{F}(\zeta^*)$.

Theorem 2. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_+^2(\zeta) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{F}_+(\zeta^*) \\ \downarrow \pi_{\mathcal{B}_+^2(\zeta)} & & \downarrow \pi_{\mathcal{F}_+(\zeta^*)} \\ \Omega \times \mathbb{C} & \xrightarrow{pr_1} & \Omega \end{array}$$

est commutatif et (θ, pr_1) est un isomorphisme de fibrés.

Proof. La preuve est une conséquence directe des définitions précédentes. $\square$

Une quantification de Bose d'une onde ϕ de l'univers Ω le long d'un fibré d'état ζ , de dimension finie, est un morphisme Φ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_+(\zeta^*) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B}_+^2(\zeta) \\ \downarrow \pi_{\mathcal{F}_+(\zeta^*)} & & \downarrow \pi_{\mathcal{B}_+^2(\zeta)} \\ \Omega & \xrightarrow{1_\Omega \times \phi} & \Omega \times \mathbb{C} \end{array} .$$

Proposition 1. *Une quantification de Bose d'une onde ϕ sur Ω , le long d'un fibré d'état ζ , de dimension finie, s'identifie à un élément de*

$$\text{Hom}(\mathcal{F}_+(\zeta^*)).$$

Proof. Φ s'identifie à $\theta \circ \Phi \in \text{Hom}(\mathcal{F}_+(\zeta^*)$. $\square$

Remark 5. *L'application θ s'étend à*

$$\theta : \mathcal{B}_-^2(\zeta) \rightarrow \mathcal{F}_-(\zeta^*)$$

et à

$$\theta : \mathcal{B}^2(\zeta) \rightarrow \mathcal{F}(\zeta^*),$$

les quantifications induites pour une onde, sont les quantifications de Fermi et de Fock.

4. L'ESPACE DES JETS

A chaque C^∞ -application

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

on associe une série formelle

$$f(y) = f(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} D_x^p f(y^p)$$

où

$$y^p = (y, \dots, y) \in (\mathbb{R}^n)^p, \quad x \text{ et } y \in \mathbb{R}^n$$

et

$$D_x^p f \in \text{Sym } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Si on note

$$f = (f^1, \dots, f^m),$$

alors

$$D_x^p f = (D_x^p f^1, \dots, D_x^p f^m),$$

avec $D_x^p f^j \in \text{Sym } \mathcal{L}(T_x \mathbb{R}^n \times \cdots \times T_x \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

On définit la relation d'équivalence

$$f \underset{k}{\overset{x}{\sim}} g \iff f(x) = g(x) \text{ et } D_x^p f = D_x^p g, 1 \leq p \leq k,$$

la classe d'équivalence en x de f est le k -jet d'ordre k de f en x de source $x = s(\mathcal{J})$ et de but $f(x) = b(\mathcal{J})$, elle est notée

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_x^k(f).$$

Soit

$$J^k(\mathbb{R}^n, x, \mathbb{R}^m, y) = \{\mathcal{J} : \mathcal{J} \text{ est un } k\text{-jet: } s(\mathcal{J}) = x \text{ et } b(\mathcal{J}) = y\},$$

on pose

$$J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m} J^k(\mathbb{R}^n, x, \mathbb{R}^m, y).$$

Proposition 2. $\zeta^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = (J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), s \times b, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, Q^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ est un fibré trivial, de fibre

$$Q^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \bigoplus_{p=1}^{p=k} \text{Sym } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \bigoplus_{p=1}^{p=k} \mathbb{R}^{\binom{n+p-1}{p}},$$

le produit $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ est d'ordre p .

On peut généraliser cette proposition aux variétés, notées X et Y de dimensions respectives n et m .

Définition 2. Soit $f, g : W \subset X \rightarrow Y$ deux C^∞ -applications définies sur un ouvert W de X , on définit la relation d'équivalence suivante

$$f \underset{k}{\overset{x}{\sim}} g \iff \mathcal{J}_{\varphi(x)}^k(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \mathcal{J}_{\varphi(x)}^k(\psi \circ g \circ \varphi^{-1}), \quad (4.1)$$

cette définition est indépendante du choix des cartes φ et ψ en x et y . La classe d'équivalence de f en x est notée $\mathcal{J}_x^k(f)$.

Notation 1. 1) $J^k(X, x, Y, y) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_x^k(f), f : W \subset X \rightarrow Y, \\ f \text{ est } C^\infty, x \in W \end{array} \right\},$

2) $J^k(A, B) = \bigcup_{x \in A, y \in B} J^k(X, x, Y, y).$

3) $J_x^k(X, Y) = \bigcup_{y \in Y} J^k(X, x, Y, y)$ est une sous variété de $J^k(X, Y)$ et pour toute C^∞ -application

$$f : X \rightarrow Y,$$

le flot de f est la C^∞ -application

$$\mathcal{S}(f) : X \rightarrow J^k(X, Y), \mathcal{S}(f)(x) = \mathcal{J}_x^k(f).$$

On a le théorème central de la théorie des jets,

Theorem 3. Le 4-uplet $\zeta^k(X, Y)$ défini par

$$\xi^k(X, Y) = (J^k(X, Y), s \times b, X \times Y, Q^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

est un fibré dont les applications de transition appartiennent au groupe de structure

$$\text{GL}(\mathbb{R}^n) \times \text{GL}(\mathbb{R}^m).$$

Proof. La preuve est dans [4]. □

Remark 6. Ce n'est pas un fibré vectoriel pour $k \geq 2$. Pour $k = 1$, ce fibré est vectoriel.

Pour un C^∞ -fibré

$$\zeta = (E(\zeta), \pi, B(\zeta), F)$$

pas nécessairement vectoriel, on pose pour tout $x \in B(\zeta)$

$$\mathcal{P}_x^k(\zeta) = \{\mathcal{J}_x^k(\sigma) \in J^k(B(\zeta), x, E(\zeta), \sigma(x)), \sigma \in \Gamma^\infty(\zeta)\}$$

où σ est une section locale de ζ sur un ouvert W contenant x et

$$\mathcal{P}^k(\zeta) = \cup_{x \in B(\zeta)} \mathcal{P}_x^k(\zeta).$$

Theorem 4. *L'espace $\mathcal{P}^k(\zeta)$ des k -jets des sections de ζ est une C^∞ sous-variété de $J^k(B(\zeta), E(\zeta))$ et*

$$\varsigma^k = (\mathcal{P}^k(\zeta), s, B(\zeta)),$$

où s est l'application source, est un fibré qui est vectoriel si ζ est vectoriel.

Proof. La preuve est dans [4] et [2]. □

Remark 7. *Les applications de restriction*

$$\Gamma^{p,k} : \mathcal{P}^k(\zeta) \rightarrow \mathcal{P}^p(\zeta), \Gamma^{p,k}(\mathcal{J}^k(\sigma)) = \mathcal{J}^p(\sigma)$$

permettent de définir la limite projective

$$\mathcal{P}^\infty(\zeta) = \varprojlim_{\Gamma^{p,k}} \mathcal{P}^k(\zeta),$$

c'est encore un fibré vectoriel.

5. JETS DES MORPHISMES DE FIBRÉS DE BANACH

Dans ce qui suit

$$\zeta = (E(\zeta), \pi_\zeta, X)$$

et

$$\varsigma = (E(\varsigma), \pi_\varsigma, Y)$$

sont deux fibrés de Banach ou des fibrés des états sur X et Y , de fibre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Definition 3. *Un morphisme de fibré est la donnée d'une paire de C^∞ -applications (F, f) , pour les structures de Banach, telle que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{ccc} E(\zeta) & \xrightarrow{F} & E(\varsigma) \\ \downarrow \pi_\zeta & & \downarrow \pi_\varsigma \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

La restriction de F à $E_x(\zeta)$ est une C^∞ -application de l'espace de Banach $E_x(\zeta)$ à valeurs dans l'espace de Banach $E_{f(x)}(\varsigma)$. Cette application admet un développement en série entière en tout point $u \in E_x(\zeta)$, notée

$$F_x(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} D_u^k F_x(v^k), u \in E_x(\zeta) \text{ et } v \in E_x(\zeta),$$

où $D_u^k F_x$ est une application k -linéaire continue symétrique de $E_x(\zeta)^k$ à valeurs dans $E_{f(x)}(\varsigma)$. On définit la relation

$$(F, f) \underset{k}{\sim} (G, g) \iff f(x) = g(x) \text{ et } D_{o_x}^p F_x = D_{o_x}^p G_x \text{ et } p \leq k,$$

cette relation est relation d'équivalence. Cette relation est définie sur la section nulle, on peut généraliser cette notion à une section quelconque σ . On pose

$$(F, f) \underset{k, \sigma}{\overset{x}{\sim}} (G, g) \iff f(x) = g(x) \text{ et } D_{\sigma(x)}^p F_x = D_{\sigma(x)}^p G_x, p \leq k, \sigma \in \Gamma^\infty(\zeta)$$

cette relation est encore une relation d'équivalence.

Definition 4. La classe d'équivalence de (F, f) , le long de la section σ est le k -jet de la paire (F, f) en x le long de σ , on la note

$$\mathcal{J}^k = \mathcal{J}^k(F, f),$$

x est la source de $\mathcal{J}^k$, $s(\mathcal{J}^k) = x$ et $y = f(x)$ est le but de $\mathcal{J}^k$, $b(\mathcal{J}^k) = y$.

L'ensemble des k -jets le long de la section σ est noté

$$J_\sigma^k(\zeta, x, \varsigma, y) = \{\mathcal{J}^k : s(\mathcal{J}^k) = x \text{ et } b(\mathcal{J}^k) = y\}.$$

Theorem 5. $J_\sigma^k(\zeta, \varsigma) = (\cup_{(x,y) \in X \times Y} J_\sigma^k(\zeta, x, \varsigma, y), s \times b, X \times Y)$ est un fibré de Banach pour la norme

$$\|\mathcal{J}^k\|_{x,y} = \sum_{p=1}^k \|D_{\sigma(x)}^p F_x\|_{x,y}.$$

On a un procédé de quantification sur les jets au sens de Bose-Banach que l'on peut décrire de la façon suivante. Soit f une C^∞ -application de X dans Y , U une carte de X et V une carte de Y telles que

$$U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Si

$$\varphi(\mathbb{R}^n) = U \text{ et } \psi(\mathbb{R}^m) = V$$

sont des paramétrages des cartes, l'application

$$D_{\psi, \varphi, x}^k f : u \rightarrow D_{f(x)} \psi \left(D_{\varphi^{-1}(x)}^k (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) (D_x \varphi^{-1}(u), \dots, D_x \varphi^{-1}(u)) \right)$$

est une application k -linéaire symétrique de $T_x X \times \dots \times T_x X$ dans $T_{f(x)} Y$

$$D_{\psi, \varphi, x}^k f \in \text{Sym } \mathcal{L}(T_x X \times \dots \times T_x X, T_{f(x)} Y).$$

On se fixe un recouvrement localement fini de X par des cartes $\{\varphi_\alpha\}$ et une partition de l'unité $\{\mu_\alpha\}$ associée à ce recouvrement. De façon analogue, on se fixe un recouvrement fini de Y , noté $\{\psi_\beta\}$, et une partition de l'unité $\{\nu_\beta\}$ associée à ce recouvrement. On pose

$$D_{\psi, \varphi, x}^k f(u, \dots, u) = \sum_{\alpha, \beta} \mu_\alpha(x) \nu_\beta(f(x)) D_{\psi_\beta, \varphi_\alpha, x}^k f(u, \dots, u),$$

l'application

$$\theta_k(\mathcal{J}_x^k(f)) = \left\{ L_x^{(n)} \right\}_{n=1}^\infty,$$

où

$$L_x^{(n)} = D_{\psi, \varphi, x}^n f \text{ si } 1 \leq n \leq k, L_x^{(n)} = o_x^{(n)} \text{ si } n > k$$

est un morphisme de fibré

$$\theta_k : \zeta^k(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}_+^p(TX, TY)$$

pour tout $p \geq 1$ et la limite inductive des $\zeta^k(X, Y)$ s'identifie à un sous-fibré de $\mathcal{B}_+^p(TX, TY)$. On dit que les jets sont quantifiables dans le sens de Fock-Banach.

Theorem 6. *Si*

$$\zeta(X, Y) = \lim_{\vec{\mathcal{A}_{p,k}}} \zeta^k(X, Y)$$

alors $\zeta(X, Y)$ est dense dans $\mathcal{B}_+^p(TX, TY)$ pour tout $p \geq 1$.

Les applications $\mathcal{A}_{p,k}$ sont les applications annulations définies par

$$\mathcal{A}_{p,k,x} \left(\left\{ L_x^{(n)} : n \leq k \right\} \right) = \left\{ l_x^{(n)} : n \leq p \right\},$$

$$l_x^{(n)} = L_x^{(n)} \text{ si } n \leq k \text{ et } l_x^{(n)} = o_x^{(n)} \text{ si } k < n \leq p,$$

$o_x^{(n)}$ est l'application n -linéaire de $T_x(X)$ dans $T_{f(x)}(Y)$ identiquement nulle. Le graphe d'une C^∞ -application f admet une p -quantification dans le fibré de Fock-Banach, si la suite de sections $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$ donnée par

$$\sigma_n(x) = D_{\psi,\varphi,x}^n f$$

vérifie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|D_{\psi,\varphi,x}^n f\|_{x,f(x)}^p < +\infty,$$

lorsque l'on munit les variétés X et Y de métriques riemanniennes.

6. QUANTIFICATION DES SECTIONS D'UN FIBRÉ

Dans ce chapitre, on propose une quantification des sections d'un fibré de Banach ou un fibré des états. Soit $\Gamma(\zeta)$ l'ensemble des sections d'un fibré de Banach sur une variété orientée X . Sur X , on se fixe une mesure Lebesguienne λ et on pose pour $s \in \Gamma(\zeta)$

$$\|s\|_p = \sqrt[p]{\int_X \|s(x)\|_x^p d\lambda(x)}.$$

Les espaces $L^p(\zeta, \lambda)$ sont les sous-espaces de $\Gamma(\zeta)$ définis par

$$L^p(\zeta, \lambda) = \left\{ s \in \Gamma(\zeta) : \|s\|_p < +\infty \right\},$$

si ζ est un fibré hilbertien, on définit le produit hermitien de deux sections par

$$\langle s | t \rangle = \int_X \langle s(x) | t(x) \rangle_x d\lambda(x),$$

et $L^2(\zeta, \lambda)$ est le sous-espace de $\Gamma(\zeta)$ défini par

$$L^2(\zeta, \lambda) = \{s \in \Gamma(\zeta) : \|s\|_2 < +\infty\}$$

où

$$\|s\|_2 = \sqrt{\langle s | s \rangle}.$$

Theorem 7. $L^p(\zeta, \lambda)$ est un espace de Banach et $L^2(\zeta, \lambda)$ est un espace de Hilbert.

Definition 5. *L'espace de Hilbert*

$$\mathcal{H} = L^2(\zeta, \lambda)$$

est l'espace de quantification des λ -sections de ζ .

Soit $\mathcal{O}$ une observable de $\mathcal{H}$ et $\{\sigma_n\}$ une base de sections propres de $\mathcal{O}$. On note μ^n la fonction propre associée à σ_n . On peut écrire

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sigma_n = \alpha^n \sigma_n,$$

où α^n sont des fonctions de

$$\alpha^n : X \rightarrow \mathbb{C}.$$

La section altérée par l'observable $\mathcal{O}$ est la section image

$$\mathcal{O}(\sigma) = \alpha^n \mu^n \sigma_n,$$

on a déformé la section initiale σ en $\mathcal{O}(\sigma)$.

Definition 6. Une λ -quantification de σ est la donnée d'une base hilbertienne $\{\sigma_n\}$ de

$$\mathcal{H} = L^2(\zeta, \lambda),$$

et d'une suite de fonctions d'ondes

$$\phi^n \in C^\infty(X, \mathbb{C})$$

telle que, en utilisant la convention d'Einstein aux sommes infinies,

$$\sigma = \phi^n \sigma_n.$$

Le fibré des $(2, 0)$ -tenseurs symétriques et inversibles, c'est-à-dire, le fibré de l'univers Ω formé des pseudo-métriques de Ω est muni du produit scalaire naturel suivant, si

$$\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_2, X_3\}$$

est une base locale sur une carte U du fibré tangent de Ω et (g_{ij}) et (h_{ij}) sont les matrices des pseudo-métriques g et h , on définit le produit scalaire

$$(g, h)_\omega = \text{Trace}(g_{ij}(\omega) h_{ij}(\omega)), \omega \in U.$$

Cette définition ne dépend pas de la base choisie $\mathcal{X}$. On complexifie le fibré des pseudo-métriques et le produit scalaire

$$\langle g + ik, h + il \rangle_\omega = (g, h)_\omega + i(k, h)_\omega - i(g, l)_\omega + (k, l)_\omega,$$

on obtient le fibré hilbertien associé aux pseudo-métriques complexifiées sur Ω , noté $\mathcal{M}$ [4]. On se fixe une mesure lebesguienne λ sur Ω et on pose

$$\mathcal{H}_\lambda = L^2(\mathcal{M}, \lambda).$$

On peut énoncer le principe de quantification des pseudo-métriques.

"Une quantification d'une pseudo-métrique g est une suite $\{\phi_n\}$ d'ondes de l'univers Ω telle que

$$g = \phi_n g^{(n)},$$

où $\{g^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de pseudo-métriques complexes propres d'une observable $\mathcal{O}$ de l'espace de hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ et λ est une mesure Lebesguienne sur Ω "

Remark 8. Cette mesure de Lebesgue λ peut être définie comme la forme volume induite par une pseudo-métrique h fixée, on dit que l'on a quantifié g par rapport à h .

L'espace $\mathcal{H}_\lambda$ est un espace de Hilbert séparable.

Si on veut décrire une métrique, on va créer une observable qui va quantifier la pseudo-métrique g par le premier procédé de quantification. La mesure Lebesguienne peut être définie par la pseudo-métrique g étudiée. On peut construire les opérateurs de quantification définis par l'observable $\mathcal{O}$ de $\mathcal{H}_\lambda$ pour une mesure de Lebesgue λ ,

$$\Phi_{\mathcal{O},\lambda,+} : \mathcal{H}_\lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{F}_+(\mathcal{H}_\lambda), \quad \Phi_{\mathcal{O},\lambda,+}(g, z) = \left\{ z, \left\{ \phi_n \mathcal{S}_n \left(g^{(1)} \otimes \cdots \otimes g^{(n)} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} \right\},$$

$$\Phi_{\mathcal{O},\lambda,-} : \mathcal{H}_\lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{F}_-(\mathcal{H}_\lambda), \quad \Phi_{\mathcal{O},\lambda,-}(g, z) = \left\{ z, \left\{ \phi_n \mathcal{A}_n \left(g^{(1)} \otimes \cdots \otimes g^{(n)} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} \right\}$$

$$\text{et } \Phi_{\mathcal{O},\lambda} : \mathcal{H}_\lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}_\lambda), \quad \Phi_{\mathcal{O},\lambda}(g, z) = \Phi_{\mathcal{O},\lambda,+}(g, z) \otimes \Phi_{\mathcal{O},\lambda,-}(g, z).$$

Proposition 3. $\|\Phi_{\mathcal{O},\lambda,\pm}(g, z)\|^2 \leq |z|^2 + \|g\|_{\mathcal{H}_\lambda}^2$, $\Phi_{\mathcal{O},\lambda,\pm}$ et $\Phi_{\mathcal{O},\lambda}$ sont continus pour les normes hilbertiennes.

On peut généraliser le procédé de quantification d'une observable $\mathcal{O}$ d'un espace de hilbert $\mathcal{H}$. Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de vecteurs propres de $\mathcal{O}$. Une telle base existe si $\mathcal{H}$ est séparable. Tout élément $e \in \mathcal{H}$ a une décomposition unique

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} z_n e_n, \quad z_n \in \mathbb{C},$$

l'opérateur de Bose associé à $\mathcal{O}$ est défini par

$$\Phi_{\mathcal{O},+}(e, z) = \left\{ z, \left\{ z_n \mathcal{S}_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} \right\},$$

c'est un plongement hilbertien de $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$ dans $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$. Les opérateurs de Fermi et de Fock sont définis de façon similaire.

Proposition 4. Ces opérateurs sont des plongements isométriques.

7. CONCLUSION

On a décrit plusieurs procédés de quantification, dans ces descriptions intervient la notion de fibré de Fock-Banach. Si on s'intéresse à la série formelle définie par une C^∞ -application, on définit une quantification dans le sens de Fock-Banach sur les fibrés tangents des variétés munies de métriques riemanniennes. Développer en série un opérateur revient à le quantifier par un procédé similaire à la quantification de Fock-Banach.

La quantification sur les sections d'un fibré hilbertien diffère des procédés de quantification précédents. Dans ce procédé de quantification, il est nécessaire de faire intervenir une observable de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ pour quantifier une pseudo-métrique.

On rappelle que dans [3], on a procédé à des quantifications sur les opérateurs attachés aux fibrés hilbertiens. Les procédés développer dans ce document, permettent de présenter d'autres types de quantifications mathématiques des pseudo-métriques de l'univers Ω .

REFERENCES

- [1] N. Bourbaki, Algèbre multilinéaire, Act. Sc. Ind. 1044, Paris, (Hermann).
- [2] M. Gromov, Partial Differential Relations. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [3] Jonot J.L. "Quantification des fibrés des états" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01114487 (2015)

- [4] Jonot J.L. "Structures complexes et presque réelles en physique, une application à la complexification des dimensions" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01137579/document (2014-2015)
- [4] Spring D., Poénaru V. "Questions de géométrie et théorie de Gromov" Cours DEA, Orsay (2004-2005)

E-mail address: `jean-louis.jonot@ac-versailles.fr`